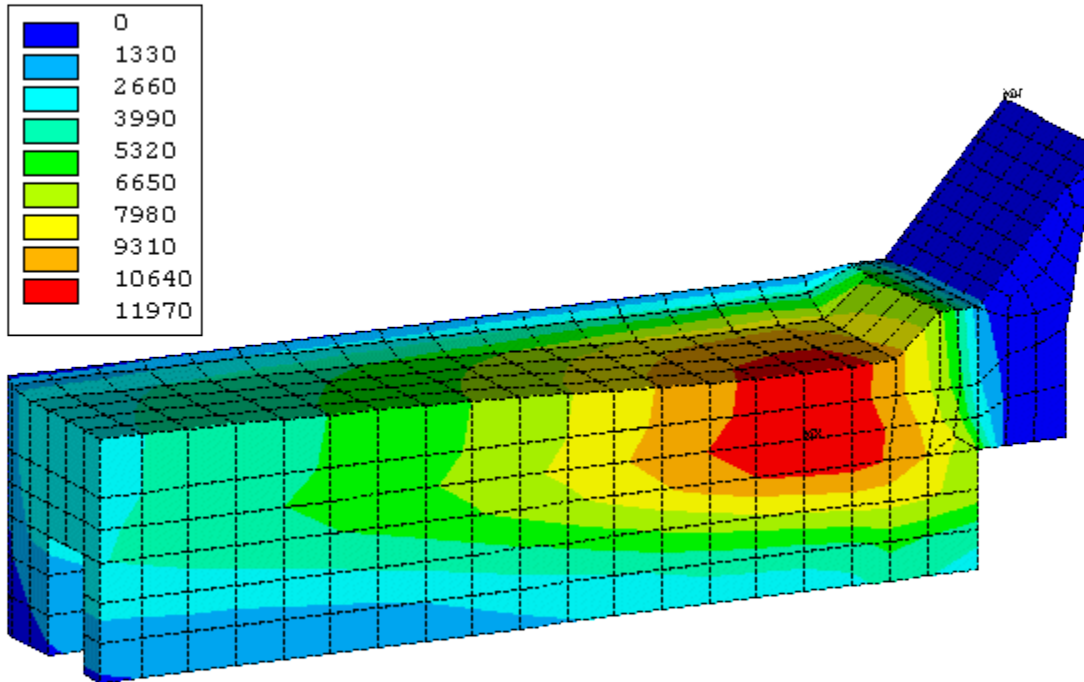




Mecânica dos Sólidos II

Prof. Dr. Alverlando Ricardo

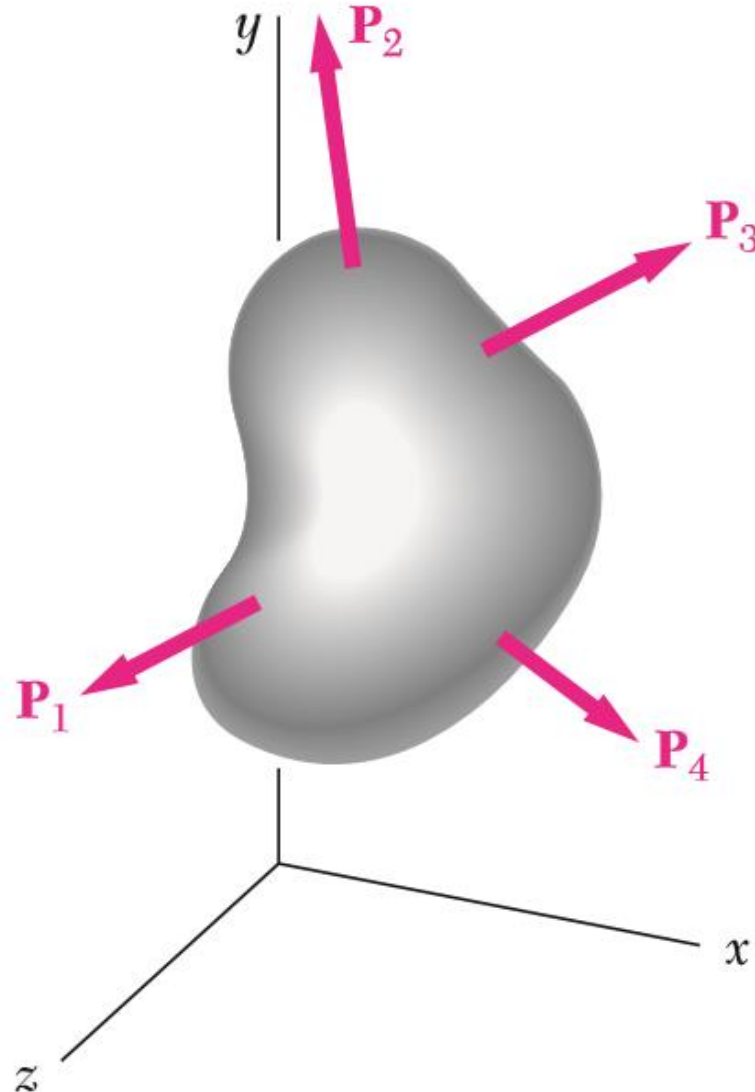
Aula 7: PARTE II: **Tensão & Deformação**

Transformação de tensões e deformações

Da AULA 2

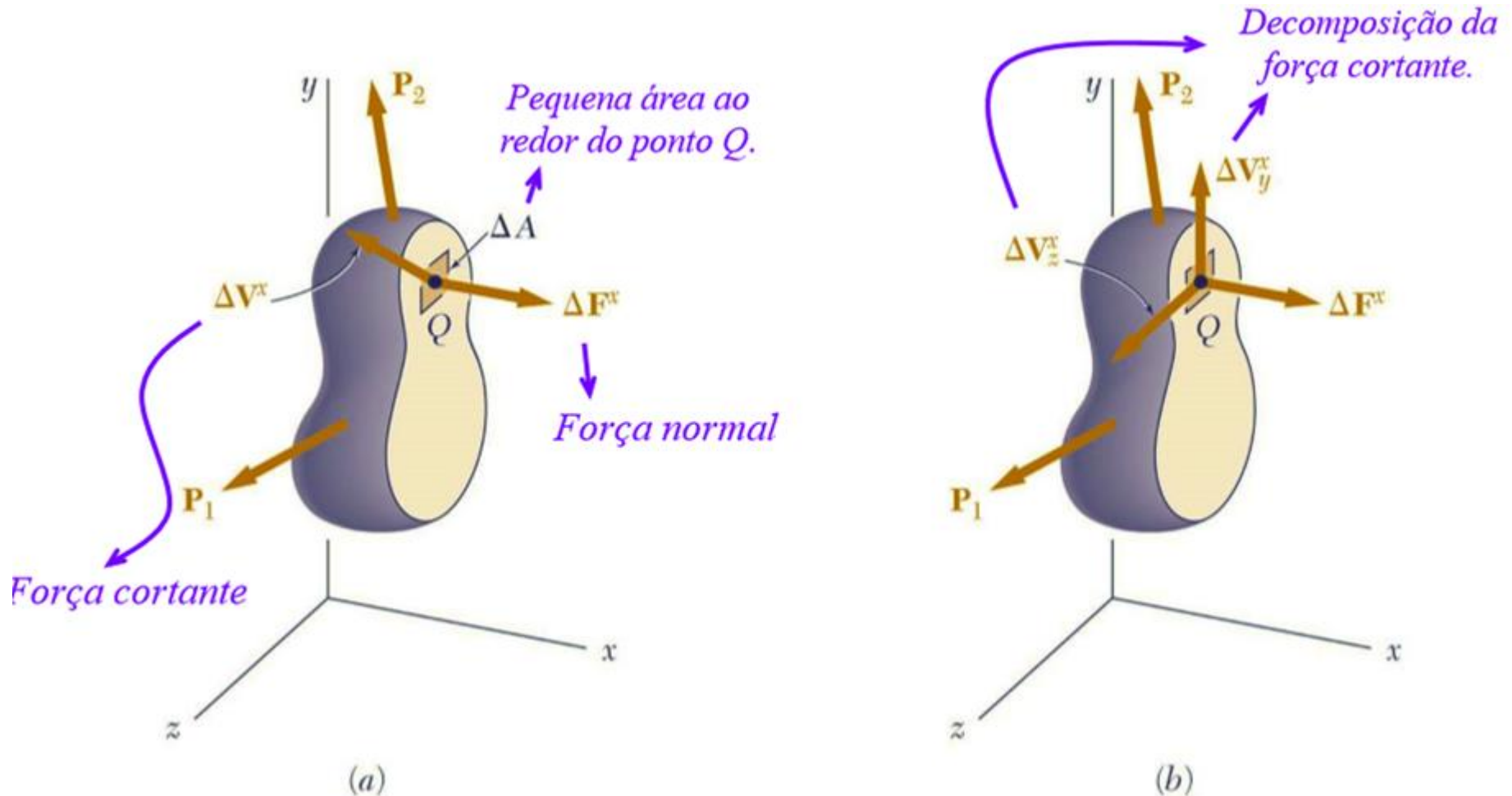
Tensão sob condições gerais de carregamento

- Considere um corpo sujeito a várias cargas:



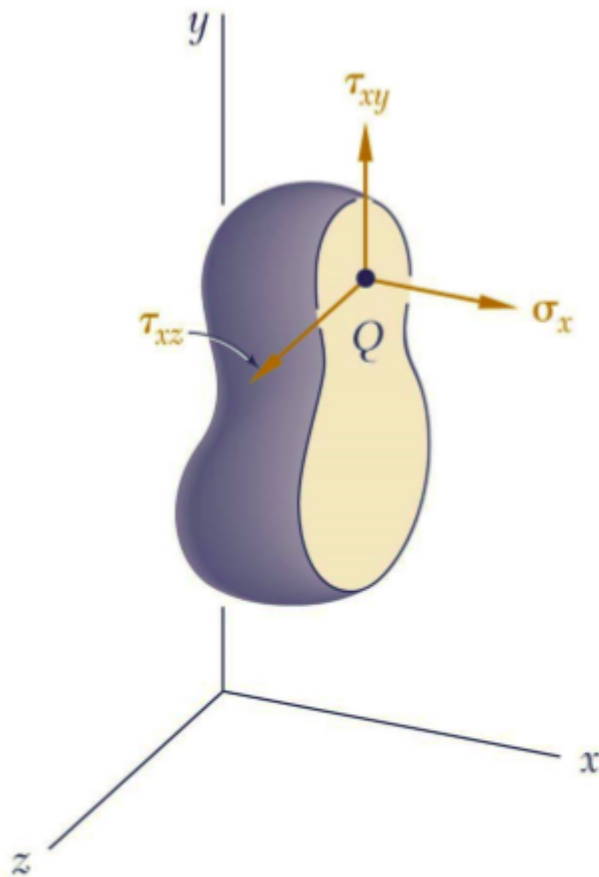
Tensão sob condições gerais de carregamento

- Estamos interessados nas tensões em um ponto Q , portanto, efetuamos um corte através de Q :



Tensão sob condições gerais de carregamento

- Dividindo a intensidade de cada força pela área ΔA e fazendo esta área tender a zero, definimos as seguintes componentes de tensão:



$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A} \quad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A} \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A}$$

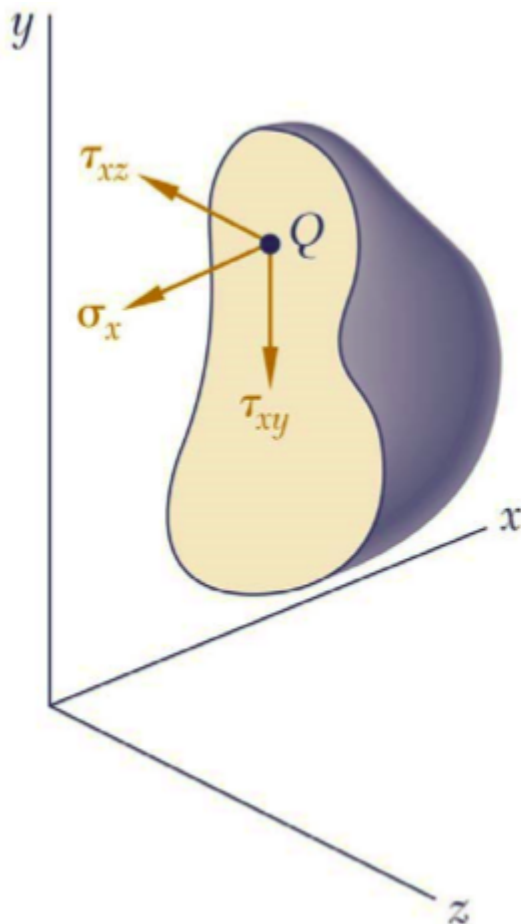
O primeiro índice, x, é utilizado para indicar que as tensões em consideração são aplicadas em uma superfície perpendicular ao eixo x.

- Convenção de sinais:

Estas componentes de tensão são positivas se os sentidos dos vetores correspondentes apontarem nas direções positivas dos respectivos eixos.

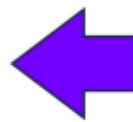
Tensão sob condições gerais de carregamento

- Analisando a parte do corpo localizada à direita do plano vertical através de Q , obtemos três componentes de tensão de mesmas intensidades mas sentidos opostos às encontradas anteriormente:



- Convenção de sinais:

Como a seção está voltada para o lado negativo do eixo x , a convenção de sinais é invertida.

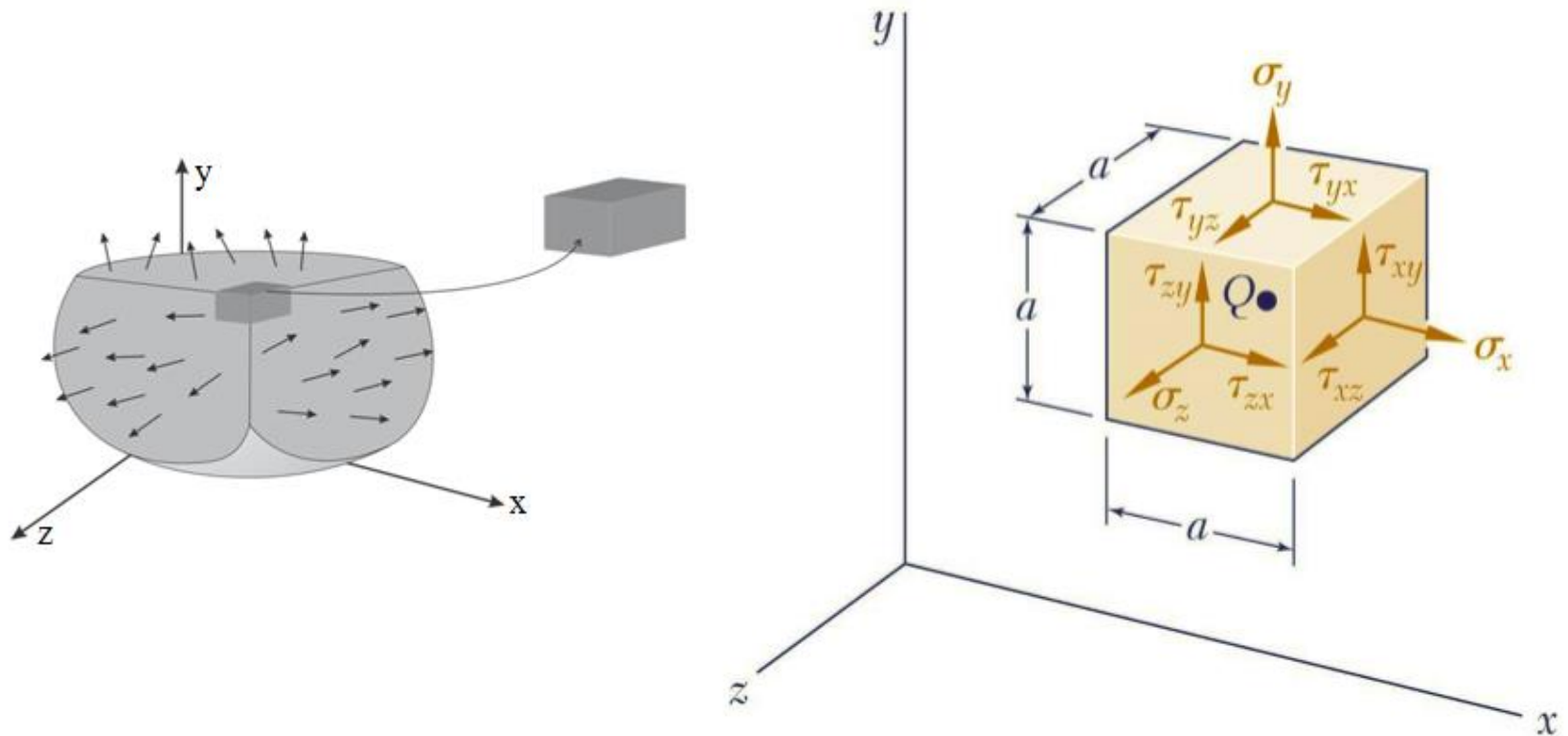


Todas as componentes de tensão representadas ao lado são positivas!

*Até agora, definimos **três componentes de tensão** associadas ao ponto Q !*

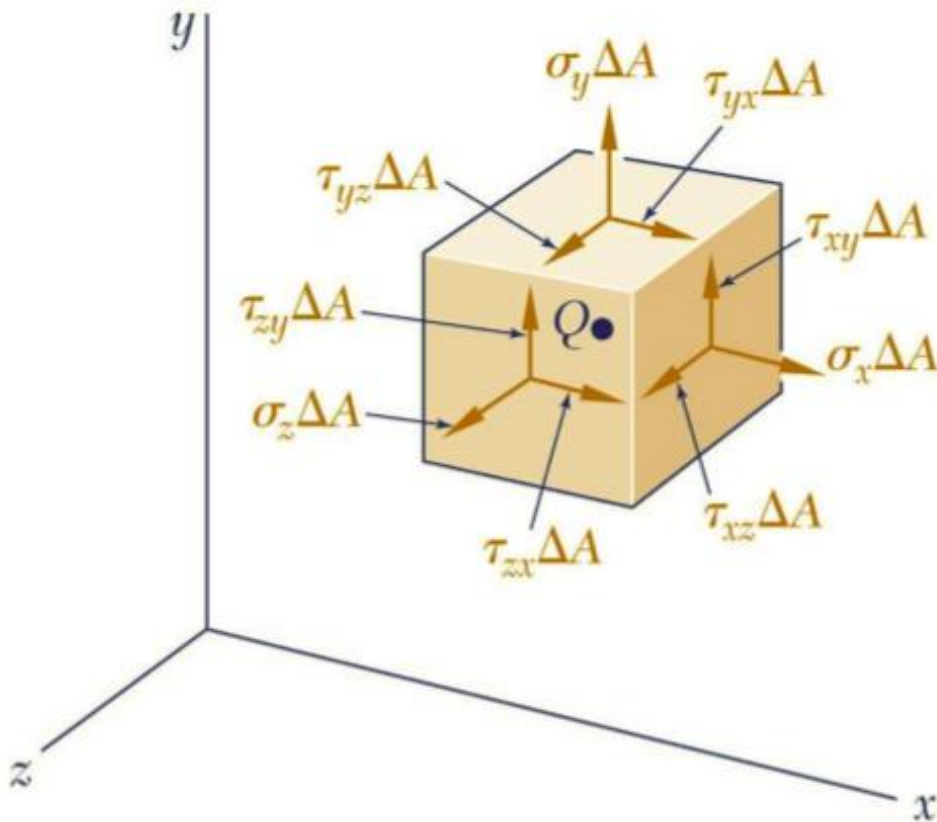
Tensão sob condições gerais de carregamento

- Passando cortes através de Q paralelos aos planos zx e xy , definimos as componentes de tensão: σ_y , τ_{yz} , τ_{yx} , e σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} , respectivamente;
- Para facilitar a visualização do estado de tensão no ponto Q , consideramos um cubo infinitesimal centrado em Q (tende a zero):



Tensão sob condições gerais de carregamento

- A combinação das forças devido às tensões deve satisfazer às condições de equilíbrio:

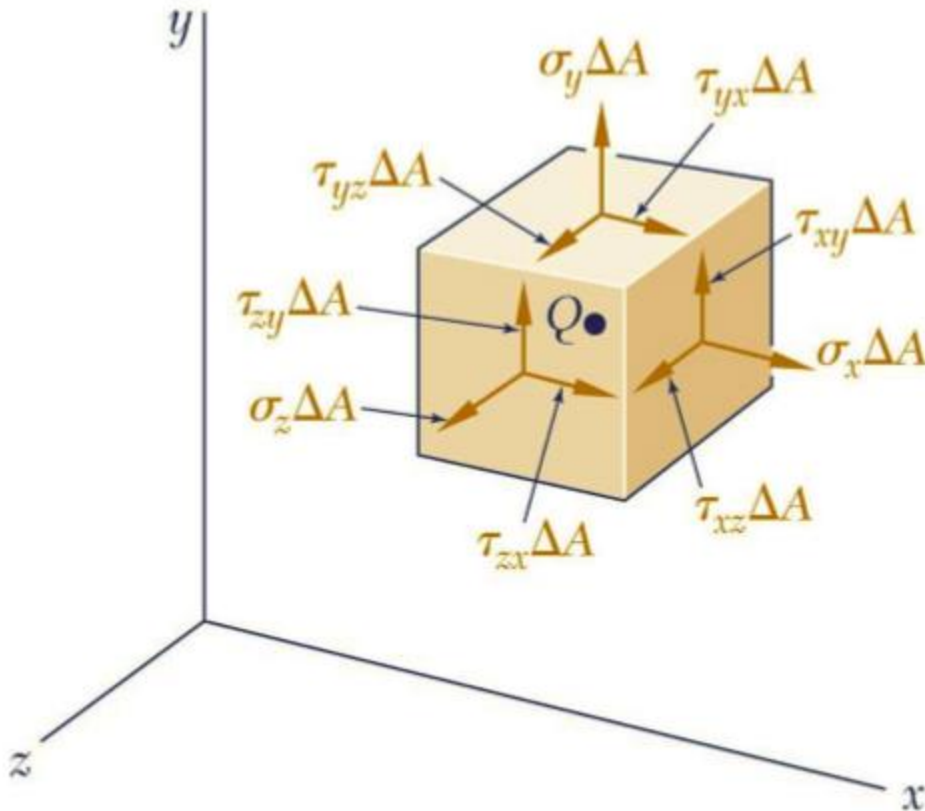


$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$$

(Automaticamente satisfeitas, pois há forças iguais e opostas na direção de cada eixo)

Tensão sob condições gerais de carregamento

- A combinação das forças devido às tensões deve satisfazer às condições de equilíbrio:



$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$$

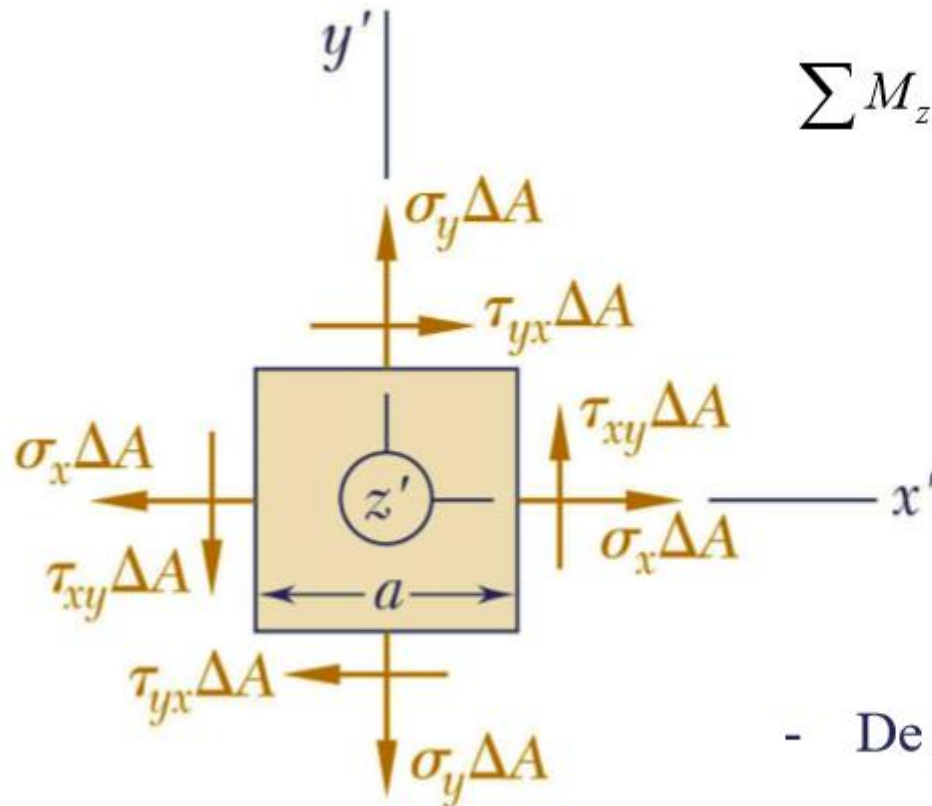
(Automaticamente satisfeitas, pois há forças iguais e opostas na direção de cada eixo)

$$\sum M_{x'} = \sum M_{y'} = \sum M_{z'} = 0$$

(Momentos das forças em relação aos eixos Qx' , Qy' e Qz')

Tensão sob condições gerais de carregamento

- Considerando a projeção no plano $x'y'$:



$$\sum M_z = 0: \quad (\tau_{xy} \Delta A) a - (\tau_{yx} \Delta A) a = 0$$



$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

- De maneira semelhante, obtemos:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

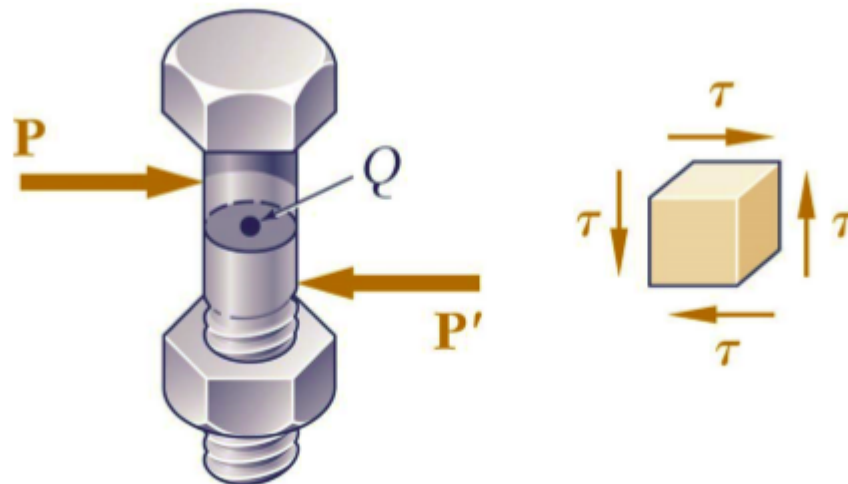
Tensão sob condições gerais de carregamento

➤ Conclusões:

- I. São necessárias somente seis componentes de tensão para definir o **estado de tensão** em um determinado ponto;

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{Tensor de tensões})$$

- II. Em um dado ponto, o cisalhamento não pode ocorrer apenas em um plano.



Transformação de tensões e deformações

- O estado mais geral de tensão em um ponto Q pode ser representado por seis componentes, muitas vezes agrupadas em um tensor de tensões:

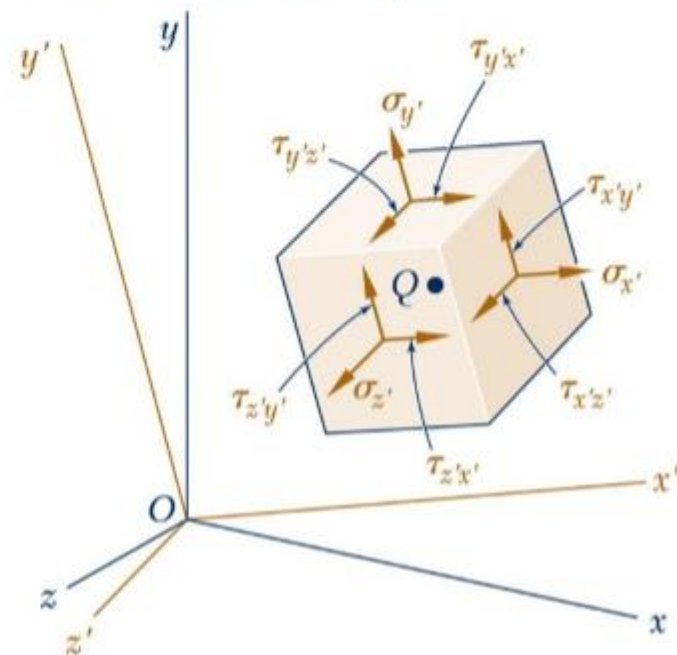
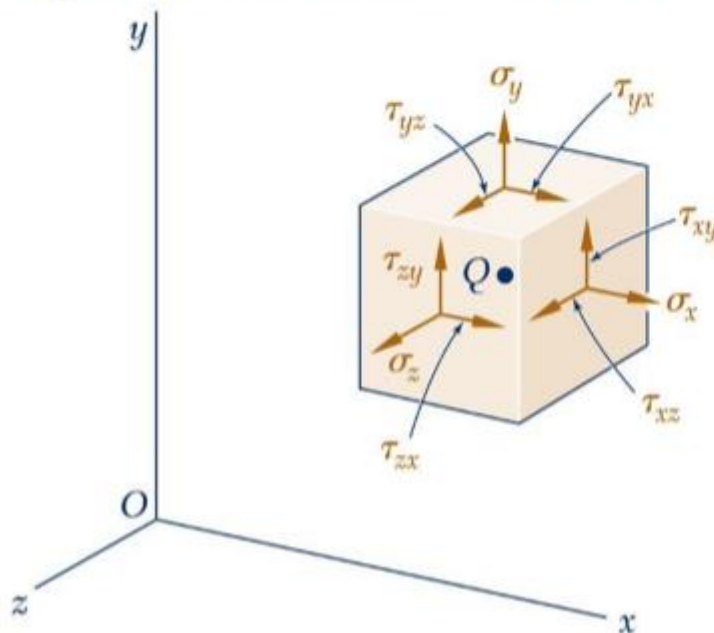
$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$



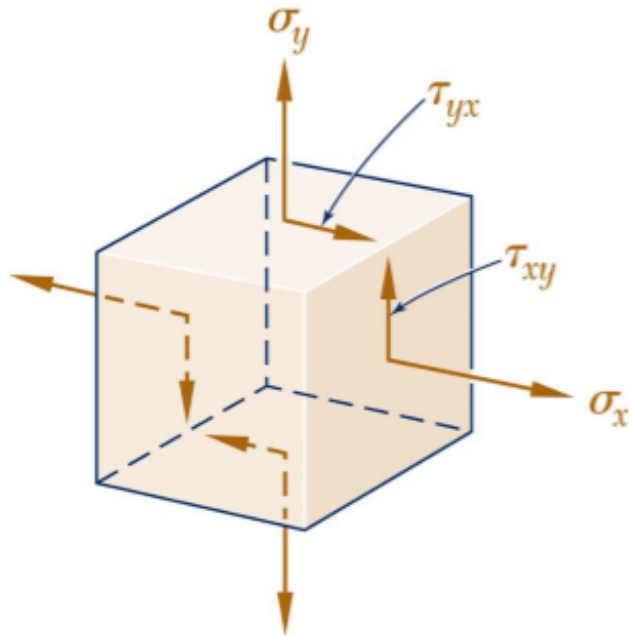
O tensor de tensões é simétrico!

- O mesmo estado de tensão poderá ser representado por diferentes componentes, se os eixos coordenados sofrerem uma rotação.



Transformação de tensões e deformações

- Estudaremos, principalmente a transformação de tensões para o denominado **estado plano de tensão**, no qual duas das faces do elemento de volume estão livres de quaisquer tensões:



$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

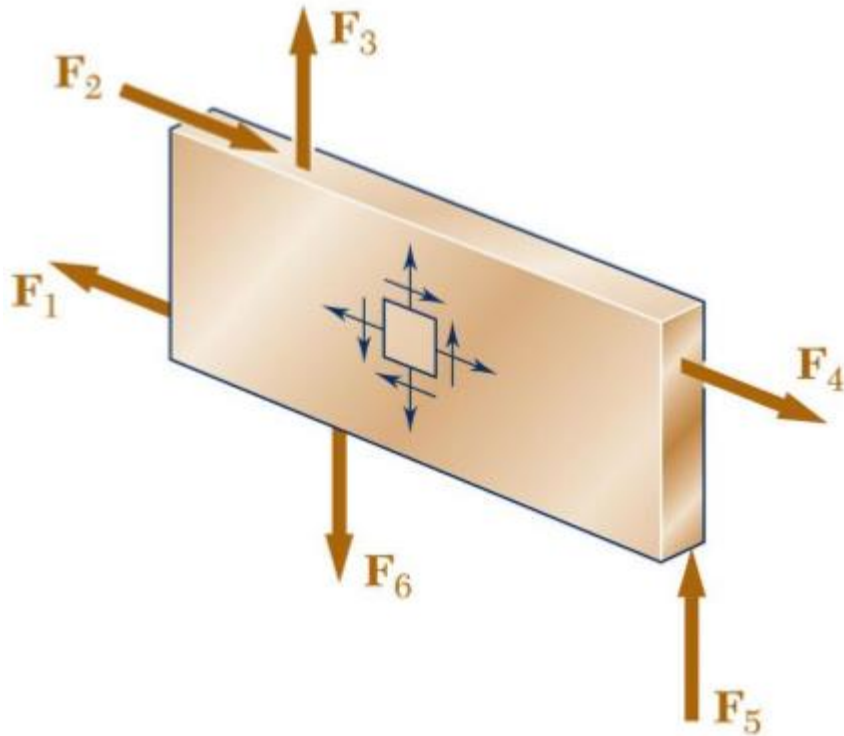
Quando três componentes de tensão pertencem ao mesmo plano e são suficientes para caracterizar o estado de tensão num ponto, configura-se um estado duplo ou plano de tensão!

O estado duplo NÃO é um caso particular do estado triplo, mas uma simplificação que permite desenvolver o estudo das tensões num espaço bidimensional.

Estado plano de tensão

Estado plano de tensão

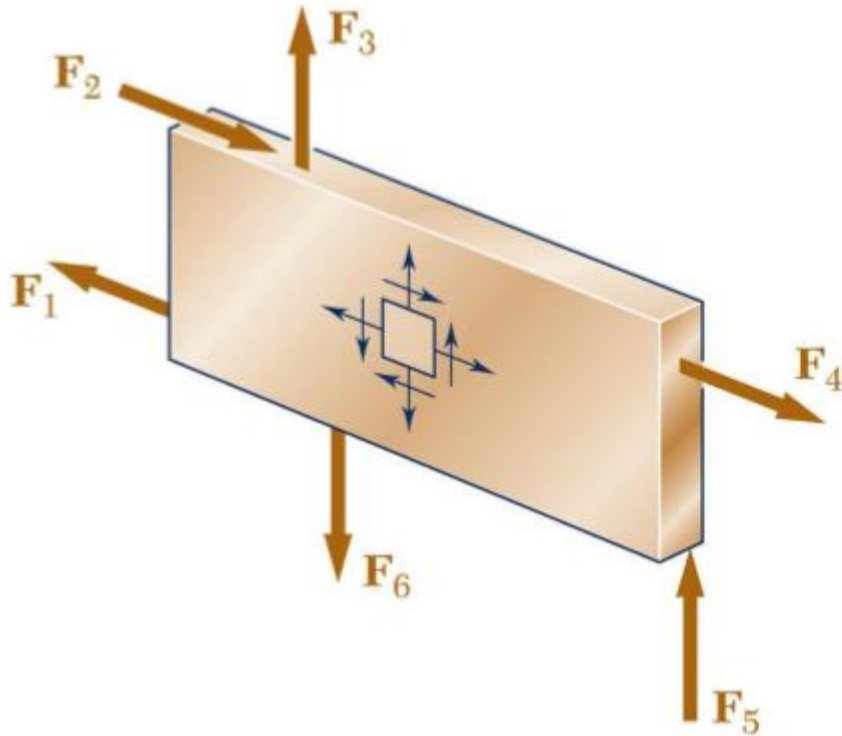
- Algumas situações onde podemos assumir estado plano de tensões:



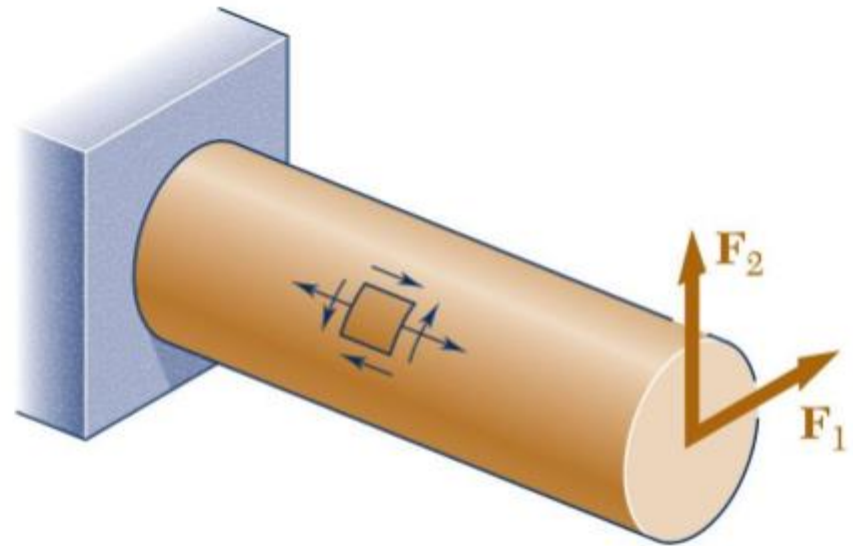
Placa fina sujeita a forças que atuam no plano médio da espessura da placa

Estado plano de tensão

- Algumas situações onde podemos assumir estado plano de tensões:



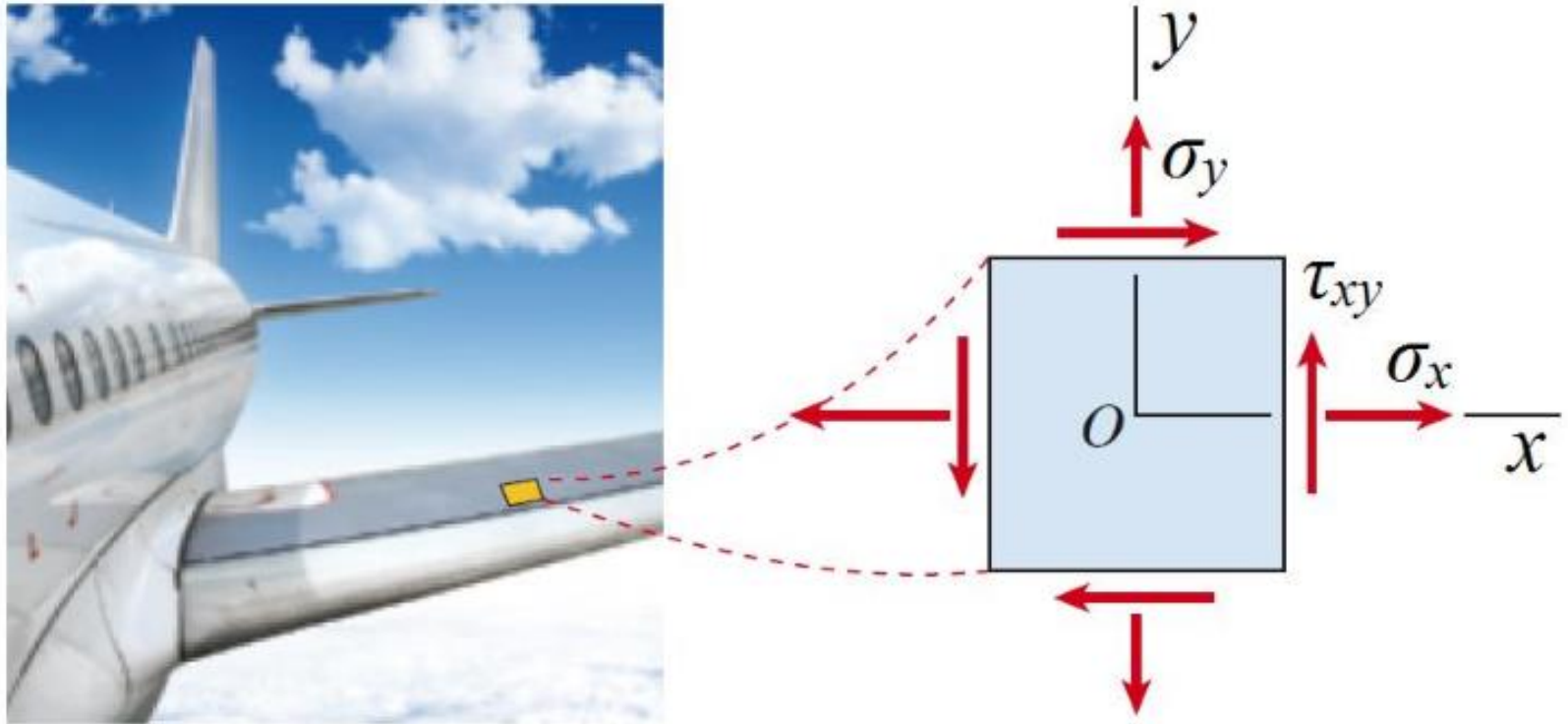
Placa fina sujeita a forças que atuam no plano médio da espessura da placa



Superfície livre de forças externas de um elemento estrutural.

Estado plano de tensão

- Algumas situações onde podemos assumir estado plano de tensões:

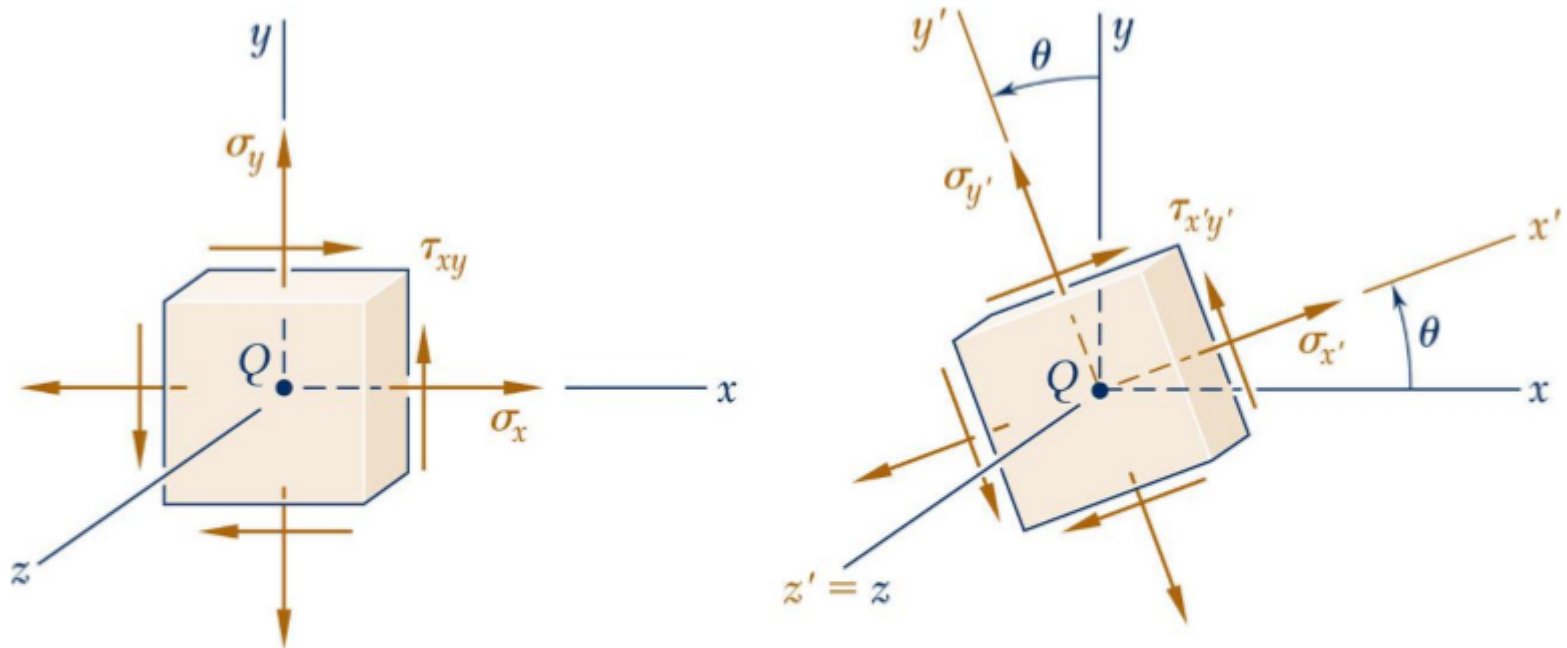


Superfície “livre” de forças externas de um elemento estrutural.

Transformação do estado plano de tensão

Transformação do estado plano de tensão

- Consideremos que existe um estado plano de tensão para o ponto Q :



- Queremos determinar as componentes de tensão $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$, associadas a um sistema de coordenadas rotacionado de um ângulo θ em torno do eixo z . Isto é, **expressar essas componentes em função de σ_x , σ_y , τ_{xy} e θ .**

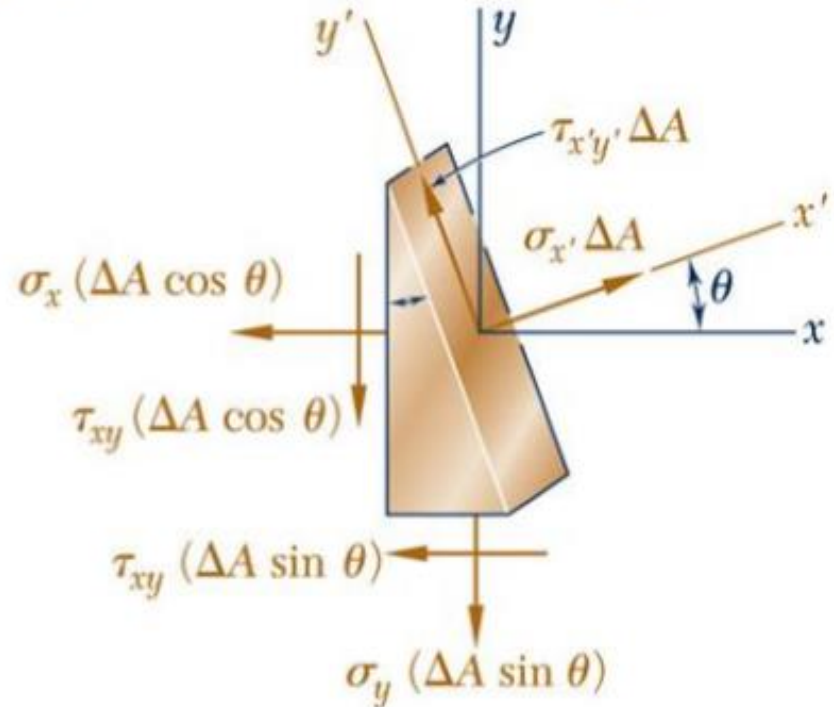
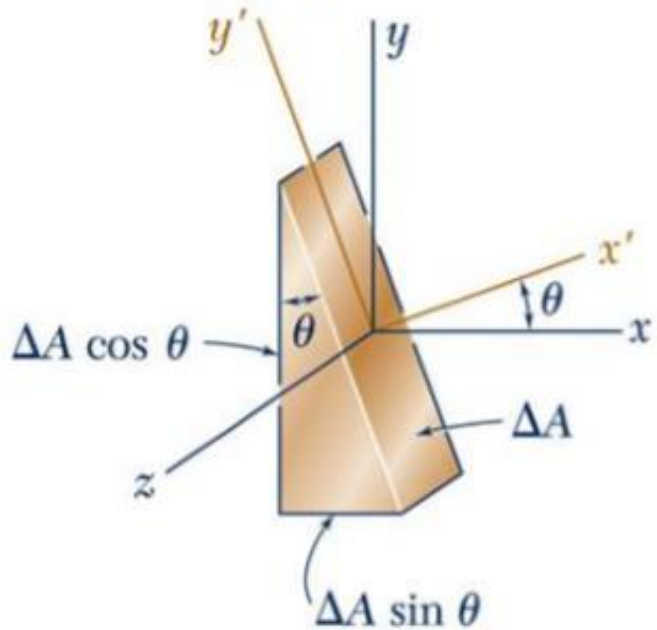
Conhecendo:
 σ_x , σ_y , τ_{xy} e θ .



Queremos determinar:
 $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$.

Transformação do estado plano de tensão

- Com esse objetivo, verificaremos as condições de equilíbrio (**em forças**) de um elemento prismático com faces perpendiculares aos eixos x , y e x' :

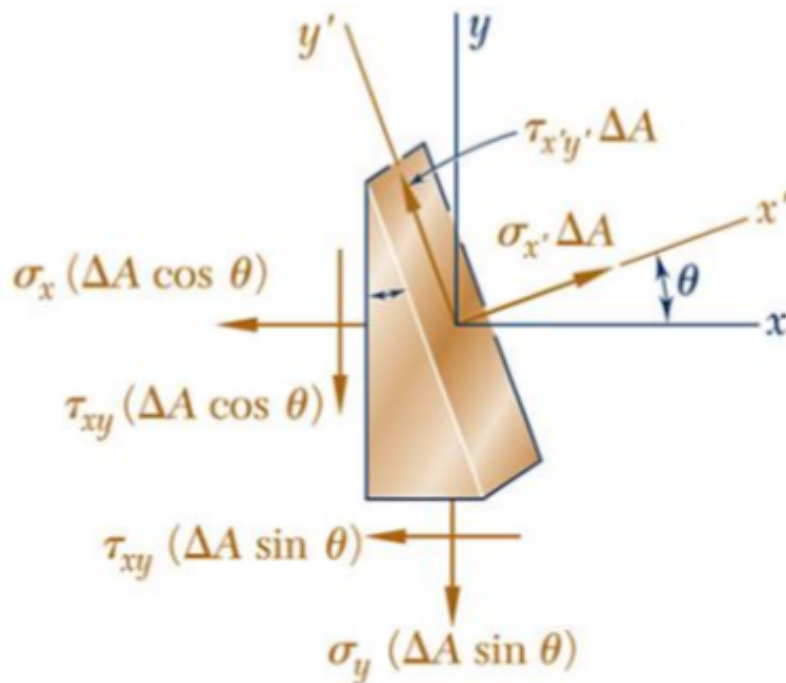


Transformação do estado plano de tensão

- Estratégia I (dois passos):

1) Análise do equilíbrio segundo os eixos x e y :

- Determinando valores parciais, σ_x^* e σ_y^* , no plano inclinado, segundo os eixos x e y :



$$\sum F_x = 0 \therefore$$

$$\sigma_x^* \Delta A = \sigma_x \Delta A \cos \theta + \tau_{xy} \Delta A \sin \theta$$

$$\sum F_y = 0 \therefore$$

$$\sigma_y^* \Delta A = \tau_{yx} \Delta A \cos \theta + \sigma_y \Delta A \sin \theta$$

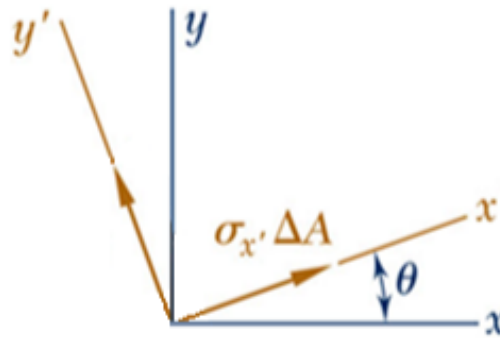
De maneira matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix}$$

Vetor unitário na direção normal ao plano de interesse (definido pelos cossenos diretores).

Transformação do estado plano de tensão

2) Determinação das tensões segundo os eixos x' e y' a partir de σ_x^* e σ_y^* :



$$\sigma_{x'} = \sigma_x^* \cos \theta + \sigma_y^* \sin \theta \quad \therefore \quad \sigma_{x'} = (\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) \cos \theta + (\tau_{yx} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta) \sin \theta$$

$$\therefore \boxed{\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta}$$

$$\tau_{x'y'} = \sigma_y^* \cos \theta - \sigma_x^* \sin \theta \quad \therefore \quad \tau_{x'y'} = (\tau_{yx} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta) \cos \theta - (\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) \sin \theta$$

$$\therefore \boxed{\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}$$

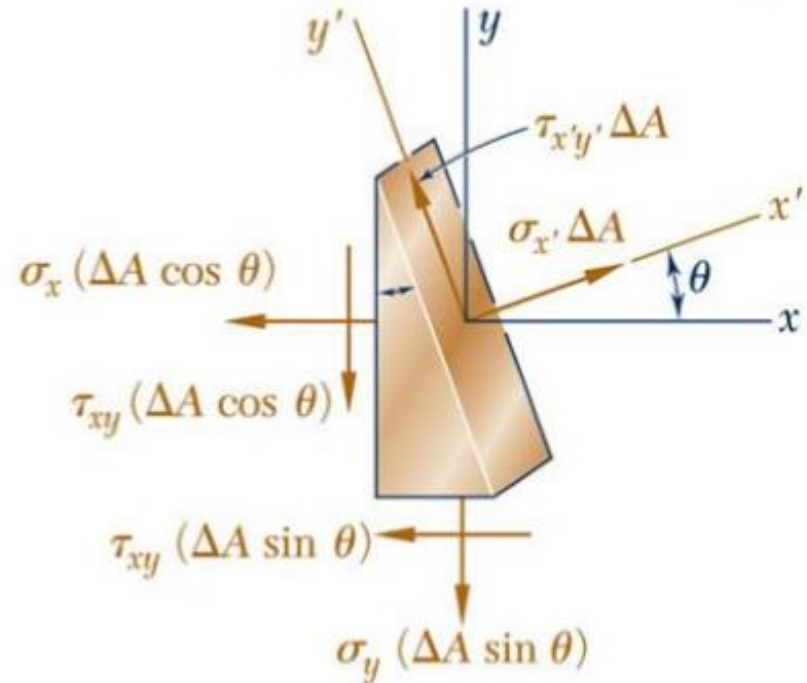
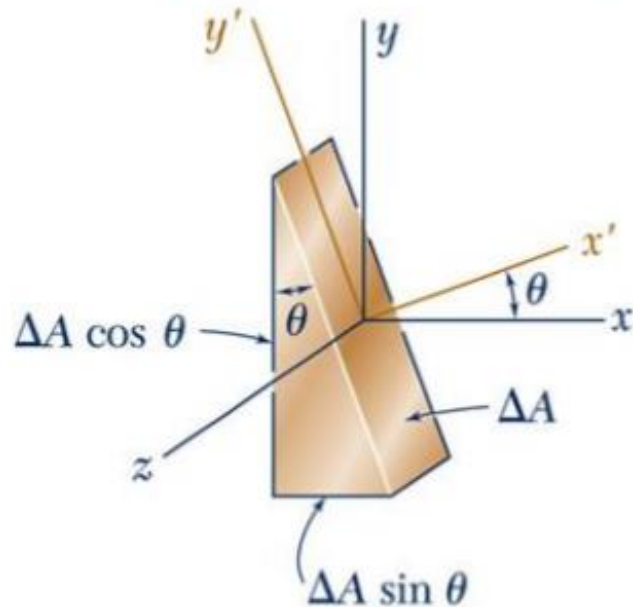
Em notação matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \end{Bmatrix}$$

└─> Matriz de rotação para o caso 2D.

Transformação do estado plano de tensão

- **Estratégia II:** análise do equilíbrio diretamente segundo os eixos x' e y' :



$$\sum F_{x'} = 0 = \sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \cos \theta$$



$$\sum F_{y'} = 0 = \tau_{x'y'} \Delta A + \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \cos \theta + \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \sin \theta$$

Transformação do estado plano de tensão

- Portanto,

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

- Entretanto, sabendo que:

(Relações trigonométricas) →

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

- Temos:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sigma_y \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \tau_{xy} \sin 2\theta$$



$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \frac{\sin 2\theta}{2} + \tau_{xy} \cos 2\theta$$



$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

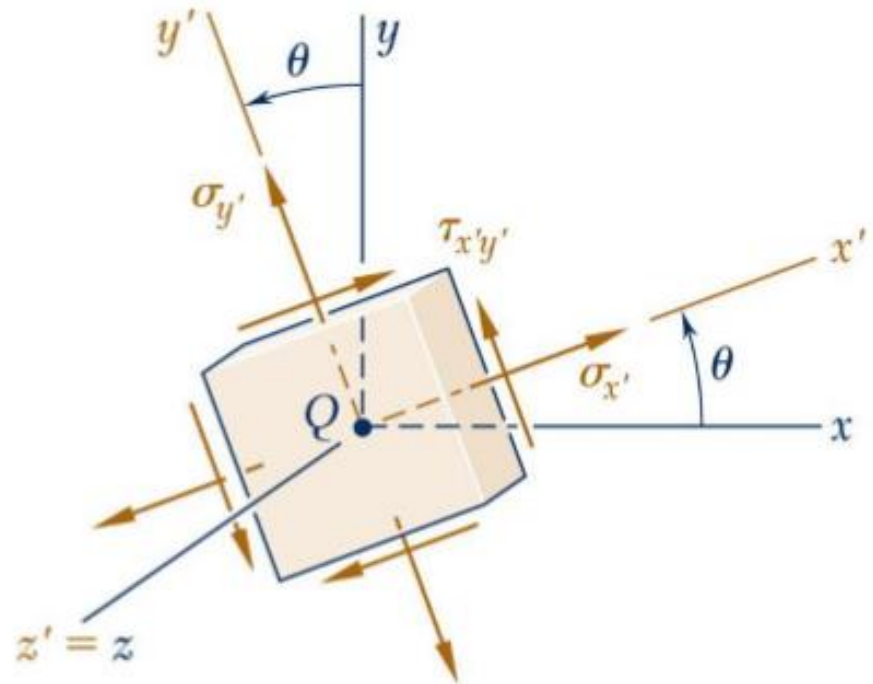


Transformação do estado plano de tensão

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = ?$$



Transformação do estado plano de tensão

- Quanto à tensão $\sigma_{y'}$, pode ser obtida a partir da equação de $\sigma_{x'}$, substituindo θ pelo ângulo $\theta + 90^\circ$;
- Sabendo que:

$$\cos(2\theta + 180^\circ) = -\cos 2\theta$$

$$\sin(2\theta + 180^\circ) = -\sin 2\theta$$

- Temos:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$



$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$



Transformação do estado plano de tensão

- O que acontece se somarmos as expressões das tensões $\sigma_{x'}$ e $\sigma_{y'}$?

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$



$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

Transformação do estado plano de tensão

- O que acontece se somarmos as expressões das tensões $\sigma_{x'}$ e $\sigma_{y'}$?

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$



$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

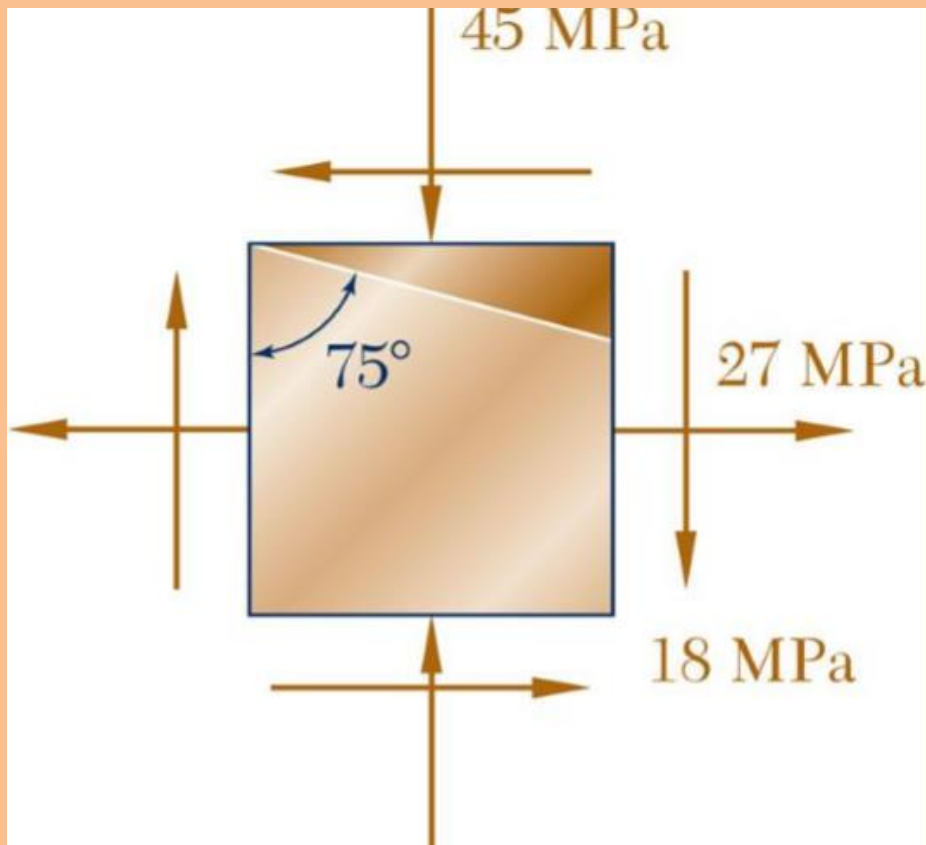


$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

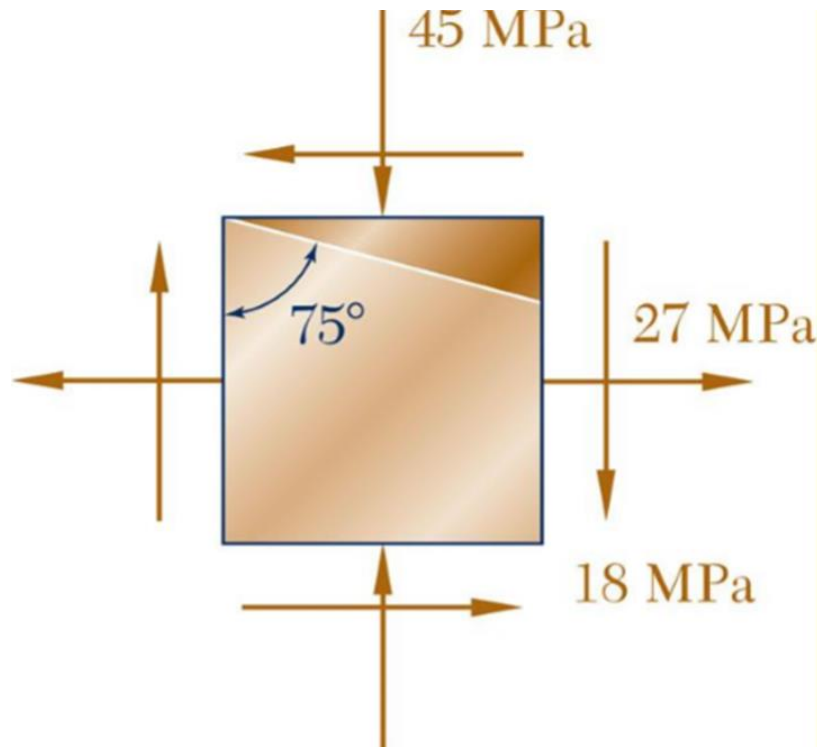
No caso do estado plano de tensão, a soma das tensões normais que atuam em um elemento infinitesimal é independente da orientação do elemento!

Problema 7.1 (Beer et al., 2011)

Para o estado de tensão mostrado na figura, determinar as tensões normal e de cisalhamento que atuam na face oblíqua do elemento triangular sombreado na figura.



Problema 7.1 (Beer et al., 2011)



$$\theta = -15^\circ$$

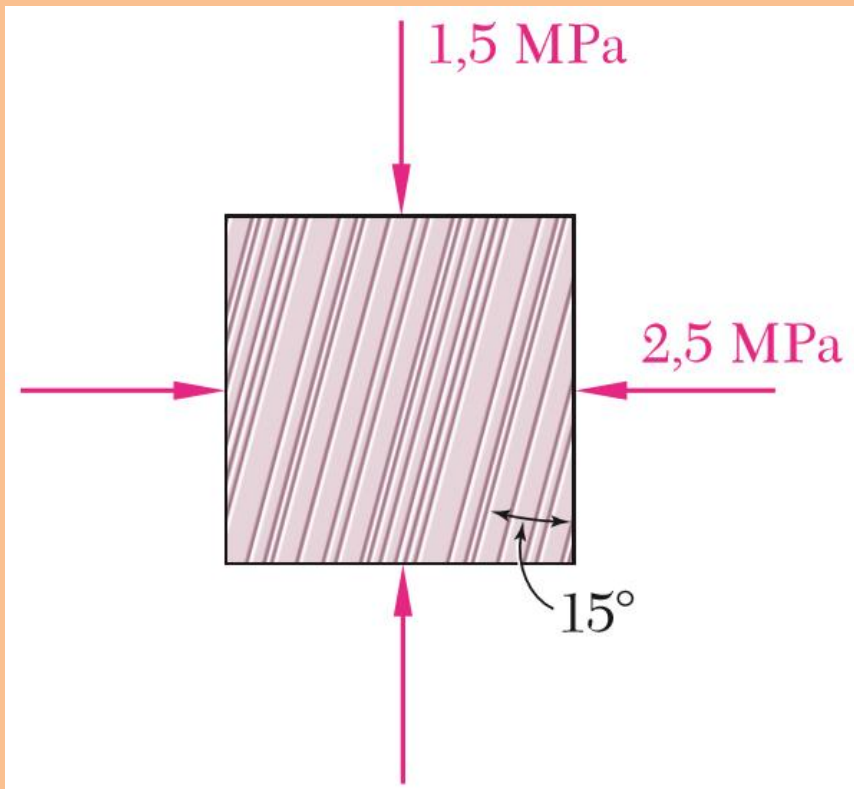
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

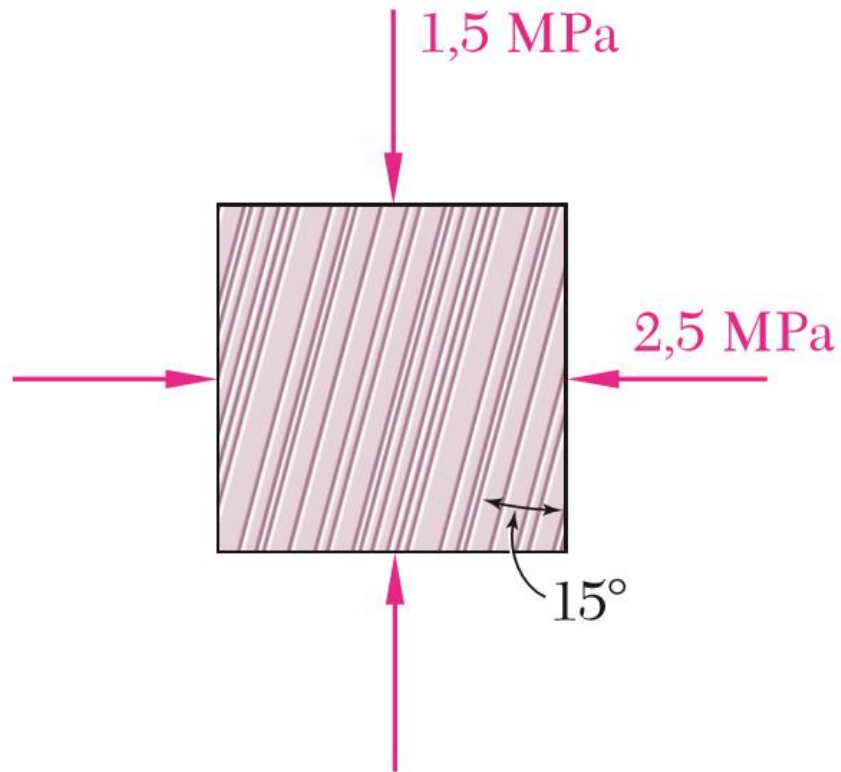
Problema 7.18 (Beer et al., 2008)

As fibras de um elemento de madeira formam um ângulo de 15° com a vertical. Para o estado de tensão mostrado, determine:



- a) A tensão de cisalhamento no plano paralelo às fibras;
- b) A tensão normal perpendicular às fibras.

Problema 7.18 (Beer et al., 2008)



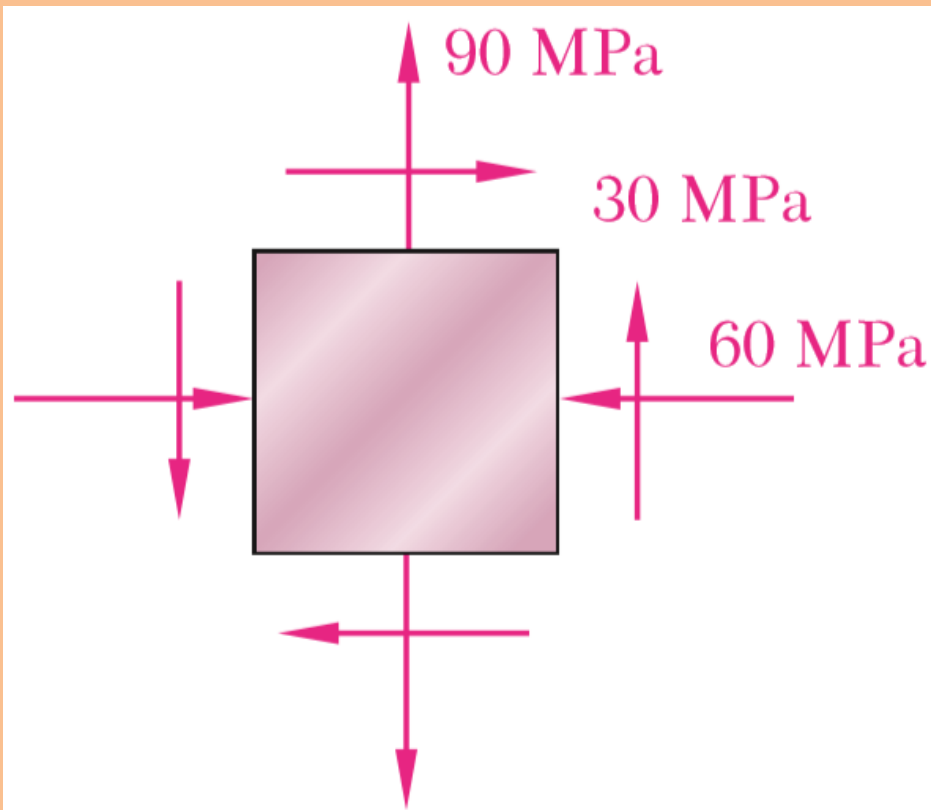
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

Problema 7.15 (Beer et al., 2008)

Para o estado de tensão dado, determine as tensões normal e de cisalhamento depois que o elemento mostrado sofreu uma rotação de:



- a) 25° no sentido horário (-);
- b) 10° no sentido anti-horário (+).

...

CONTINUA