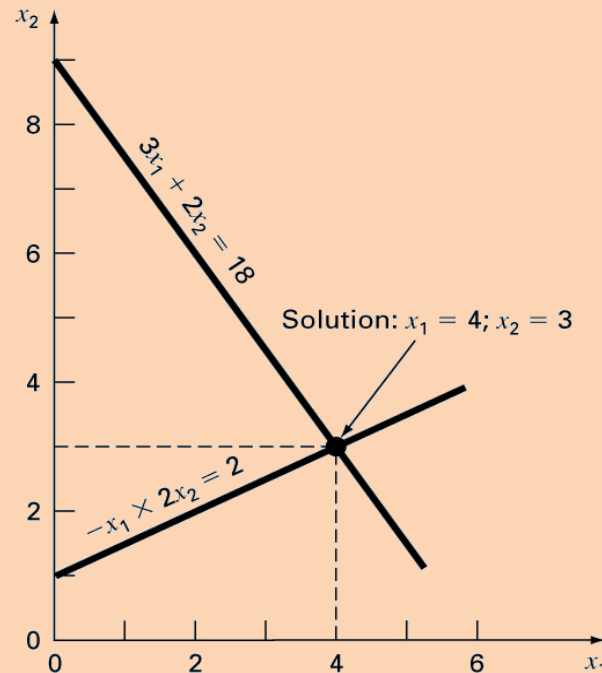


$$\begin{cases} ax + by + cz = j \\ dx + ey + fz = k \\ gx + hy + iz = l \end{cases}$$



Cálculo Numérico

Prof. Dr. Alverlando Silva Ricardo

Aula 5: Parte II: **SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES**

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

- Até o presente momento aprendemos como resolver: **EQUAÇÕES NÃO LINEARES.**

$$f(x) = 0 \left\{ \textit{Função de um única variável} \right.$$

INTRODUÇÃO

- Até o presente momento aprendemos como resolver: **EQUAÇÕES NÃO LINEARES.**

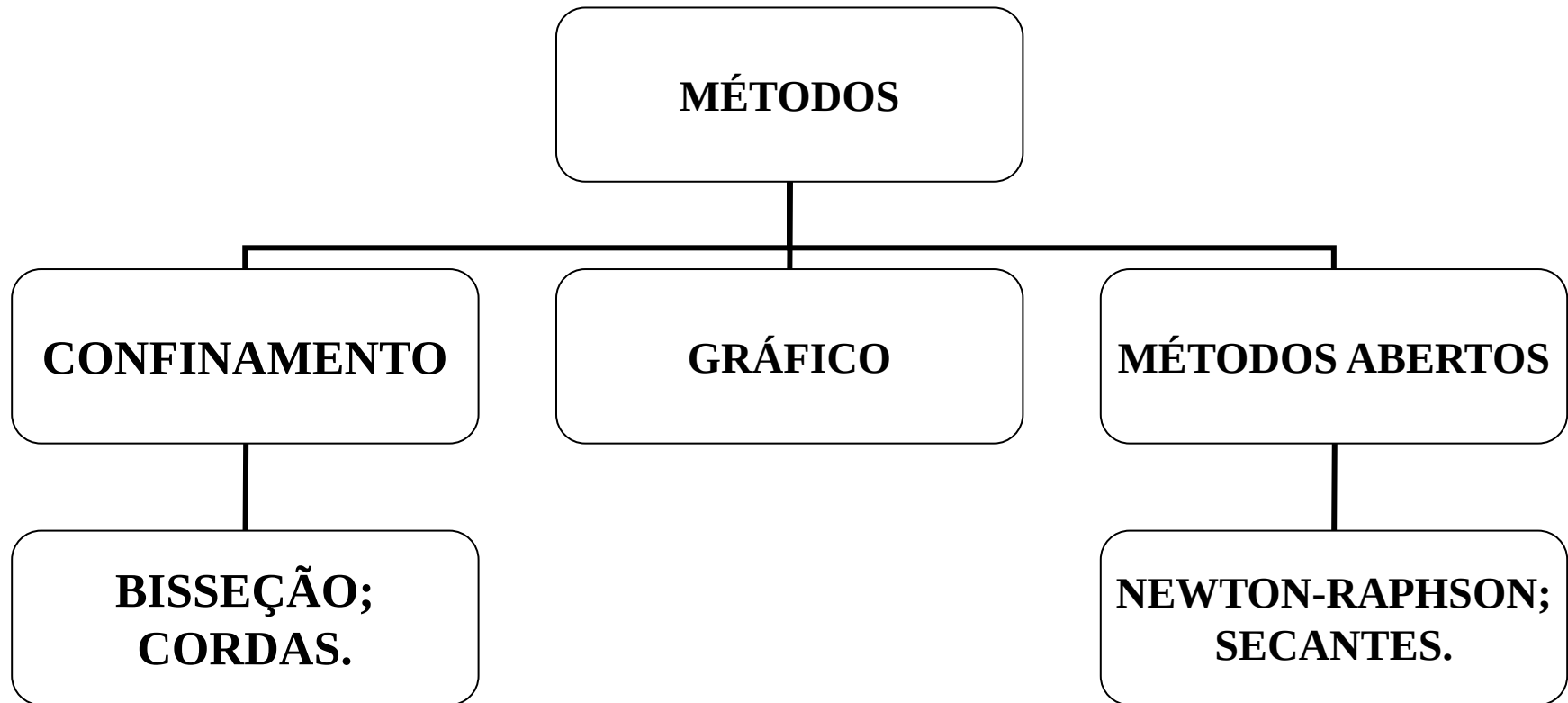
$$A_s = \frac{1}{2}r^2(\theta - \text{sen } \theta)$$

$$y = x \text{tg}(\theta) - \frac{1}{2} \frac{x^2 g}{v_o^2 \cos^2(\theta)} + h$$

$$y = \frac{w_0 L}{3 \pi^4 E I} \left(48 L^3 \cos\left(\frac{\pi}{2L} x\right) - 48 L^3 + 3 \pi^3 L x^2 - \pi^3 x^3 \right)$$

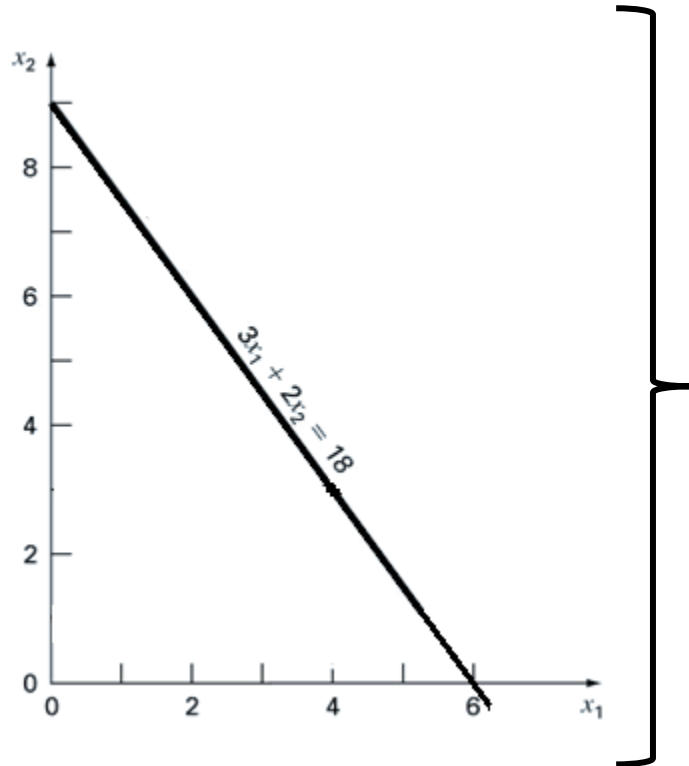
INTRODUÇÃO

- Até o presente momento aprendemos como resolver: **EQUAÇÕES NÃO LINEARES.**



INTRODUÇÃO

- Não foram apresentados métodos numéricos de resolução para **EQUAÇÕES LINEARES**, pois essas equações podem ser facilmente resolvidas **ANALITICAMENTE!**



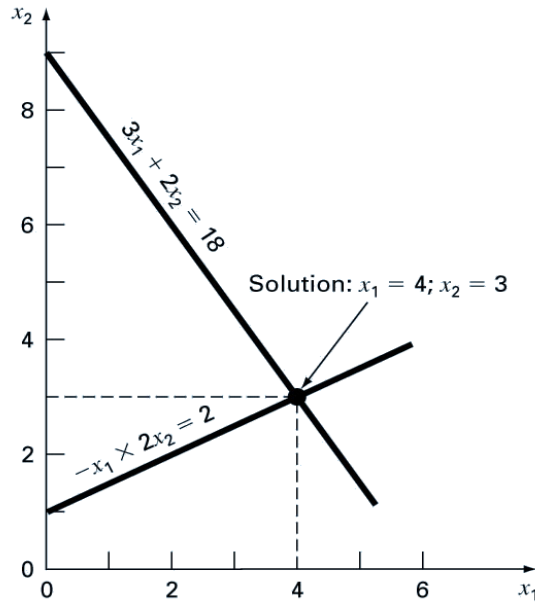
$$3x_1 - 18 = 0$$

INTRODUÇÃO

- Entretanto, equações com **duas, ou mais,** *equações lineares* ou *não lineares* são bem comuns nos problemas de Engenharia, ciência, economia, negócios, estatística, *etc!*

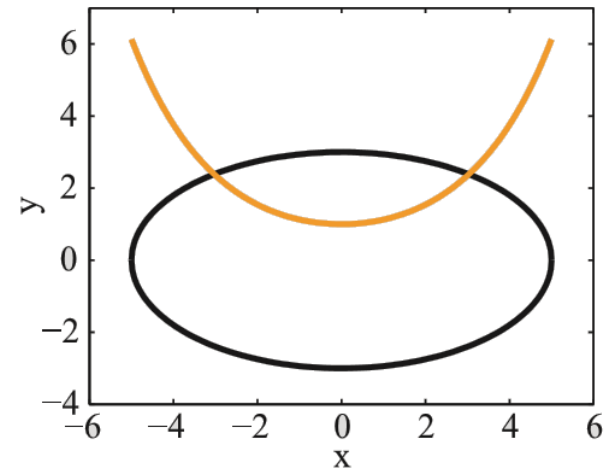
INTRODUÇÃO

➤ Problemas com **duas, ou mais, equações** são denominados de sistemas de equações:



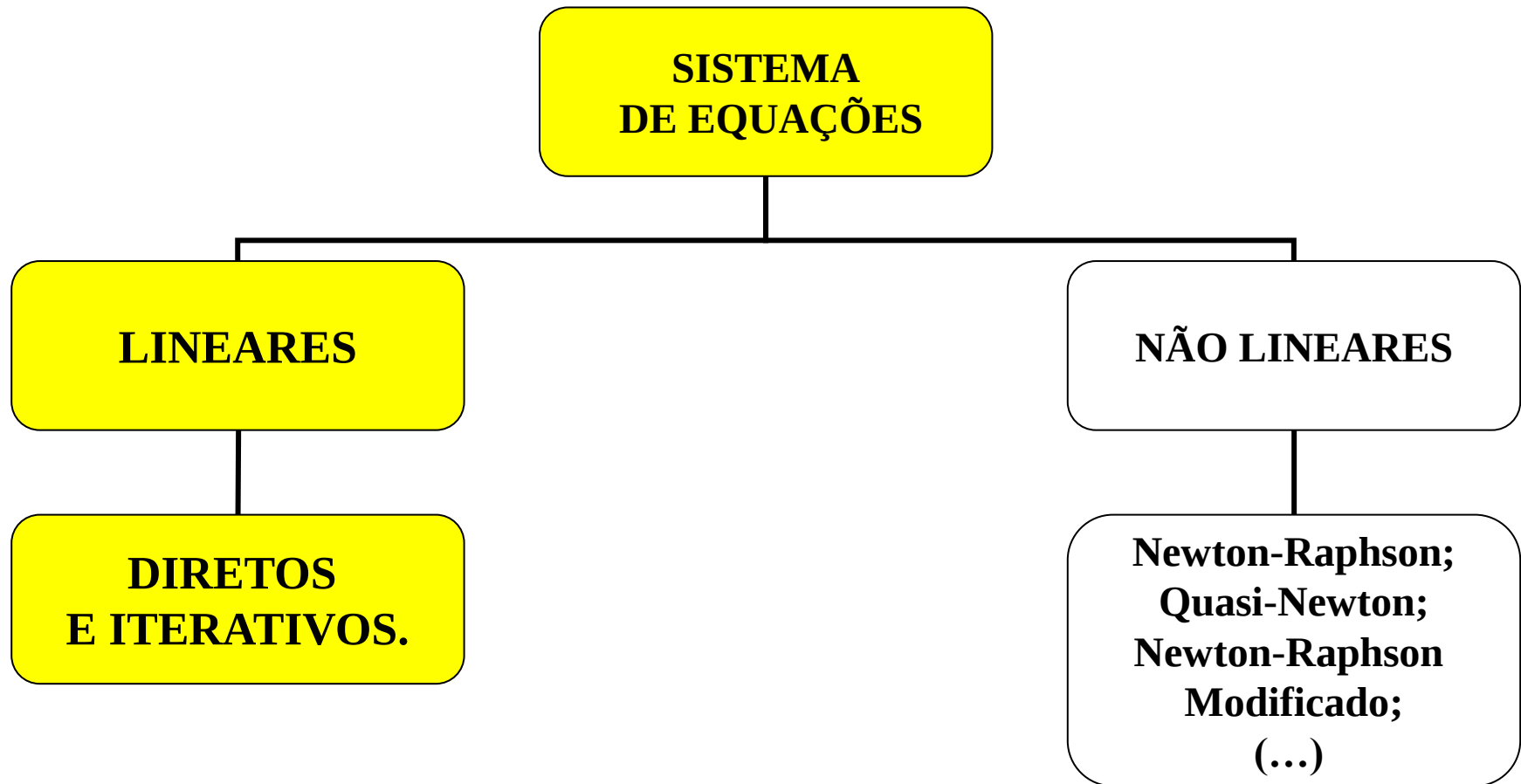
$$\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x, y) = y - \frac{1}{2}(e^{x/2} + e^{(-x)/2}) = 0 \\ f_2(x, y) = 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0 \end{cases}$$



INTRODUÇÃO

- Problemas com **duas, ou mais**, *equações* são denominados de sistemas de equações:



SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

NOTAÇÕES



GERAL

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$



MATRICIAL

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array} \right\}$$

Forma Compacta

$$[A] \cdot \{x\} = \{b\}$$

DEFINIÇÃO

$$[A] \cdot \{x\} = \{b\}$$



*Matriz dos
coeficientes*



*Vetor das
incógnitas*



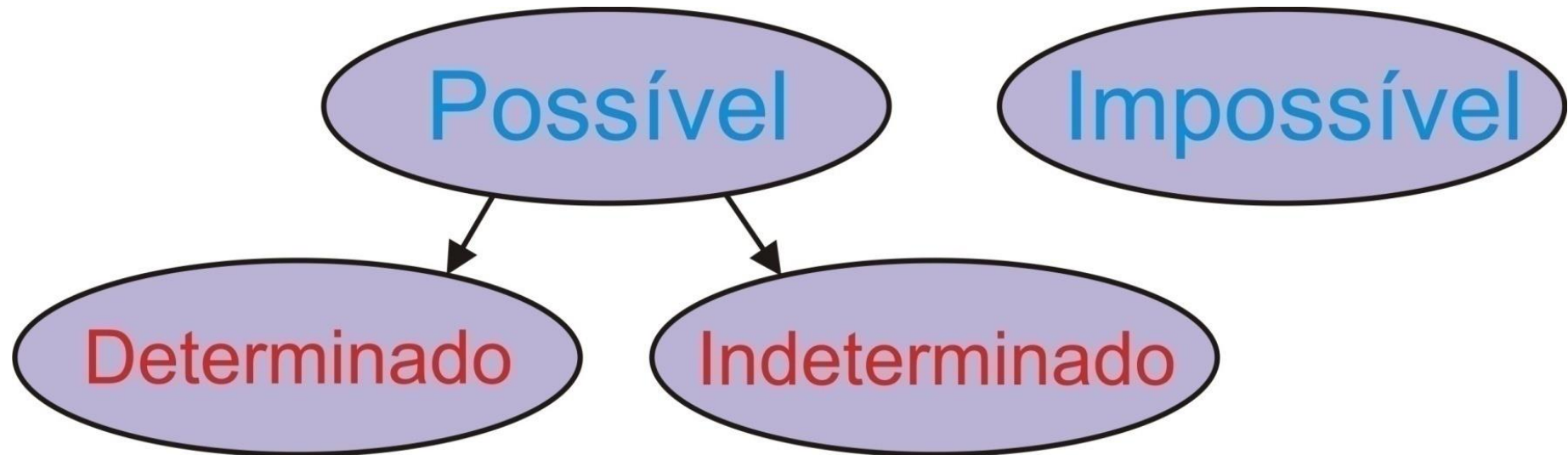
*Vetor das
constantes*

NOTAÇÕES

➤ MATRICIAL AUMENTADA

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right]$$

CLASSIFICAÇÃO

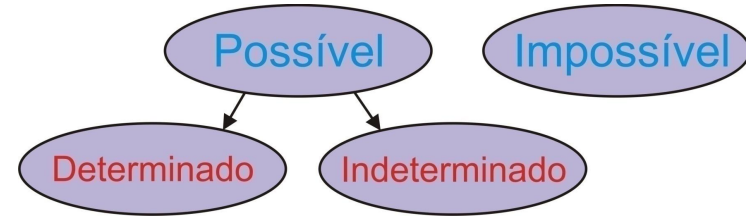


CLASSIFICAÇÃO: Sistema Possível

➤ Possui pelo menos uma solução:

❖ Possível e Determinado

- Possui uma **única** solução;
- O determinante de A deve ser **diferente de zero**;
- Se b for um vetor nulo, a solução do sistema será a solução trivial, ou seja, o **vetor x também será nulo**.



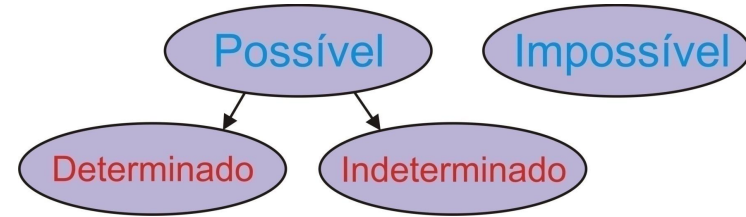
$$[A] \cdot \{x\} = \{b\}$$

CLASSIFICAÇÃO: Sistema Possível

➤ Possui pelo menos uma solução:

❖ Possível e Indeterminado

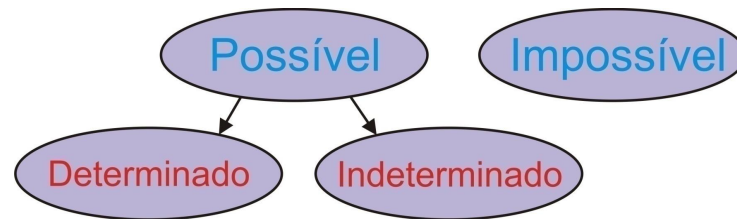
- Admite **infinitas soluções**;
- O **determinante** de A deve ser **nulo**;
- O vetor de **constantes** b deve ser **nulo** ou **múltiplo** de uma coluna de A .



$$[A] \cdot \{x\} = \{b\}$$

CLASSIFICAÇÃO: Sistema Impossível

➤ Não Possui Solução:

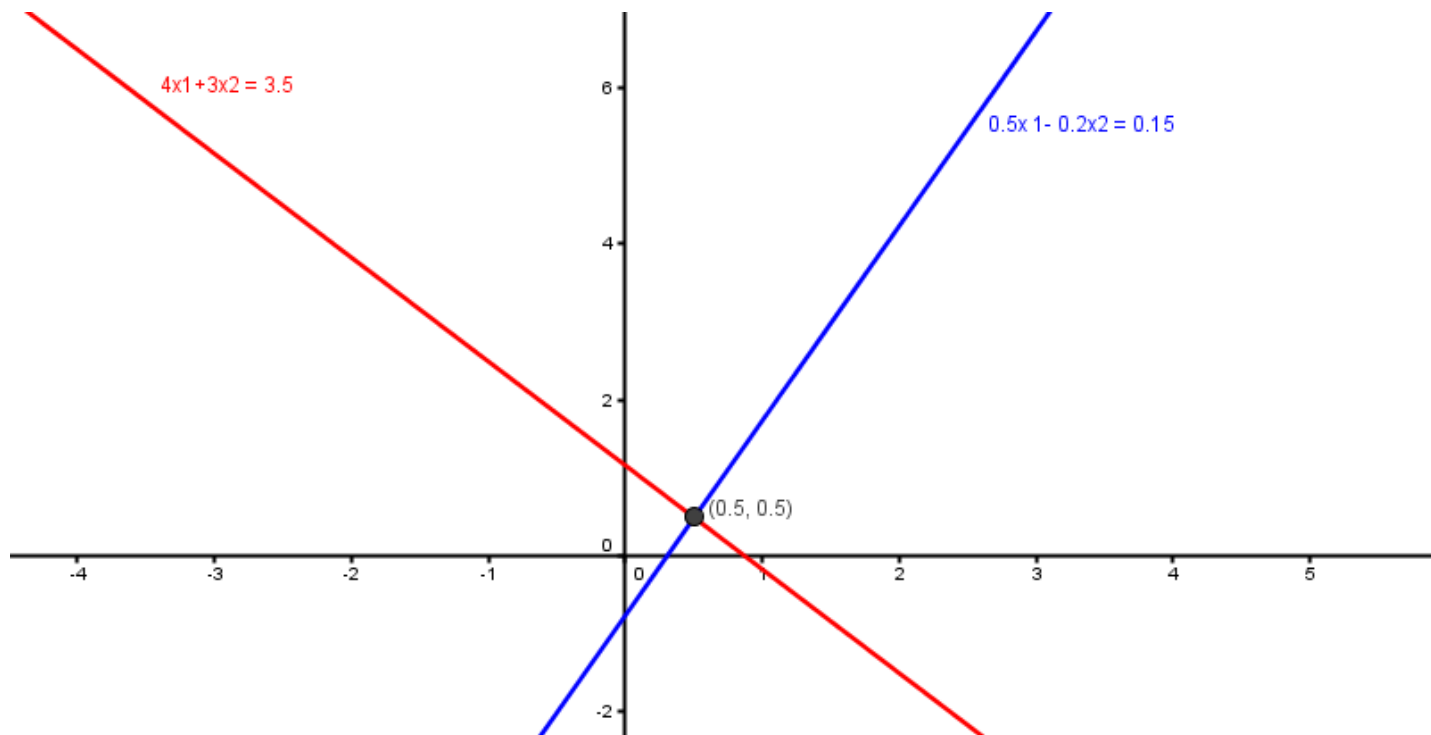


$$[A] \cdot \{x\} = \{b\}$$

- ❖ O **determinante** de A deve ser **nulo**;
- ❖ O vetor b **não** pode ser **nulo** ou **múltiplo** de alguma **coluna de A** .

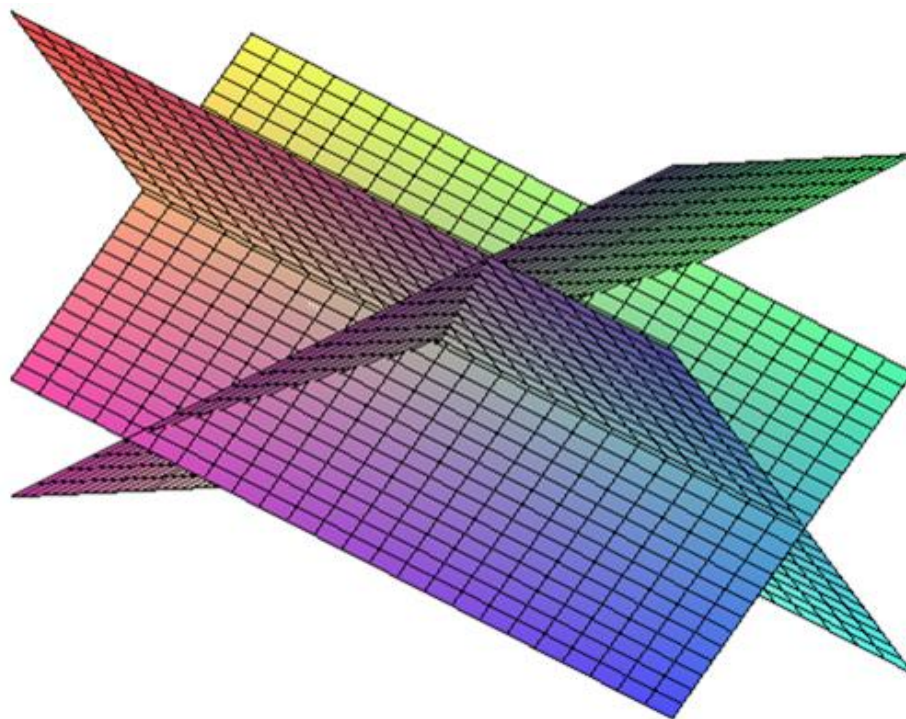
GEOMETRICAMENTE

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 3.5 \\ 0.5x_1 - 0.2x_2 = 0.15 \end{cases}$$



GEOMETRICAMENTE

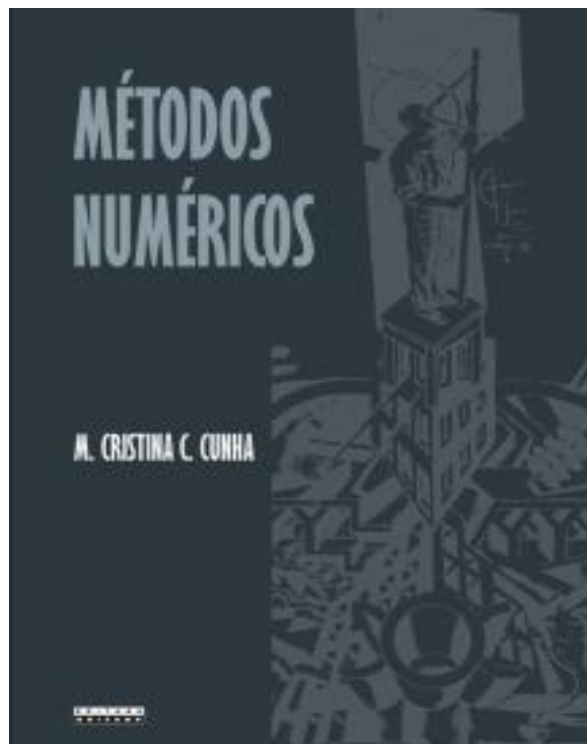
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$



CURIOSIDADE

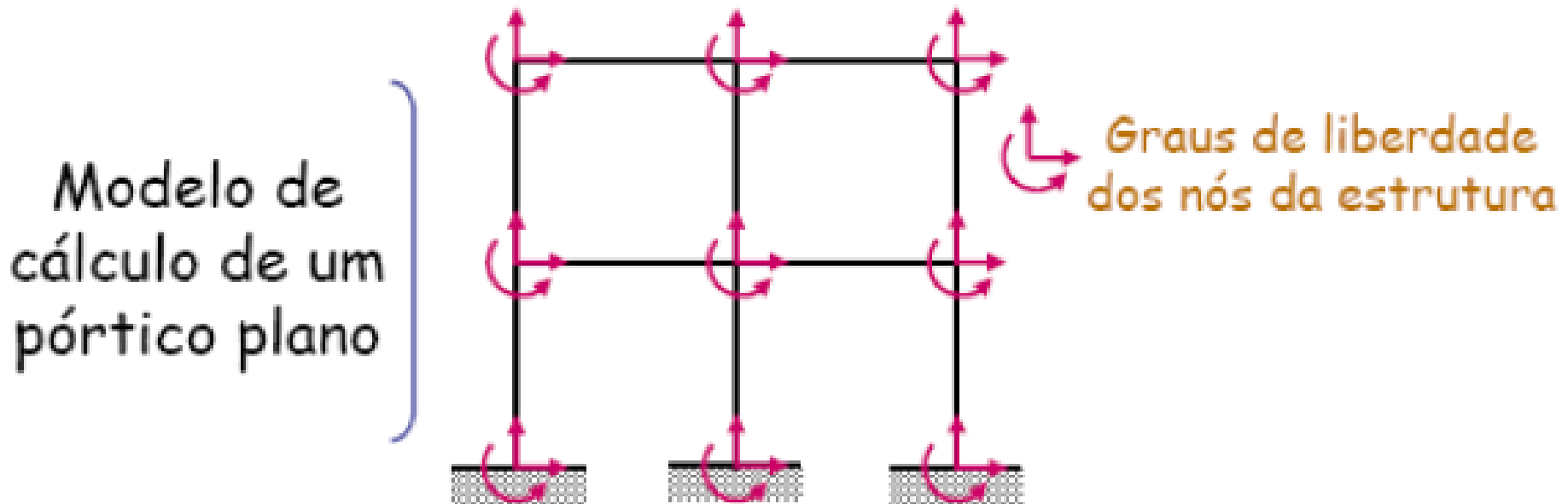
- Existem estimativas que apontam que, a cada **4 (quatro)** problemas de simulação em matemática, **3 (três)** convertem-se em solução de *sistemas de equações*.

**Cristina Cunha
(1993)**



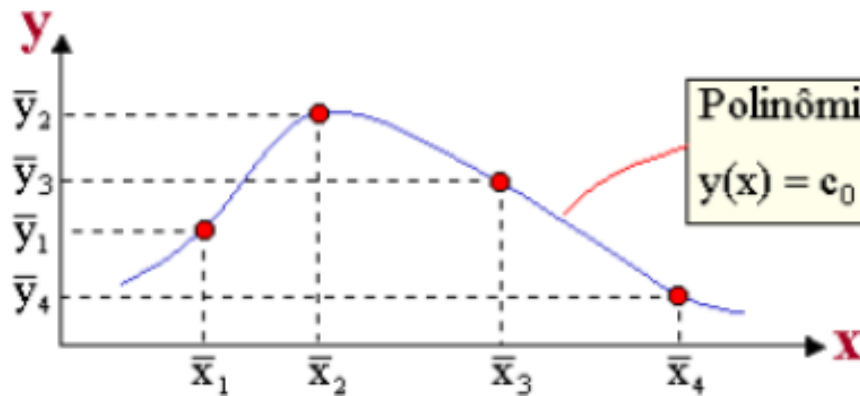
EX. DE APLICAÇÕES NA ENGENHARIA

- **Método da Rigidez:** Calcular os deslocamentos, as reações e os esforços internos solicitantes em uma dada estrutura:



EX. DE APLICAÇÕES NA ENGENHARIA

- **Interpolação da Dados de Chuva:** (Conjunto de dados: tempo vs intensidade de chuva), encontrar o polinômio interpolador que permita fazer estimativas para outros dados.



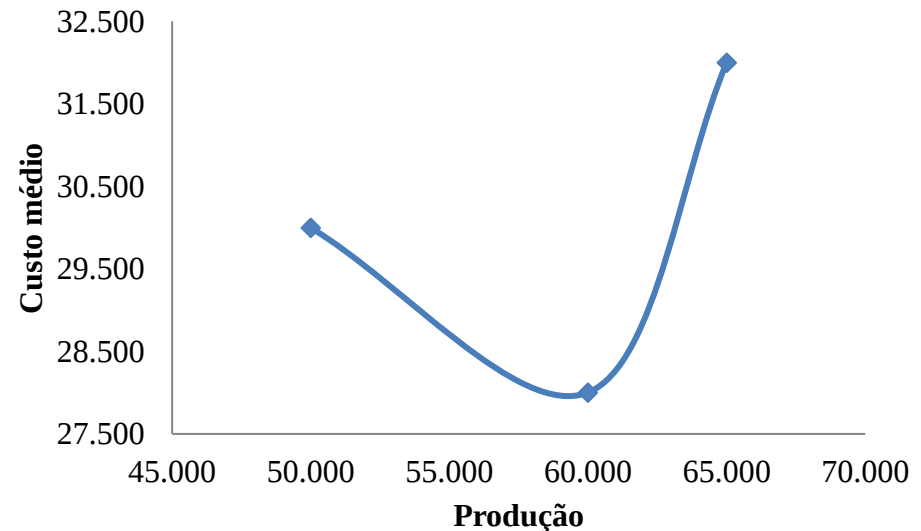
Polinômio interpolador:
 $y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

EX. DE APLICAÇÕES NA ENGENHARIA

- **Interpolação do Custo Médio de um Produto:**
Estimar o custo médio de um produto A com base em uma série de dados obtidos em anos anteriores.

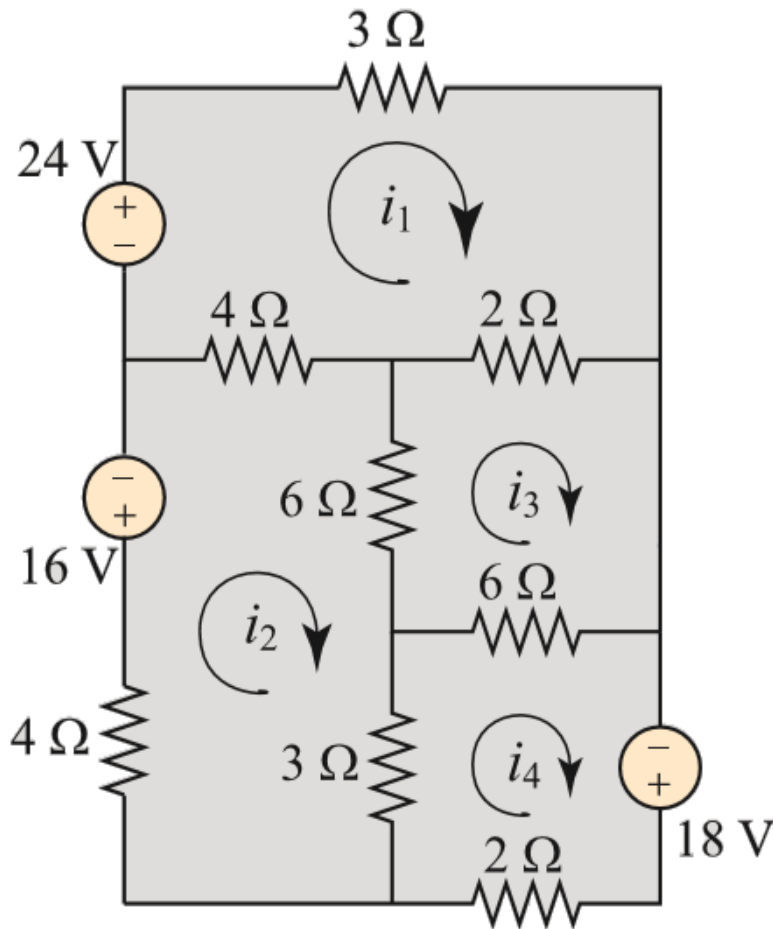
Ano	Produção	Custo Médio
2007	50.000	30.000
2008	60.000	28.000
2009	65.000	32.000
2010	70.000	35.000



Em 2012 queremos uma produção de 100.000 produtos. Quanto seria avaliado o custo médio de cada produto?

EX. DE APLICAÇÕES NA ENGENHARIA

➤ **Engenharia elétrica:** Lei de Kirchhoff, as correntes i_1 , i_2 , i_3 e i_4 podem ser determinadas:

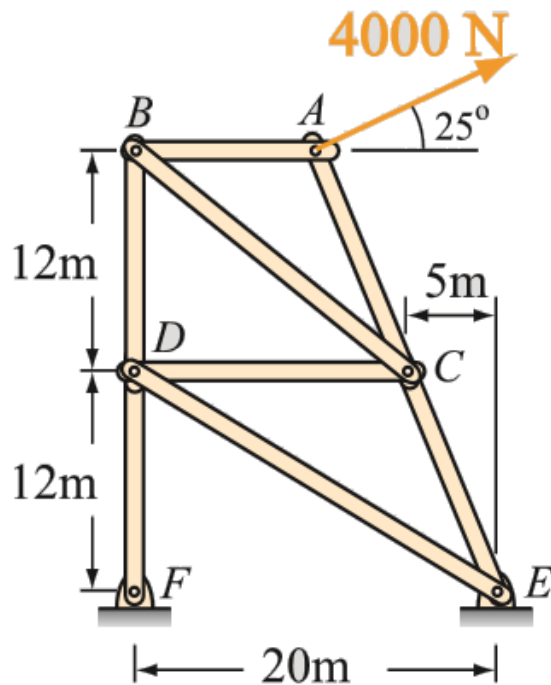


$$\begin{cases} 9i_1 - 4i_2 - 2i_3 = 24 \\ -4i_1 + 17i_2 - 6i_3 - 3i_4 = -16 \\ -2i_1 - 6i_2 + 14i_3 - 6i_4 = 0 \\ -3i_2 - 6i_3 + 11i_4 = 18 \end{cases}$$

Circuitos mais complicados podem requerer solução de sistemas com um número maior de equações!

EX. DE APLICAÇÕES NA ENGENHARIA

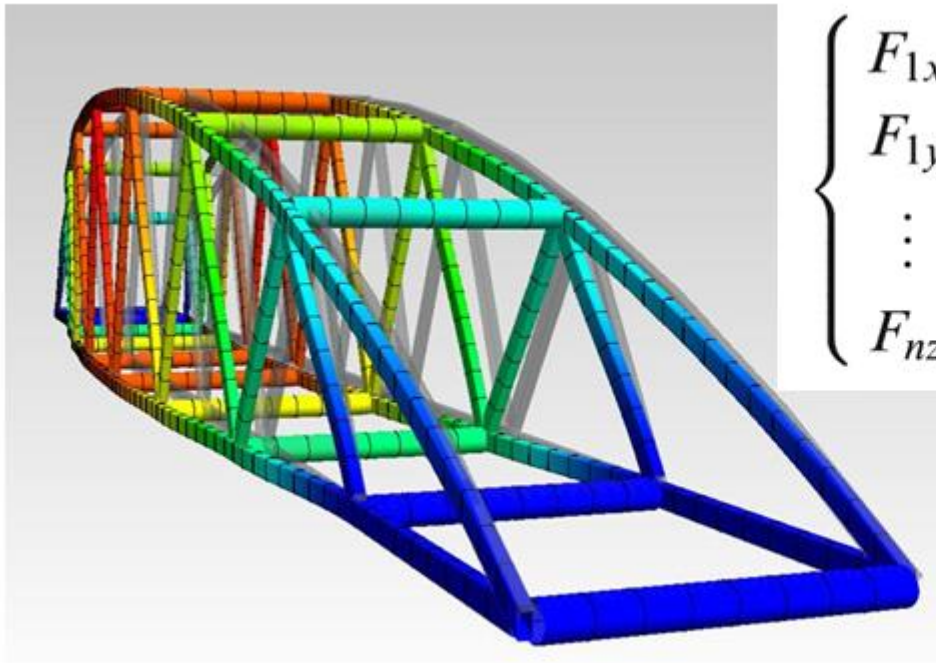
- **Engenharia Civil/Produção:** cálculo da força nos membros de uma treliça:



$$\left\{ \begin{array}{l} 0,9231F_{AC} = 1690 \\ F_{AB} - 0,7809F_{BC} = 0 \\ F_{CD} + 0,8575F_{DE} = 0 \\ 0,3846F_{CE} - 0,3846F_{AC} - 0,7809F_{BC} - F_{CD} = 0 \\ 0,9231F_{AC} + 0,6247F_{BC} - 0,9231F_{CE} = 0 \\ -F_{AB} - 0,3846F_{AC} = 3625 \\ 0,6247F_{BC} - F_{BD} = 0 \\ F_{BD} - 0,5145F_{DE} - F_{DF} = 0 \end{array} \right.$$

EX. DE APLICAÇÕES NA ENGENHARIA

- **Método dos Elementos Finitos:** cálculo dos deslocamentos em uma ponte:



$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ \vdots \\ F_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix}$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Um sistema linear de 2 (ou 3) equações com 2 (ou 3) incógnitas pode ser resolvido manualmente por substituição ou com o uso de métodos matemáticos:
 - Ex.: regra de Cramer.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

➤ A regra de CRAMER:

Exemplo:

a) Para resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$, fazemos:

Cálculo do determinante D :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

Cálculo do determinante D_x :

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

Cálculo do determinante D_y :

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Logo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{-5} = 1$$

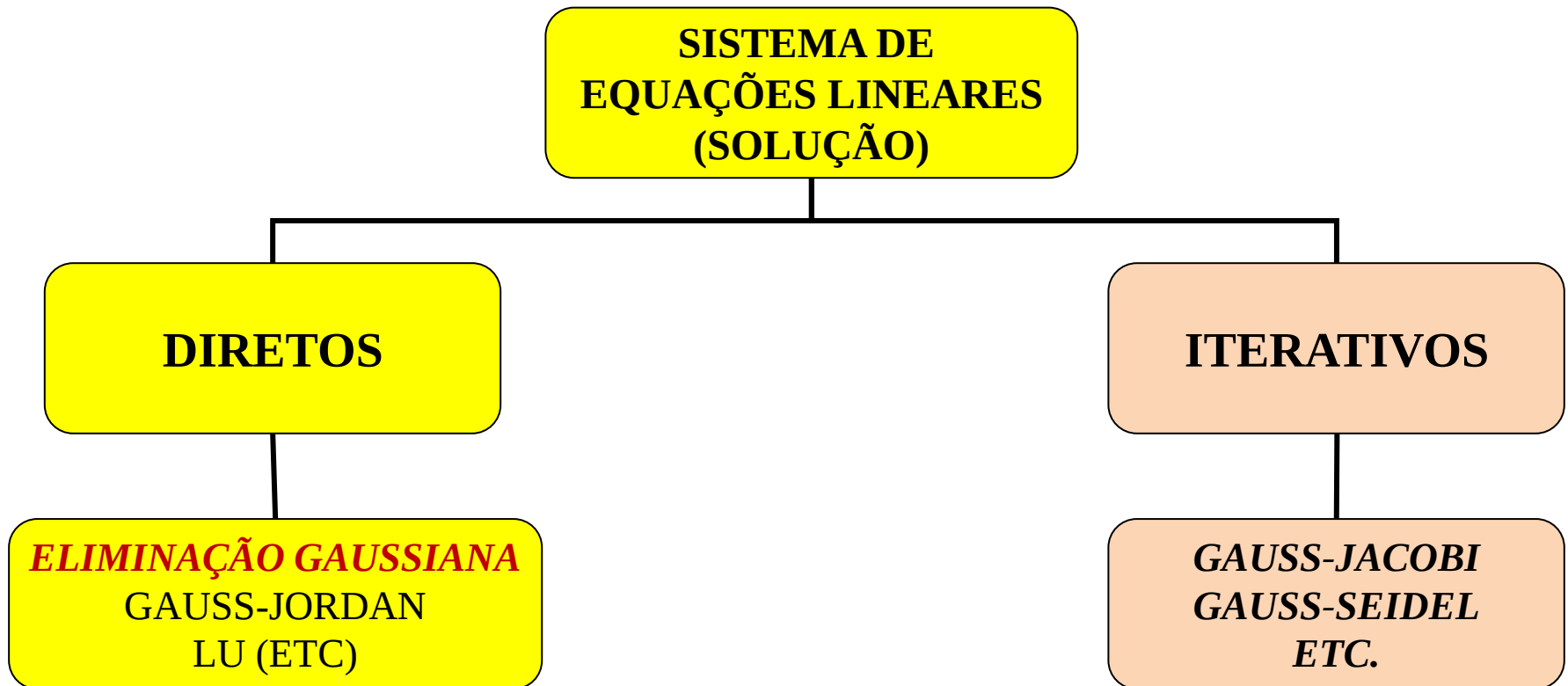
Conjunto verdade: $V = \{(2, 1)\}$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Resolver um sistema usando CRAMER é praticamente impossível se o número de equações (e incógnitas) forem diferentes ou maior que três!
- Dessa forma métodos numéricos são aplicados, tais como:

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Dessa forma métodos numéricos são aplicados, tais como:



Métodos Diretos

Métodos Diretos

1. São aqueles que conduzem à solução exata a menos de erros de arredondamento introduzidos pela máquina, após um número finito de passos;
2. Pertencem a esta classe todos os métodos estudados no 1º e 2º graus (Método da substituição, Cramer, etc...)

$$[A] \cdot \{x\} = \{b\} \quad \text{Se } A \text{ é inversível: } \{x\} = [A]^{-1} \cdot \{b\}$$

3. Esses métodos não são usados em problemas práticos quando o número de equações é elevado, pois apresentam problemas de desempenho;
4. Necessidade do emprego de métodos mais elaborados:
Eliminação de Gauss.

Métodos Diretos

- O sistema de equações inicial é manipulado até se transformar em um sistema equivalente de fácil resolução: ***Formas triangular ou diagonal.***

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Sistema de equações na forma triangular superior



Usado no método de ELIMINAÇÃO GAUSSIANA

Métodos Diretos

- O sistema de equações inicial é manipulado até se transformar em um sistema equivalente de fácil resolução: ***Formas triangular ou diagonal.***

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Sistema de equações na forma triangular inferior



*A forma triangular inferior é usada em conjunto com a forma triangular superior no **método de decomposição LU***

Métodos Diretos

- O sistema de equações inicial é manipulado até se transformar em um sistema equivalente de fácil resolução: ***Formas triangular ou diagonal.***

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a & a & a \\ a & a_{22} & a & a \\ a & a & a_{33} & a \\ a & a & a & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_{11}x_1 & = b_1 \\ & a_{12}x_2 = b_2 \\ & & a_{13}x_3 = b_3 \\ & & & \vdots \\ & & & & a_n x_n = b_n \end{array} \right.$$

Sistema de equações na forma diagonal



Uma forma similar é usada no método de Gauss-Jordan

MÉTODOS DE ELIMINAÇÃO GAUSSIANA

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana

- ❖ Atribuído ao matemático alemão *Carl Friedrich Gauss*;
- ❖ Consiste em transformar o sistema linear original em um sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior;

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \bar{a}_{22}x_2 + \bar{a}_{23}x_3 = \bar{b}_2 \\ \bar{a}_{33}x_3 = \bar{b}_3 \end{cases}$$

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Sistemas Triangulares

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_3 = 1$$

- O sistema pode ser resolvido facilmente por substituição de variáveis
- Sistema Triangular Superior: todos os elementos localizados abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i > j$
- Solução: retro substituição

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana: *Processo*

Conjunto inicial de equações

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Passo 1

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \cancel{a_{21}} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ \cancel{a_{31}} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ \cancel{a_{41}} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

Passo 2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & \cancel{a'_{32}} & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & \cancel{a'_{42}} & a''_{43} & a''_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b''_4 \end{bmatrix}$$

Passo 3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & \cancel{a''_{43}} & a'''_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b'''_4 \end{bmatrix}$$

Equações na forma triangular superior

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a'''_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b'''_4 \end{bmatrix}$$

Elemento pivô

Linha pivô

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana

➤ *Propriedades: A solução do sistema $[A]\{x\}=\{b\}$ não se altera se o submetemos a uma sequência de operações do tipo:*

- ❖ Multiplicação de uma equação por uma constante não-nula;
- ❖ Adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação;
- ❖ Troca da ordem das equações.

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana s/ Pivoteamento: *Processo*

■ Passos do Método

- Eliminar os coeficientes de x_1 presentes nas linhas 2, 3, ..., n;

- *Possível desde que $a_{11} \neq 0$*

- Substituir a linha 2, L_2 , pela combinação linear:

$$L_2' = L_2 - m_{21} \cdot L_1$$

m_{21} is the multiplier (multiplicador).

a_{11} is the pivot (pivô).

$a_{11} \neq 0$ is the necessary condition (condição necessária).

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana s/ Pivoteamento: *Processo*

■ Passos do Método

- Eliminar os coeficientes de x_1 presentes nas linhas 2, 3, ..., n;

- *Possível desde que $a_{11} \neq 0$*

- Substituir a linha 3, L_3 , pela combinação linear:

$$L_3' = L_3 - m_{31} \cdot L_1$$

m_{31} is the multiplier (multiplicador).

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

a_{11} is the pivot (pivô).

$a_{11} \neq 0$ is the necessary condition (condição necessária).

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana s/ Pivoteamento: *Processo*

■ Passos do Método

- Eliminar os coeficientes de x_1 presentes nas linhas 2, 3, ..., n ;

- *Possível desde que $a_{11} \neq 0$*

- Deve-se continuar o processo até a linha n :

$$L_n' = L_n - m_{n1} \cdot L_1$$

$m_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}}$

$a_{11} \neq 0$

condição necessária

multiplicador

pivô

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana s/ Pivoteamento: *Processo*

■ Passos do Método

- Eliminar os coeficientes de x_2 presentes nas linhas 3, 4, ..., n;

- *Possível desde que $a_{22} \neq 0$*

- Eliminar os coeficientes de x_3 presentes nas linhas 4, 5, ..., n;

- *Possível desde que $a_{33} \neq 0$*

Repete-se o processo até chegar com uma matriz triangular superior!!!

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana s/ Pivoteamento: *Processo*

■ *Exemplo*

Forma Matricial Aumentada

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 17 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 9 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad [A | b] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & | & 17 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & | & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & | & 20 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & | & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow L_1 \\ \longrightarrow L_2 \\ \longrightarrow L_3 \\ \longrightarrow L_4 \end{matrix}$$

■ Etapa 1: eliminar os coeficientes de x_1

$$\begin{bmatrix} \textcircled{2} & 1 & 3 & 4 & | & 17 \\ \textcolor{red}{1} & 4 & 2 & 1 & | & 9 \\ \textcolor{red}{3} & 2 & 1 & 4 & | & 20 \\ \textcolor{red}{2} & 2 & 3 & 1 & | & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Pivô : } a_{11} \neq 0 \\ \text{Multiplica dores : } m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}, m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \text{ e } m_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}} \end{matrix}$$

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana s/ Pivoteamento: *Processo*

■ *Exemplo*

- Etapa 1: eliminar os coeficientes de x_1

Combinação Linear : $L_2' = L_2 - m_{21}L_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 17 \\ 0 & 3.5 & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 20 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 9 \end{array} \right]$$

Combinação Linear : $L_3' = L_3 - m_{31}L_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 17 \\ 0 & 3.5 & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -3.5 & -2 & -5.5 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 9 \end{array} \right]$$

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana s/ Pivoteamento: *Processo*

■ *Exemplo*

- Etapa 1: eliminar os coeficientes de x_1

Combinação Linear : $L_4 = L_4 - m_{41}L_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 17 \\ 0 & 3.5 & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -3.5 & -2 & -5.5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -8 \end{array} \right]$$

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana s/ Pivoteamento: *Processo*

■ *Exemplo*

- Etapa 2: eliminar os coeficientes de x_2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 17 \\ 0 & 3.5 & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -3.5 & -2 & -5.5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -8 \end{array} \right]$$

Pivô : $a_{22} \neq 0$

Multiplicadores: $m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}}$ e $m_{42} = \frac{a_{42}}{a_{22}}$

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana s/ Pivoteamento: *Processo*

■ *Exemplo*

■ Etapa 2: eliminar os coeficientes de x_2

Combinação Linear : $L_3 = L_3 - m_{32}L_2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 17 \\ 0 & \textcircled{3.5} & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & -3.571 & -1.857 & -5.571 \\ 0 & \textcolor{red}{1} & 0 & -3 & -8 \end{array} \right]$$

Combinação Linear : $L_4 = L_4 - m_{42}L_2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 17 \\ 0 & \textcircled{3.5} & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & -3.571 & -1.857 & -5.571 \\ 0 & 0 & -0.143 & -2.714 & -8.143 \end{array} \right]$$

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana s/ Pivoteamento: *Processo*

■ *Exemplo*

- Etapa 3: eliminar os coeficientes de x_3

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 17 \\ 0 & 3.5 & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & -3.571 & -1.857 & -5.571 \\ 0 & 0 & -0.143 & -2.714 & -8.143 \end{array} \right]$$

Pivô : $a_{33} \neq 0$

Multiplica dor : $m_{43} = \frac{a_{43}}{a_{33}}$

Potenciais Dificuldades encontradas com a aplicação do método de Eliminação de Gauss

- **O ELEMENTO PIVÔ É PEQUENO EM RELAÇÃO AOS DEMAIS TERMOS NA LINHA PIVÔ:** *Erros de arredondamento significativos podem ocorrer*
- **O ELEMENTO PIVÔ É ZERO:** *Como a linha pivô é dividida pelo elemento pivô, surge um problema durante a execução do procedimento de eliminação de Gauss se o valor do elemento pivô for igual a zero.*

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana **COM** Pivoteamento:

- Objetivo: evitar que os pivôs usados no processo de eliminação sejam nulos;

□ **Passos do Método:**

- Ao encontrar um pivô nulo fazer a permuta da linha que contém o pivô por uma linha com maior coeficiente em módulo na coluna que contém o pivô.

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana COM Pivoteamento:

■ *Exemplo*

Forma Matricial Aumentada

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 2x_4 = -5 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 10x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 12 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad [A | b] = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 1 & -2 & | & -5 \\ 4 & 8 & 2 & -1 & | & 3 \\ 10 & 5 & 3 & 1 & | & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & | & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow L_1 \\ \longrightarrow L_2 \\ \longrightarrow L_3 \\ \longrightarrow L_4 \end{matrix}$$

■ Etapa 1: eliminar os coeficientes de x_1

$$\begin{bmatrix} \textcircled{5} & 10 & 1 & -2 & | & -5 \\ 4 & 8 & 2 & -1 & | & 3 \\ 10 & 5 & 3 & 1 & | & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & | & 12 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Pivô : } a_{11} \neq 0 \\ \text{Multiplica dores : } m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}, m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \text{ e } m_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}} \end{matrix}$$

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana COM Pivoteamento:

■ *Exemplo*

- Etapa 1: eliminar os coeficientes de x_1

Combinação Linear : $L_2 = L_2 - m_{21}L_1$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 1 & -2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1.2 & 0.6 & | & 7 \\ 10 & 5 & 3 & 1 & | & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & | & 12 \end{bmatrix}$$

Combinação Linear : $L_3 = L_3 - m_{31}L_1$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 1 & -2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1.2 & 0.6 & | & 7 \\ 0 & -15 & 1 & 5 & | & 19 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & | & 12 \end{bmatrix}$$

Métodos de Eliminação Gaussiana

➤ Eliminação Gaussiana **COM** Pivoteamento:

■ *Exemplo*

- Etapa 1: eliminar os coeficientes de x_1

Combinação Linear : $L_4 = L_4 - m_{41}L_1$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 1 & -2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1.2 & 0.6 & | & 7 \\ 0 & -15 & 1 & 5 & | & 19 \\ 0 & -5 & 0.6 & 2.8 & | & 14 \end{bmatrix}$$

Métodos de Eliminação Gaussiana

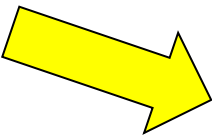
➤ Eliminação Gaussiana COM Pivoteamento:

■ *Exemplo*

- Etapa 2: eliminar os coeficientes de x_2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 10 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & \textcircled{0} & 1.2 & 0.6 & 7 \\ 0 & -15 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & -5 & 0.6 & 2.8 & 14 \end{array} \right] \quad \text{Pivô : } a_{22} = 0$$

Busca pelo maior coeficiente em módulo na coluna que contém o pivô nulo e abaixo da diagonal principal

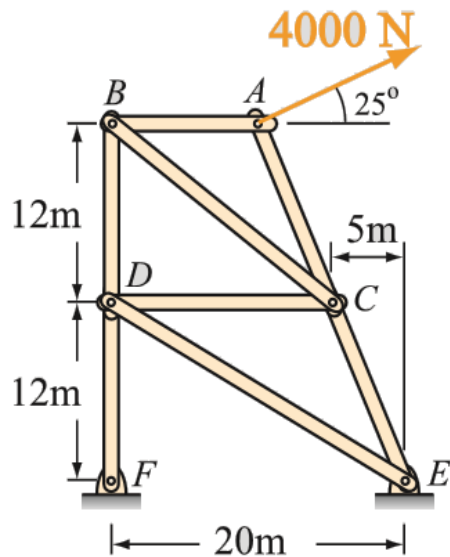

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 10 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -15 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 1.2 & 0.6 & 7 \\ 0 & -5 & 0.6 & 2.8 & 14 \end{array} \right]$$

Troca da 2ª pela 3ª linha

Comentários adicionais sobre a Pivotação

- *Os cálculos numéricos são menos propensos a erros se o elemento pivô possuir um valor numérico absoluto grande em comparação com os demais elementos na mesma linha.*
- *Consequentemente, é sempre bom empregar a pivotação para se ter um elemento pivô com o maior valor possível (mesmo quando a pivotação não for necessária).*

Resolução de um Problema de Engenharia Utilizando eliminação Gaussiana



$$0,9231F_{AC} = 1690$$

$$F_{AB} - 0,7809F_{BC} = 0$$

$$F_{CD} + 0,8575F_{DE} = 0$$

$$0,3846F_{CE} - 0,3846F_{AC} - 0,7809F_{BC} - F_{CD} = 0$$

$$0,9231F_{AC} + 0,6247F_{BC} - 0,9231F_{CE} = 0$$

$$-F_{AB} - 0,3846F_{AC} = 3625$$

$$0,6247F_{BC} - F_{BD} = 0$$

$$F_{BD} - 0,5145F_{DE} - F_{DF} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0,9231 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -0,3846 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,8575 & 0 \\ 1 & 0 & -0,7809 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,3846 & -0,7809 & 0 & -1 & 0,3846 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9231 & 0,6247 & 0 & 0 & -0,9231 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6247 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0,5145 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{AB} \\ F_{AC} \\ F_{BC} \\ F_{BD} \\ F_{CD} \\ F_{CE} \\ F_{DE} \\ F_{DF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1690 \\ 3625 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolução de um Problema de Engenharia Utilizando eliminação Gaussiana

- *Usando o Matlab: Quando se executa o programa, a seguinte solução é exibida na janela de comandos: $x = a \backslash b$*

Forcas =

-4.3291e+003

1.8308e+003

-5.5438e+003

-3.4632e+003

2.8862e+003

-1.9209e+003

-3.3659e+003

-1.7315e+003

>>

$$\begin{bmatrix} F_{AB} \\ F_{AC} \\ F_{BC} \\ F_{BD} \\ F_{CD} \\ F_{CE} \\ F_{DE} \\ F_{DF} \end{bmatrix}$$

MÉTODO DIRETO DE DECOMPOSIÇÃO LU

(Poder ser usado no trabalho)

MÉTODO DIRETO DE GAUSS-JORDAN

(Poder ser usado no trabalho)

MÉTODOS ITERATIVOS

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

**SISTEMA DE
EQUAÇÕES LINEARES
(SOLUÇÃO)**

```
graph TD; A[SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES (SOLUÇÃO)] --> B[DIRETOS]; A --> C[ITERATIVOS]; B --> D["ELIMINAÇÃO GAUSSIANA<br/>GAUSS-JORDAN<br/>LU (ETC)"]; C --> E["GAUSS-JACOBI<br/>GAUSS-SEIDEL<br/>ETC."];
```

The diagram is a hierarchical flowchart. At the top is a yellow box labeled 'SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES (SOLUÇÃO)'. A horizontal line below it branches into two vertical lines. The left vertical line leads to an orange box labeled 'DIRETOS'. The right vertical line leads to a yellow box labeled 'ITERATIVOS'. From the 'DIRETOS' box, a vertical line leads down to another orange box containing the text 'ELIMINAÇÃO GAUSSIANA', 'GAUSS-JORDAN', and 'LU (ETC)'. From the 'ITERATIVOS' box, a vertical line leads down to another yellow box containing the text 'GAUSS-JACOBI', 'GAUSS-SEIDEL', and 'ETC.'.

DIRETOS

ELIMINAÇÃO GAUSSIANA
GAUSS-JORDAN
LU (ETC)

ITERATIVOS

GAUSS-JACOBI
GAUSS-SEIDEL
ETC.

Métodos Iterativos

1. Fornecem ***solução aproximada*** de um sistema de equações lineares após a realização de um número finito de passos (iterações);
2. São convenientemente empregados para **sistemas grandes e esparsos** que aparecem com frequência na discretização de equações diferenciais;
3. Geram uma sequência de vetores $\{\mathbf{x}\}^{(k)}$, a partir de uma aproximação inicial $\{\mathbf{x}\}^{(0)}$;
4. Necessitam de algumas ***condições para garantir a convergência*** da sequência de aproximações.

Métodos Iterativos

- Seja o sistema $[A]\{x\} = \{b\}$. Esse sistema é convertido em $\{x_k\} = [C]\{x_0\} + \{g\}$.
 - $[C]$ é uma matriz $n \times n$
 - $\{g\}$ é um vetor $n \times 1$
- Partindo de uma aproximação inicial $\{x\}^{(0)}$, construímos consecutivamente os vetores:

$$\{x\}^{(1)} = [C]\{x\}^{(0)} + g$$

$$\{x\}^{(2)} = [C]\{x\}^{(1)} + g \quad \dots$$

$$\{x\}^{(k+1)} = [C]\{x\}^{(k)} + g$$

Métodos Iterativos

- **Critério de parada:**

- $\{x\}^{(k)}$ seja suficientemente próximo de $\{x\}^{(k-1)}$ (ou seja, distância entre $\{x\}^{(k)}$ e $\{x\}^{(k-1)}$ seja menor que uma tolerância dada);
- Número máximo de iterações.

MÉTODOS ITERATIVOS: GAUSS-JACOBI

Métodos Iterativos

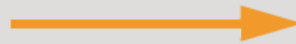
■ Gauss-Jacobi

- Ideia do Método: *escrever a equação em uma forma Explícita:*

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4\end{aligned}$$

(a)

Escrevendo as equações
em uma forma explícita



$$\begin{aligned}x_1 &= [b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)]/a_{11} \\x_2 &= [b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4)]/a_{22} \\x_3 &= [b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4)]/a_{33} \\x_4 &= [b_4 - (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3)]/a_{44}\end{aligned}$$

(b)

$$a_{ii} \neq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

Métodos Iterativos

■ Gauss-Jacobi

- Podemos montar a matriz $[C]$ e o vetor $\{g\}$:

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \{g\} = \begin{Bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{Bmatrix}$$

Métodos Iterativos

■ Gauss-Jacobi

- Agora podemos calcular o vetor solução para cada iteração k :

$$\{\mathbf{x}\}^{(k)} = [\mathbf{C}]\{\mathbf{x}\}^{(k-1)} + \{\mathbf{g}\}$$

- Generalizando em termos de x_i :

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{ii}}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

Métodos Iterativos

■ Gauss-Jacobi

■ Exemplo

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \\ 0x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

■ Matriz [C] e vetor {g}:

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{2}{4} \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \quad \{g\} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Chute inicial

Métodos Iterativos

■ Gauss-Jacobi

■ Exemplo

■ Processo iterativo:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{2}{4} \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(k-1)} + \begin{Bmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Métodos Iterativos

■ Gauss-Jacobi

■ Exemplo

■ 1ª iteração (k = 1)

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{2}{4} \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Métodos Iterativos

■ Gauss-Jacobi

■ Exemplo

■ 2ª iteração (k = 2)

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{2}{4} \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{12} \\ \frac{3}{5} \end{Bmatrix}$$

Métodos Iterativos

■ Gauss-Jacobi

■ Exemplo

- Resultados obtidos para as iterações:

Iteração	$\{x\}^{(k)}$		
1	2.3333	1.0000	1.0000
2	1.6667	-0.0833	0.6000
3	2.1611	0.2833	1.0333
4	1.8944	-0.0569	0.8867
5	2.0568	0.0831	1.0228
6	1.9647	-0.0256	0.9668
7	2.0196	0.0254	1.0102
8	1.9881	-0.0100	0.9898
...	...		
Solução exata	2.0000	0.0000	1.0000

MÉTODOS ITERATIVOS: GAUSS-SEIDEL

Métodos Iterativos

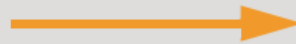
■ Gauss-Seidel

- Ideia do Método: *escrever a equação em uma forma Explícita:*

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4\end{aligned}$$

(a)

Escrevendo as equações
em uma forma explícita



$$\begin{aligned}x_1 &= [b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)]/a_{11} \\x_2 &= [b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4)]/a_{22} \\x_3 &= [b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4)]/a_{33} \\x_4 &= [b_4 - (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3)]/a_{44}\end{aligned}$$

(b)

$$a_{ii} \neq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

Métodos Iterativos

■ Gauss-Seidel

- Isolando as componentes do vetor $\{x\}$:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$

$\vdots$

$$x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

x_1 DA ITERAÇÃO ANTERIOR

Iteração corrente

x_1, x_2 DAS ITERAÇÕES ANTERIORES

Métodos Iterativos

■ Gauss-Seidel

■ Exemplo

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \\ 0x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Chute inicial

■ 1ª iteração (k=1)

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{3}(7 - 1x_2^0 - 1x_3^0) = \frac{7}{3} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{4}(4 - 1x_1^1 - 2x_3^0) = \frac{5}{12} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(5 - 0x_1^1 - 2x_2^1) = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Métodos Iterativos

■ Gauss-Seidel

■ 2ª iteração (k=2)

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{3}(7 - 1x_2^{(1)} - 1x_3^{(1)}) = \frac{23}{12} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{4}(4 - 1x_1^{(2)} - 2x_3^{(1)}) = \frac{5}{48} \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{5}(5 - 0x_1^{(2)} - 2x_2^{(2)}) = \frac{23}{24} \end{cases}$$

■ 3ª iteração (k=3)

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{3}(7 - 1x_2^{(2)} - 1x_3^{(2)}) = \frac{95}{48} \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{4}(4 - 1x_1^{(3)} - 2x_3^{(2)}) = \frac{5}{192} \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{5}(5 - 0x_1^{(3)} - 2x_2^{(3)}) = \frac{95}{96} \end{cases}$$

Métodos Iterativos

■ Gauss-Seidel

■ Exemplo

- Resultados obtidos para as iterações:

Iteração	$\{\mathbf{x}\}^{(k)}$		
1	2.3333	0.4167	0.8333
2	1.9167	0.1042	0.9583
3	1.9792	0.0260	0.9896
4	1.9948	0.0065	0.9974
5	1.9987	0.0016	0.9993
6	1.9997	0.0004	0.9998
7	1.9999	0.0001	1.0000
...	...	...	...
Solução exata	2.0000	0.0000	1.0000

Métodos Iterativos

■ Gauss-Seidel

- Convergência mais rápida para a solução exata quando comparado com o método de Gauss-Jacobi.
 - O método de Gauss-Seidel faz uso de elementos do próprio vetor solução da iteração corrente para atualizar sua estimativa;
 - Quanto mais iterações forem realizadas, mais próximo estará o vetor $\{x\}$ da solução exata do sistema linear.

CONDIÇÃO DE SUFICIÊNCIA PARA CONVERGÊNCIA DO MÉTODO ITERATIVO

Métodos Iterativos

- Condição de Suficiência para Convergência
 - Ao se utilizar um método iterativo, deve-se tomar cuidado, pois dependendo do sistema de equação linear, e da estimativa inicial escolhida, o método pode não convergir!!!
 - Cálculo de coeficientes α_k , onde $1 \leq k \leq n$. *A condição de convergência é que o valor máximo de todos os α_s seja inferior a 1.*

Métodos Iterativos

■ Condição de Suficiência para Convergência

■ Critério das Linhas:

■ Os valores de α_k são calculados conforme a equação:

$$\alpha_k = \frac{\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |\bar{a}_{kj}| \right)}{|\bar{a}_{kk}|}$$

Métodos Iterativos

■ Condição de Suficiência para Convergência

■ Critério das Linhas

■ Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10} = 0.3 < 1$$

$$\alpha_2 = \frac{|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5} = 0.4 < 1$$

$$\alpha_3 = \frac{|a_{31}| + |a_{32}|}{|a_{33}|} = \frac{2+2}{10} = \frac{4}{10} = 0.4 < 1$$

$$\max_{1 \leq k \leq 3} \{ \alpha_k \} = 0.4 < 1$$

Convergência garantida!

Métodos Iterativos

■ Condição de Suficiência para Convergência

■ Critério das Colunas:

■ Os valores de α_k são calculados conforme a equação:

$$\alpha_k = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |\bar{a}_{jk}|}{|\bar{a}_{kk}|}$$

Métodos Iterativos

■ Condição de Suficiência para Convergência

■ Critério das Colunas

■ Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{|a_{21}| + |a_{31}|}{|a_{11}|} = \frac{1+2}{10} = \frac{3}{10} = 0.3 < 1$$

$$\alpha_2 = \frac{|a_{12}| + |a_{32}|}{|a_{22}|} = \frac{2+2}{5} = \frac{4}{5} = 0.8 < 1$$

$$\alpha_3 = \frac{|a_{13}| + |a_{23}|}{|a_{33}|} = \frac{1+1}{10} = \frac{2}{10} = 0.2 < 1$$

$$\max_{1 \leq k \leq 3} \{ \alpha_k \} = 0.8 < 1$$

Convergência garantida!

Métodos Iterativos

■ Condição de Suficiência para Convergência

■ Critério de Sassenfeld:

■ Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10} = 0.3 < 1$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 \cdot |a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{0,3 \cdot 1 + 1}{5} = \frac{1,3}{5} = 0,26 < 1$$

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_1 \cdot |a_{31}| + \alpha_2 \cdot |a_{32}|}{|a_{33}|} = \frac{0,3 \cdot 2 + 0,26 \cdot 2}{10} = \frac{1,12}{10} = 0.112 < 1$$

$$\max_{1 \leq k \leq 3} \{\alpha_k\} = 0.112 < 1$$

Convergência garantida!

...CONTINUA