

Mapa Mental para Estudo de Espaços Vetoriais

Seja V um conjunto não vazio qualquer de objetos no qual estejam definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalares.

Espaço Vetorial

NÃO é um Espaço Vetorial

Não

O conjunto V obedece aos 10 Axiomas (ver item 1)?

Sim

É um Espaço Vetorial

Exemplos

Espaço Euclidiano ($\mathbb{R}^n$)

Polinômios
 $P_n = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$

espaço vetorial incomum

Exemplos

Funções
 $f(x) = \sin(x)$

Matrizes, etc...

Subespaço Vetorial

NÃO é um Subespaço Vetorial

Não

O subconjunto W , em V , obedece o Teorema 4.2.1 (ver item 2)?

Sim

É um Subespaço Vetorial

Combinação Linear

NÃO é uma Combinação Linear dos vetores ($v_1, \dots, v_r$)

Não

Existem escalares tais que $w = a_1v_1 + \dots + a_rv_r$ (ver item 3)?

Sim

É uma Combinação Linear dos vetores ($v_1, \dots, v_r$)

Conjunto LI e LD

Os vetores de um dado conjunto pode ser expresso como uma combinação linear dos outros e a única solução é a trivial? (item 4)

Não

Se o $\det(A) = 0$, o sistema NÃO é POSSIVEL e Determinado (tem mais que uma solução), logo $\{v_1, \dots, v_n\}$ será **LD**

Sim

Para funções, pode-se verificar se é LI usando Wronskiano $W(x) \neq 0$ (item 5).

Se o $\det(A) \neq 0$, o sistema é POSSIVEL e Determinado (tem uma só solução), e se for a trivial, logo $\{v_1, \dots, v_n\}$ será **LI**.

O subespaço é formado por todas as combinações lineares dos vetores de S ? (item 6)

Não

Os vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$ não geram o subespaço vetorial

Sim

Os vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$ geram o subespaço vetorial

O $\det(A) \neq 0$, o sistema é POSSIVEL e Determinado (tem apenas uma solução), logo os vetores geram o subespaço vetorial

Subespaço Gerado por S ger(S)

A $\dim(S)$ é definida como o número (n) de vetores da base. (Ver item 8)

Se $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ é um subespaço LI e S gera V , então S é uma base de V . (Ver item 7)

Mudança de Base (Ver item 9)

Bases e Dimensão

Item 1

DEFINIÇÃO 1 Seja V um conjunto não vazio qualquer de objetos no qual estejam definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalares. Por **adição** entendemos uma regra que associa a cada par de objetos u e v em V um objeto $u + v$, denominado **soma** de u com v ; por **multiplicação por escalar** entendemos uma regra que associa a cada escalar a e cada objeto u em V um objeto au , denominado **múltiplo escalar** de u por a . Se os axiomas seguintes forem satisfeitos por todos os objetos u, v e w em V e quaisquer escalares a e b , diremos que V é um **espaço vetorial** e que os objetos de V são **vetores**.

1. Se u e v são objetos em V , então $u + v$ é um objeto em V .
2. $u + v = v + u$
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$
4. Existe um objeto 0 em V , denominado **vetor nulo** de V , ou **vetor zero**, tal que $0 + u = u + 0 = u$, com qualquer u em V .
5. Dado qualquer u em V , existe algum objeto $-u$, denominado **negativo** de u , tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$.
6. Se a for qualquer escalar e u um objeto em V , então au é um objeto em V .
7. $a(u + v) = au + av$
8. $(a + b)u = au + bu$
9. $a(bu) = (ab)u$
10. $1u = u$

Para mostrar que um conjunto com duas operações é um espaço vetorial

Passo 1. Identifique o conjunto V de objetos que serão os vetores.

Passo 2. Identifique as operações de adição e multiplicação por escalar.

Passo 3. Verifique a validade dos Axiomas 1 e 6; ou seja, que a soma de dois vetores em V produz um vetor em V , e que a multiplicação de um vetor em V por um escalar também produz um vetor em V . O Axioma 1 é denominado **fechamento na adição** e o Axioma 6, **fechamento no produto escalar**.

Passo 4. Confirme que valem os Axiomas 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 e 10.

Item 2

DEFINIÇÃO 1 Um subconjunto W de um espaço vetorial V é denominado **subespaço** de V se W for um espaço vetorial por si só com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V .

TEOREMA 4.2.1 Se W for um conjunto de um ou mais vetores num espaço vetorial V , então W é um subespaço de V se, e só se, as condições seguintes forem válidas.

- (a) Se u e v forem vetores em W , então $u + v$ está em W .
- (b) Se a for um escalar qualquer e u algum vetor de W , então au está em W .

Item 3

DEFINIÇÃO 2 Dizemos que um vetor w num espaço vetorial V é uma **combinação linear** dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_r$ em V se w puder ser expresso na forma

$$w = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r \quad (2)$$

em que $a_1, a_2, \dots, a_r$ são escalares. Esses escalares são denominados **coeficientes** da combinação linear.

Item 4

DEFINIÇÃO 1 Se $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ for um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V , então a equação vetorial

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_rv_r = 0$$

tem uma solução, pelo menos, a saber,

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad \dots, \quad k_r = 0$$

Dizemos que essa é a solução trivial. Se essa for a única solução, dizemos que S é um **conjunto linearmente independente**. Se existem outras soluções além da trivial, dizemos que S é um **conjunto linearmente dependente**.

Item 9

Solução do problema de mudança de base Se mudarmos a base de um espaço vetorial V de alguma base velha $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ para uma base nova $B' = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$, então, dado qualquer vetor v em V , o velho vetor de coordenadas $[v]_B$ está relacionado com o novo vetor de coordenadas $[v]_{B'}$ pela equação

$$[v]_B = P[v]_{B'} \quad (7)$$

onde as colunas de P são os vetores de coordenadas dos vetores da base nova em relação à base velha; ou seja, os vetores coluna de P são

$$[u'_1]_B, [u'_2]_B, \dots, [u'_n]_B \quad (8)$$

Item 5

DEFINIÇÃO 2 Se $f_1 = f_1(x), f_2 = f_2(x), \dots, f_n = f_n(x)$ forem funções $n - 1$ vezes deriváveis no intervalo $(-\infty, \infty)$, então o determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \dots & f'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

é denominado **wronskiano** de $f_1, f_2, \dots, f_n$.

TEOREMA 4.3.4 Se as funções $f_1, f_2, \dots, f_n$ tiverem $n - 1$ derivadas contínuas no intervalo $(-\infty, \infty)$, e se o wronskiano dessas funções não for identicamente zero em $(-\infty, \infty)$, então essas funções formam um conjunto linearmente independente de vetores em $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$.

► EXEMPLO 10 Independência linear usando o wronskiano

Use o wronskiano para mostrar que $f_1 = 1, f_2 = e^x$ e $f_3 = e^{2x}$ são linearmente independentes.

Solução O wronskiano é

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x}$$

Essa função obviamente não é identicamente zero em $(-\infty, \infty)$, portanto, f_1, f_2 e f_3 formam um conjunto linearmente independente. ◀

ADVERTÊNCIA A recíproca do Teorema 4.3.4 é falsa. Se o wronskiano de $f_1, f_2, \dots, f_n$ for identicamente zero em $(-\infty, \infty)$, então nada pode ser concluído sobre a independência linear de $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, podendo esse conjunto de vetores ser linearmente independente ou linearmente dependente.

Item 6

Seja S um conjunto não vazio de vetores em um espaço vetorial V . O **subespaço gerado** por S , denotado por $\text{ger}(S)$ ou $\text{ger}\{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ (quando $S = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$), é o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores de S . Em outras palavras,

$$\text{ger}(S) = \{a_1w_1 + a_2w_2 + \dots + a_rw_r \mid a_1, a_2, \dots, a_r \text{ são escalares}\}.$$

Item 7

DEFINIÇÃO 1 Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ for um conjunto finito de vetores em V , dizemos que S é uma **base** de V se valerem as duas condições a seguir.

- (a) S é linearmente independente.
- (b) S gera V .

Item 8

DEFINIÇÃO 1 A **dimensão** de um espaço vetorial de dimensão finita V é denotada por $\dim(V)$ e é definida como o número de vetores numa base de V . Além disso, definimos o espaço vetorial nulo como tendo dimensão zero.

Um procedimento para calcular $P_{B \rightarrow B'}$

Passo 1. Montamos a matriz $[B' \mid B]$.

Passo 2. Reduzimos a matriz do Passo 1 à forma escalonada reduzida usando operações elementares com as linhas.

Passo 3. A matriz resultante é $[I \mid P_{B \rightarrow B'}]$.

Passo 4. Extraímos a matriz $P_{B \rightarrow B'}$ do lado direito da matriz do Passo 3.

Esse procedimento é capturado no diagrama seguinte.

$$[\text{base nova} \mid \text{base velha}] \xrightarrow{\text{operações com linhas}} [I \mid \text{transição da velha à nova}] \quad (14)$$

Exemplo: Item 1

► EXEMPLO 7 Um conjunto que não é um espaço vetorial

Seja $V = \mathbb{R}^2$ e defina as operações de adição e multiplicação por escalar como segue: se $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, defina

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

e se a for um número real qualquer, defina

$$a\mathbf{u} = (au_1, 0)$$

Por exemplo, se $\mathbf{u} = (2, 4)$, $\mathbf{v} = (-3, 5)$ e $a = 7$, então

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2 + (-3), 4 + 5) = (-1, 9)$$

$$a\mathbf{u} = 7\mathbf{u} = (7 \cdot 2, 0) = (14, 0)$$

A adição é a operação de adição padrão em $\mathbb{R}^2$, mas a operação de multiplicação por escalar não é. Nos exercícios, pedimos para o leitor mostrar que os nove primeiros axiomas de espaço vetorial estão satisfeitos. No entanto, existem certos vetores com os quais o Axioma 10 falha. Por exemplo, se $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ for tal que $u_2 \neq 0$, então

$$1\mathbf{u} = 1(u_1, u_2) = (1 \cdot u_1, 0) = (u_1, 0) \neq \mathbf{u}$$

Assim, V não é um espaço vetorial com as operações fornecidas. ◀

► EXEMPLO 8 Um espaço vetorial incomum

Seja V o conjunto dos números reais positivos e defina as operações de V por

$$u + v = uv \quad [\text{A adição vetorial é a multiplicação numérica}]$$

$$au = u^a \quad [\text{A multiplicação por escalar é a exponenciação numérica}]$$

Assim, por exemplo, $1 + 1 = 1$ e $(2)(1) = 1^2 = 1$. Muito estranho, mas mesmo assim o conjunto V com essas operações satisfaz os 10 axiomas de espaço vetorial e é, portanto, um espaço vetorial. Confirmamos os Axiomas 4, 5 e 7, deixando os demais como exercício.

- Axioma 4 – O vetor zero nesse espaço é o número 1 (ou seja, $\mathbf{0} = 1$), pois

$$u + 1 = u \cdot 1 = u$$

- Axioma 5 – O negativo de um vetor u é seu recíproco (ou seja, $-u = 1/u$), pois

$$u + \frac{1}{u} = u \left(\frac{1}{u} \right) = 1 (= \mathbf{0})$$

- Axioma 7 – Temos $a(u + v) = (uv)^a = u^a v^a = (au) + (av)$. ◀

Exemplo: Item 2

► EXEMPLO 1 O subespaço zero

Se V for um espaço vetorial qualquer e se $W = \{\mathbf{0}\}$ for o subespaço de V que consiste somente no vetor nulo, então W é fechado na adição e na multiplicação por escalar, já que

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad a\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

com qualquer escalar a . Dizemos que W é o *subespaço zero* ou *nulo* de V .

Exemplo: Item 3

► EXEMPLO 14 Combinações lineares

Considere os vetores $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ e $\mathbf{v} = (6, 4, 2)$. Mostre que $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ é uma combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e que $\mathbf{w}' = (4, -1, 8)$ não é uma combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Solução Para que $\mathbf{w}$ seja uma combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, devem existir escalares k_1 e k_2 tais que $\mathbf{w} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$, ou seja,

$$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

Igualando componentes correspondentes, obtemos

$$k_1 + 6k_2 = 9$$

$$2k_1 + 4k_2 = 2$$

$$-k_1 + 2k_2 = 7$$

Resolvendo esse sistema com eliminação gaussiana, obtemos $k_1 = -3$, $k_2 = 2$, de modo que

$$\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

Analogamente, para que $\mathbf{w}'$ seja uma combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, devem existir escalares k_1 e k_2 tais que $\mathbf{w}' = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}$, ou seja,

$$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

ou

$$(4, -1, 8) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Esse sistema de equações é inconsistente (verifique), de modo que não existem tais escalares k_1 e k_2 . Consequentemente, $\mathbf{w}'$ não é uma combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Exemplo: Item 4

► EXEMPLO 3 Independência linear em $\mathbb{R}^4$

Determine se os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2, -1), \quad \mathbf{v}_2 = (4, 9, 9, -4), \quad \mathbf{v}_3 = (5, 8, 9, -5)$$

em $\mathbb{R}^4$ são linearmente dependentes ou independentes.

Solução A dependência ou independência linear desses vetores é determinada pela existência ou não de soluções não triviais da equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

ou, equivalentemente, de

$$k_1(1, 2, 2, -1) + k_2(4, 9, 9, -4) + k_3(5, 8, 9, -5) = (0, 0, 0, 0)$$

Igualando os componentes correspondentes dos dois lados, obtemos o sistema homogêneo

$$k_1 + 4k_2 + 5k_3 = 0$$

$$2k_1 + 9k_2 + 5k_3 = 0$$

$$2k_1 + 9k_2 + 9k_3 = 0$$

$$-k_1 - 4k_2 - 5k_3 = 0$$

Deixamos para o leitor verificar que esse sistema só tem a solução trivial

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 0$$

do que podemos concluir que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, e $\mathbf{v}_3$ são linearmente independentes.

Exemplo: Item 5

► EXEMPLO 9 Independência linear usando o wronskiano

Use o wronskiano para mostrar que $\mathbf{f}_1 = x$ e $\mathbf{f}_2 = \sin x$ são linearmente independentes.

Solução O wronskiano é

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x \cos x - \sin x$$

Essa função não é identicamente zero no intervalo $(-\infty, \infty)$, porque, por exemplo,

$$W\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Assim, as funções são linearmente independentes.

► EXEMPLO 10 Independência linear usando o wronskiano

Use o wronskiano para mostrar que $\mathbf{f}_1 = 1$, $\mathbf{f}_2 = e^x$ e $\mathbf{f}_3 = e^{2x}$ são linearmente independentes.

Solução O wronskiano é

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x}$$

Essa função obviamente não é identicamente zero em $(-\infty, \infty)$, portanto, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ e $\mathbf{f}_3$ formam um conjunto linearmente independente. ◀

Exemplo: Item 6

► EXEMPLO 15 Testando o gerado

Determine se $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 3)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Solução Devemos determinar se um vetor arbitrário $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ em $\mathbb{R}^3$ pode ser expresso como uma combinação linear

$$\mathbf{b} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

dos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Escrevendo essa equação em termos dos componentes, temos

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1, 1, 2) + k_2(1, 0, 1) + k_3(2, 1, 3)$$

ou

$$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + k_2 + 2k_3, k_1 + k_3, 2k_1 + k_2 + 3k_3)$$

ou

$$k_1 + k_2 + 2k_3 = b_1$$

$$k_1 + k_3 = b_2$$

$$2k_1 + k_2 + 3k_3 = b_3$$

Assim, nosso problema se reduz a determinar se esse sistema é consistente para quaisquer valores de b_1 , b_2 e b_3 . Uma maneira de verificar isso é usar as partes (e) e (g) do Teorema 2.3.8, que afirma que o sistema é consistente se, e só se, sua matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

tem um determinante não nulo. Mas isso não ocorre; deixamos para o leitor confirmar que $\det(A) = 0$, de modo que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ não geram $\mathbb{R}^3$. ◀

Exemplo: Item 7

► EXEMPLO 3 Uma outra base de $\mathbb{R}^3$

Mostre que os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Solução Devemos mostrar que esses vetores são linearmente independentes e que geram $\mathbb{R}^3$. Para mostrar a independência linear, devemos mostrar que a equação vetorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad (1)$$

só tem a solução trivial, e para provar que esses vetores geram $\mathbb{R}^3$, devemos mostrar que cada vetor $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$ pode ser expresso como

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b} \quad (2)$$

Igualando componentes correspondentes dos dois lados, essas duas equações podem ser expressas como os sistemas lineares

$$\begin{array}{rcl} c_1 + 2c_2 + 3c_3 & = & 0 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 & = & 0 \\ c_1 + 4c_3 & = & 0 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} c_1 + 2c_2 + 3c_3 & = & b_1 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 & = & b_2 \\ c_1 + 4c_3 & = & b_3 \end{array} \quad (3)$$

(verifique). Assim, reduzimos o problema a mostrar que o sistema homogêneo (3) só tem a solução trivial, e que o sistema não homogêneo (5) é consistente com quaisquer valores de b_1 , b_2 e b_3 . Mas os dois sistemas (3) e (5) têm a mesma matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

de modo que segue das partes (b), (e) e (g) do Teorema 2.3.8 que podemos provar ambos resultados simultaneamente mostrando que $\det(A) \neq 0$. Deixamos para o leitor confirmar que $\det(A) = -1$, o que prova que os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo: Item 8

▶ EXEMPLO 1 Dimensões de alguns espaços vetoriais familiares

$$\begin{aligned}\dim(R^n) &= n && \text{A base canônica tem } n \text{ vetores.} \\ \dim(P_n) &= n + 1 && \text{A base canônica tem } n + 1 \text{ vetores.} \\ \dim(M_{mn}) &= mn && \text{A base canônica tem } mn \text{ vetores.}\end{aligned}$$

Exemplo: Item 9

▶ EXEMPLO 3 De novo o Exemplo 1

No Exemplo 1, consideramos as bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ de R^2 , em que

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1), \quad \mathbf{u}'_1 = (1, 1), \quad \mathbf{u}'_2 = (2, 1)$$

- (a) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição de B' para B .
(b) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição de B para B' .

Passo 1: Definir as bases

A base canônica B é formada pelos vetores padrão:

$$B = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

Agora, considere a nova base B' :

$$B' = \{(1, 1), (2, 1)\}$$

Passo 2: Encontrar a matriz de transição $P_{B' \rightarrow B}$

Solução (a) Aqui B' é a base velha e B é a base nova, portanto,

$$[\text{base nova} \mid \text{base velha}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como o lado esquerdo já é a matriz identidade, não precisamos reduzir. Vemos claramente que a matriz de transição é

$$P_{B' \rightarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que está de acordo com o resultado no Exemplo 1.

Passo 3: Encontrar a matriz de transição $P_{B \rightarrow B'}$

Solução (b) Aqui B é a base velha e B' é a base nova, portanto,

$$[\text{base nova} \mid \text{base velha}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reduzindo essa matriz até tornar o lado esquerdo a identidade, obtemos (verifique)

$$[I \mid \text{transição da velha para a nova}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

de modo que a matriz de transição é

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

que também está de acordo com o resultado no Exemplo 1. ◀

Passo 4: Aplicar a Mudança de Base

Agora, vamos considerar um vetor qualquer:

$$\mathbf{v} = (5, -9)$$

1. Passo 4.1: Escrever $\mathbf{v}$ na base antiga B

- Como B é a base canônica, o vetor já está escrito nela:

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$

2. Passo 4.2: Encontrar $[\mathbf{v}]_{B'}$

- Aplicamos a matriz $P_{B \rightarrow B'}$:

$$\begin{aligned}[\mathbf{v}]_{B'} &= P_{B \rightarrow B'} [\mathbf{v}]_B \\ [\mathbf{v}]_{B'} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Multiplicamos:

$$\begin{bmatrix} (-1 \cdot 5) + (2 \cdot -9) \\ (1 \cdot 5) + (-1 \cdot -9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 - 18 \\ 5 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Então, o vetor $\mathbf{v} = (5, -9)$ na nova base B' é:

$$[\mathbf{v}]_{B'} = (-23, 14)$$