UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS SERTÃO
EIXO TECNOLOGIA

Mecânica dos Sólidos I

Prof. Dr. Alverlando Ricardo

Aula 2: Estática dos Pontos Materiais

RESUMO DA AULA

Estudaremos: Efeitos de força que atuam sobre particulas em um único plano e no espaço;

1) *Resultante de várias forças concorrentes em um plano*
2) *Equilíbrio de uma partícula;*
3) *Componentes Retangulares de uma Força no Espaço;*
4) *Equilíbrio de uma Partícula no Espaço.*

FORÇAS EM UM PLANO

RESULTANTE DE VÁRIAS FORÇAS CONCORRENTES EM UM PLANO

RESULTANTE DE VÁRIAS FORÇAS

Uma FORÇA representa a ação de um corpo sobre outro através de contato direto ou à distância e é geralmente caracterizada por:

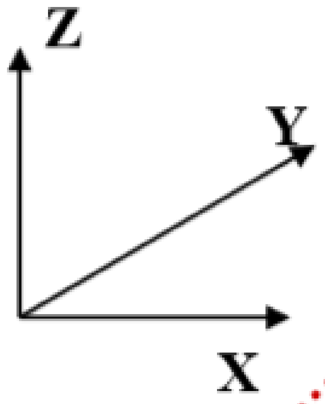
Características:

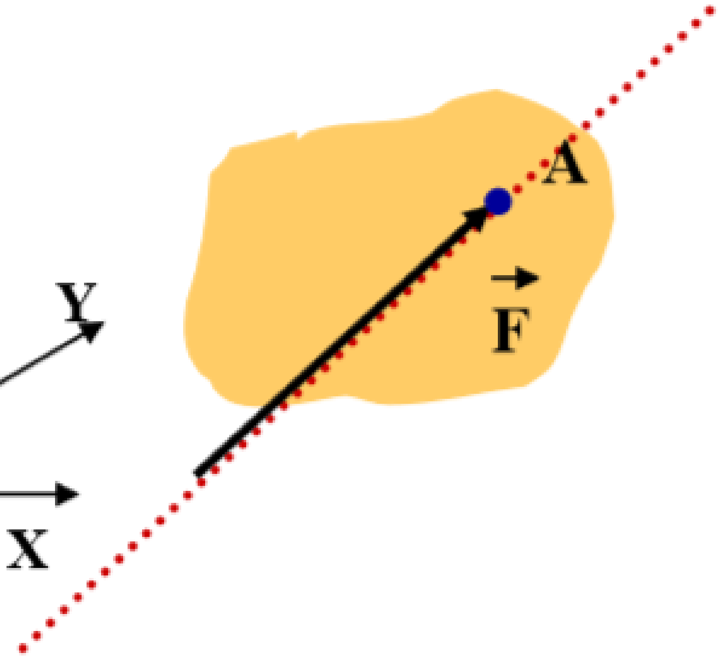
. Ponto de aplicação

. Intensidade

. Direção

. Sentido

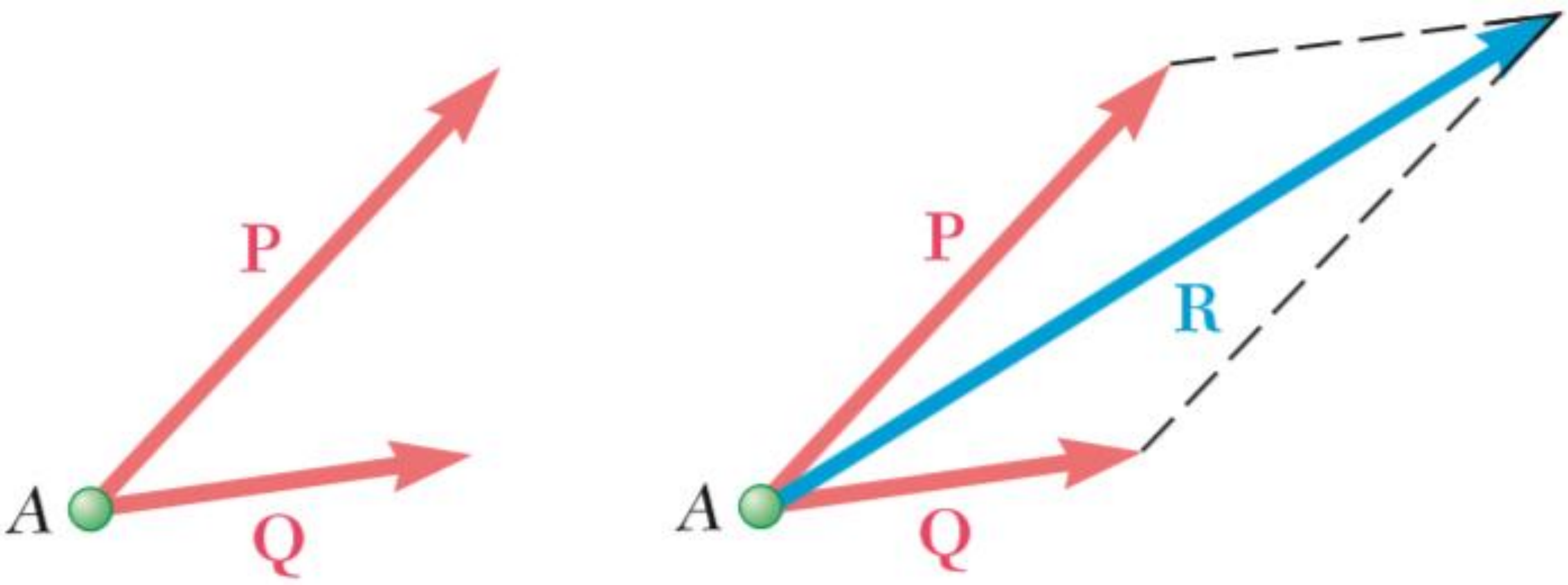




forças podem ser representadas por vetores

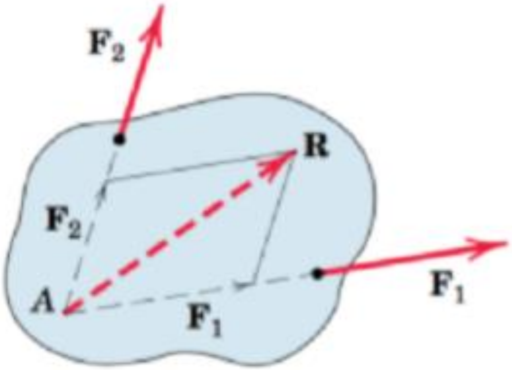
RESULTANTE DE VÁRIAS FORÇAS

Duas ou mais forças agindo sobre uma partícula podem ser substituídas por uma única força ***R*** ***(RESULTANTE)*** que tem o mesmo efeito sobre a partícula.



RESULTANTE DE VÁRIAS FORÇAS

A **RESULTANTE** pode ser determinada por soluções:

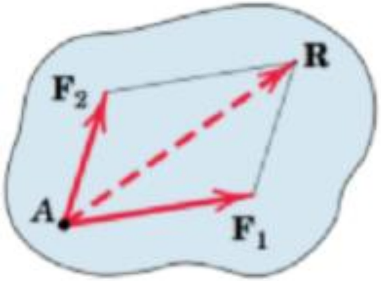


❑ **GRÁFICAS/Trigonométricas:**

➢ regra do paralelogramo;

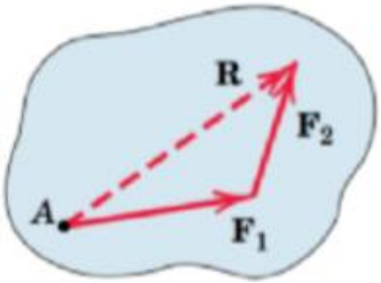
➢ triângulo de forças;

➢ Polígono de forças.



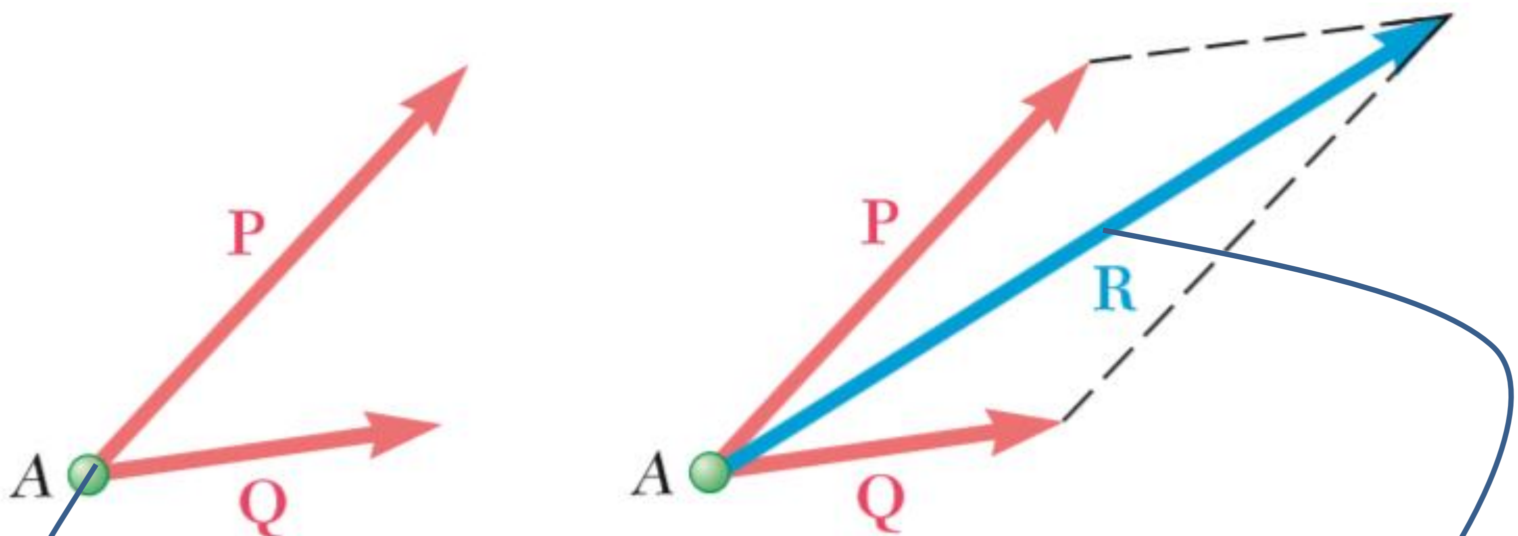
❑ **ANALÍTICAS:**

➢ Componentes retangulares.



RESULTANTE DE VÁRIAS FORÇAS

- **GRÁFICAS:**
  - **regra do paralelogramo**:
  - **triângulo de forças;**
  - **Polígono de forças.**

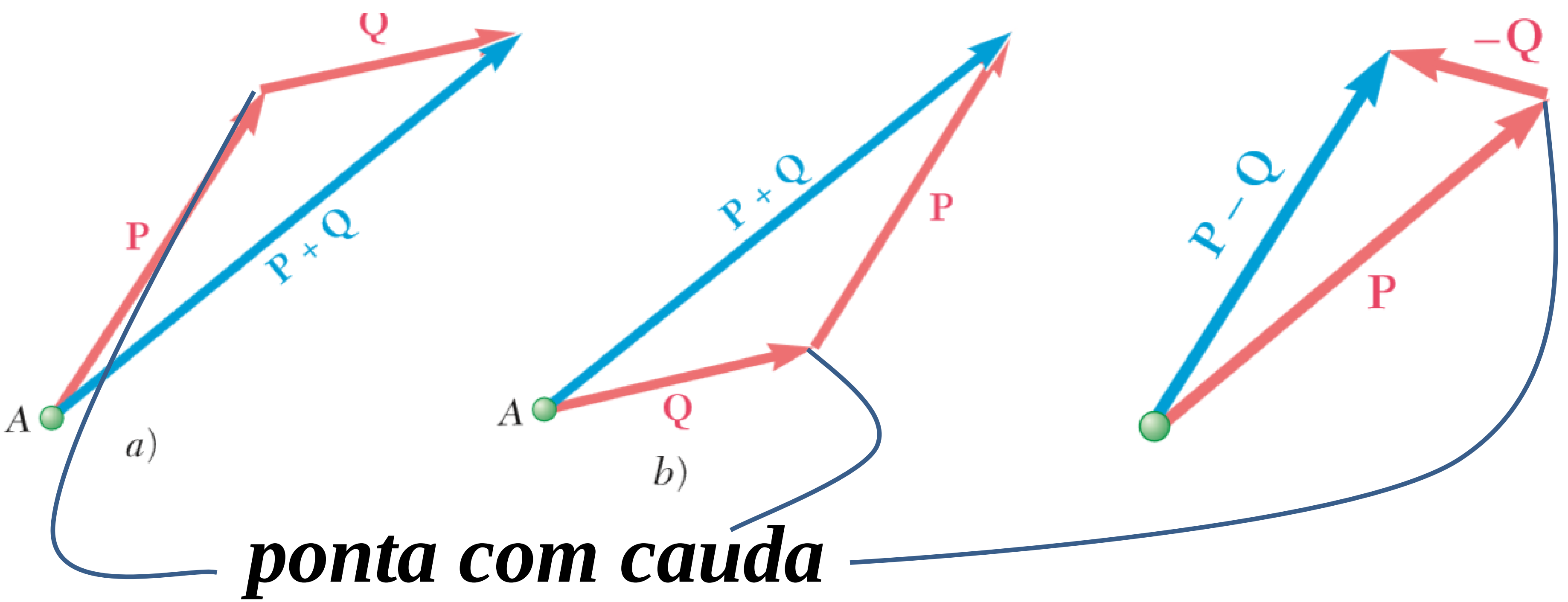


Cauda com cauda

Se o desenho estiver em escala, é só medir o tamanho de R.
Caso contrário, aplica-se relações trigonométricas (Exemplo: 2.1)

RESULTANTE DE VÁRIAS FORÇAS

- **GRÁFICAS:**
  - regra do paralelogramo;
  - **triângulo de forças:** derivado a partir da regra do paralelogramo.



RESULTANTE DE VÁRIAS FORÇAS

- **GRÁFICAS:**

➢ **Polígono de forças:** regra do triângulo repetida.

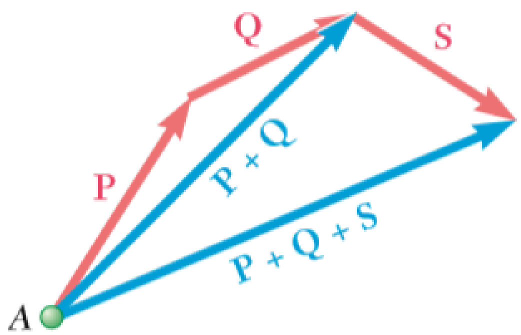


Fig. 2.9

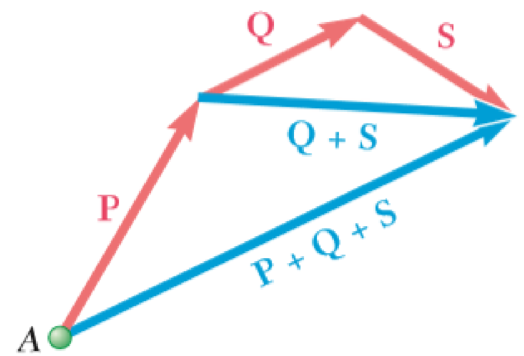


Fig. 2.11

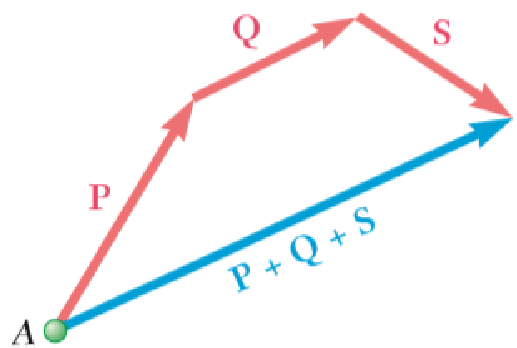


Fig. 2.10

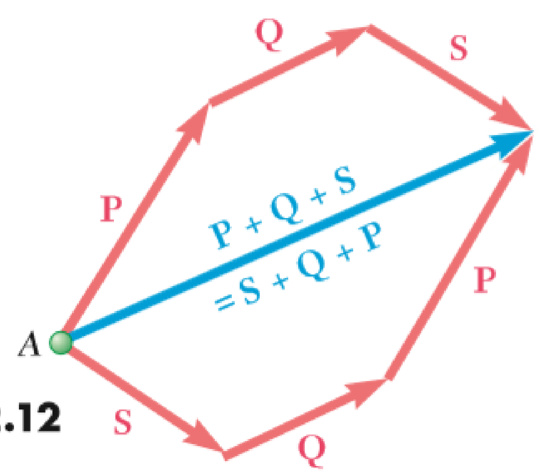


Fig. 2.12

RESULTANTE DE VÁRIAS FORÇAS

Mas como calcular a intensidade da força **RESULTANTE?**

LEI DOS SENOS E COSSENOS

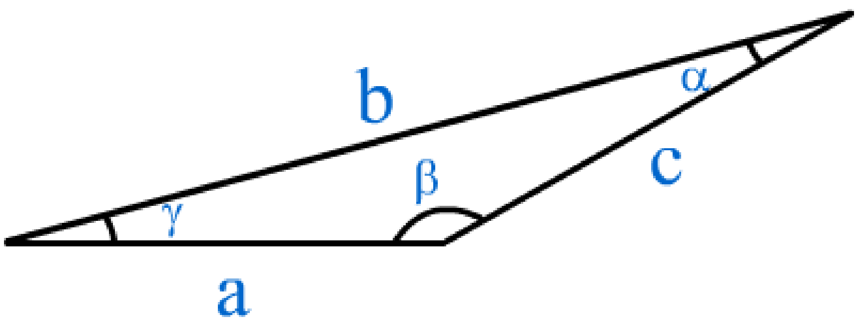
Mas como Calcular a intensidade da força **RESULTANTE?**

LEI DOS SENOS ***LEI DOS COSSENOS***

LEI DOS SENOS E COSSENOS

Mas como Calcular a intensidade da força **RESULTANTE?**

LEI DOS SENOS ***LEI DOS COSSENOS***

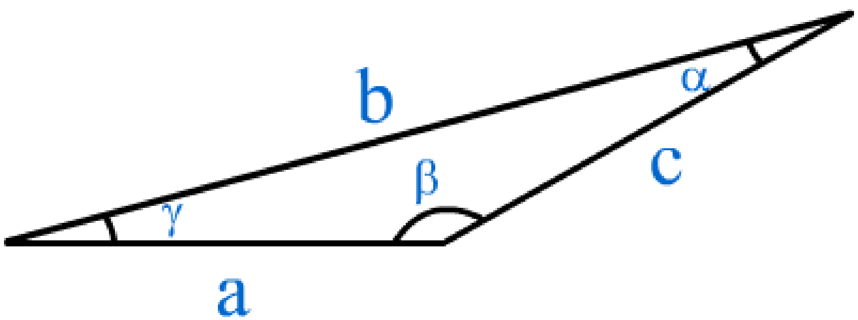


$$\frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)}$$

LEI DOS SENOS E COSSENOS

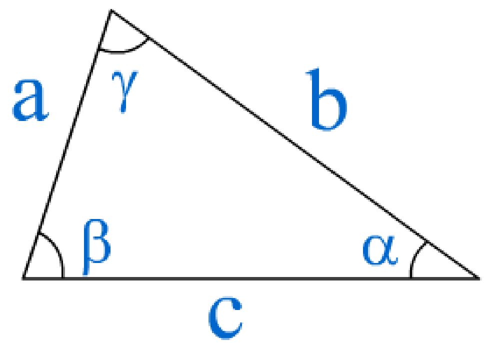
Mas como Calcular a intensidade da força **RESULTANTE?**

LEI DOS SENOS



$$\frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{c}{\text{sen}(\gamma)}$$

LEI DOS COSSENOS



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos(\beta)$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab.\cos(\gamma)$$

LEI DOS SENOS E COSSENOS

DEMONSTRAÇÃO: *LEI DOS SENOS*

Sabemos que:

$b = a + c$

Do produto vetorial:

$b \times a = (a + c) \times a$

$b \times a = a \times a + c \times a$

Pela definição de produto vetorial:

$|a \times a| = 0$

$|b \times a| = ba\,\mathrm{sen}(\gamma)$

$|c \times a| = ca\,\mathrm{sen}(180-\beta)$

Logo, teremos que:

$ba\,\mathrm{sen}(\gamma) = ca\,\mathrm{sen}(180-\beta)$

$b\,\mathrm{sen}(\gamma) = c\,\mathrm{sen}(\beta)$

Sabemos que:

$b = a + c$

Do produto vetorial:

$b \times c = (a + c) \times c$

$b \times c = c \times c + a \times c$

Pela definição de produto vetorial:

$|c \times c| = 0$

$|b \times c| = bc\,\mathrm{sen}(\alpha)$

$|a \times c| = ac\,\mathrm{sen}(180-\beta)$

Logo, teremos que:

$bc\,\mathrm{sen}(\alpha) = ac\,\mathrm{sen}(180-\beta)$

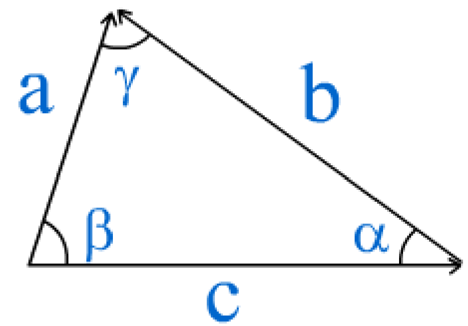
$b\,\mathrm{sen}(\alpha) = a\,\mathrm{sen}(\beta)$

$$\frac{b}{\mathrm{sen}(\beta)} = \frac{a}{\mathrm{sen}(\alpha)} = \frac{c}{\mathrm{sen}(\gamma)}$$

Demonstração das leis: http://www.ctec.ufal.br/professor/enl/mecsol/Mec.html

LEI DOS SENOS E COSSENOS

DEMONSTRAÇÃO: ***LEI DOS COSSENOS***



Sabemos que:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

Do produto escalar, temos:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$$

$$a^2 = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

Pela definição de produto escalar:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = bc.\cos(180° - \alpha)$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = bc.[-\cos(\alpha)]$$

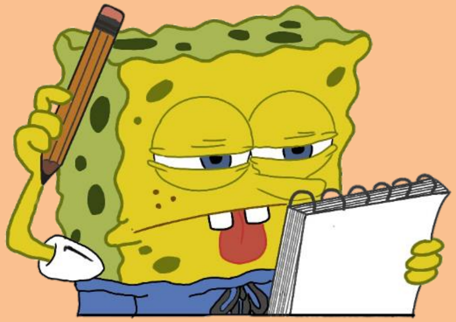
Teremos que:

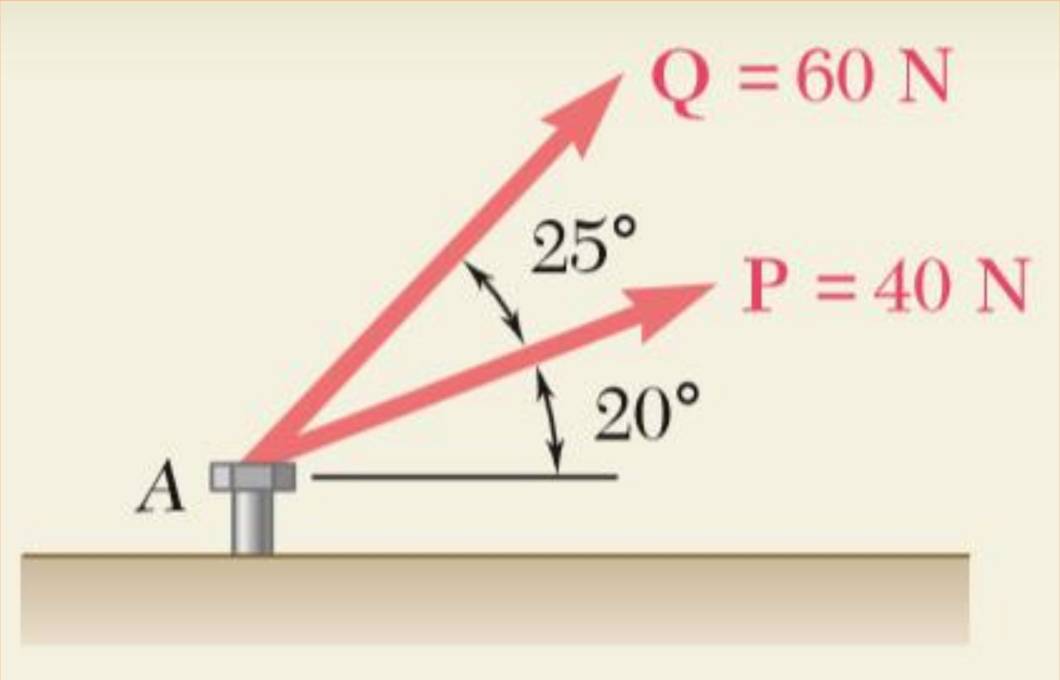
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\alpha)$$

Demonstração das leis: http://www.ctec.ufal.br/professor/enl/mecsol/Mec.html

Exemplo 2.1 - BEER

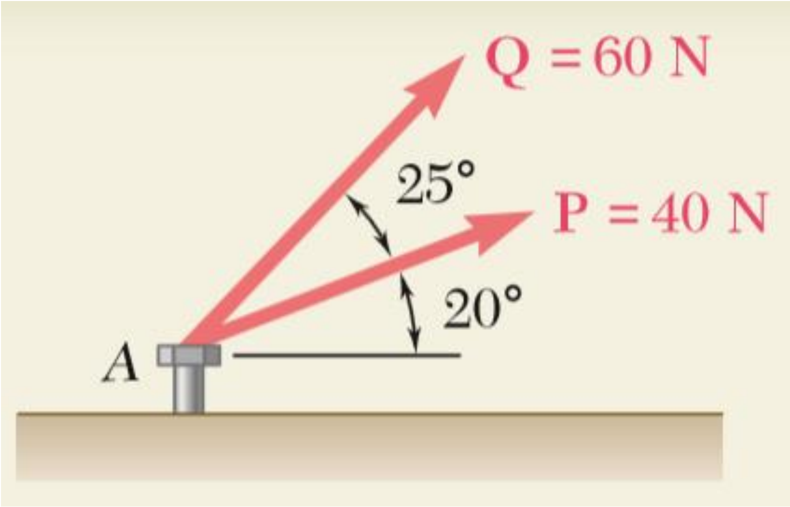
- **Duas forças P e Q agem em um parafuso. Determine sua resultante.**

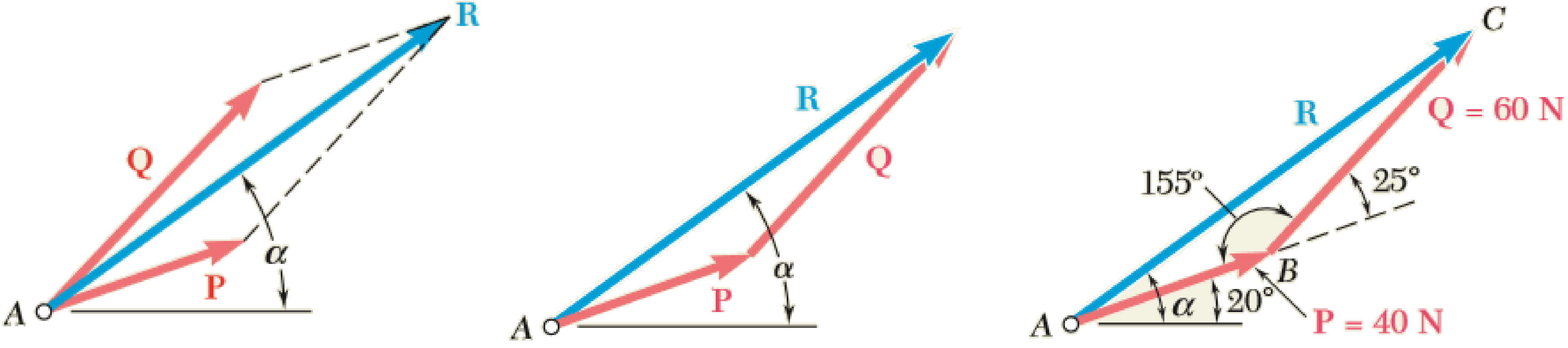




Exemplo 2.1 - BEER

➢ **RESOLUÇÃO:**

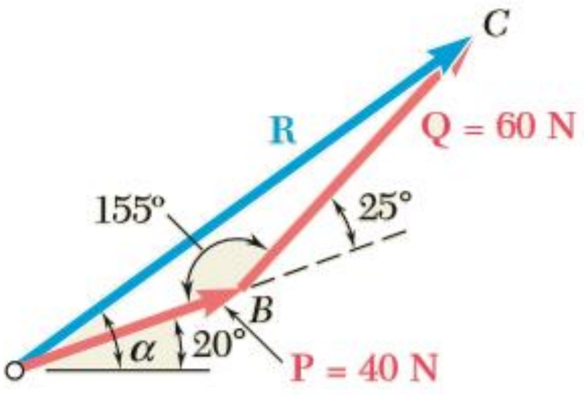




Exemplo 2.1 - BEER

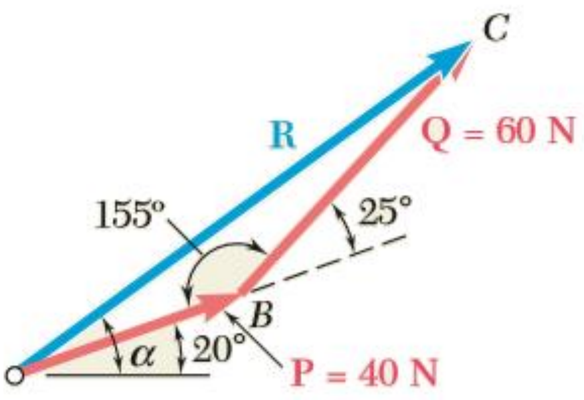
- **Aplicando a Lei dos Cossenos:**

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$$
$$R^2 = (40\ \text{N})^2 + (60\ \text{N})^2 - 2(40\ \text{N})(60\ \text{N}) \cos 155°$$
$$R = 97.73\ \text{N}$$



Exemplo 2.1 - BEER

➢ Aplicando a Lei dos Cossenos:



$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos B$$
$$R^2 = (40\text{ N})^2 + (60\text{ N})^2 - 2(40\text{ N})(60\text{ N})\cos 155°$$
$$R = 97.73\text{ N}$$

➢ Aplicando a Lei dos Senos:

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} \qquad \frac{\sin A}{60\text{ N}} = \frac{\sin 155°}{97.73\text{ N}}$$

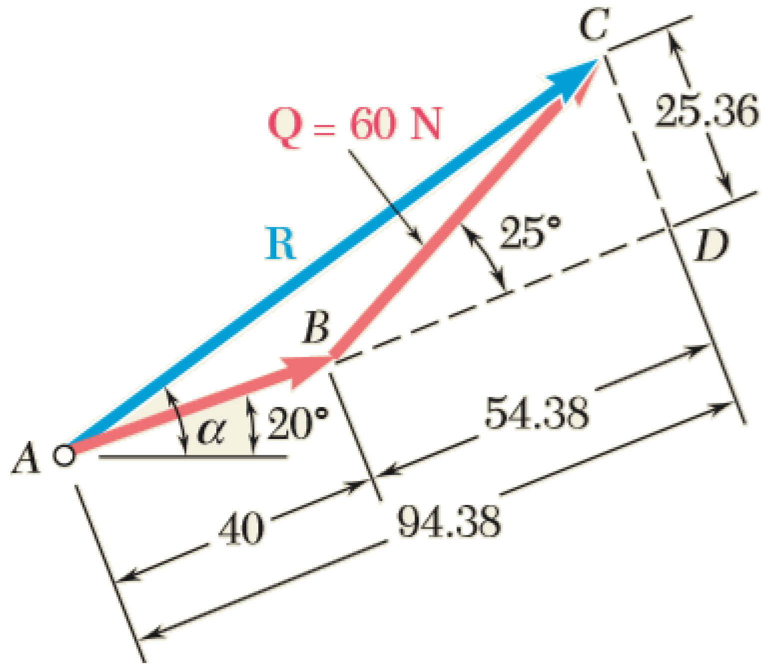
$$\mathbf{R} = 97.7\text{ N} \measuredangle 35.0°$$

$$\sin A = \frac{(60\text{ N})\sin 155°}{97.73\text{ N}}$$

$$A = 15.04° \qquad \alpha = 20° + A = 35.04°$$

Exemplo 2.1 - BEER

- **Solução Trigonométrica Alternativa:**



$$CD = (60\ \text{N})\sin 25° = 25.36\ \text{N}$$
$$BD = (60\ \text{N})\cos 25° = 54.38\ \text{N}$$

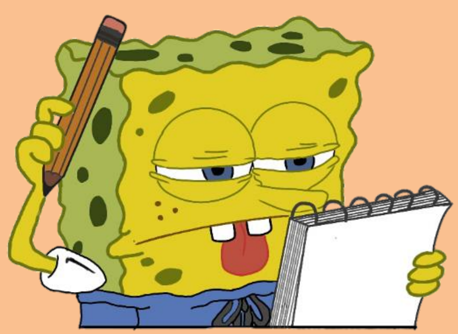
$$\tan A = \frac{25.36\ \text{N}}{94.38\ \text{N}} \qquad A = 15.04°$$

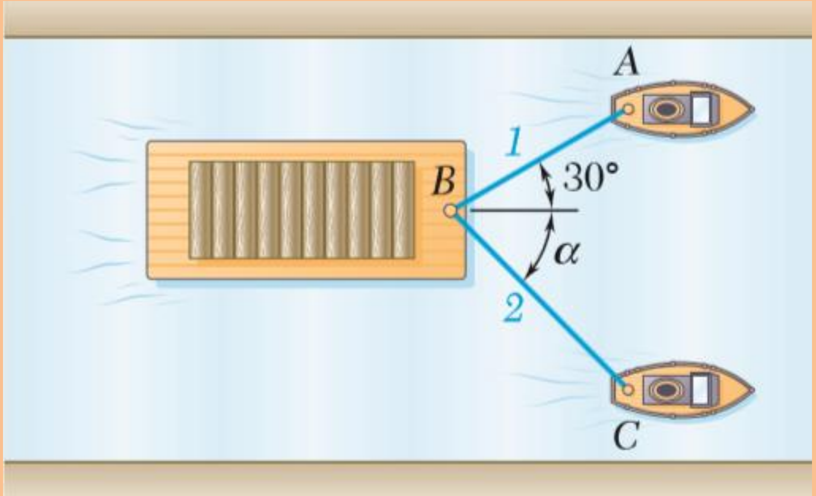
$$R = \frac{25.36}{\sin A} \qquad R = 97.73\ \text{N}$$

$$\alpha = 20° + A = 35.04° \qquad \mathbf{R} = 97.7\ \text{N} \measuredangle 35.0°$$

Exemplo 2.2 - BEER

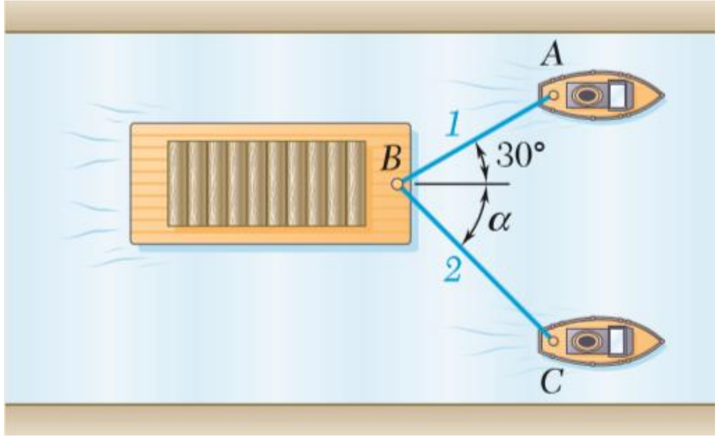
- **Uma barcaça é puxada por dois rebocadores. Se a resultante das forças exercidas pelos rebocadores for 5000 *lb* dirigida ao longo do eixo da barcaça, determine:**
- ***(a) a força em cada um dos cabos sabendo que $\alpha = 45°$,***
- ***(b) o valor de α para qual a força na corda 2 é mínima.***

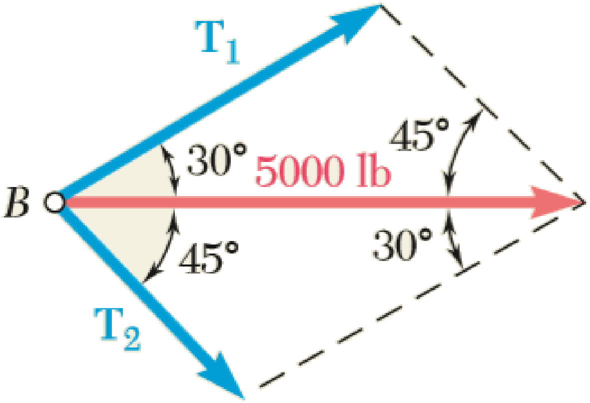


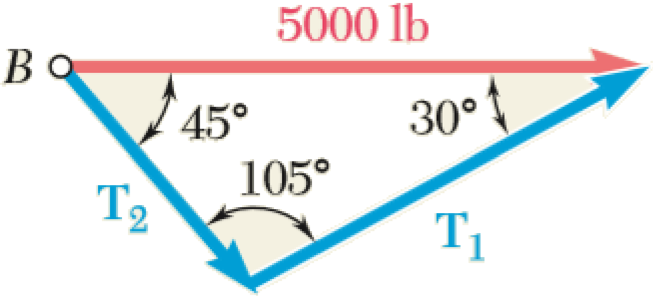


Exemplo 2.2 - BEER

- **RESOLUÇÃO:**

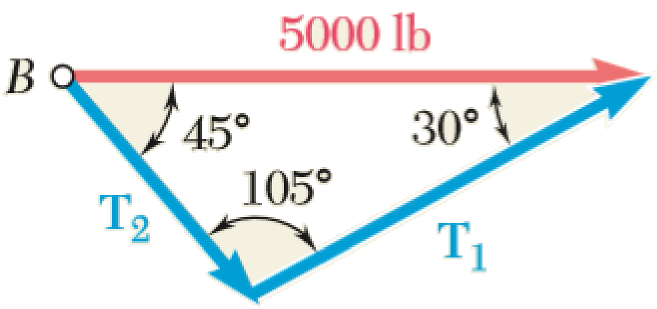






Exemplo 2.2 - BEER

- **Aplicando a Lei dos Senos:**

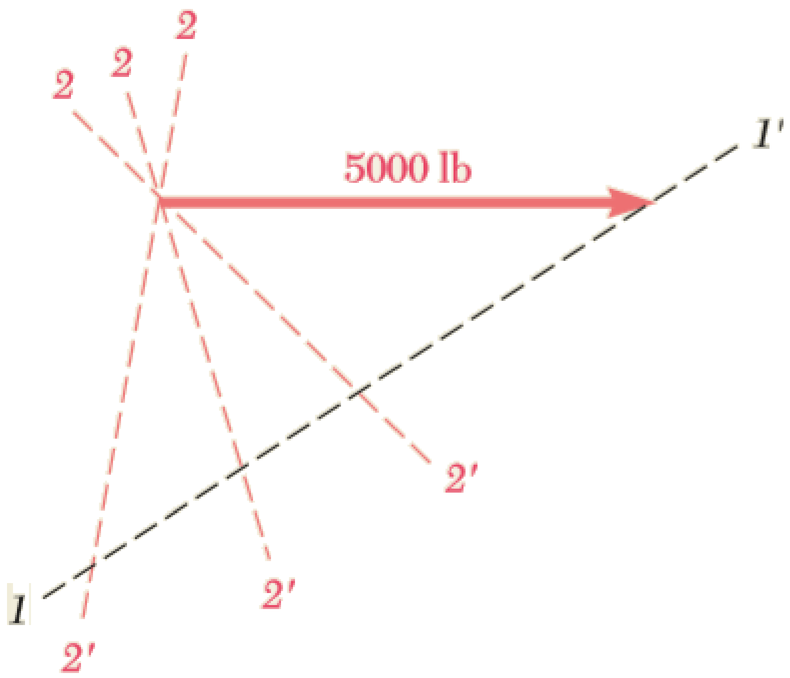


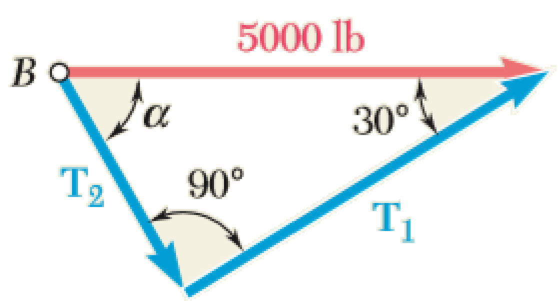
$$\frac{T_1}{\sin 45°} = \frac{T_2}{\sin 30°} = \frac{5000 \text{ lb}}{\sin 105°}$$

$$T_1 = 3660 \text{ lb} \qquad T_2 = 2590 \text{ lb}$$

Exemplo 2.2 - BEER

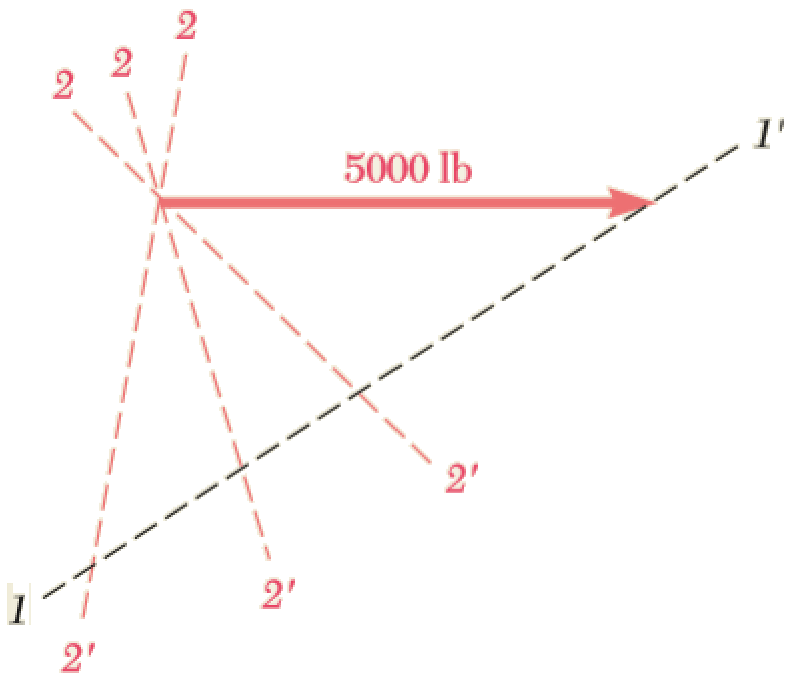
- **b. Valor de T_2 mínimo.**





Exemplo 2.2 - BEER

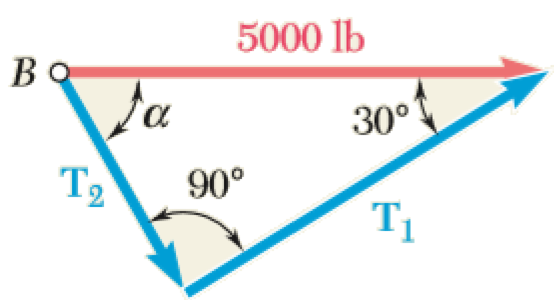
➢ **b. Valor de T_2 mínimo.**



$$T_2 = (5000 \text{ lb}) \sin 30° = 2500 \text{ lb}$$

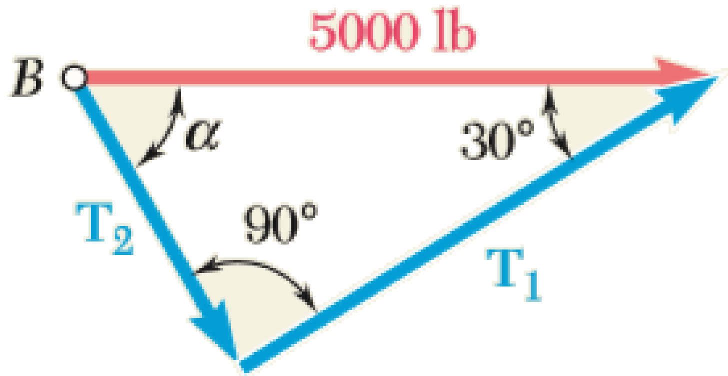
$$T_1 = (5000 \text{ lb}) \cos 30° = 4330 \text{ lb}$$

$$\alpha = 90° - 30°$$



DESAFIO: Exemplo 2.2 - BEER

- **RESOVER A LETRA "b" USANDO O CONCEITO DE DERIVADA.**

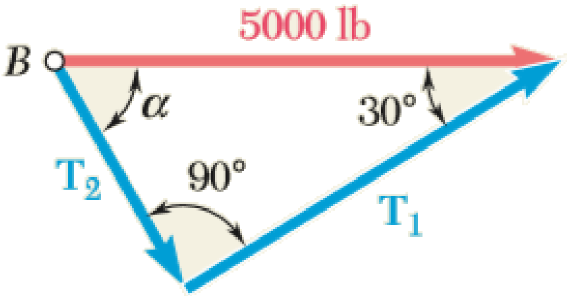


- **SABENDO QUE:**

$$f(x) = \frac{1}{sen(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-\cos(x)}{sen^2(x)}$$

DESAFIO: Exemplo 2.2 - BEER

- **RESOVER A LETRA "b" USANDO O CONCEITO DE DERIVADA.**



$$\frac{T_2}{sen(30)} = \frac{T_1}{sen(\alpha)} = \frac{5000}{sen(\beta)}$$

$$T_1 = 5000\,\frac{sen(\alpha)}{sen(\beta)}$$

$$T_2 = \frac{sen(30)}{sen(\alpha)}\,T_1 \quad \Rightarrow \quad T_2(\beta) = \frac{2500}{sen(\beta)}$$

RESULTANTE DE VÁRIAS FORÇAS

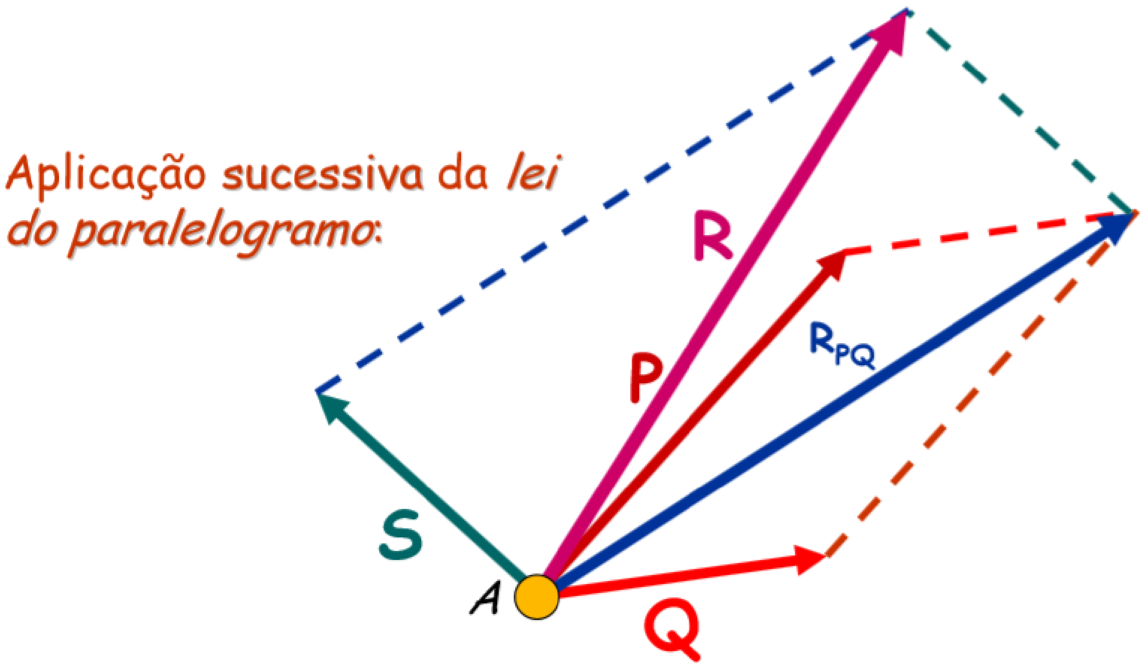
A **RESULTANTE** pode ser determinada por soluções:

- **GRÁFICAS:**
  - regra do paralelogramo;
  - triângulo de forças;
  - Polígono de forças.

- **ANALÍTICAS:**
  - Componentes retangulares.

RESULTANTE DE VÁRIAS FORÇAS

- A princípio é possível encontrar a força resultante aplicando-se sucessivamente a lei do paralelogramo ou a regra do triângulo.

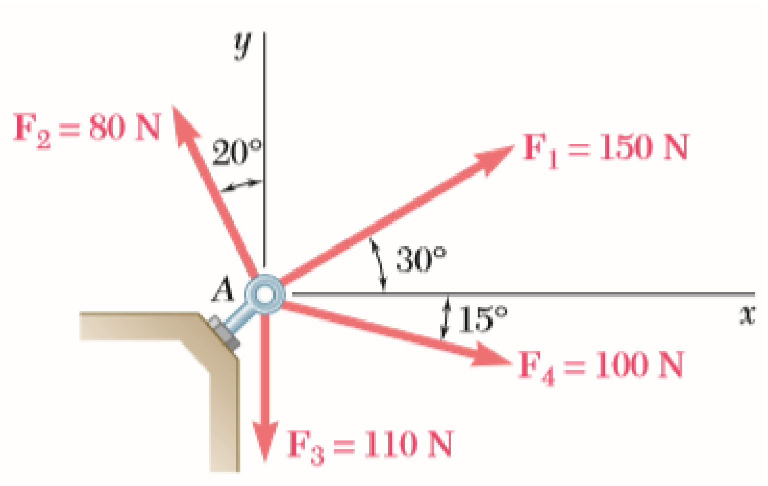


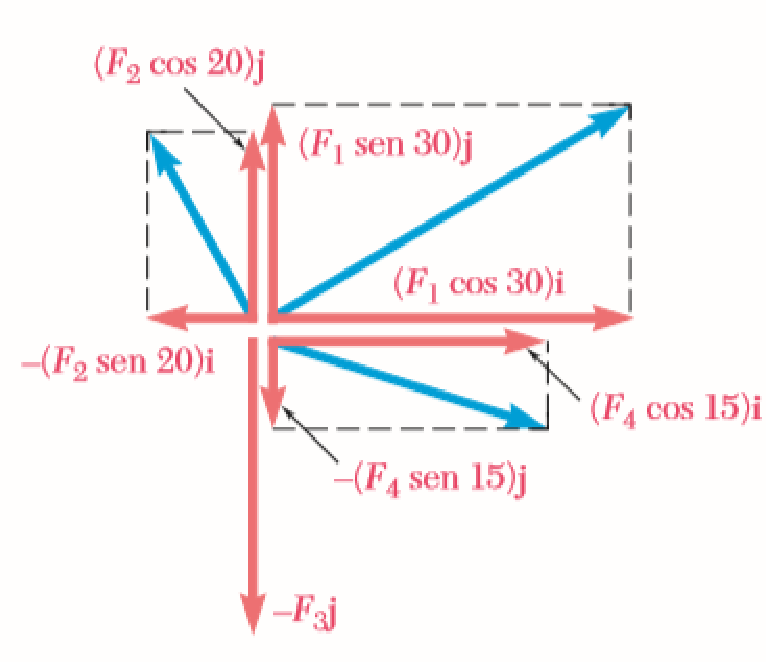
- A ordem da combinação dos vetores originais não altera a força resultante (a soma de vetores é comutativa).

RESULTANTE DE VÁRIAS FORÇAS

- Porém, quando 3 ou mais forças atuam no elemento sólido, a aplicação dos métodos Gráficos podem se tornar onerosas!

- Nesse Caso, uma solução ANALÍTICA pode ser obtida com a chamada DECOMPOSIÇÃO RETANGULAR!

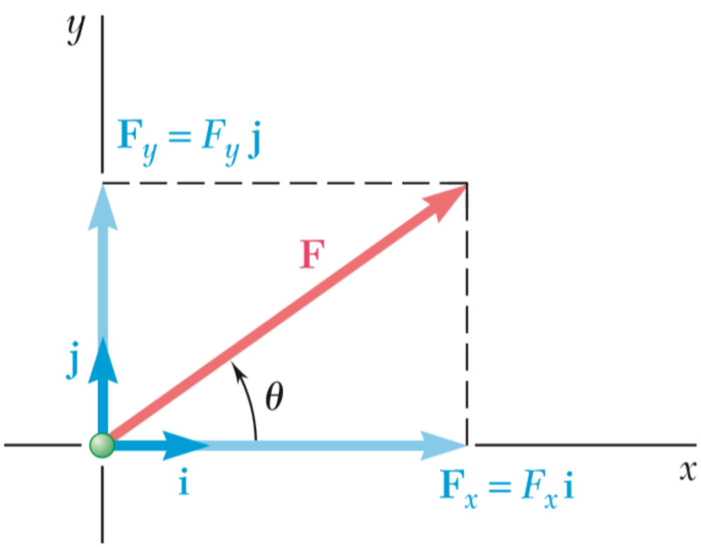




RESULTANTE DE VÁRIAS FORÇAS

- **ANALÍTICAS:** Componentes retangulares.

- Estabelecendo direções de decomposição perpendiculares, o paralelogramo se transforma num retângulo, o que leva a expressões analíticas simples para os componentes da força.



$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{x} + \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{y}$$

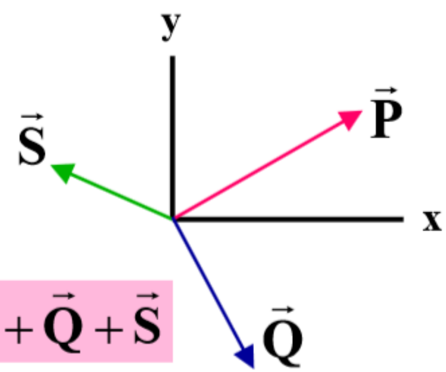
$$\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{x} = F_x\hat{\mathbf{i}} \qquad \boxed{F_x = F\cos\theta}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{y} = F_y\hat{\mathbf{j}} \qquad \boxed{F_y = F\sin\theta}$$

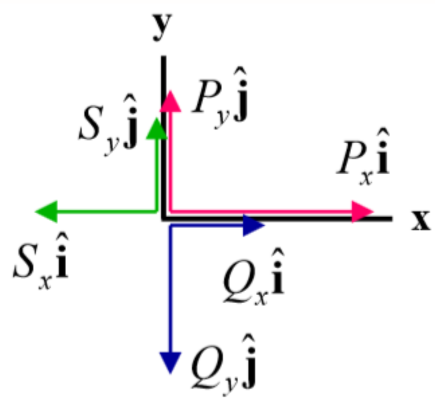
RESULTANTE DE VÁRIAS FORÇAS

- **ANALÍTICAS:** Componentes retangulares.

- Os componentes da força ***RESULTANTE (R)*** de um conjunto de forças (***P, Q, S,*** *etc*) concorrentes podem ser determinados através das somas dos componentes das forças envolvidas (P_x, P_y), (Q_x, Q_y), (S_x, S_y) *etc*.



$$\boxed{\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{Q}} + \vec{\mathbf{S}}}$$

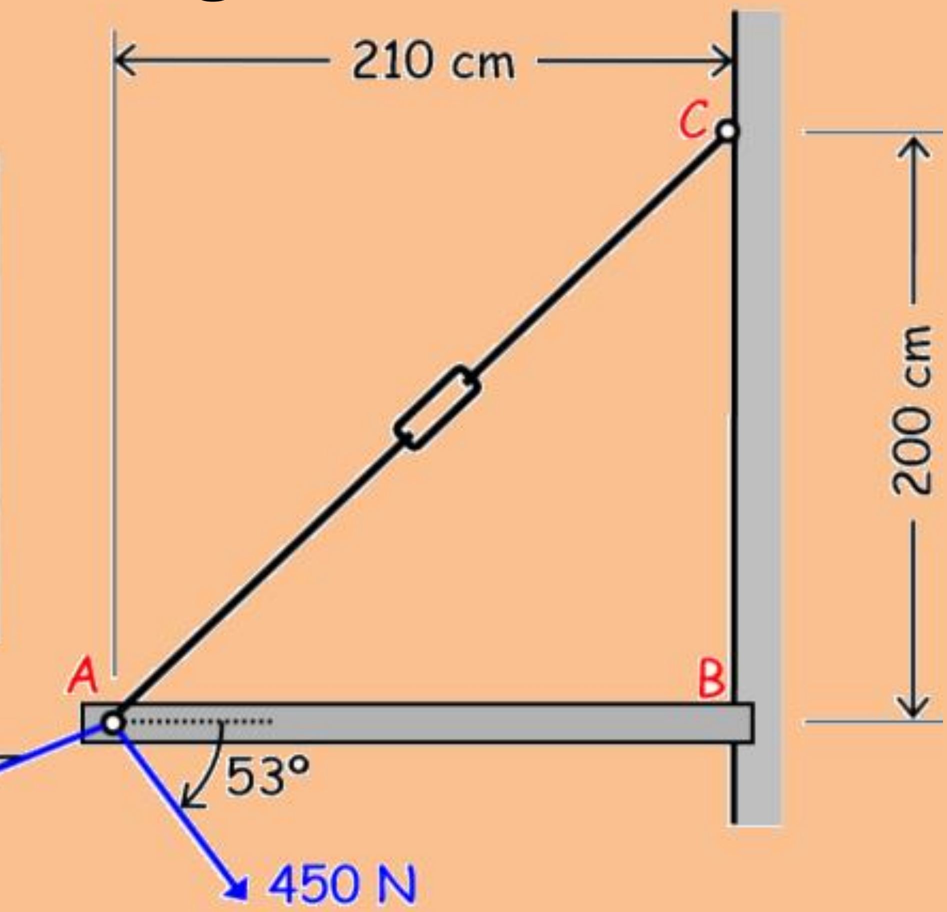


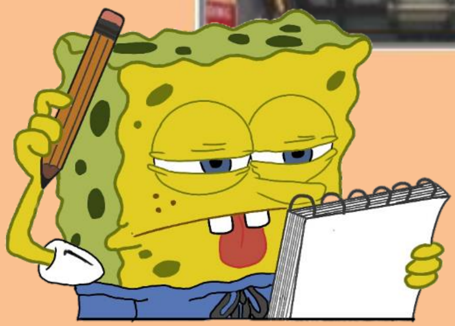
$$\vec{\mathbf{R}} = \left(P_x\hat{\mathbf{i}} + P_y\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(Q_x\hat{\mathbf{i}} + Q_y\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(S_x\hat{\mathbf{i}} + S_y\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \underbrace{\left(P_x + Q_x + S_x\right)}_{R_x}\hat{\mathbf{i}} + \underbrace{\left(P_y + Q_y + S_y\right)}_{R_y}\hat{\mathbf{j}}$$

Exemplo Notas de Aula Prof. Nobre

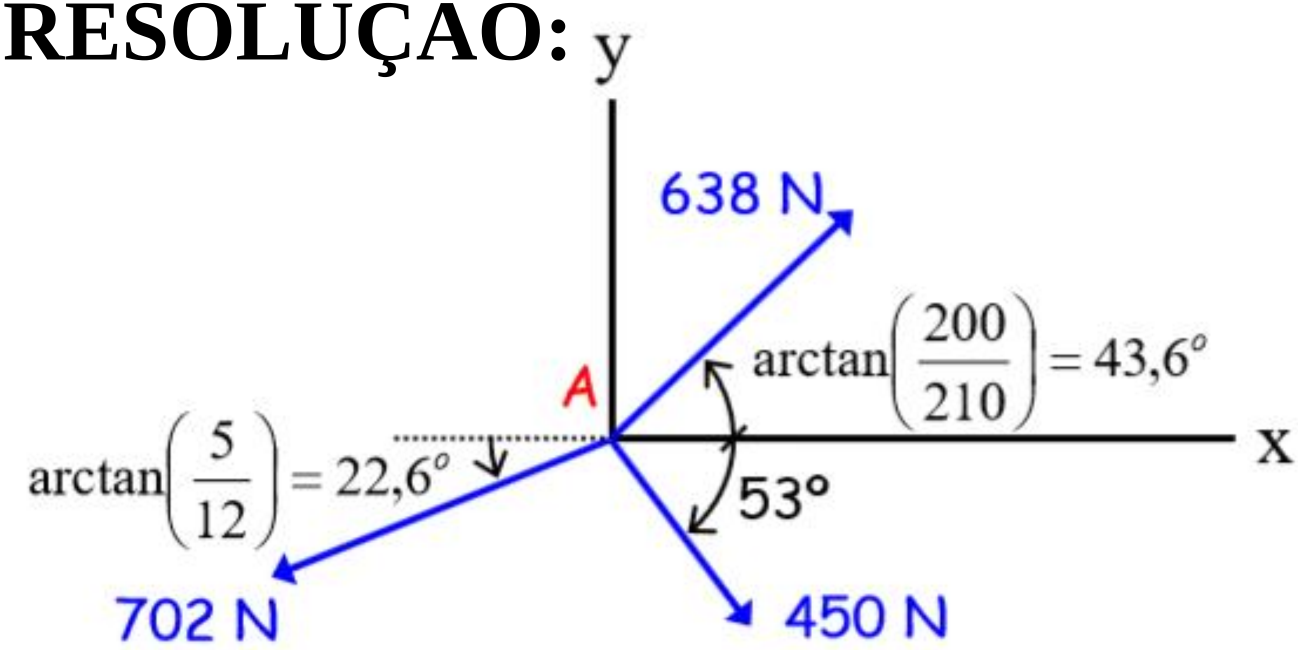
- **Sabendo que a tração na haste *AC* vale *638 N*, determine a resultante das três forças exercidas no ponto *A* da viga AB.**





Exemplo Notas de Aula Prof. Nobre

- **RESOLUÇÃO:**



$$R_x = 638 \cdot \cos 43,6^o + 702 \cdot \cos 202,6^o + 450 \cdot \cos 307^o$$

$$R_x = 84,7 \text{ N}$$

$$R_y = 638 \cdot \sin 43,6^o + 702 \cdot \sin 202,6^o + 450 \cdot \sin 307^o$$

$$R_y = -189,2 \text{ N}$$

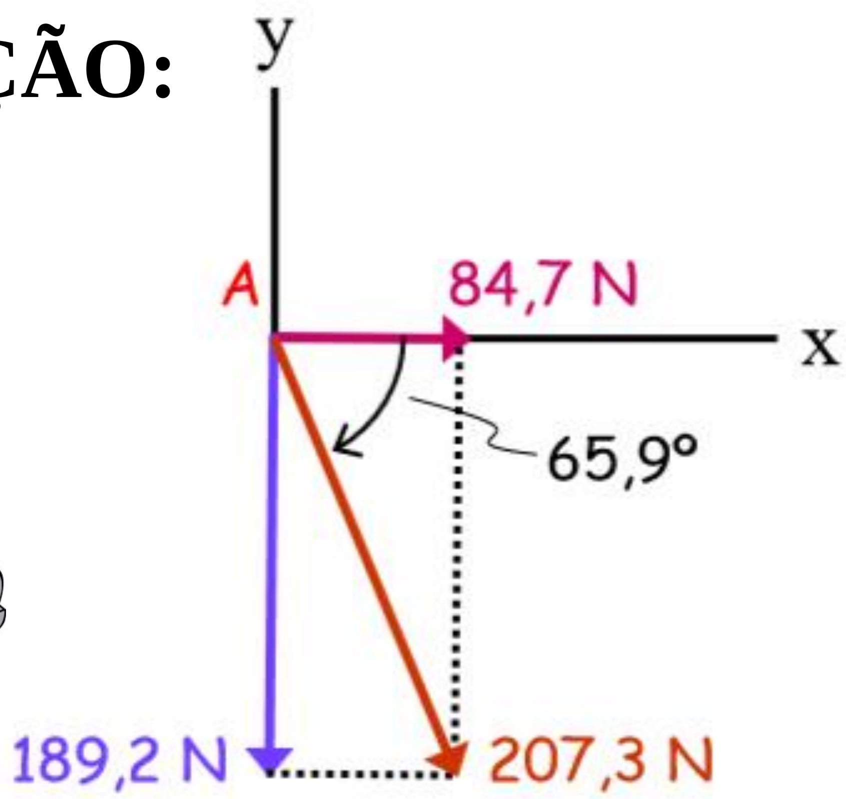
Exemplo Notas de Aula Prof. Nobre

- **RESOLUÇÃO:**

FORÇA	INTENSIDADE (*N*)	COMPONENTE, *x* (*N*)	COMPONENTE, *y* (*N*)
F_1	638	+ 462,02	+ 439,98
F_2	702	- 648,09	- 269,77
F_3	450	+ 270,82	- 359,39
	Total	***Rx*** **=** + 84,75	***Ry*** **=** - 189,17

Exemplo Notas de Aula Prof. Nobre

➢ **RESOLUÇÃO:**



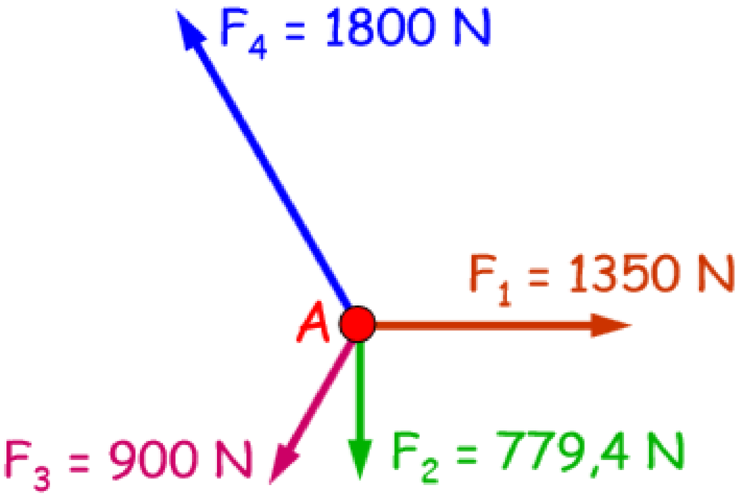
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \Rightarrow \quad R = 207{,}3\ \mathrm{N}$$

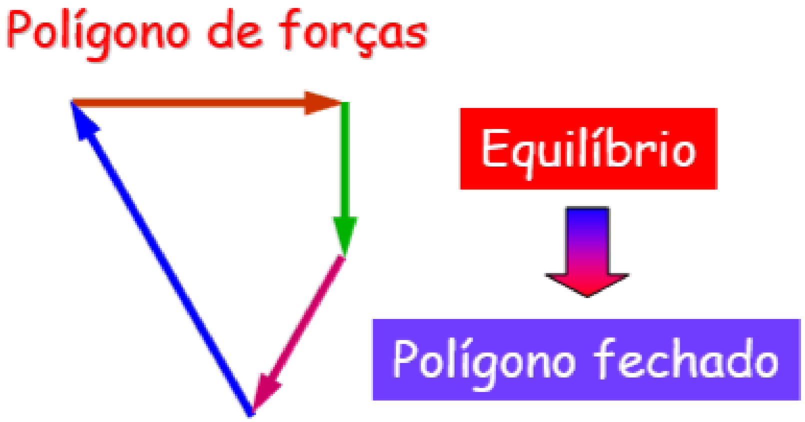
$$\theta = \arctan\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \quad \Rightarrow \quad \theta = -65{,}9^o$$

EQUILÍBRIO DE UMA PARTÍCULA

EQUILÍBRIO DE UMA PARTÍCULA

- Quando a força resultante equivalente de **TODAS** as forças concorrentes que atuam numa partícula é igual a zero, a partícula está em equilíbrio.





Algebricamente o equilíbrio corresponde a

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{0}$$

que em termos dos componentes retangulares pode ser expresso como

$$R_x = \sum F_x = 0 \qquad R_y = \sum F_y = 0$$

EQUILÍBRIO DE UMA PARTÍCULA

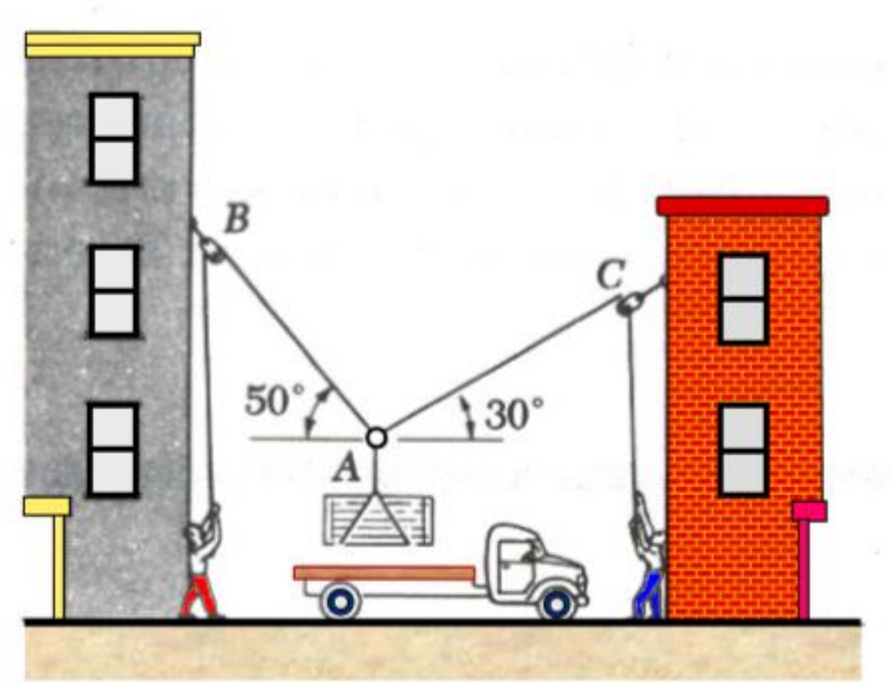
- A maioria dos problemas que tratam do equilíbrio de uma partícula se enquadra em duas categorias:

  - Verificação: quando todas as forças que atuam na partícula são conhecidas e se deseja saber se a condição de equilíbrio é ou não atendida.

  - Imposição: quando algumas das forças que atuam na partícula são desconhecidas e se deseja saber quem são essas forças desconhecidas que garantem a condição de equilíbrio.

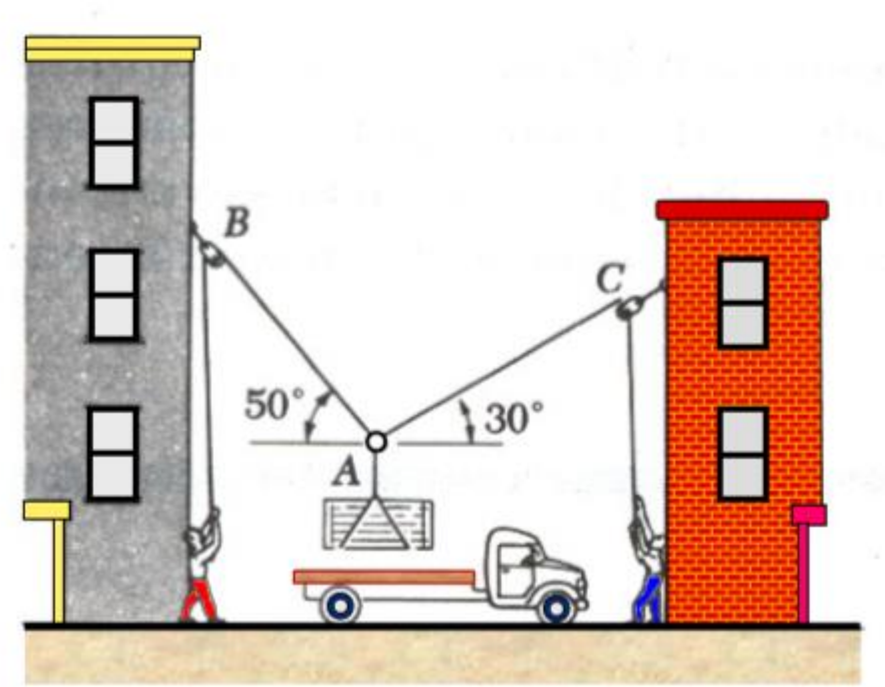
EQUILÍBRIO DE UMA PARTÍCULA

- Para identificação da situação física real do problema de equilíbrio faz-se um esboço conhecido como ***diagrama***.



EQUILÍBRIO DE UMA PARTÍCULA

- Para identificação da situação física real do problema de equilíbrio faz-se um esboço conhecido como ***diagrama***.

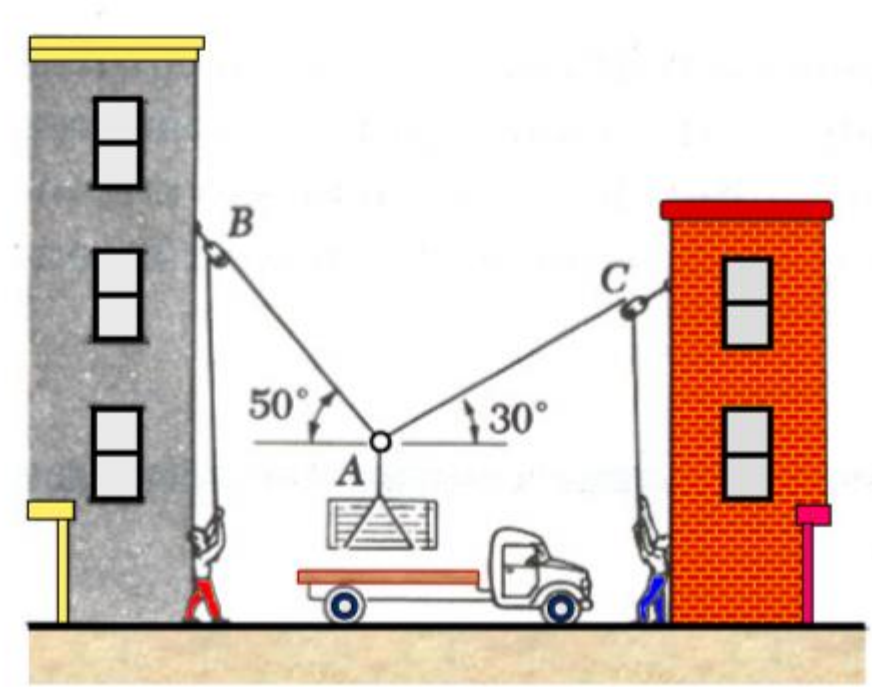


Alguns problemas podem ser estabelecidos:

- Quão resistentes devem ser os cabos?
- Quão resistentes devem ser os fixadores das roldanas?
- Quão fortes devem ser os operários

EQUILÍBRIO DE UMA PARTÍCULA

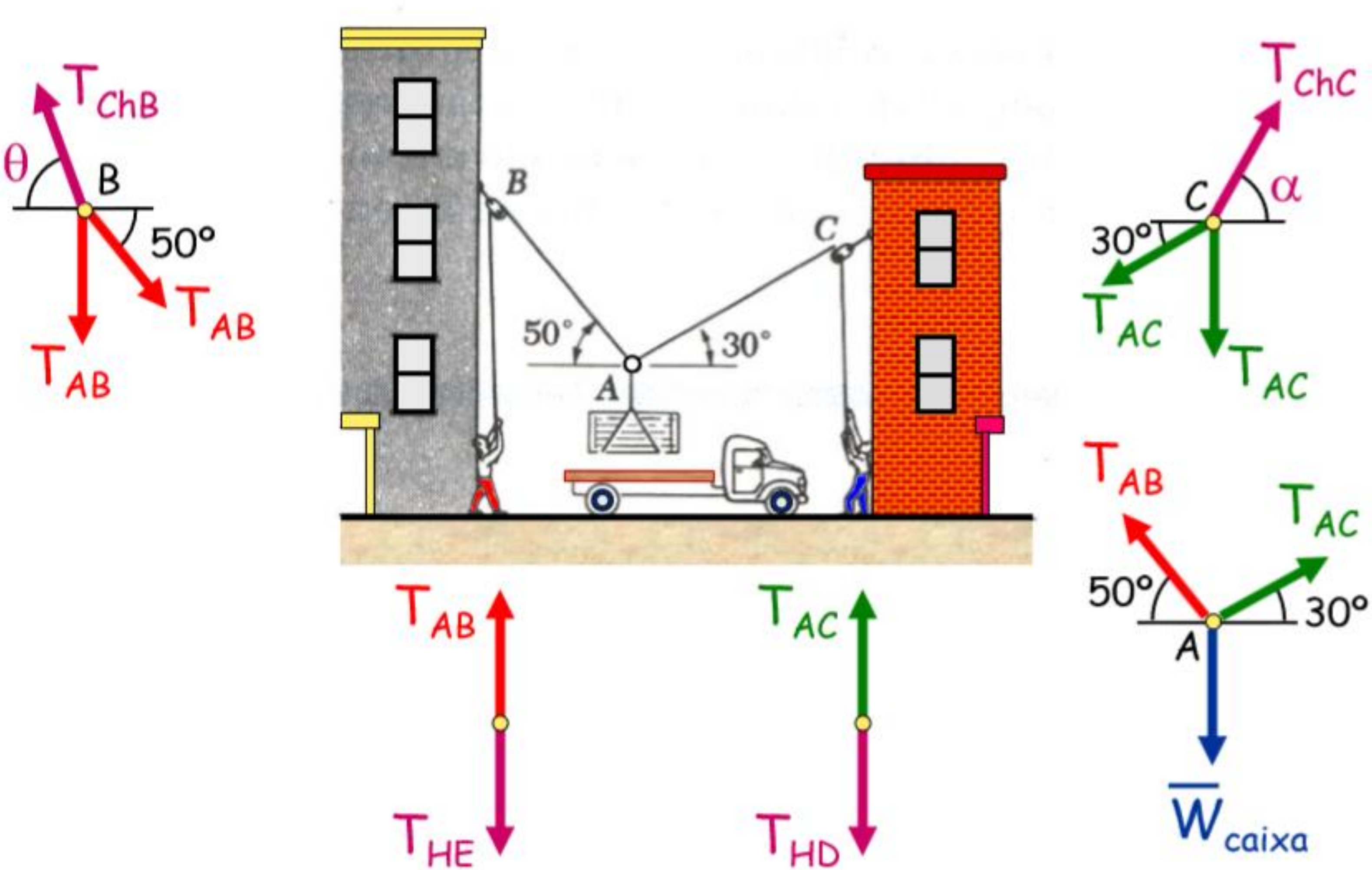
- Para identificação da situação física real do problema de equilíbrio faz-se um esboço conhecido como ***diagrama***.



Para a análise do equilíbrio, escolhe-se uma partícula ***SIGNIFICATIVA*** e traça-se um diagrama separado, denominado de ***diagrama de corpo livre***, mostrando essa partícula e todas as forças que atuam sobre ela.

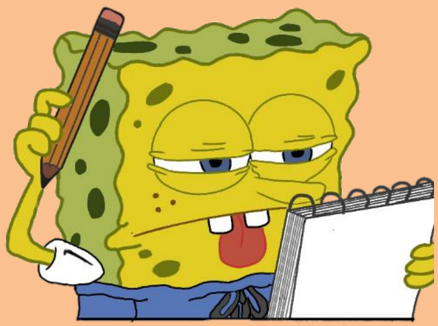
EQUILÍBRIO DE UMA PARTÍCULA

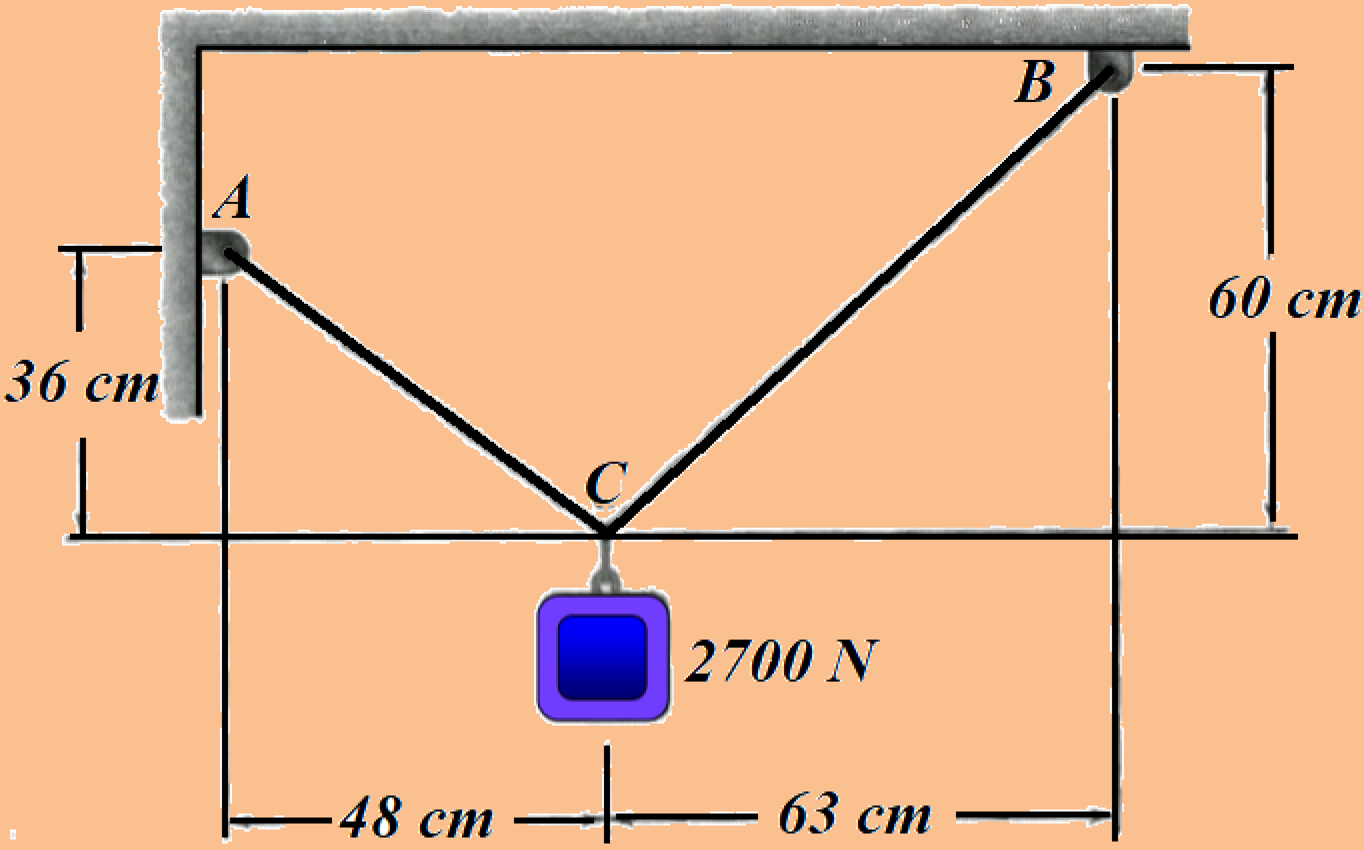
- ***Diagrama de corpo livre***: mostrando essa partícula e todas as forças que atuam sobre ela.



Exemplo Notas de Aula Prof. Nobre

- **Dois cabos estão ligados em *C*. Visando a especificação dos trechos de cabo AC e BC, determine as trações nos mesmos.**





Exemplo Notas de Aula Prof. Nobre

➤ RESOLUÇÃO.

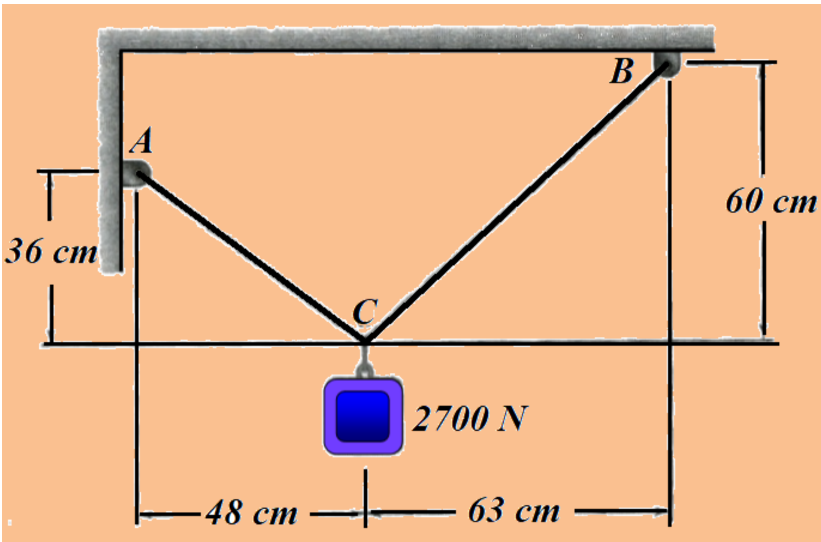
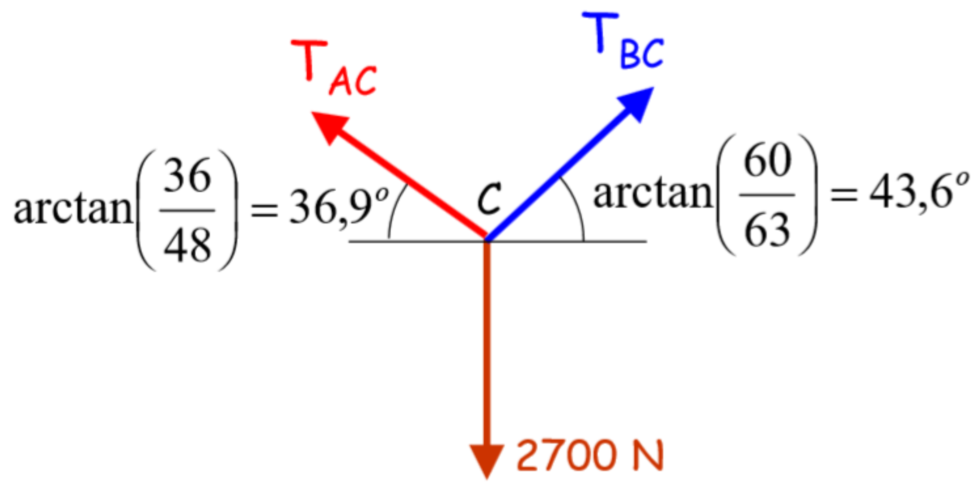


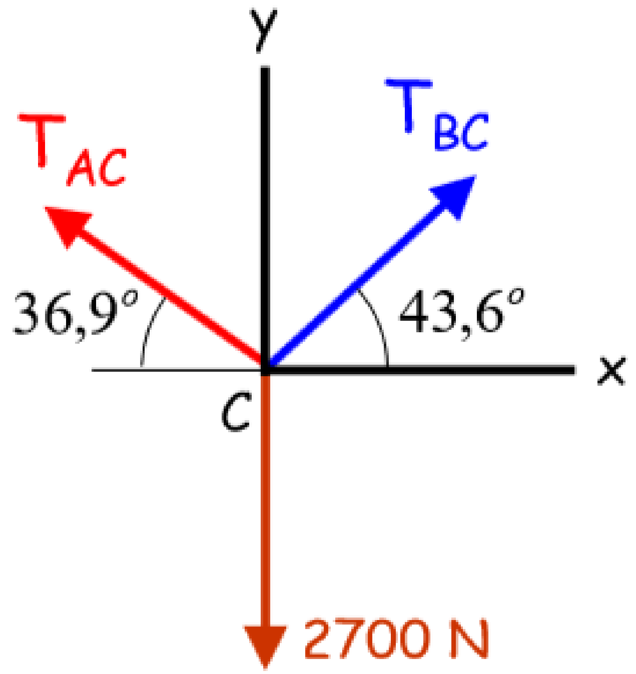
Diagrama de Corpo Livre



Exemplo Notas de Aula Prof. Nobre

- **RESOLUÇÃO.**

Imposição do Equilíbrio



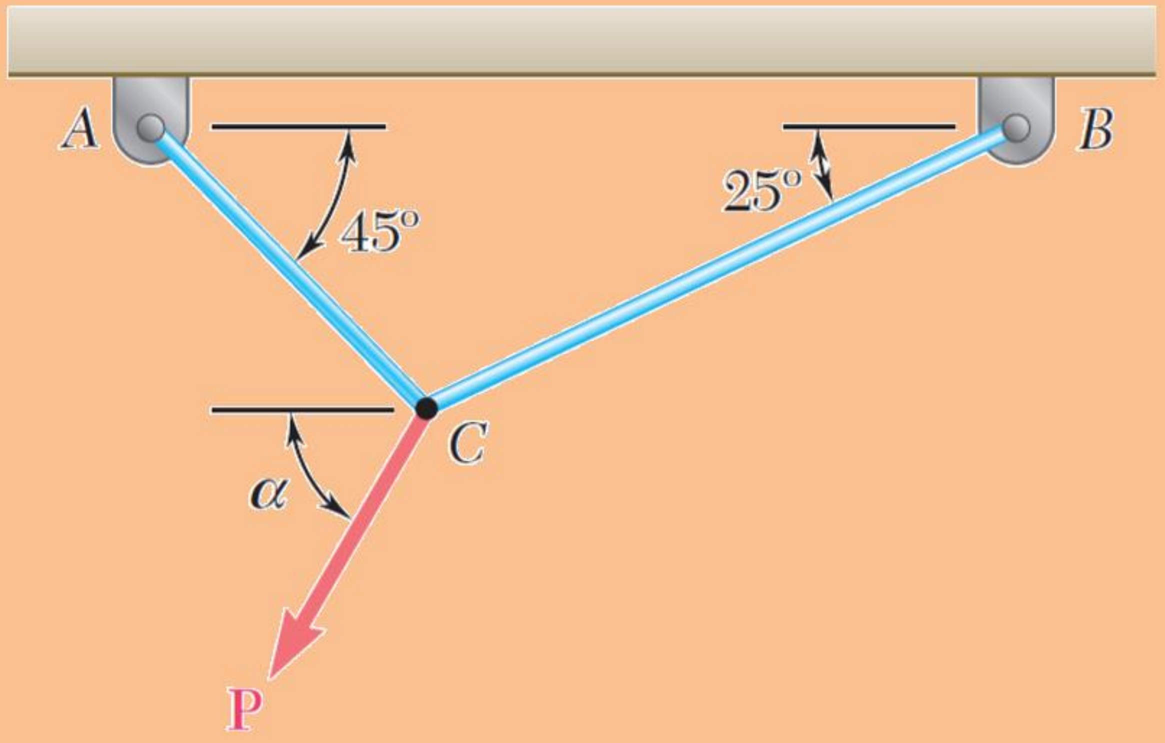
$$R_x = 0 \therefore T_{BC}\cos 43{,}6^o + T_{AC}\cos 143{,}1^o + 2700\cos 270^o = 0$$

$$R_y = 0 \therefore T_{BC}\sin 43{,}6^o + T_{AC}\sin 143{,}1^o + 2700\sin 270^o = 0$$

$$\begin{cases} 0{,}724 \cdot T_{BC} - 0{,}800 \cdot T_{AC} = 0 \\ 0{,}690 \cdot T_{BC} + 0{,}600 \cdot T_{AC} = 2700 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} T_{AC} &= 1981{,}8\ \text{N} \\ T_{BC} &= 2189{,}8\ \text{N} \end{aligned}$$

Exemplo Notas de Aula Prof. Nobre

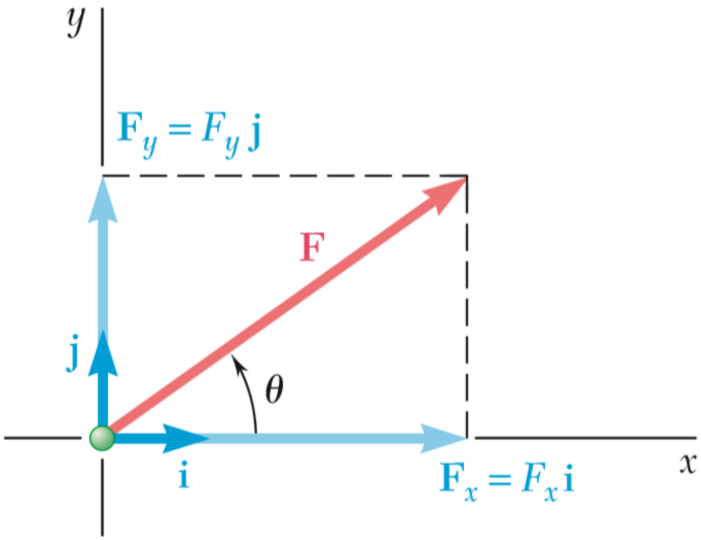
- **EXERCÍCIO PARA O LAR: Nos cabos do arranjo mostrado, a maior tração permitida é de 300 N no cabo AC e de 400 N no cabo BC. Determine a maior força P que pode ser aplicada em C e o valor correspondente de α.**



Componentes Retangulares de uma Força no Espaço

Componentes de uma Força no Espaço

- ***Anteriormente:*** foi discutido o conceito de componentes de uma força em duas direções ortogonais de decomposição.



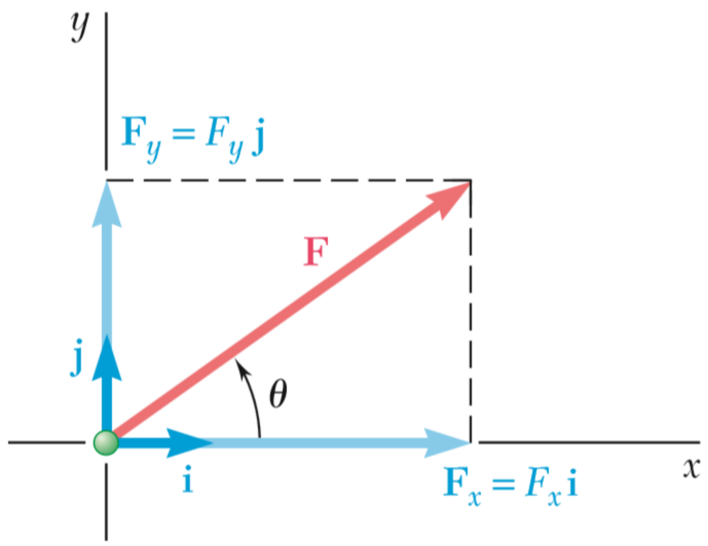
$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{y}}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{x}} = F_x\hat{\mathbf{i}} \qquad \boxed{F_x = F\cos\theta}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{y}} = F_y\hat{\mathbf{j}} \qquad \boxed{F_y = F\sin\theta}$$

Componentes de uma Força no Espaço

- ***Anteriormente:*** foi discutido o conceito de componentes de uma força em duas direções ortogonais de decomposição.



$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{y}}$$

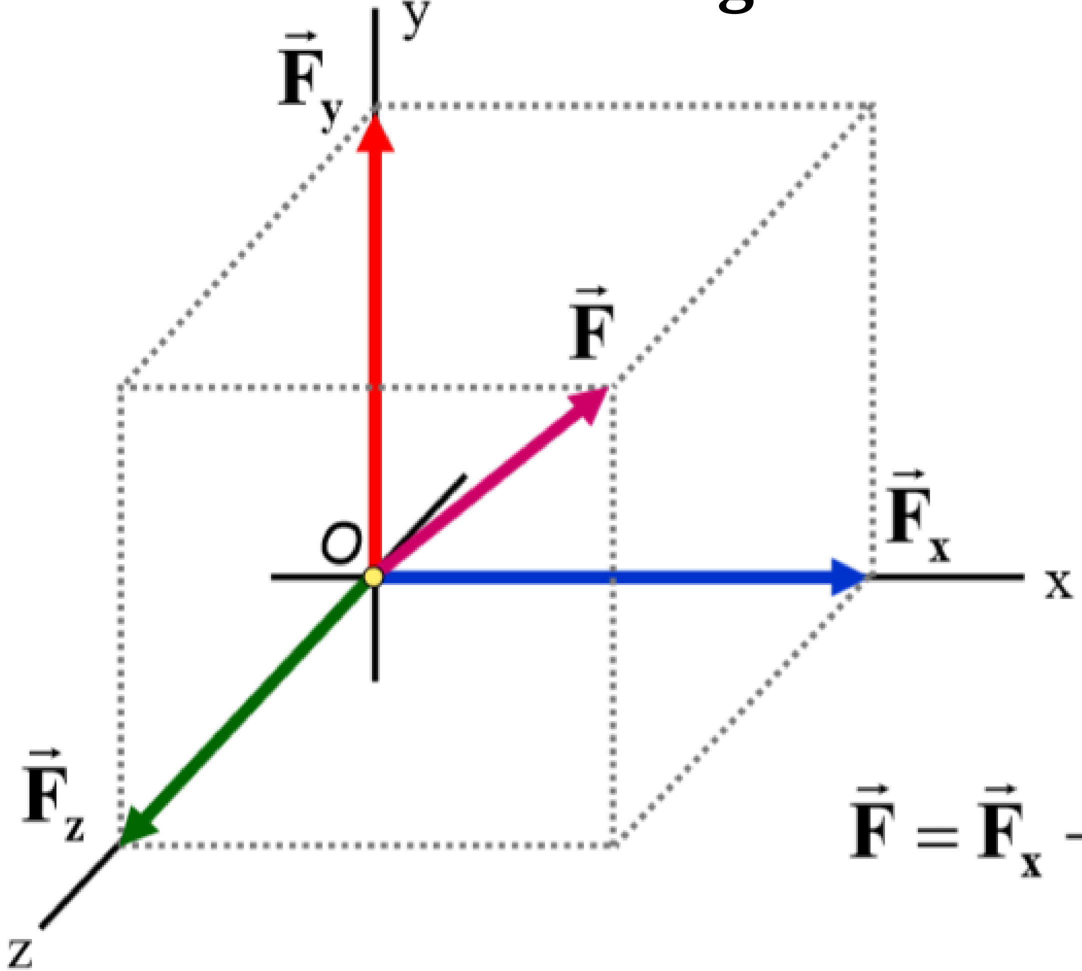
$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{x}} = F_x \hat{\mathbf{i}} \qquad \boxed{F_x = F\cos\theta}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{y}} = F_y \hat{\mathbf{j}} \qquad \boxed{F_y = F\sin\theta}$$

- ***O objetivo, por hora, consiste em estender a idéia de decomposição de forças no espaço***

Componentes de uma Força no Espaço

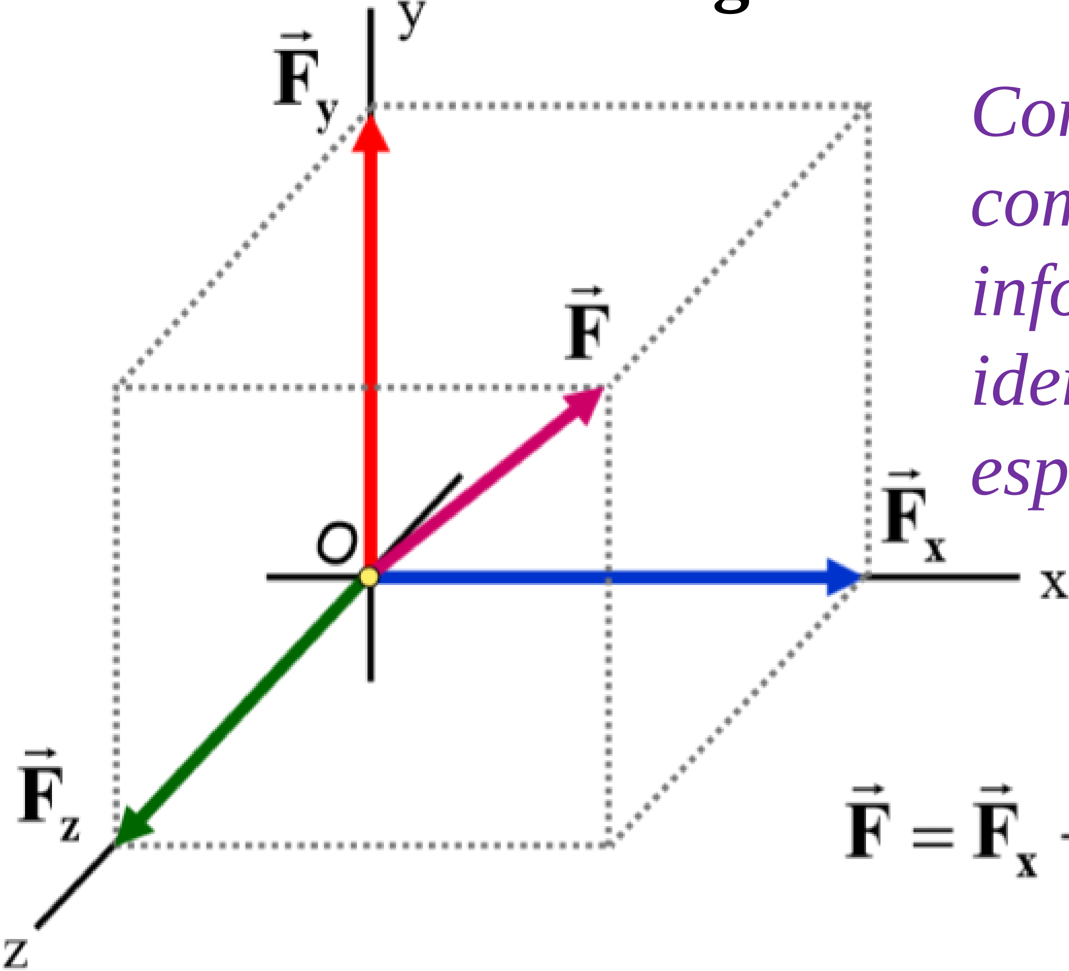
- **Para tal serão necessários 3 direções independentes de decomposição, que por simplicidade serão consideradas ortogonais entre si.**



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

Componentes de uma Força no Espaço

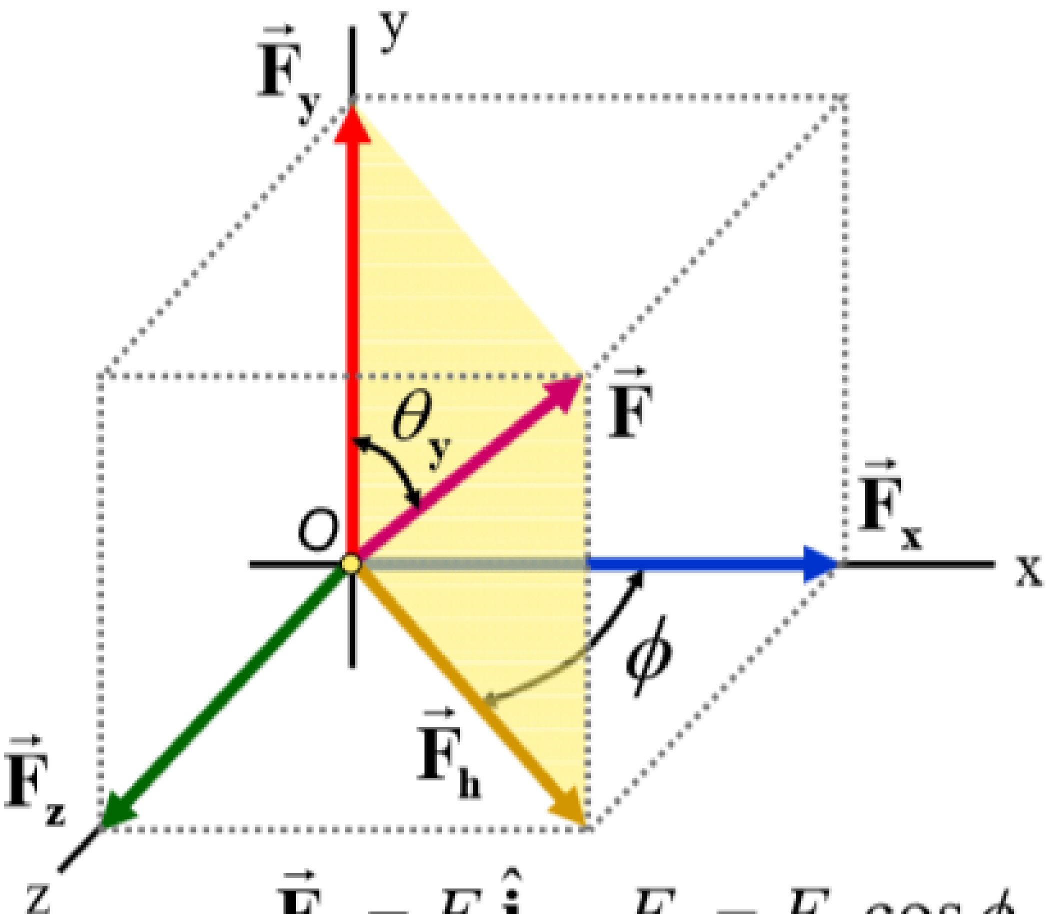
- **Para tal serão necessários 3 direções independentes de decomposição, que por simplicidade serão consideradas ortogonais entre si.**



Como definir esses componentes a partir de informações de fácil identificação no diagrama espacial?

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

Componentes de uma Força no Espaço



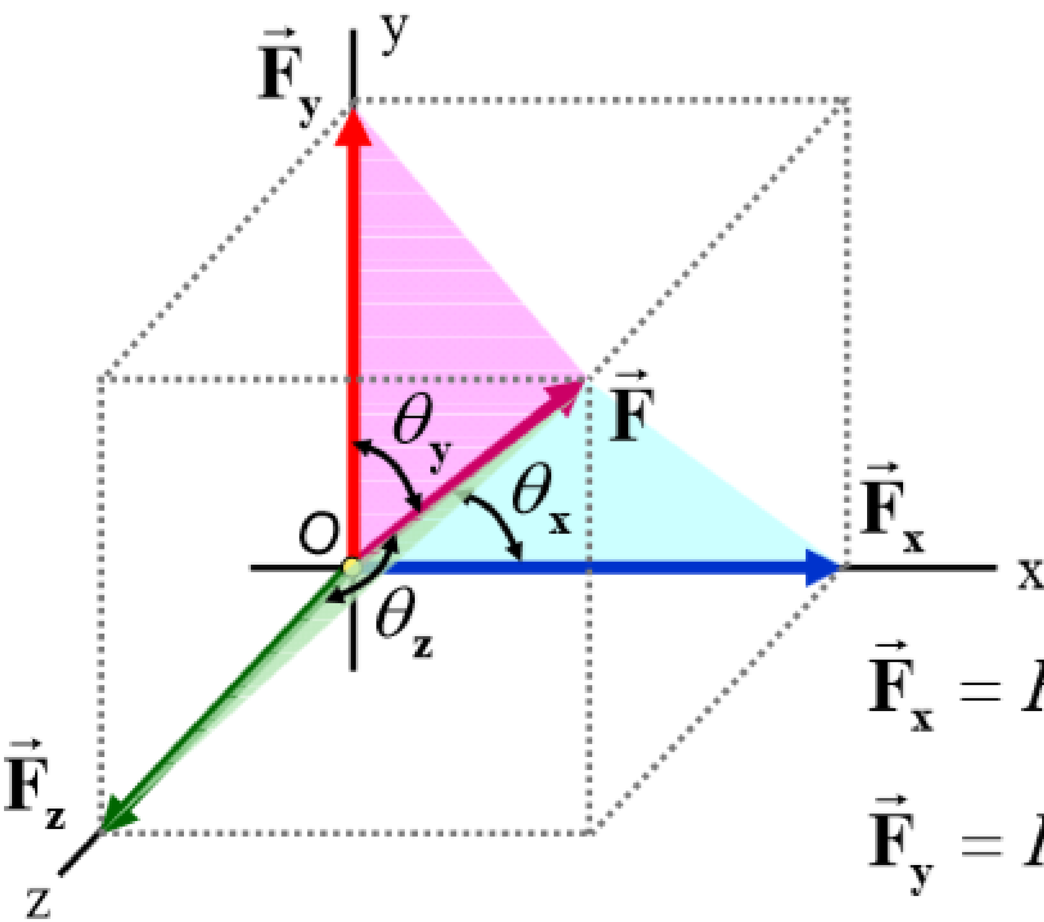
$$F_h = F \sin\theta_y$$

$$\vec{\mathbf{F}}_x = F_x \hat{\mathbf{i}} \qquad F_x = F_h \cos\phi \qquad \boxed{F_x = F \sin\theta_y \cos\phi}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_y = F_y \hat{\mathbf{j}} \qquad \boxed{F_y = F \cos\theta_y}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_z = F_z \hat{\mathbf{k}} \qquad F_z = F_h \sin\phi \qquad \boxed{F_z = F \sin\theta_y \sin\phi}$$

Componentes de uma Força no Espaço



$$\vec{F}_x = F_x \hat{i} \qquad \boxed{F_x = F\cos\theta_x}$$

$$\vec{F}_y = F_y \hat{j} \qquad \boxed{F_y = F\cos\theta_y}$$

$$\vec{F}_z = F_z \hat{k} \qquad \boxed{F_z = F\cos\theta_z}$$

Os co-senos de θ_x, θ_y e θ_z são conhecidos como **co-senos diretores** da força $\vec{F}$.

Componentes de uma Força no Espaço

- $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{z}}$

- $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{x}} = F_x \hat{\mathbf{i}} \qquad F_x = F\cos\theta_x$

  $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{y}} = F_y \hat{\mathbf{j}} \qquad F_y = F\cos\theta_y$

  $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{z}} = F_z \hat{\mathbf{k}} \qquad F_z = F\cos\theta_z$

- $\vec{\mathbf{F}} = F\cos\theta_x \hat{\mathbf{i}} + F\cos\theta_y \hat{\mathbf{j}} + F\cos\theta_z \hat{\mathbf{k}}$

  $\vec{\mathbf{F}} = F\left(\cos\theta_x \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta_y \hat{\mathbf{j}} + \cos\theta_z \hat{\mathbf{k}}\right)$

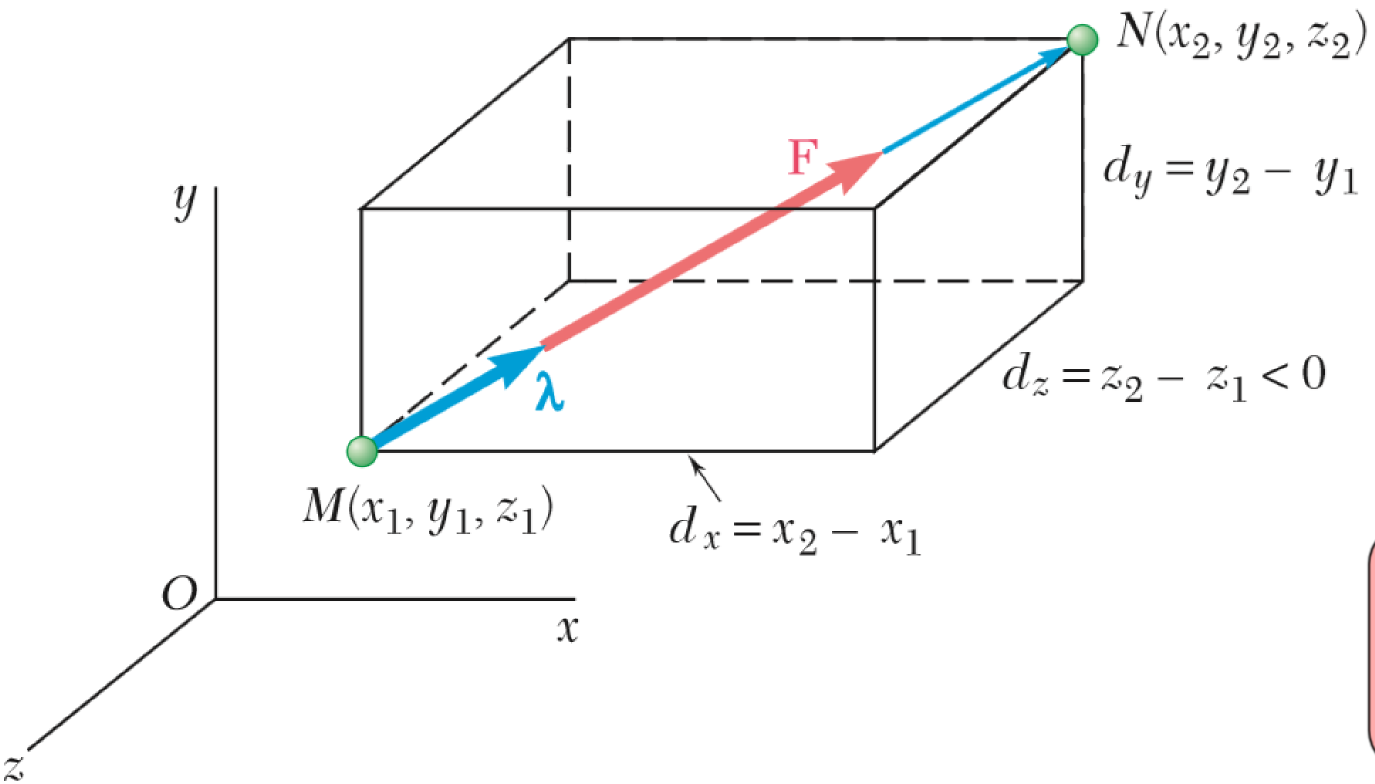
  $\boxed{\vec{\mathbf{F}} = F\,\hat{\boldsymbol{\lambda}}}$

O vetor força pode ser gerado do produto de sua intensidade por um vetor unitário na mesma direção e sentido.

Componentes de uma Força no Espaço

- Esta forma de representação é interessante pois em muitos problemas são conhecidos dois pontos de referência ao longo da linha de ação da força em questão.

- $$\vec{\mathbf{F}} = F\,\hat{\boldsymbol{\lambda}}$$



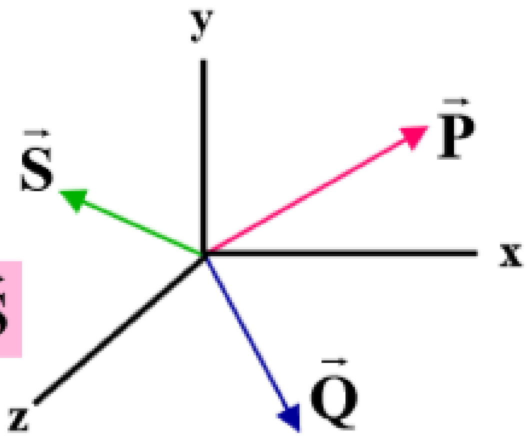
$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{MN}}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{MN}}\right\|}$$

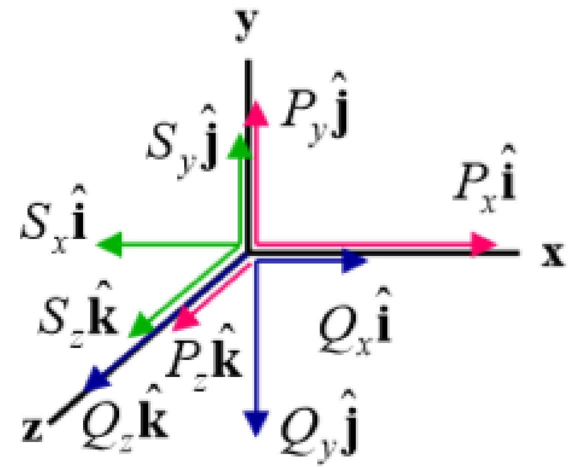
$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{ON}} - \overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{ON}} - \overrightarrow{\mathbf{OM}}\right\|}$$

Componentes de uma Força no Espaço

- Os componentes da força ***R*** de um conjunto de forças concorrentes podem ser determinados através das somas dos componentes das forças envolvidas (P_x, P_y, P_z), (Q_x, Q_y, Q_z), (S_x, S_y, S_z) *etc.*

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{Q}} + \vec{\mathbf{S}}$$



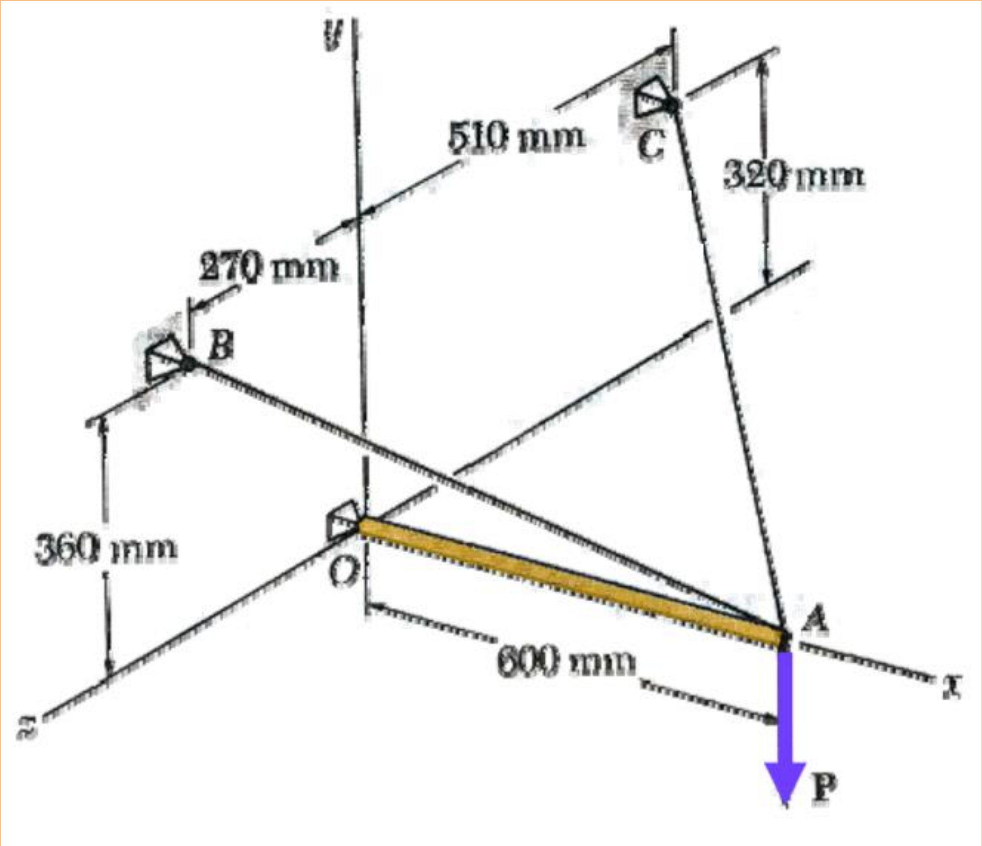


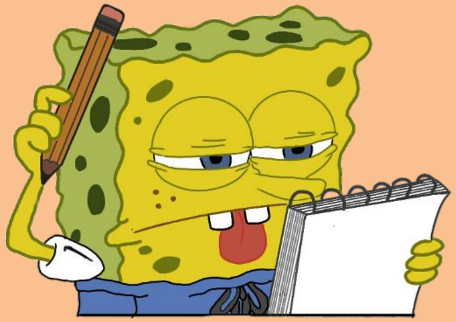
$$\vec{\mathbf{R}} = \left(P_x\hat{\mathbf{i}} + P_y\hat{\mathbf{j}} + P_z\hat{\mathbf{k}}\right) + \left(Q_x\hat{\mathbf{i}} + Q_y\hat{\mathbf{j}} + Q_z\hat{\mathbf{k}}\right) + \left(S_x\hat{\mathbf{i}} + S_y\hat{\mathbf{j}} + S_z\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \underbrace{\left(P_x + Q_x + S_x\right)}_{R_x}\hat{\mathbf{i}} + \underbrace{\left(P_y + Q_y + S_y\right)}_{R_y}\hat{\mathbf{j}} + \underbrace{\left(P_z + Q_z + S_z\right)}_{R_z}\hat{\mathbf{k}}$$

EXERCÍCIO

- Na barra ***AO*** é aplicada uma carga ***P***. Sabendo que a tração no cabo ***AB*** é de ***850 N*** e que a resultante da carga ***P*** e das forças aplicadas pelos cabos em ***A*** deve ter a direção de ***AO***, determine a tração no cabo ***AC*** e a intensidade de ***P***.





EXERCÍCIO

- Na barra ***AO*** é aplicada uma carga ***P***. Sabendo que a tração no cabo ***AB*** é de ***850 N*** e que a resultante da carga ***P*** e das forças aplicadas pelos cabos em ***A*** deve ter a direção de ***AO***, determine a tração no cabo ***AC*** e a intensidade de ***P***.

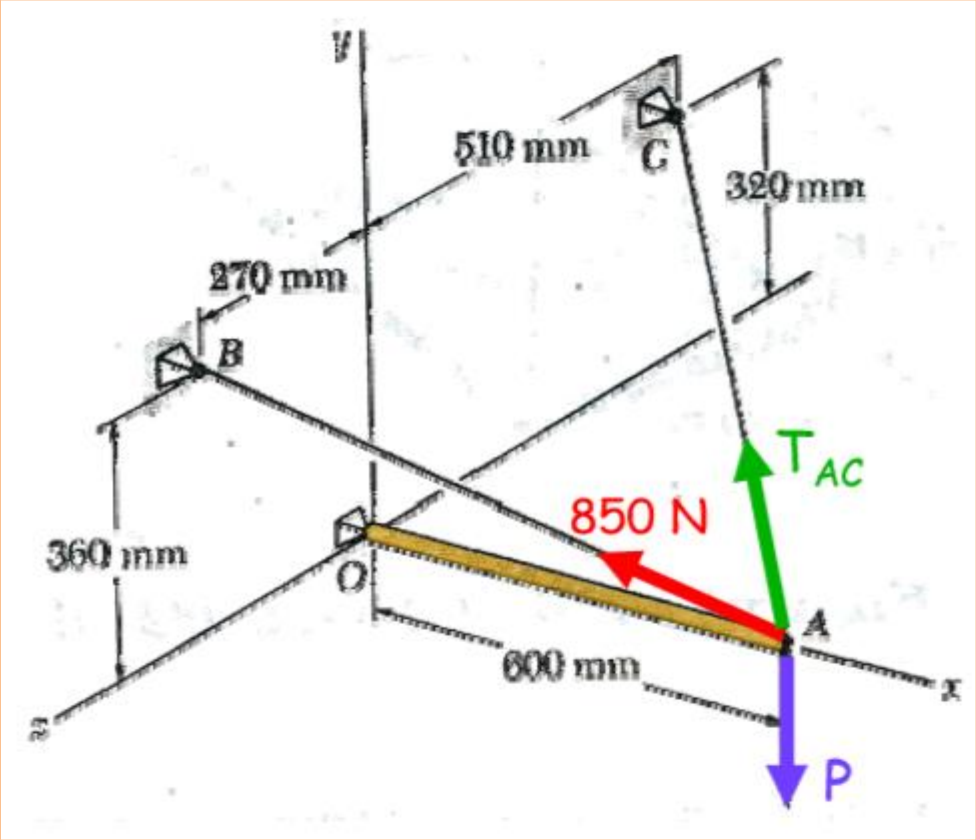


Diagrama de Corpo Livre

Para ***n*** Forças atuantes no ponto material

$$\overline{P_1P}_2 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda 1 = \overline{P_1P}_2 \big/ d1$$

$$\overline{T_1} = T1 \cdot \lambda 1$$

$$\overline{P_1P}_3 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda 2 = \overline{P_1P}_3 \big/ d2$$

$$\overline{T_2} = T2 \cdot \lambda 2$$

$$\overline{P_1P}_N = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d_N = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda n = \overline{P_1P}_3 \big/ dn$$

$$\overline{Tn} = Tn \cdot \lambda n$$

$$\overline{R} = \overline{T_1} + \overline{T_2} + (\ldots) + \overline{T_N}$$

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2}$$

$$cos(\theta x) = Rx / R$$

$$cos(\theta y) = Ry / R$$

$$cos(\theta z) = Rz / R$$

Diagrama de Corpo Livre

Para ***n*** Forças atuantes no ponto material

$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\overline{P_1P_3} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\overline{P_1P_N} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\overline{AB} = (0; 360; 270) - (600; 0; 0)$$

$$\overline{AB} = (-600; 360; 270)$$

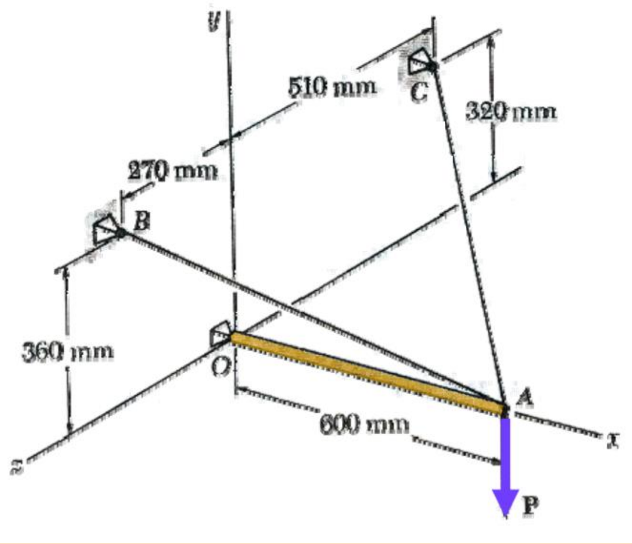


Diagrama de Corpo Livre

Para ***n*** Forças atuantes no ponto material

$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\overline{P_1P_3} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\overline{P_1P_N} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\overline{AB} = (0; 360; 270) - (600; 0; 0)$$

$$\overline{AB} = (-600; 360; 270)$$

$$\overline{AC} = (0; -510; 320) - (600; 0; 0)$$

$$\overline{AC} = (-600; -510; 320)$$

$$\overline{AC} = (-600; -510; 320)$$

Diagrama de Corpo Livre

Para ***n*** Forças atuantes no ponto material

$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\overline{AB} = (0; 360; 270) - (600; 0; 0)$$

$$\overline{AB} = (-600; 360; 270)$$

$$\overline{P_1P_3} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\overline{AC} = (0; -510; 320) - (600; 0; 0)$$

$$\overline{AC} = (-600; -510; 320)$$

$$\overline{P_1P_N} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\overline{AP} = (600; -1; 0) - (600; 0; 0)$$

$$\overline{AP} = (0; -1; 0)$$

$$\overline{AC} = (-600; -510; 320)$$

Diagrama de Corpo Livre

Para ***n*** Forças atuantes no ponto material

$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\overline{AB} = (-600; 360; 270)$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{600^2 + 360^2 + 270^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 750$$

$$\overline{P_1P_3} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\overline{AC} = (-600; -510; 320)$$

$$\overline{P_1P_N} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d_N = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\overline{AP} = (0; -1; 0)$$

Diagrama de Corpo Livre

Para ***n*** Forças atuantes no ponto material

$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\overline{AB} = (-600; 360; 270)$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 750$$

$$\overline{P_1P_3} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\overline{AC} = (-600; -510; 320)$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 850$$

$$\overline{P_1P_N} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d_N = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\overline{AP} = (0; -1; 0)$$

$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = 1$$

Diagrama de Corpo Livre

Para ***n*** Forças atuantes no ponto material

$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda 1 = \overline{P_1P_2} / d1$$

$$\overline{P_1P_3} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda 2 = \overline{P_1P_3} / d2$$

$$\overline{P_1P_N} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d_N = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda n = \overline{P_1P_3} / dn$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{(-600; 360; 270)}{750}$$

$$\lambda_{AB} = (-0{,}8; 0{,}48; 0{,}36)$$

Diagrama de Corpo Livre

Para ***n*** Forças atuantes no ponto material

$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda 1 = \overline{P_1P_2}/d1$$

$$\lambda_{AB} = (-0{,}8; 0{,}48; 0{,}36)$$

$$\overline{P_1P_3} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda 2 = \overline{P_1P_3}/d2$$

$$\lambda_{AC} = (-0{,}706; 0{,}376; 0{,}6)$$

$$\overline{P_1P_N} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d_N = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda n = \overline{P_1P_3}/dn$$

$$\lambda_{AP} = (0; -1; 0)$$

Diagrama de Corpo Livre

Para ***n*** Forças atuantes no ponto material

$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda 1 = \overline{P_1P_2} / d1$$

$$\overline{T_1} = T1 \cdot \lambda 1$$

$$\overline{P_1P_3} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda 2 = \overline{P_1P_3} / d2$$

$$\overline{T_2} = T2 \cdot \lambda 2$$

$$\overline{P_1P_N} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d_N = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda n = \overline{P_1P_3} / dn$$

$$\overline{Tn} = Tn \cdot \lambda n$$

$$\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{AB}} = 850(-0{,}800;\, 0{,}480;\, 0{,}360)$$

$$(-680;\, 408;\, 306)\ \mathrm{N}$$

$$\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{AC}} = T_{AC}\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{AC}}$$

$$\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{AC}} = (-0{,}706T_{AC};\, 0{,}376T_{AC};\, -0{,}600T_{AC})$$

$$\vec{\mathbf{P}} = (0;\, -P;\, 0)$$

Diagrama de Corpo Livre

Para ***n*** Forças atuantes no ponto material

$$\overline{P_1P}_2 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda 1 = \overline{P_1P}_2 \big/ d1$$

$$\overline{T_1} = T1 \cdot \lambda 1$$

$$\overline{P_1P}_3 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda 2 = \overline{P_1P}_3 \big/ d2$$

$$\overline{T_2} = T2 \cdot \lambda 2$$

$$\overline{P_1P}_N = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$d_N = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\lambda n = \overline{P_1P}_3 \big/ dn$$

$$\overline{Tn} = Tn \cdot \lambda n$$

$$\overline{R} = \overline{T_1} + \overline{T_2} + (\ldots) + \overline{T_N}$$

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2}$$

$$cos(\theta x) = Rx / R$$

$$cos(\theta y) = Ry / R$$

$$cos(\theta z) = Rz / R$$

EXERCÍCIO

Como a força resultante dessas três forças deve ter a direção de ***AO***, que é a direção ***x***, os componentes nas direções *y* e *z* **DEVEM SER NULOS**!!!

- $R_y = -P + 408 + 0{,}376T_{AC} = 0$

- $R_z = 0 + 306 - 0{,}600T_{AC} = 0$

$$T_{AC} = 510\ \text{N}$$

$$P = 599{,}76\ \text{N}$$

Equilíbrio de uma Partícula no Espaço

Equilíbrio de uma Partícula no Espaço

Quando a força resultante equivalente de TODAS as forças concorrentes que atuam numa partícula é igual a zero, a partícula está em equilíbrio.

Algebricamente o equilíbrio corresponde a

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{0}$$

que em termos dos componentes retangulares pode ser expresso como

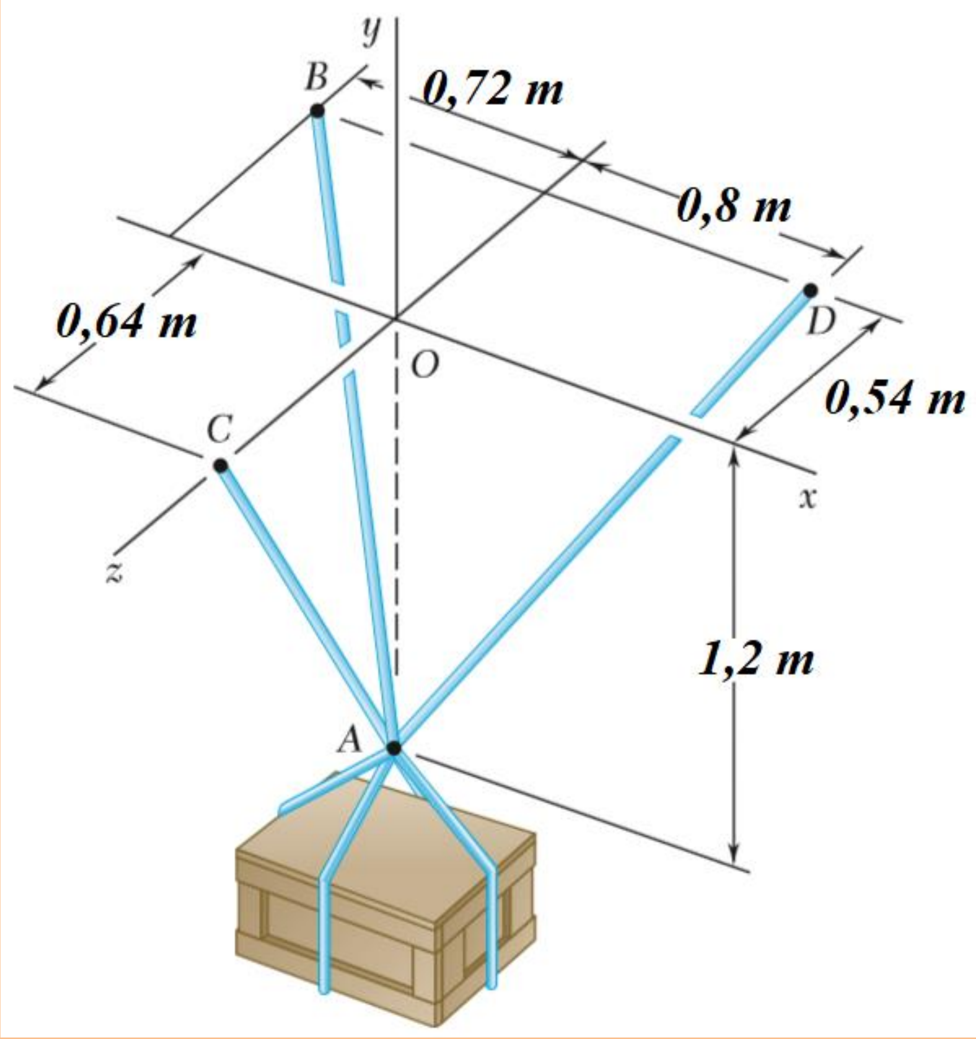
$$R_x = \sum F_x = 0$$

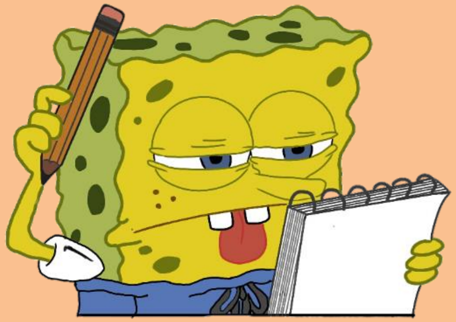
$$R_y = \sum F_y = 0$$

$$R_z = \sum F_z = 0$$

EXERCÍCIO

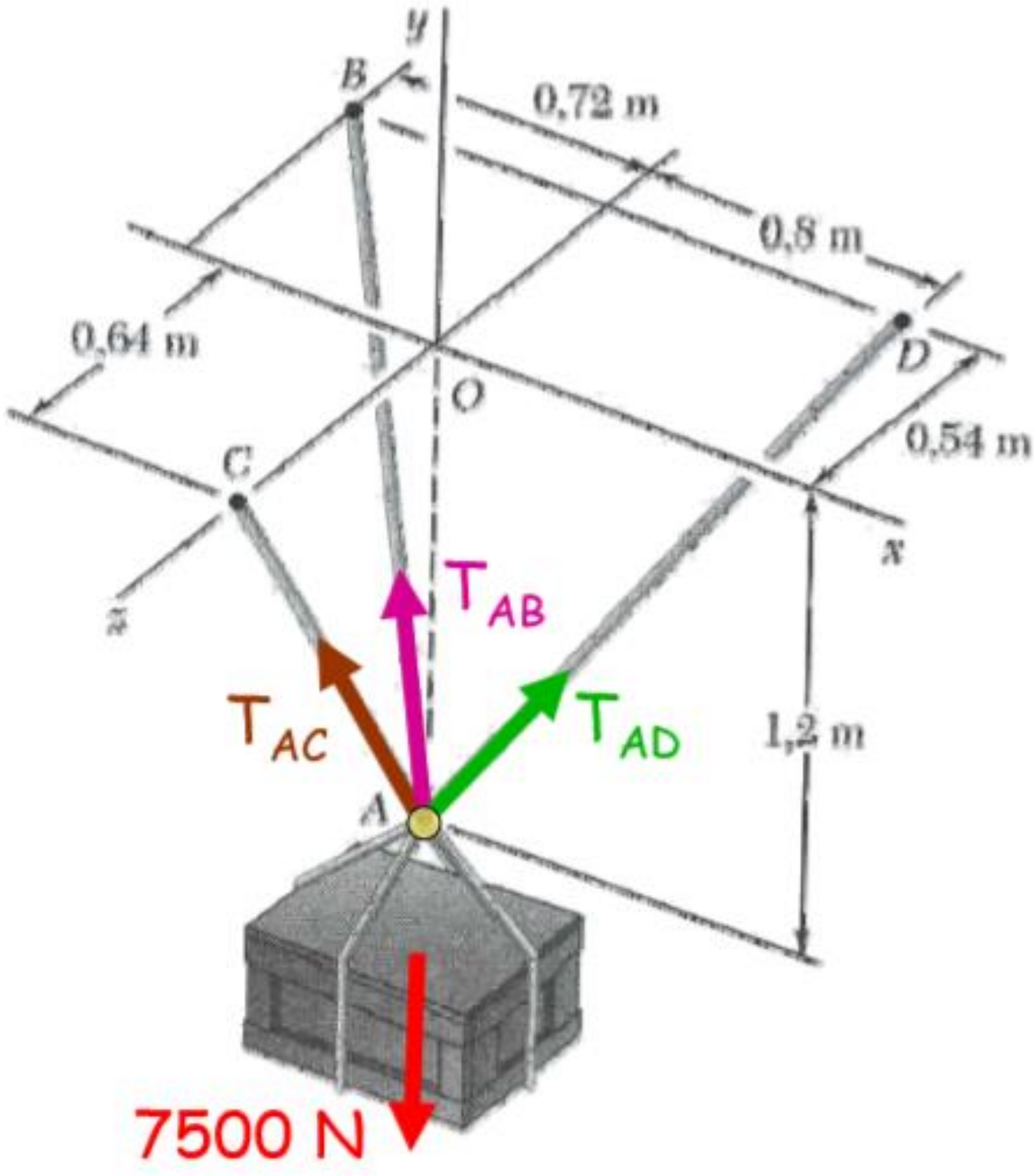
- Um caixote de ***7500 N*** é sustentado por três cabos. Determine a tração em cada cabo.





Equilíbrio de uma Partícula no Espaço

Diagrama de Corpo Livre



Equilíbrio de uma Partícula no Espaço

- $\mathbf{P} = (0; -7500; 0)\mathrm{N}$
  - $\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{AB}} = T_{AB}\hat{\lambda}_{\mathbf{AB}}$ $\quad \hat{\lambda}_{\mathbf{AB}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right\|} = (-0{,}480; 0{,}800; -0{,}360)$
- $\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{AC}} = T_{AC}\hat{\lambda}_{\mathbf{AC}}$ $\quad \hat{\lambda}_{\mathbf{AC}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathbf{AC}}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{AC}}\right\|} = (0{,}000; 0{,}882; 0{,}471)$
  - $\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{AD}} = T_{AD}\hat{\lambda}_{\mathbf{AD}}$ $\quad \hat{\lambda}_{\mathbf{AD}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathbf{AD}}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{AD}}\right\|} = (0{,}519; 0{,}779; -0{,}351)$

Equilíbrio de uma Partícula no Espaço

- $R_x = 0 \therefore 0 - 0{,}480T_{AB} + 0 + 0{,}519T_{AD} = 0$

  $R_y = 0 \therefore -7500 + 0{,}800T_{AB} + 0{,}882T_{AC} + 0{,}779T_{AD} = 0$

  $R_z = 0 \therefore 0 - 0{,}360T_{AB} + 0{,}471T_{AC} - 0{,}351T_{AD} = 0$

$$\begin{cases} -0{,}480T_{AB} + 0{,}519T_{AD} = 0 \\ 0{,}800T_{AB} + 0{,}882T_{AC} + 0{,}779T_{AD} = 7500 \\ -0{,}360T_{AB} + 0{,}471T_{AC} - 0{,}351T_{AD} = 0 \end{cases}$$

$T_{AB} = 2676{,}2\ \text{N}$

$T_{AC} = 3890{,}0\ \text{N}$

$T_{AD} = 2475{,}1\ \text{N}$

...

CONTINUA na Próxima Aula