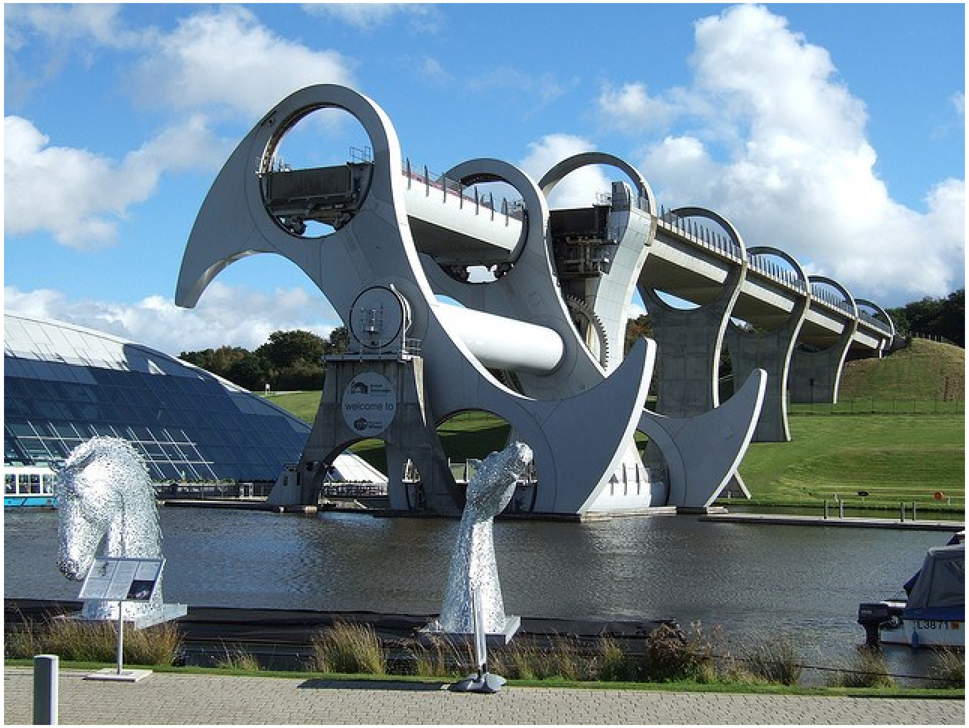
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS SERTÃO
EIXO TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Campus do Sertão
Delmiro Gouveia - Santana do Ipanema



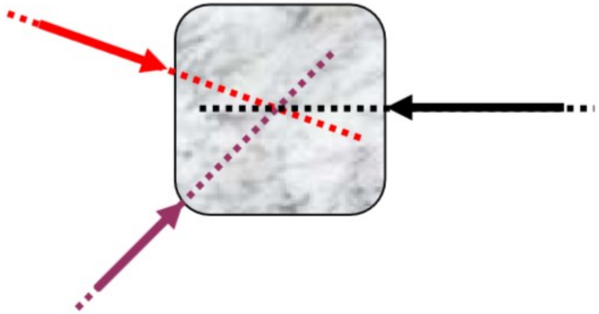
Mecânica dos Sólidos I

Prof. Dr. Alverlando Ricardo

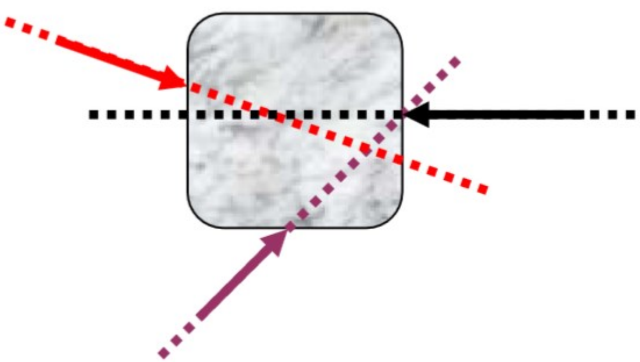
Aula 4: Equilíbrio de Corpos Rígido

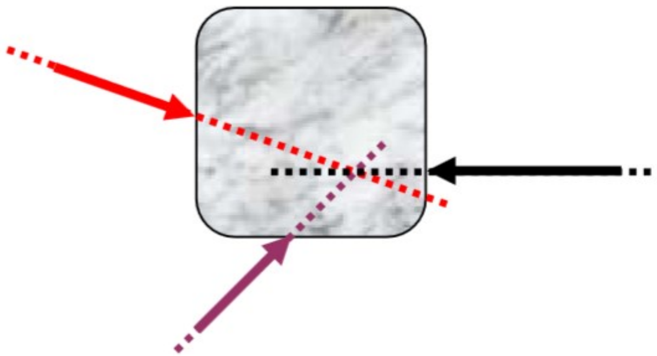
Forças Concorrentes e Não Concorrentes

- **Forças concorrentes centrada: Podem induzir apenas a translações.**



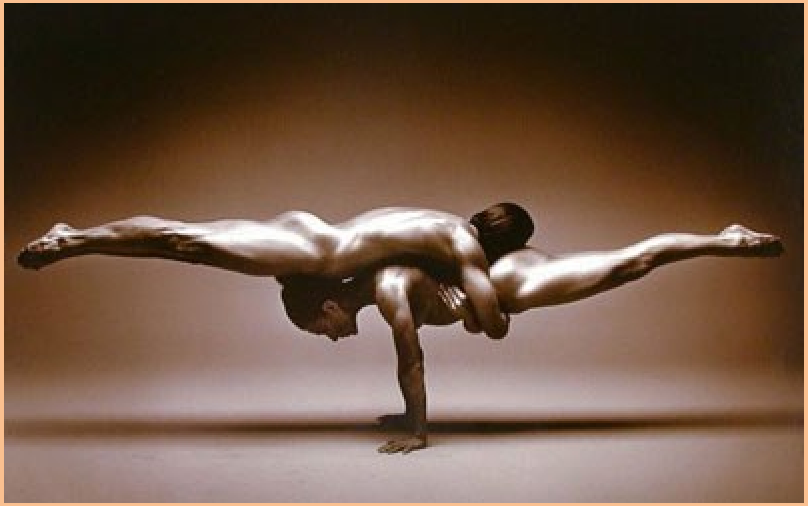
- **Forças não concorrentes e concorrentes não centradas: Podem induzir a rotações combinadas ou não com translações.**



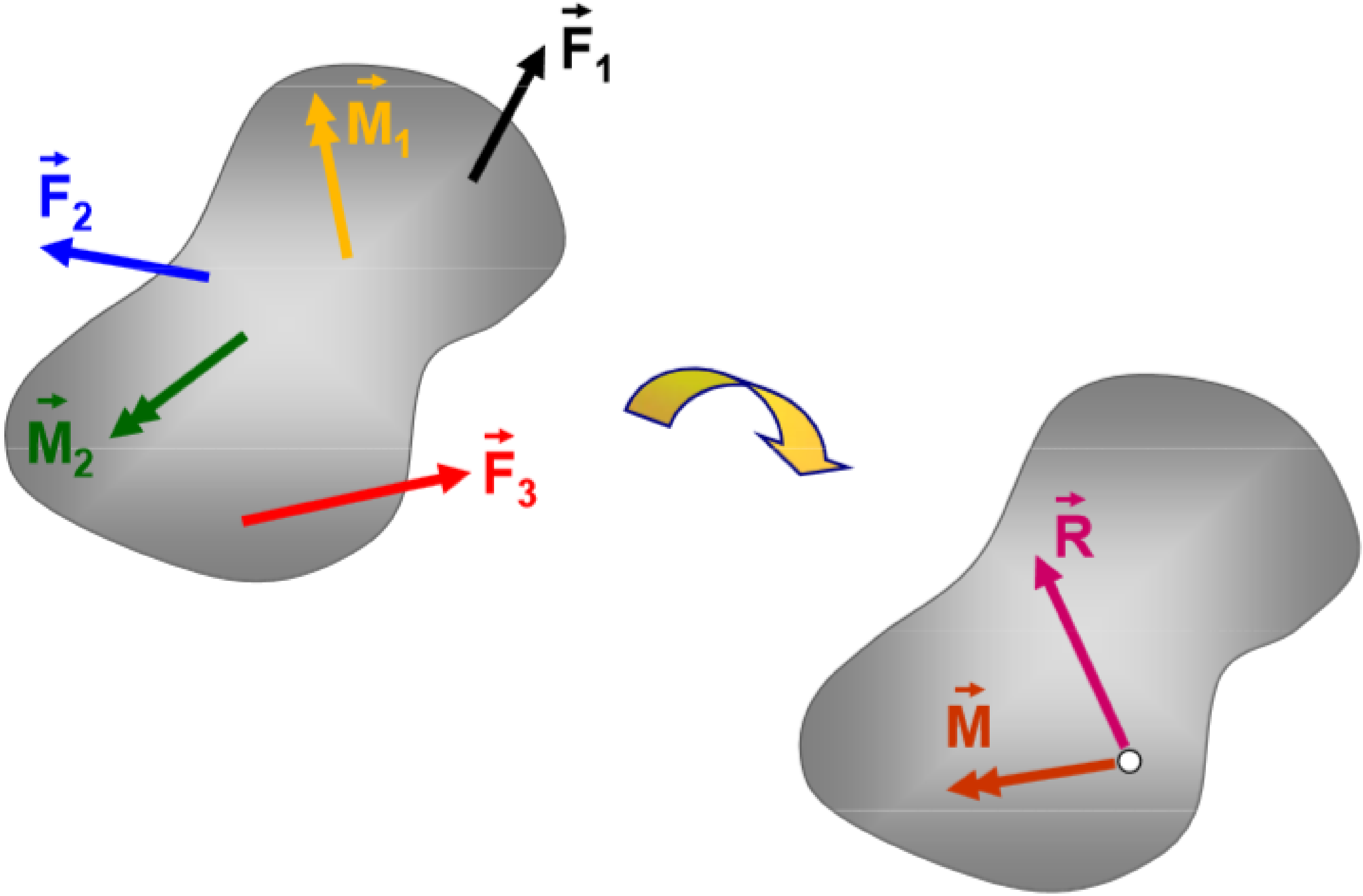


OBJETIVO DA AULA

- **Estudo do equilíbrio de sistemas de forças não concorrentes:**

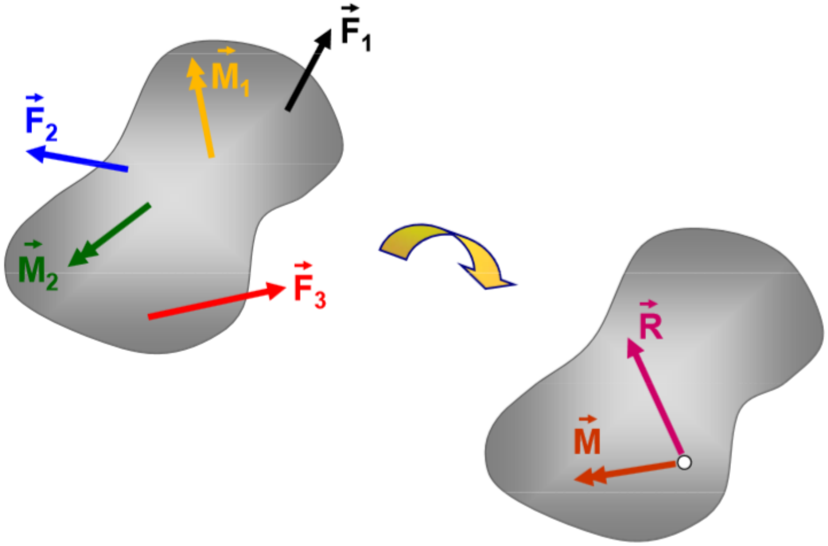


Anteriormente:



Equilíbrio de um Corpo Rígido

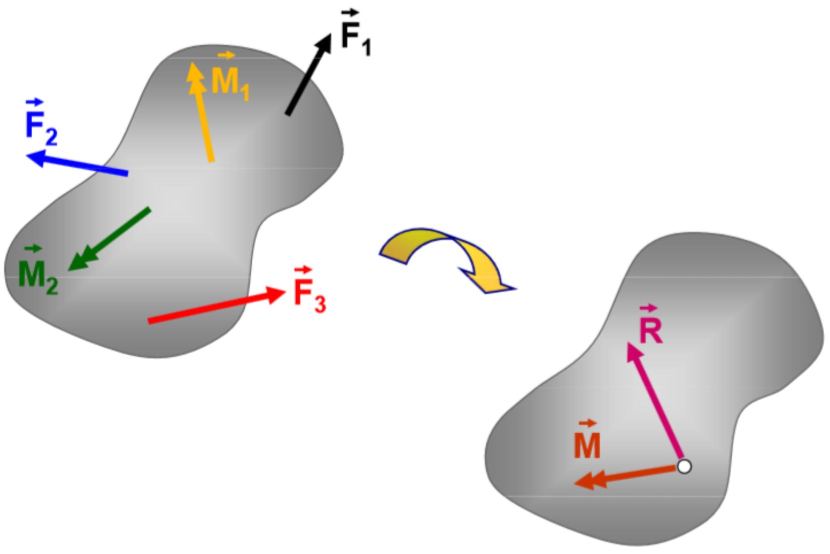
- Quando o ***sistema força-binário equivalente*** de todas as ações ***atuantes no corpo***, em relação a qualquer ponto de referência, ***é nulo***, o corpo está em ***equilíbrio***!



Equilíbrio de um Corpo Rígido

- Quando o ***sistema força-binário equivalente*** de todas as ações ***atuantes no corpo***, em relação a qualquer ponto de referência, ***é nulo***, o corpo está em ***equilíbrio***!

- Para um ***corpo em equilíbrio***, o sistema de forças ***não causa*** qualquer movimento ***translacional ou rotacional*** ao corpo considerado.



Equilíbrio de um Corpo Rígido

- Quando o ***sistema força-binário equivalente*** de todas as ações ***atuantes no corpo***, em relação a qualquer ponto de referência, ***é nulo***, o corpo está em ***equilíbrio***!

- Para um ***corpo em equilíbrio***, o sistema de forças ***não causa*** qualquer movimento ***translacional ou rotacional*** ao corpo considerado.

Algebricamente o equilíbrio corresponde a

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \text{e} \quad \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{0}}$$

que em termos dos componentes retangulares pode ser expresso como

$$R_x = 0,\ R_y = 0 \ \text{ e } \ R_z = 0$$

juntamente com

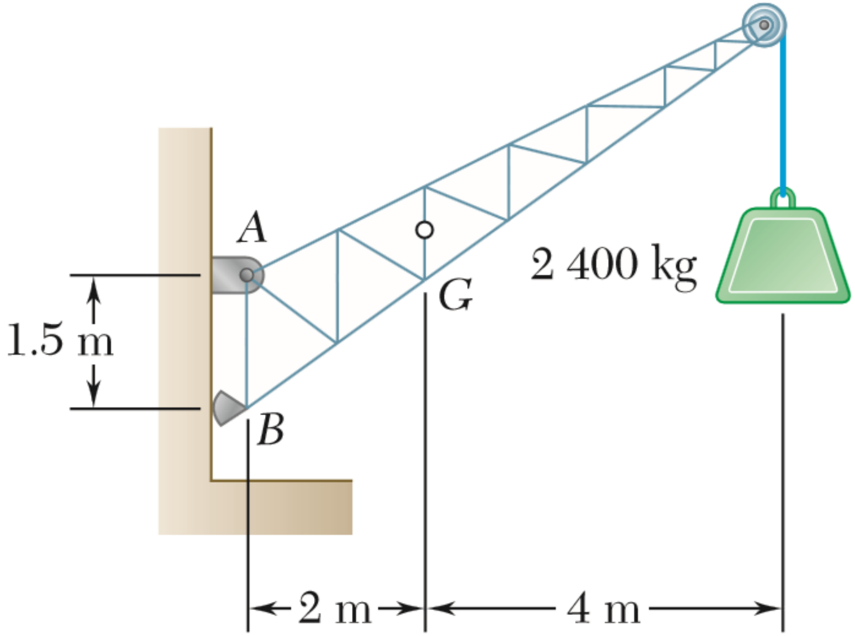
$$M_x = 0,\ M_y = 0 \ \text{ e } \ M_z = 0$$

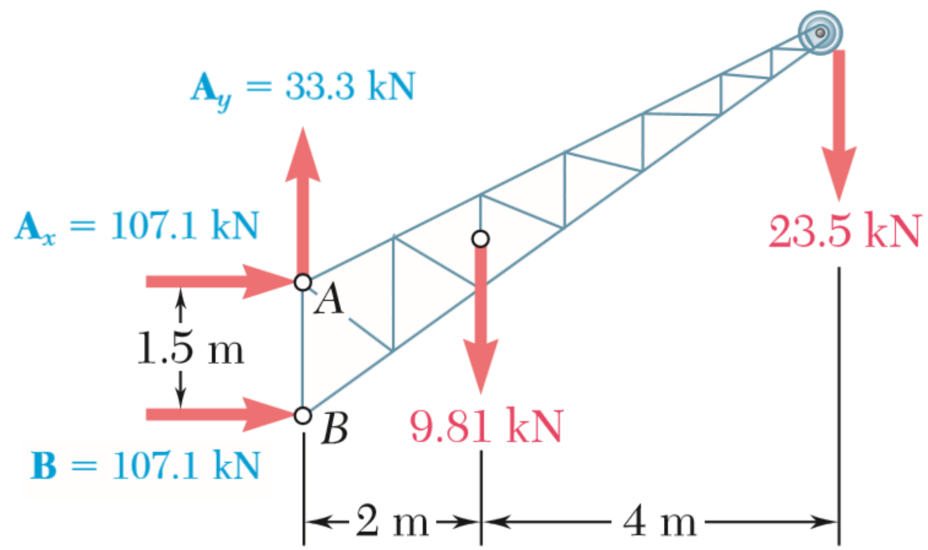
Equilíbrio de um Corpo Rígido

- A maioria dos ***problemas*** que tratam do ***equilíbrio de um corpo rígido*** se enquadra em ***2 categorias***:

Equilíbrio de um Corpo Rígido

- A maioria dos ***problemas*** que tratam do ***equilíbrio de um corpo rígido*** se enquadra em ***2 categorias***:
- ***Verificação:*** quando *todas as ações* que atuam no corpo rígido *são conhecidas* e se deseja saber se a *condição de equilíbrio é ou não atendida*.

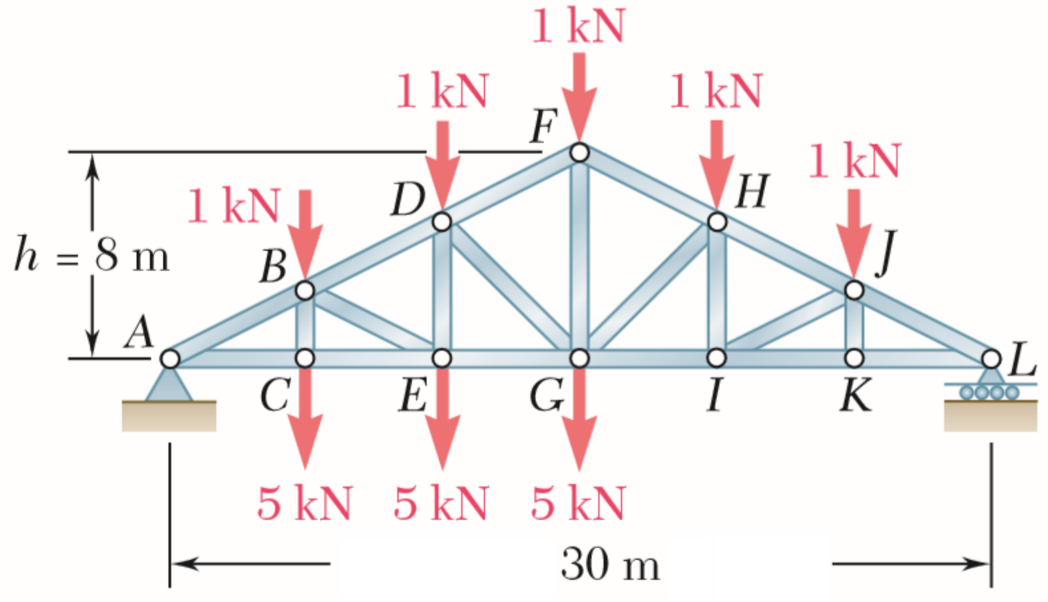




Equilíbrio de um Corpo Rígido

- A maioria dos ***problemas*** que tratam do ***equilíbrio de um corpo rígido*** se enquadra em ***2 categorias***:

- ***Imposição***: *quando* ***algumas das ações*** *que atuam no corpo rígido são desconhecidas e se deseja saber quem são essas ações desconhecidas que garantem a condição de equilíbrio.*

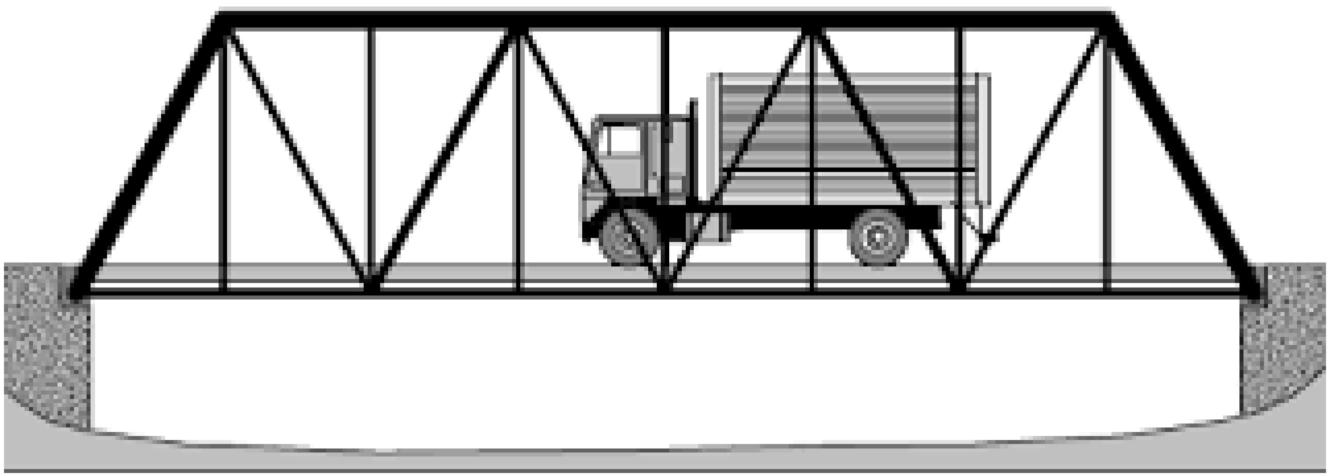


Equilíbrio de um Corpo Rígido

- Para identificação da ***situação física REAL*** do problema de equilíbrio faz-se um esboço conhecido como ***diagrama espacial***:

Equilíbrio de um Corpo Rígido

- Para identificação da ***situação física REAL*** do problema de equilíbrio faz-se um esboço conhecido como ***diagrama espacial***:



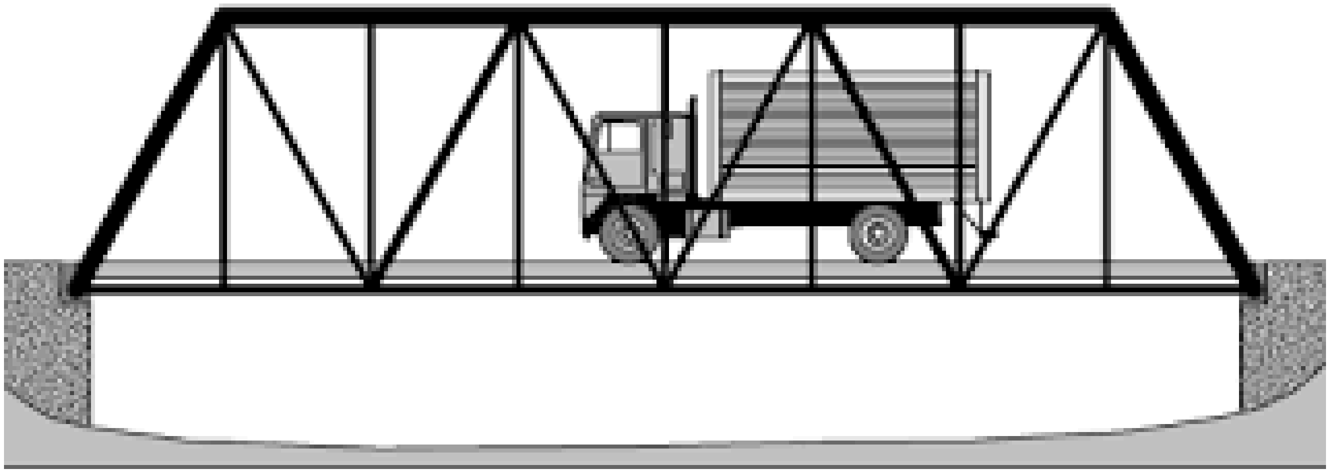
- Alguns problemas podem ser estabelecidos:

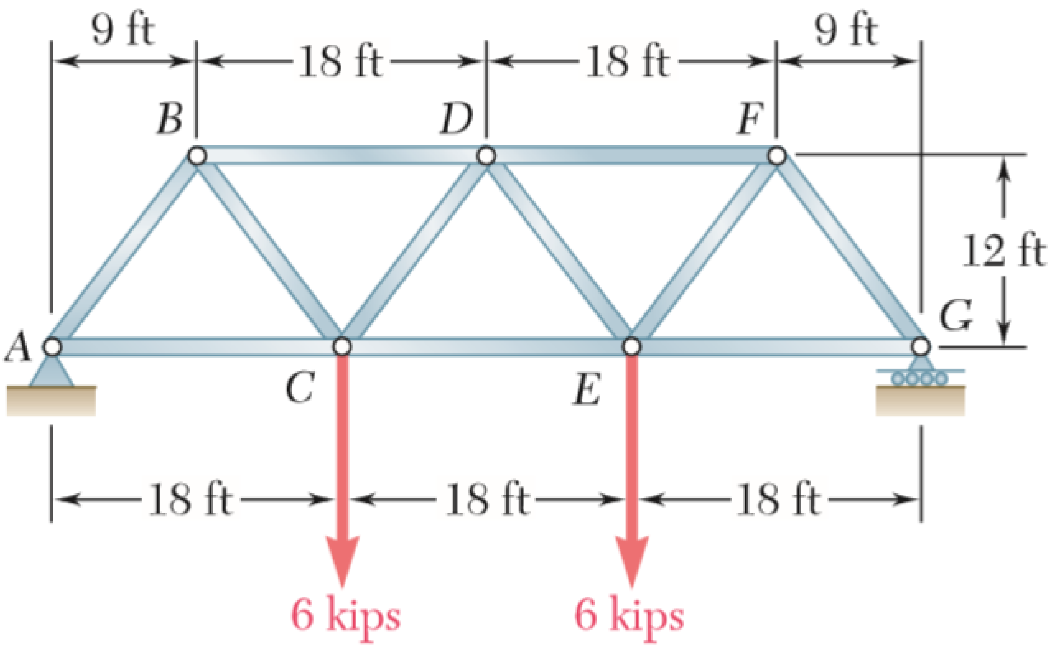
Quão resistente deve ser as barras?
Quão resistentes devem ser os apoios?

Equilíbrio de um Corpo Rígido

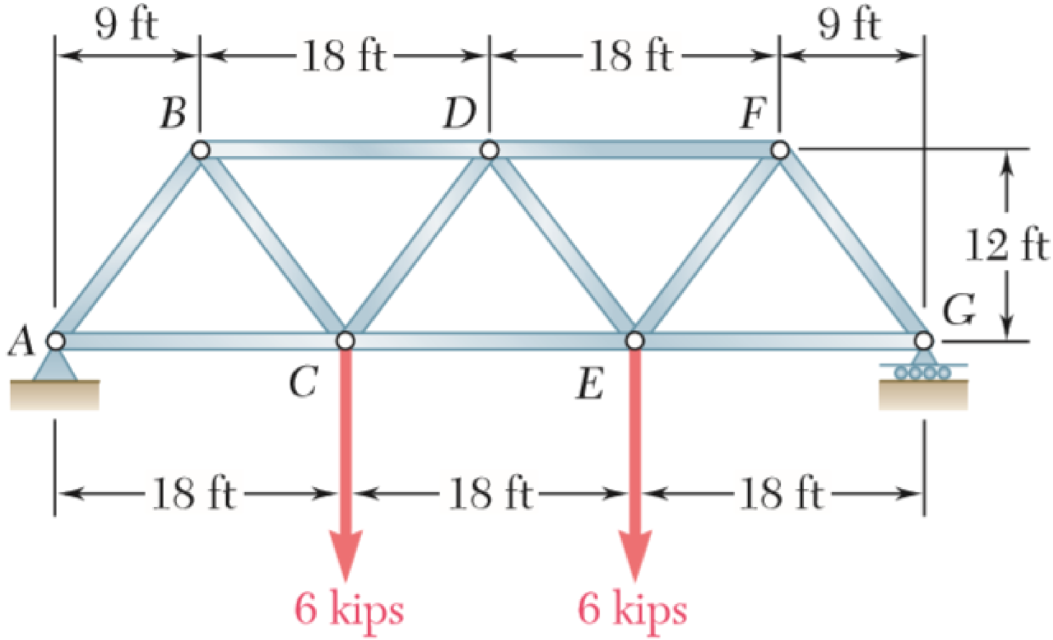
- *Para os problemas que envolvem o equilíbrio de um corpo rígido, escolhe-se uma porção SIGNIFICATIVA e traça-se um diagrama separado, denominado de diagrama de corpo livre, mostrando essa porção, todas as ações que atuam sobre ela e as cotas (necessárias no cálculo dos momentos das forças).*

Equilíbrio de um Corpo Rígido





Equilíbrio de um Corpo Rígido



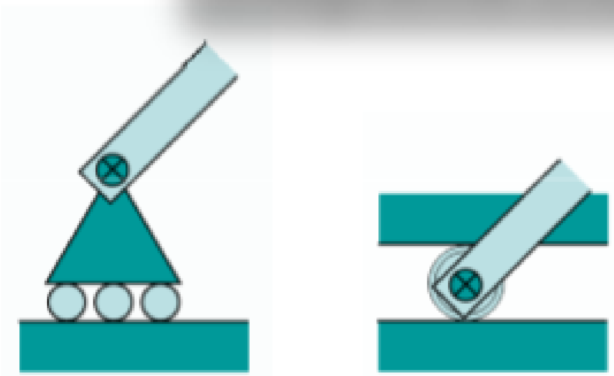
$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0$$

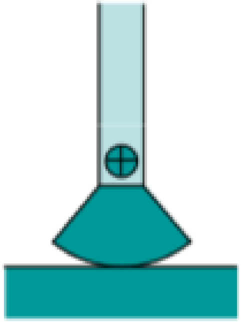
Reações de Apoio em Duas Dimensões

APOIOS DE 1º GÊNERO

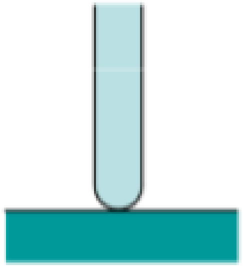
Diagrama Espacial



Roletes



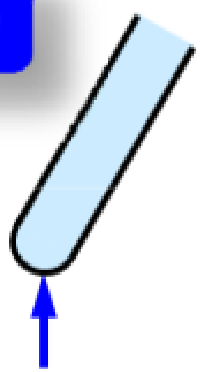
Suporte basculante



Superfície sem atrito

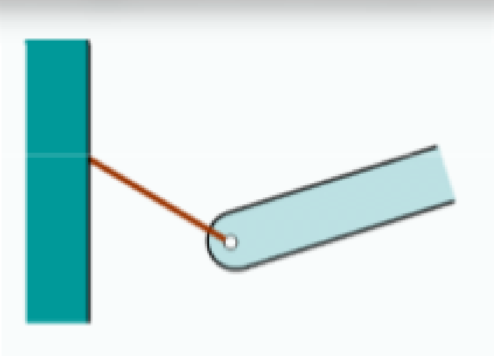
Diagrama de Corpo Livre

Força com linha de ação conhecida (perpendicular à direção de deslizamento)

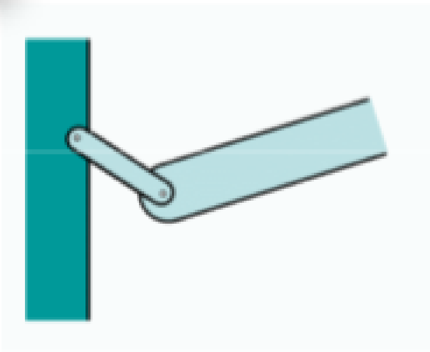


APOIOS DE 1º GÊNERO

Diagrama Espacial



Cabo curto



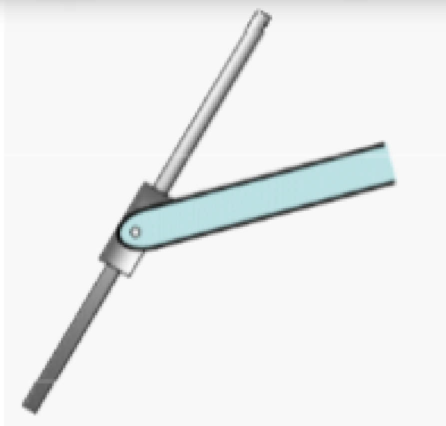
Haste curta

Diagrama de Corpo Livre

Força com linha de ação
conhecida (na direção
do cabo/haste)

APOIOS DE 1º GÊNERO

Diagrama Espacial

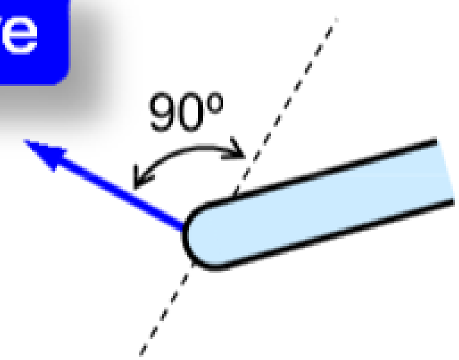


Cursor sobre
haste sem atrito

Pino deslizante
sem atrito

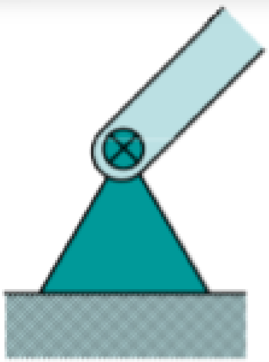
Diagrama de Corpo Livre

Força com linha de ação
conhecida (perpendicular à
direção de deslizamento)

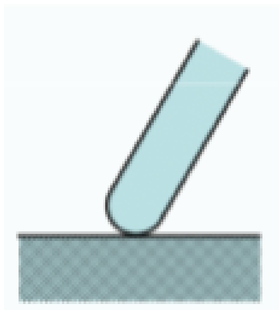


APOIOS DE 2º GÊNERO

Diagrama Espacial



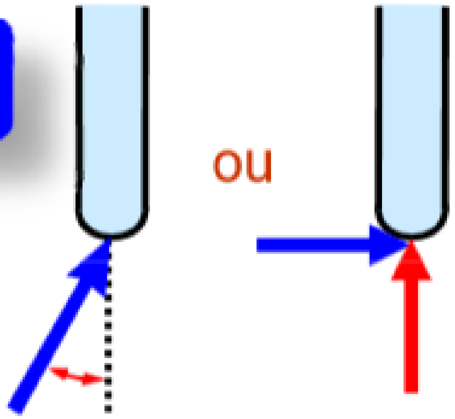
Pino sem atrito
ou articulação



Superfície
rugosa

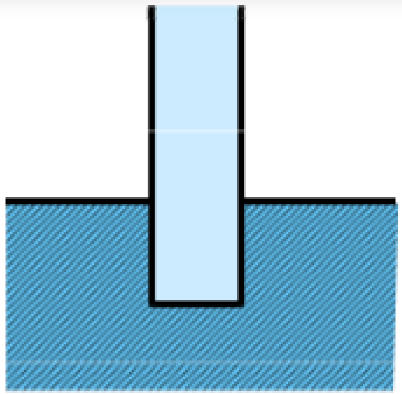
Diagrama de Corpo Livre

Força de direção
desconhecida



APOIOS DE 3º GÊNERO

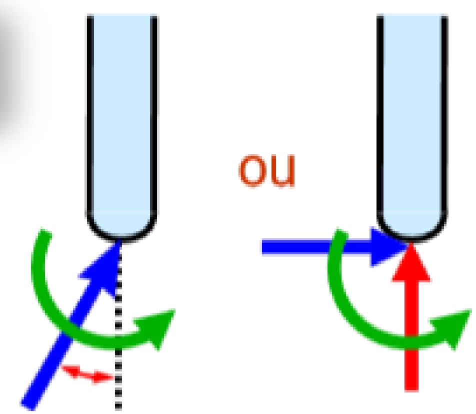
Diagrama Espacial



Engaste

Diagrama de Corpo Livre

Força de direção
desconhecida e binário

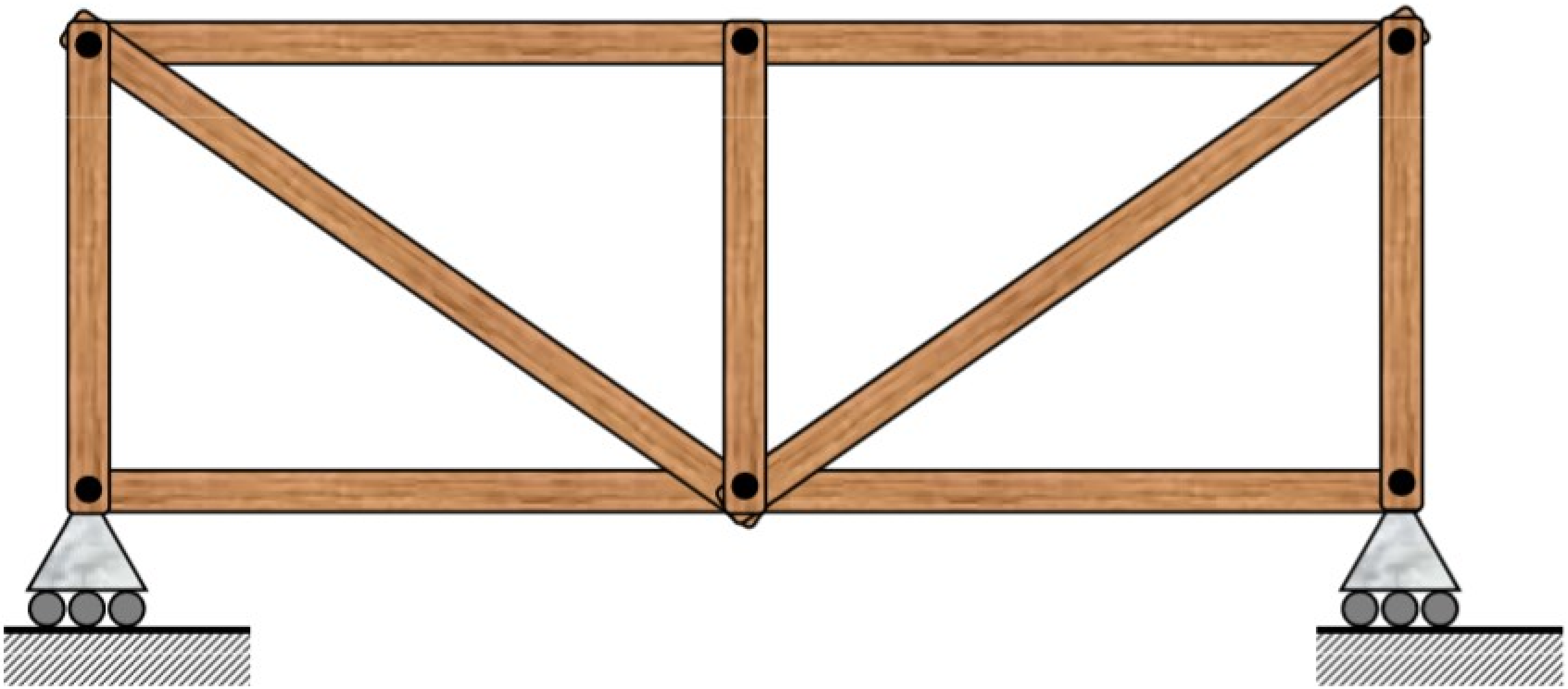


Estaticidade de um Arranjo Estrutura

- **Hipostática:** O arranjo apresenta uma insuficiência na vinculação, permitindo movimentos globais de corpo rígido, possibilitando o equilíbrio apenas de sistemas de forças particulares.

Estaticidade de um Arranjo Estrutura

- **Hipostática:** O arranjo apresenta uma insuficiência na vinculação, permitindo movimentos globais de corpo rígido, possibilitando o equilíbrio apenas de sistemas de forças particulares.

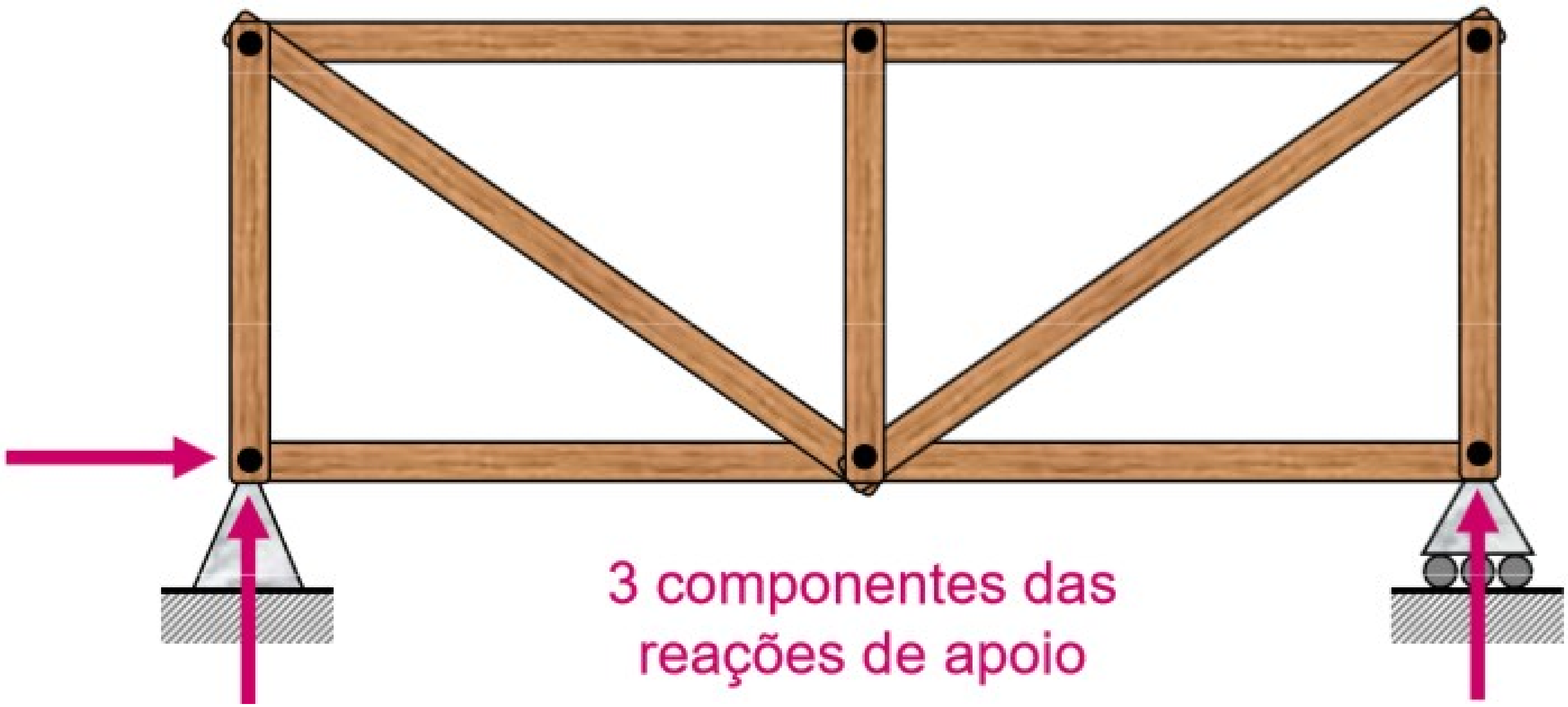


Estaticidade de um Arranjo Estrutura

- **Isostática:** O arranjo apresenta uma ***vinculação mínima suficiente*** para impedir qualquer movimento global de corpo rígido, sendo as reações de apoio determinadas *exclusivamente através das equações globais de equilíbrio*.

Estaticidade de um Arranjo Estrutura

- **Isostática:** O arranjo apresenta uma ***vinculação mínima suficiente*** para impedir qualquer movimento global de corpo rígido, sendo as reações de apoio determinadas *exclusivamente através das equações globais de equilíbrio*.



Estaticidade de um Arranjo Estrutura

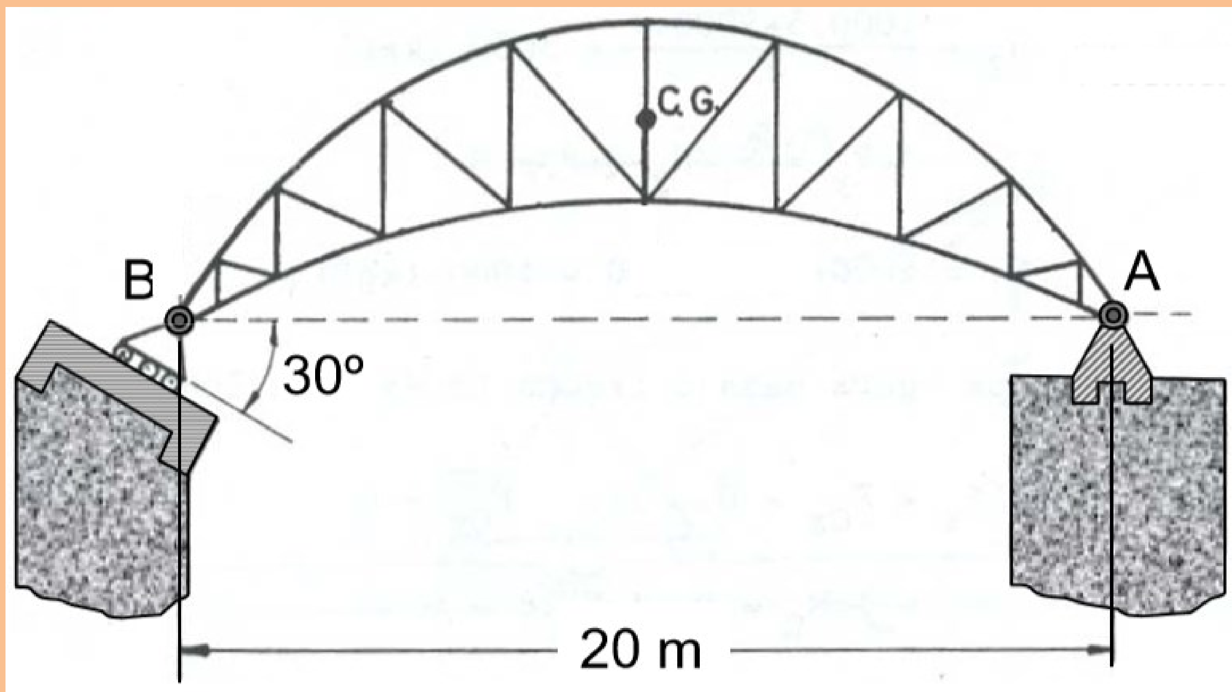
- **Hiperestática:** O arranjo apresenta uma vinculação ***mais do suficiente*** para não permitir movimentos globais de corpo rígido, não sendo possível a determinação de todas as reações de apoio exclusivamente através das equações globais de equilíbrio.

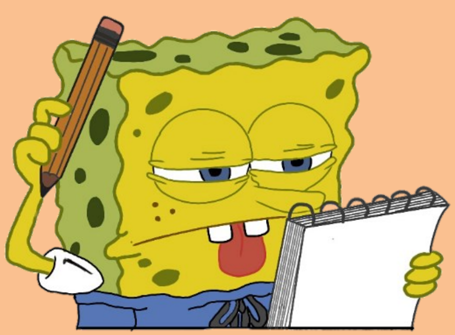
Estaticidade de um Arranjo Estrutura

- **Hiperestática:** O arranjo apresenta uma vinculação ***mais do suficiente*** para não permitir movimentos globais de corpo rígido, não sendo possível a determinação de todas as reações de apoio exclusivamente através das equações globais de equilíbrio.

Exemplo 1

- Uma estrutura em arco treliçado é fixa ao suporte articulado no ponto ***A***, e sobre roletes em ***B*** num plano de **30º** com a horizontal. O vão ***AB*** mede ***20 m***. O peso próprio da estrutura é de ***100 kN***. A força resultante dos ventos é de ***20 kN***, e situa-se a ***4 m*** acima de ***A***, horizontalmente, da direita para a esquerda. Determine as reações nos suportes ***A*** e ***B***.

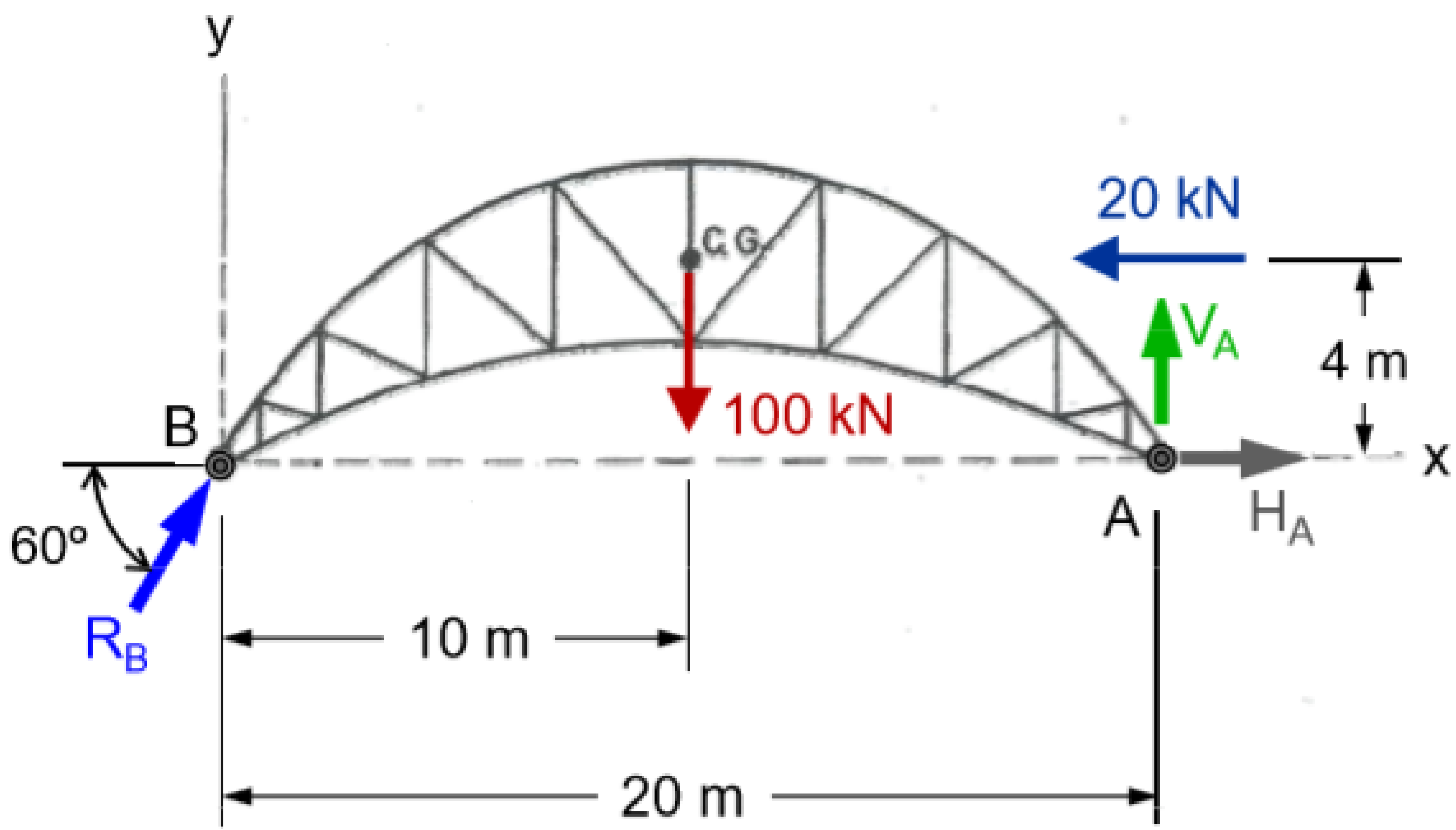




Exemplo 1

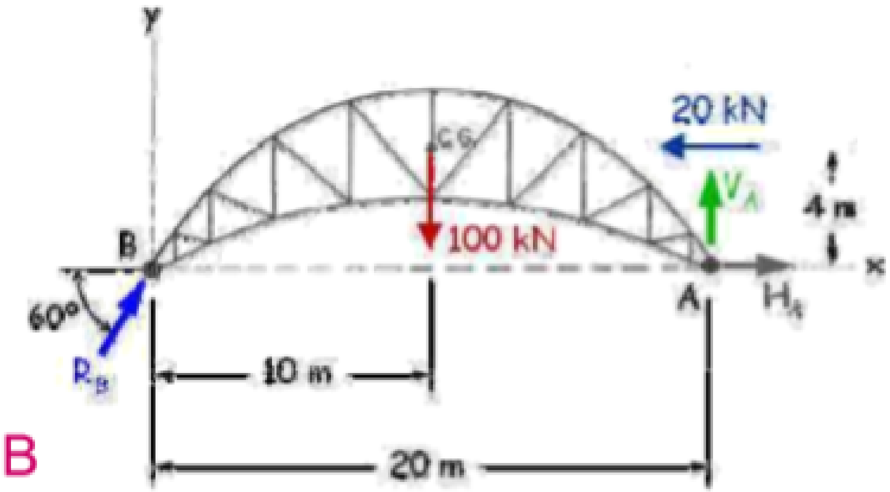
Exemplo (continuação):

Diagrama de Corpo Livre



Exemplo 1

Exemplo (continuação):

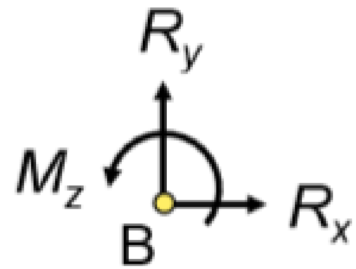


Imposição do Equilíbrio no Ponto B

$$R_x = 0 \therefore R_B \cos 60^o + H_A - 20 = 0$$

$$R_y = 0 \therefore R_B \sin 60^o - 100 + V_A = 0$$

$$M_z = 0 \therefore -100 \cdot 10 + V_A \cdot 20 + 20 \cdot 4 = 0$$



$$\begin{cases} 0{,}5 \cdot R_B + H_A = 20 \\ 0{,}866 \cdot R_B + V_A = 100 \\ 20 \cdot V_A = 920 \end{cases}$$

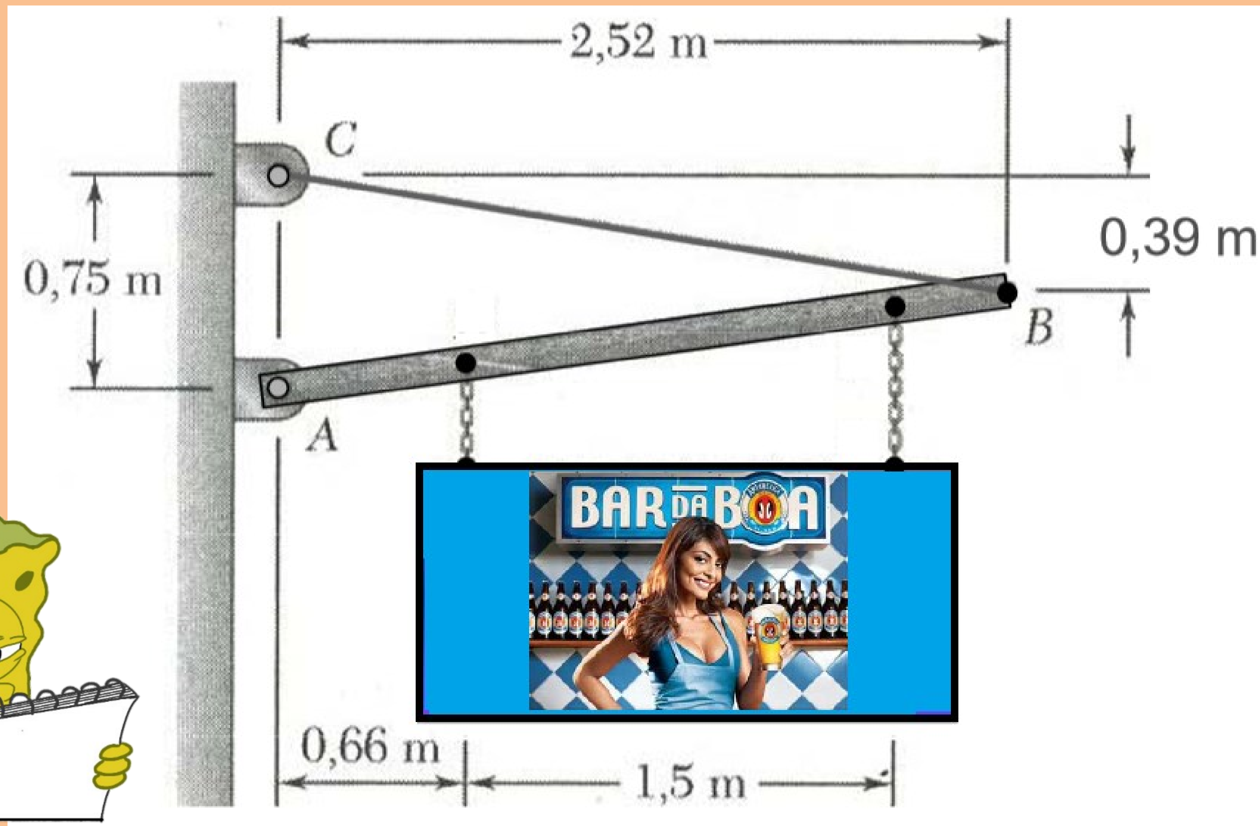
$$H_A = -11{,}2\,\text{kN}$$

$$V_A = 46{,}0\,\text{kN}$$

$$R_B = 62{,}4\,\text{kN}$$

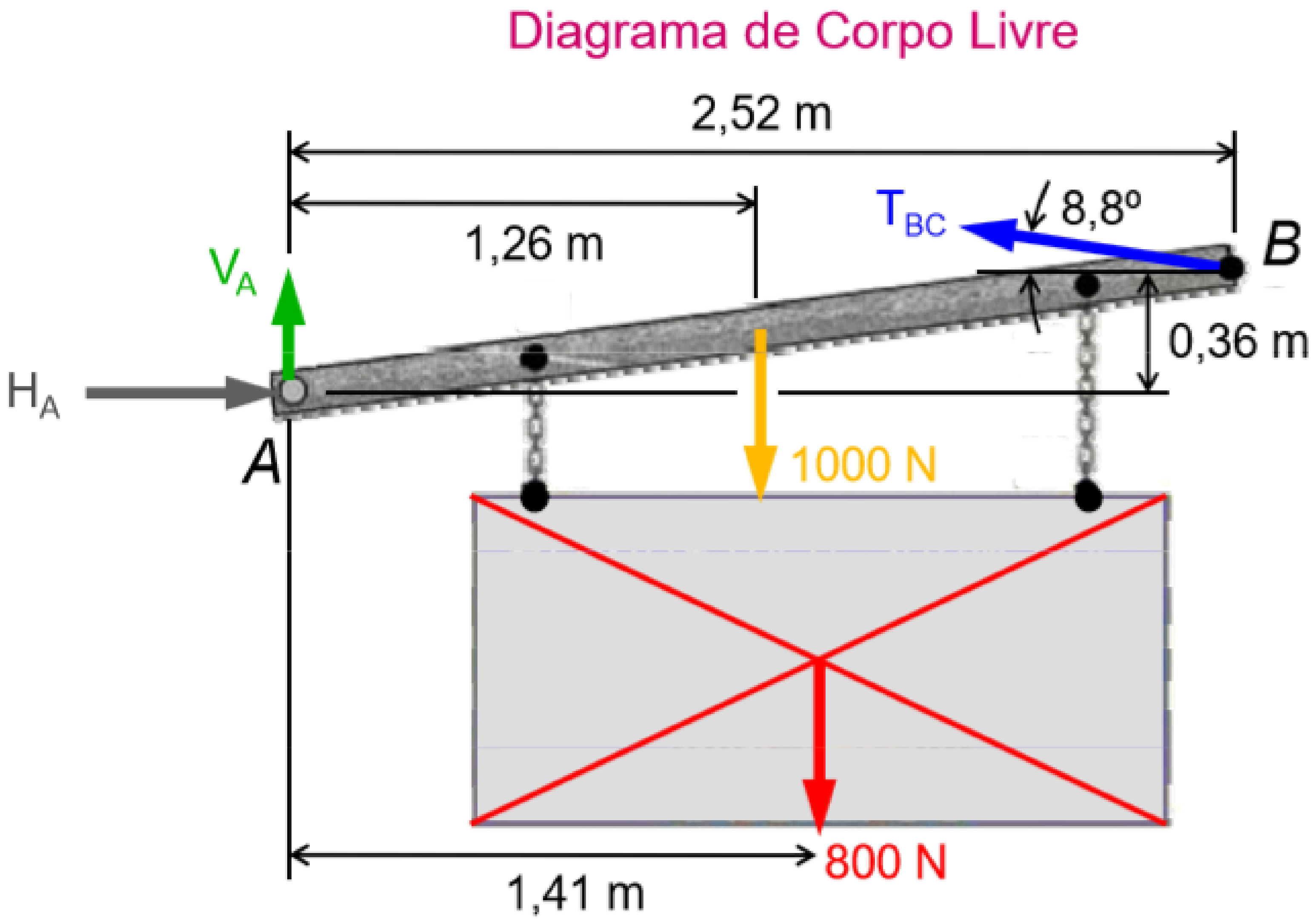
Exemplo 2

- Um letreiro é pendurado por duas correntes no mastro ***AB***. O mastro é articulado em ***A*** e é sustentado pelo cabo ***BC***. Sabendo que os pesos do mastro e do letreiro são ***1000 N*** e ***800 N***, respectivamente, determine a tração no cabo ***BC*** e a reação na articulação em ***A***.



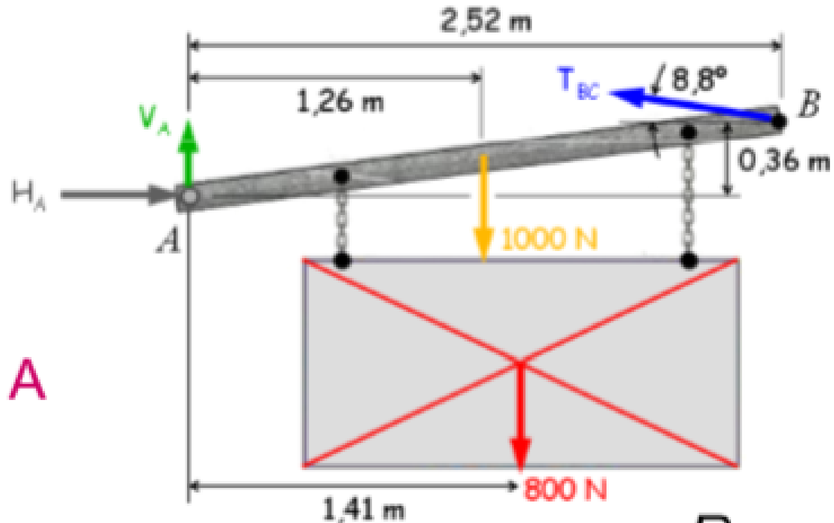
Exemplo 2

Exemplo (continuação):

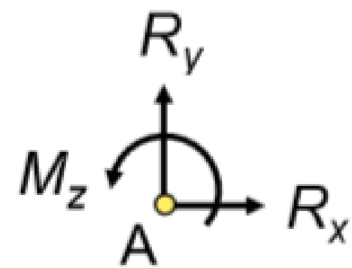


Exemplo 2

Exemplo (continuação):



Imposição do Equilíbrio no Ponto A



$$R_x = 0 \therefore H_A + T_{BC} \cos 171{,}2^o = 0$$

$$R_y = 0 \therefore V_A - 1000 - 800 + T_{BC} \sin 171{,}2^o = 0$$

$$M_z = 0 \therefore -1000 \cdot 1{,}26 - 800 \cdot 1{,}41 + T_{BC} \cos 8{,}8^o \cdot 0{,}36 + T_{BC} \sin 8{,}8^o \cdot 2{,}52 = 0$$

$$\begin{cases} H_A - 0{,}988 \cdot T_{BC} = 0 \\ V_A + 0{,}153 \cdot T_{BC} = 1800 \\ 0{,}741 \cdot T_{BC} = 2388 \end{cases}$$

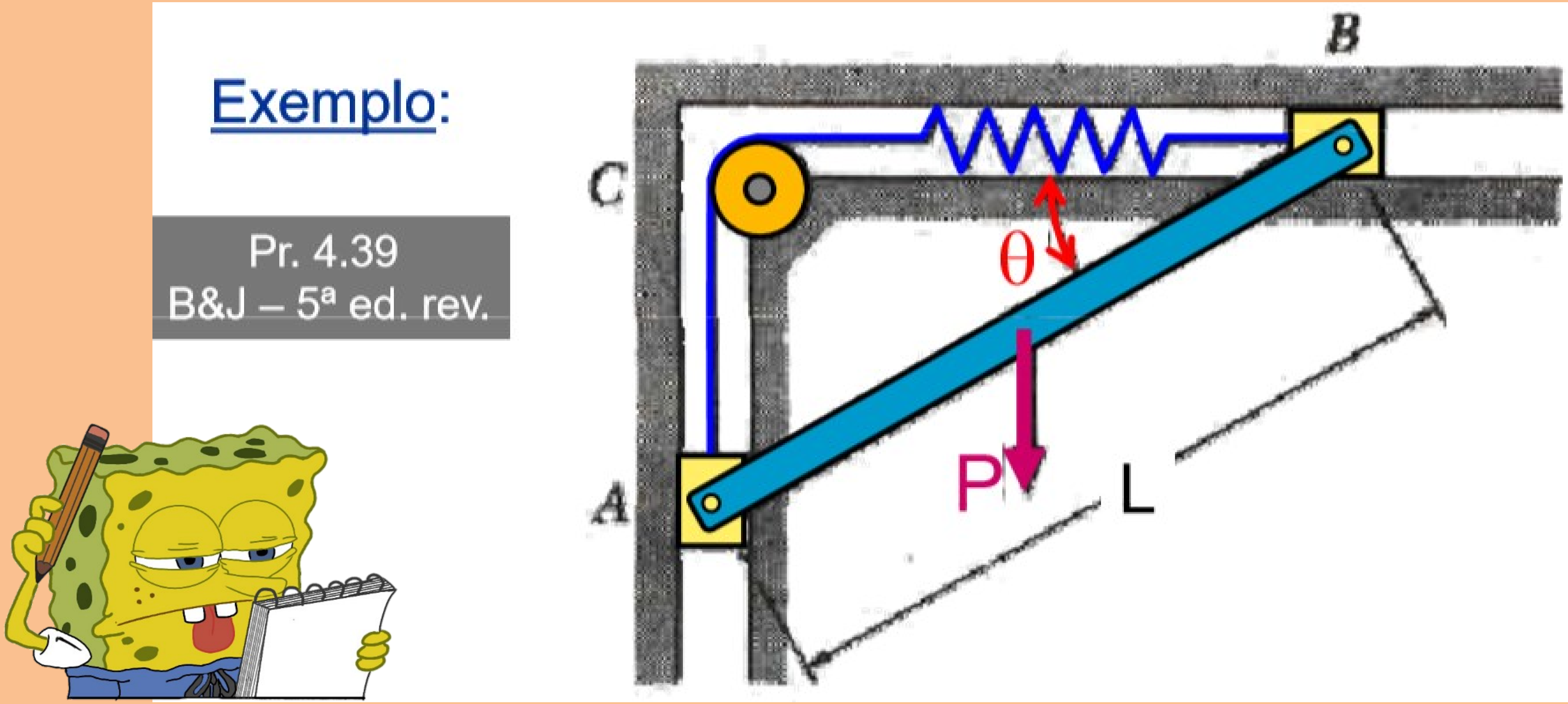
$$H_A = 3184{,}0 \text{ N}$$

$$V_A = 1306{,}9 \text{ N}$$

$$T_{BC} = 3222{,}7 \text{ N}$$

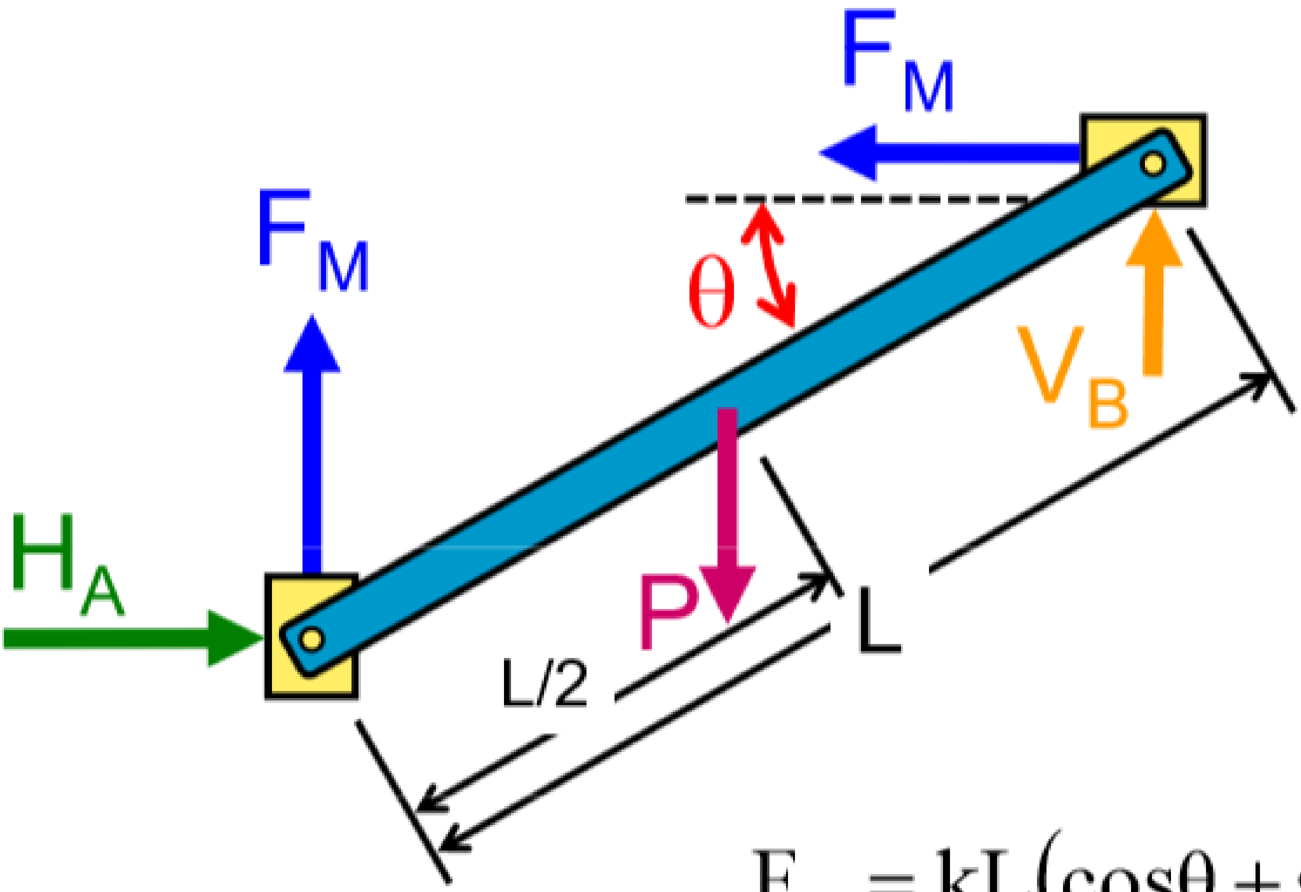
Exemplo 3

- Uma barra delgada ***AB***, de peso ***P***, está presa a dois blocos ***A*** e ***B*** que se movem em guias lisas, como ilustrado. A constante da mola é ***k***, e a mola não está esticada quando ***AB*** está na horizontal. Desprezando o peso dos blocos, deduza uma equação para ***θ, P, L*** e ***k*** que deve ser satisfeita quando a barra está em equilíbrio.



Exemplo 3

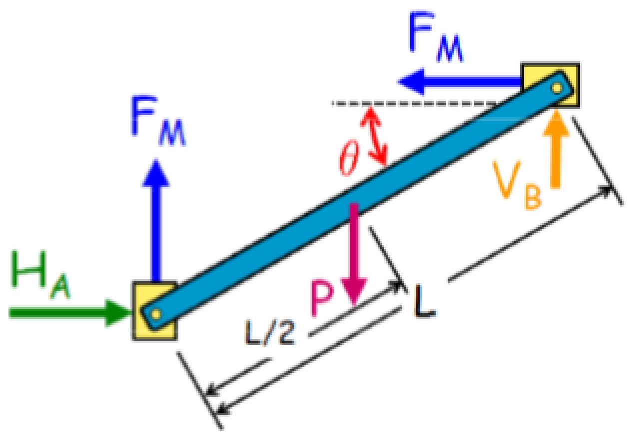
Diagrama de Corpo Livre



$$F_M = kL(\cos\theta + \sin\theta - 1)$$

Exemplo 3

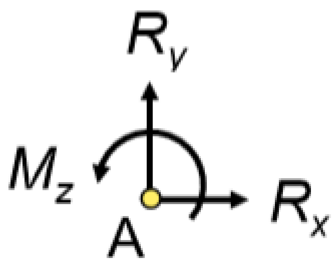
Exemplo (continuação):



Imposição do Equilíbrio no Ponto A

$$R_x = 0 \therefore H_A - F_M = 0$$

$$R_y = 0 \therefore F_M - P + V_B = 0$$



$$M_z = 0 \therefore -P\frac{L}{2}\cos\theta + F_M L\sin\theta + V_B L\cos\theta = 0$$

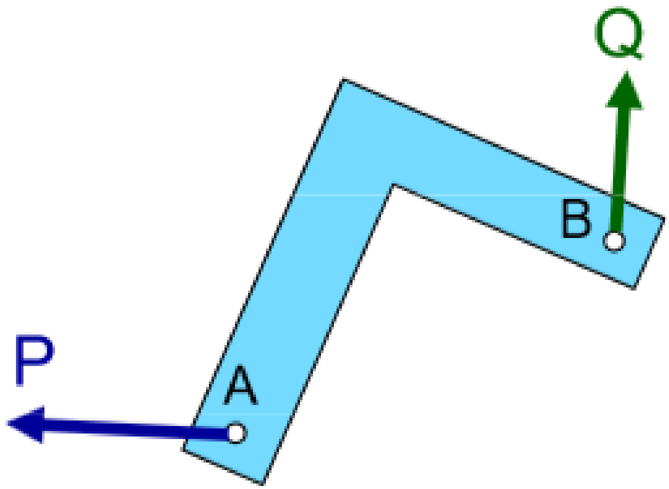
Isolando V_B da segunda equação, substituindo o resultado na terceira e trazendo o valor de F_M chega-se a

$$\boxed{\frac{P}{2}\cos\theta + kL(\cos\theta + \sin\theta - 1)(\sin\theta - \cos\theta) = 0}$$

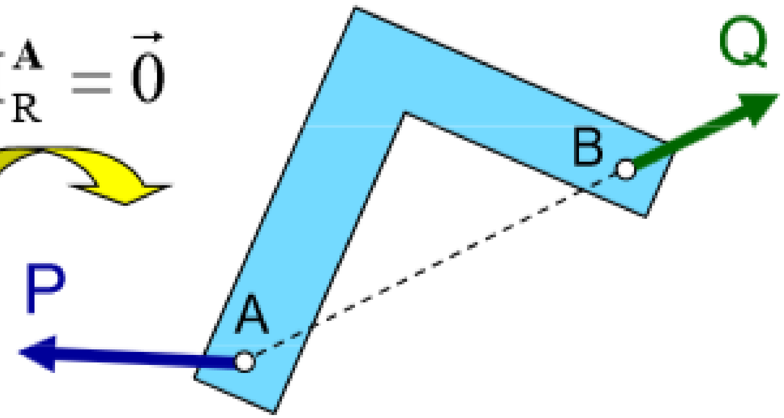
Situações Particulares de Equilíbrio em Duas Dimensões

Situações Particulares de Equilíbrio em 2D

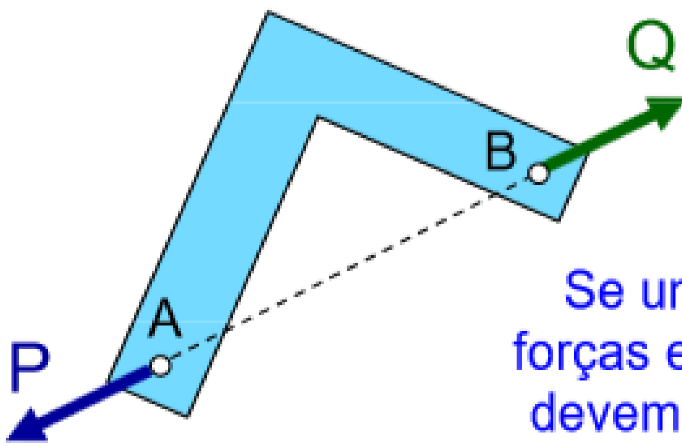
Corpo sujeito à ação de duas forças:



$$\vec{M}_R^{\mathbf{A}} = \vec{0}$$



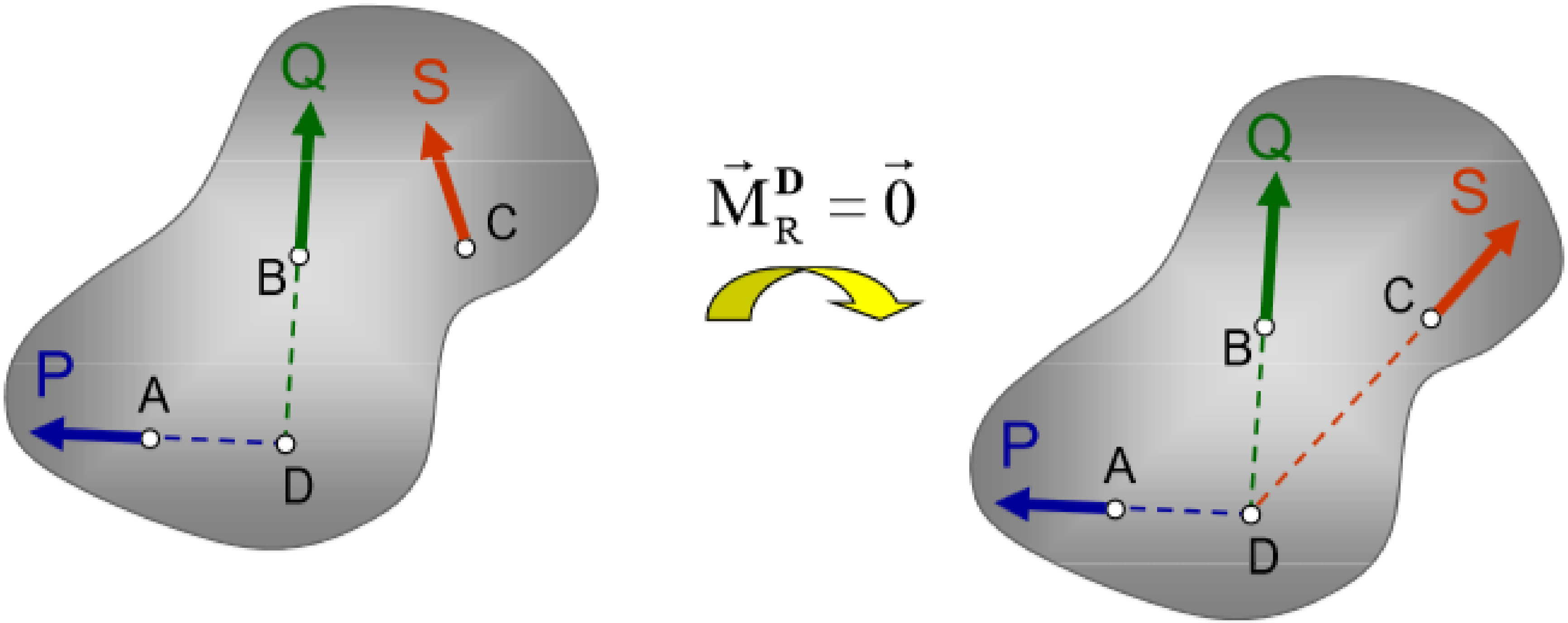
$$\vec{M}_R^{\mathbf{B}} = \vec{0}$$



Se um corpo sujeito à ação de duas forças está em equilíbrio, as duas forças devem ter igual intensidade, igual linha de ação e sentidos opostos.

Situações Particulares de Equilíbrio em 2D

Corpo sujeito à ação de três forças:

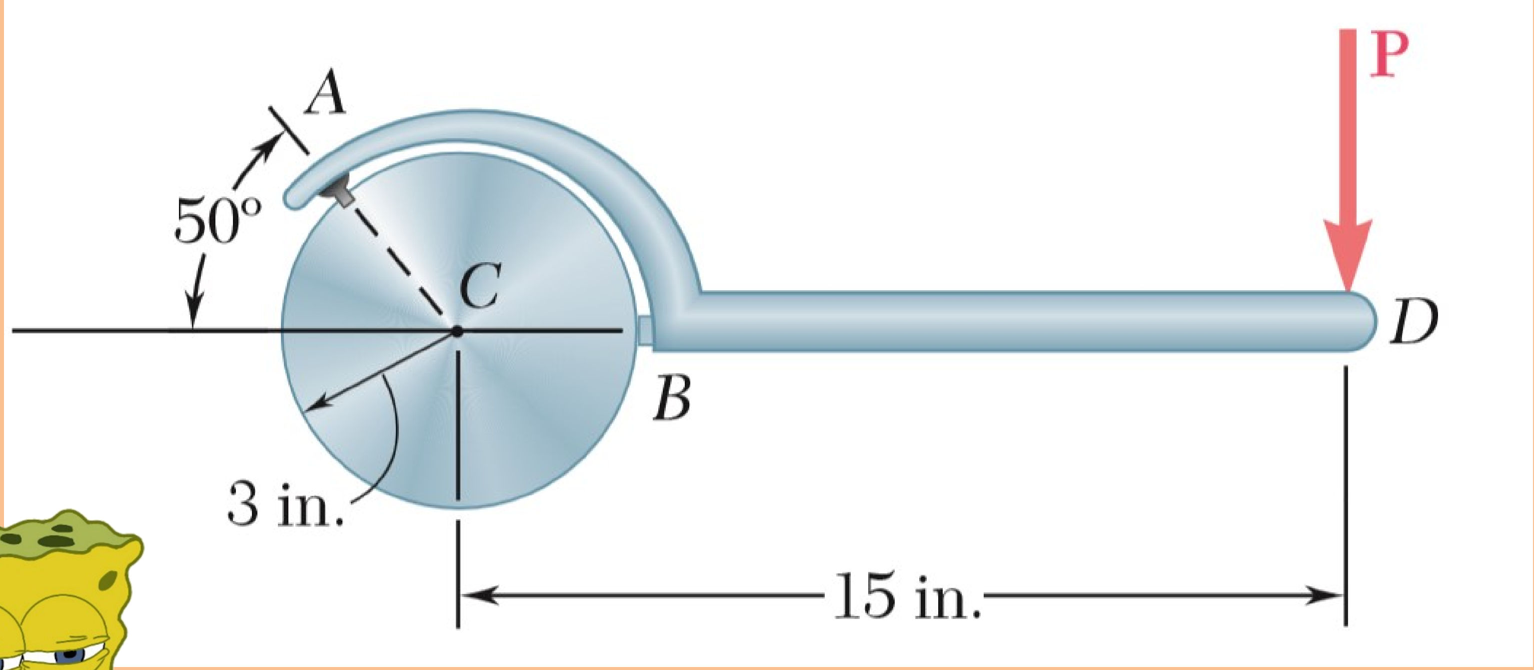


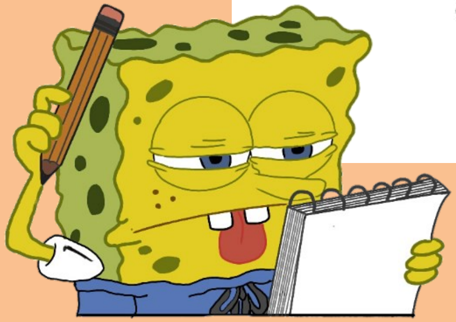
$$\vec{M}_R^D = \vec{0}$$

A condição necessária para que um corpo sujeito à ação de três forças esteja em equilíbrio é que as linhas de ação das três forças sejam concorrentes.

Exemplo 4

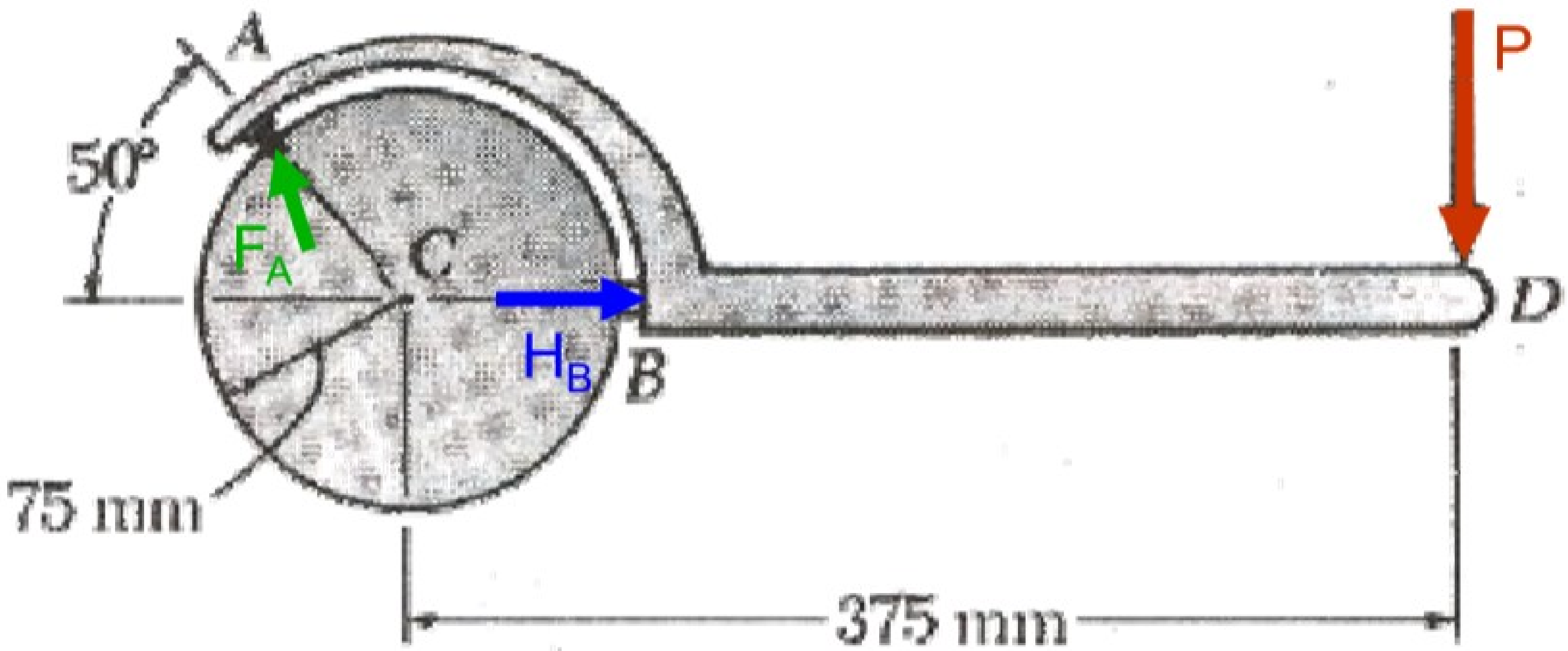
- Uma chave é utilizada para girar um eixo. Um pino ajusta-se no furo ***A***, e uma superfície plana e sem atrito apoia-se no ponto ***B*** do eixo. Se uma força ***P*** de ***250N*** de intensidade for aplicada ao ponto ***D*** da chave, determine as reações do eixo sobre a chave nos pontos ***A*** e ***B***.





Exemplo 4

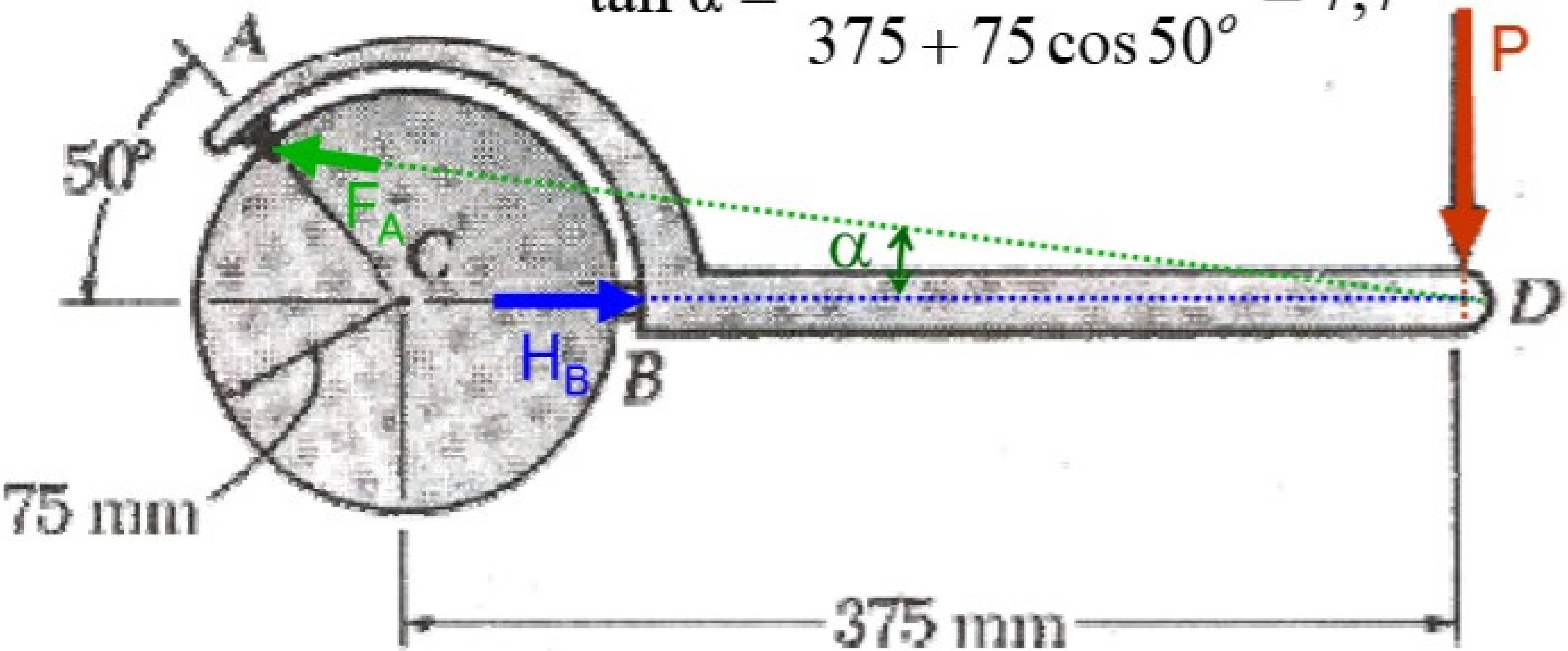
Exemplo (continuação):



Exemplo 4

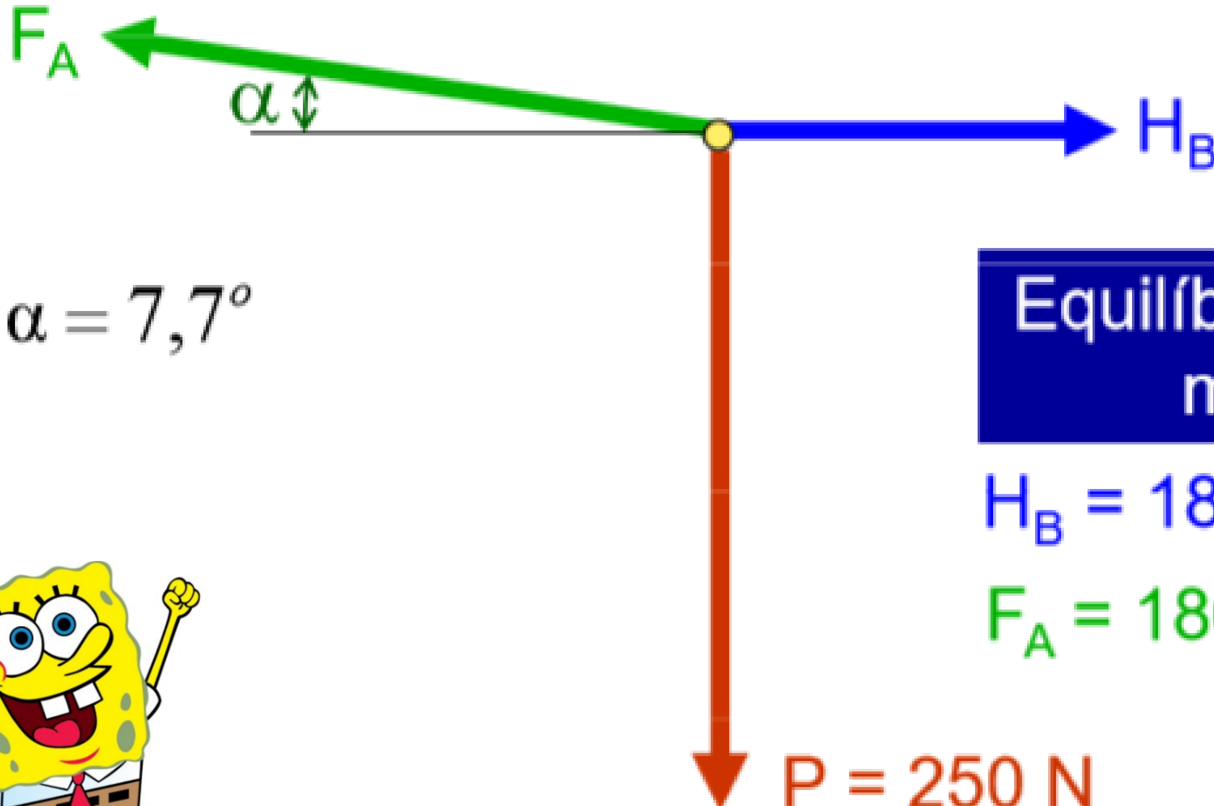
Exemplo (continuação):

$$\tan \alpha = \frac{75 \sin 50^o}{375 + 75 \cos 50^o} = 7{,}7^o$$



Exemplo 4

Exemplo (continuação):



$\alpha = 7{,}7^\circ$

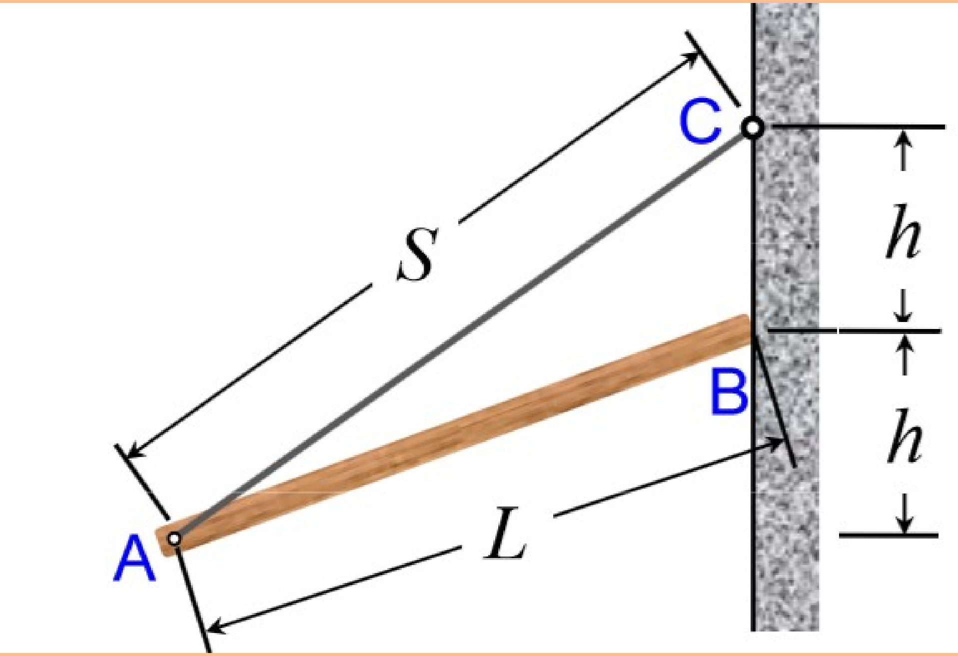
Equilíbrio do ponto material

$H_B = 1849{,}0\ N$ $\rightarrow$

$F_A = 1865{,}9\ N$ 7,7°

Exemplo 5

- **EXERCÍCIO PARA O LAR:** **Uma haste delgada de comprimento L e peso W é mantida em equilíbrio tal como mostra a figura, com uma extremidade apoiada sobre uma parede sem atrito e a outra presa a uma corda de comprimento S. Deduza uma expressão para a distância h em termos de L e S. Mostre que essa posição de equilíbrio não existe se S > 2L.**



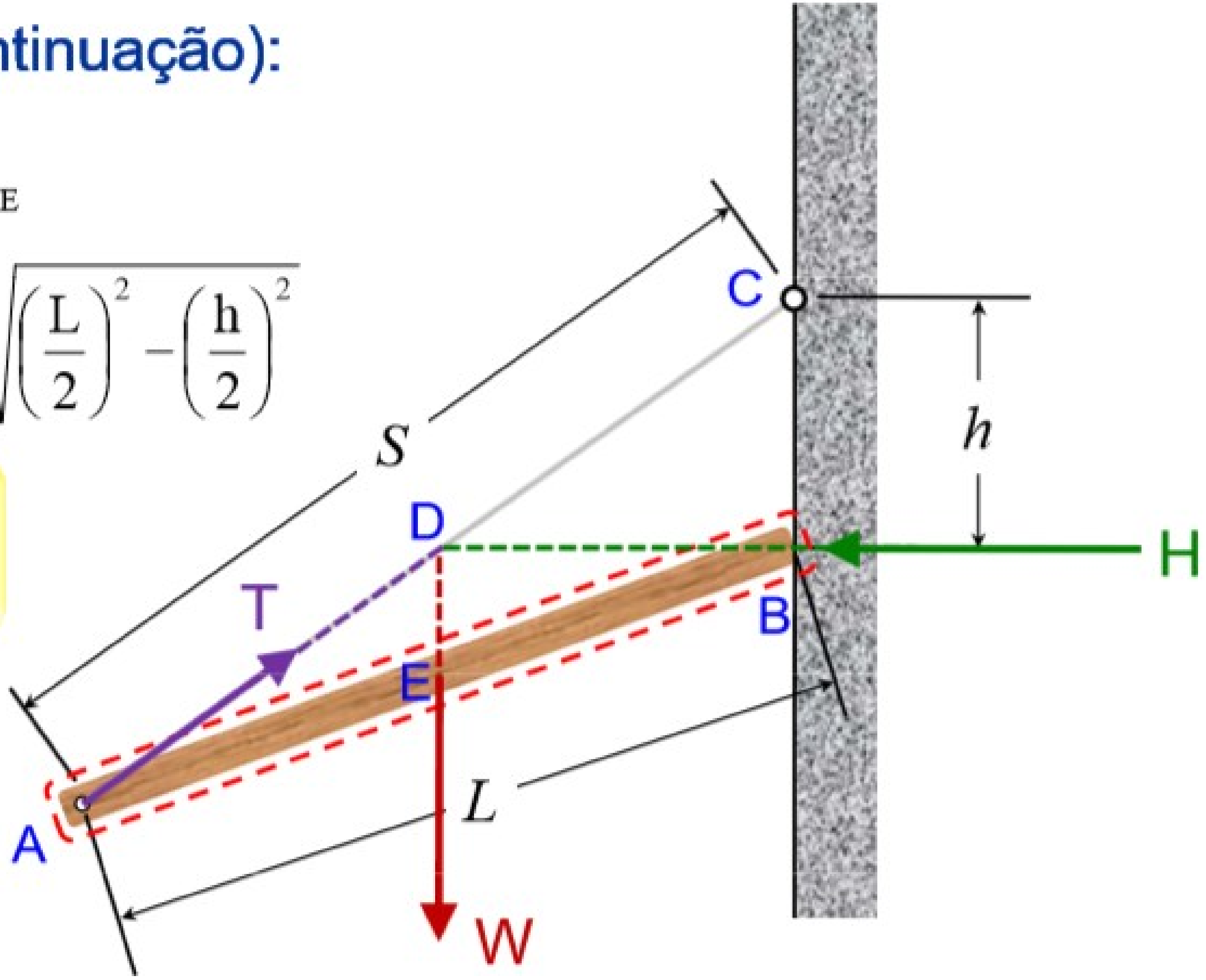
Exemplo 5

Exemplo (continuação):

$$\overline{BD}_{BCD} = \overline{BD}_{BDE}$$

$$\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - h^2} = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{h = \sqrt{\frac{S^2 - L^2}{3}}}$$



Exemplo 5

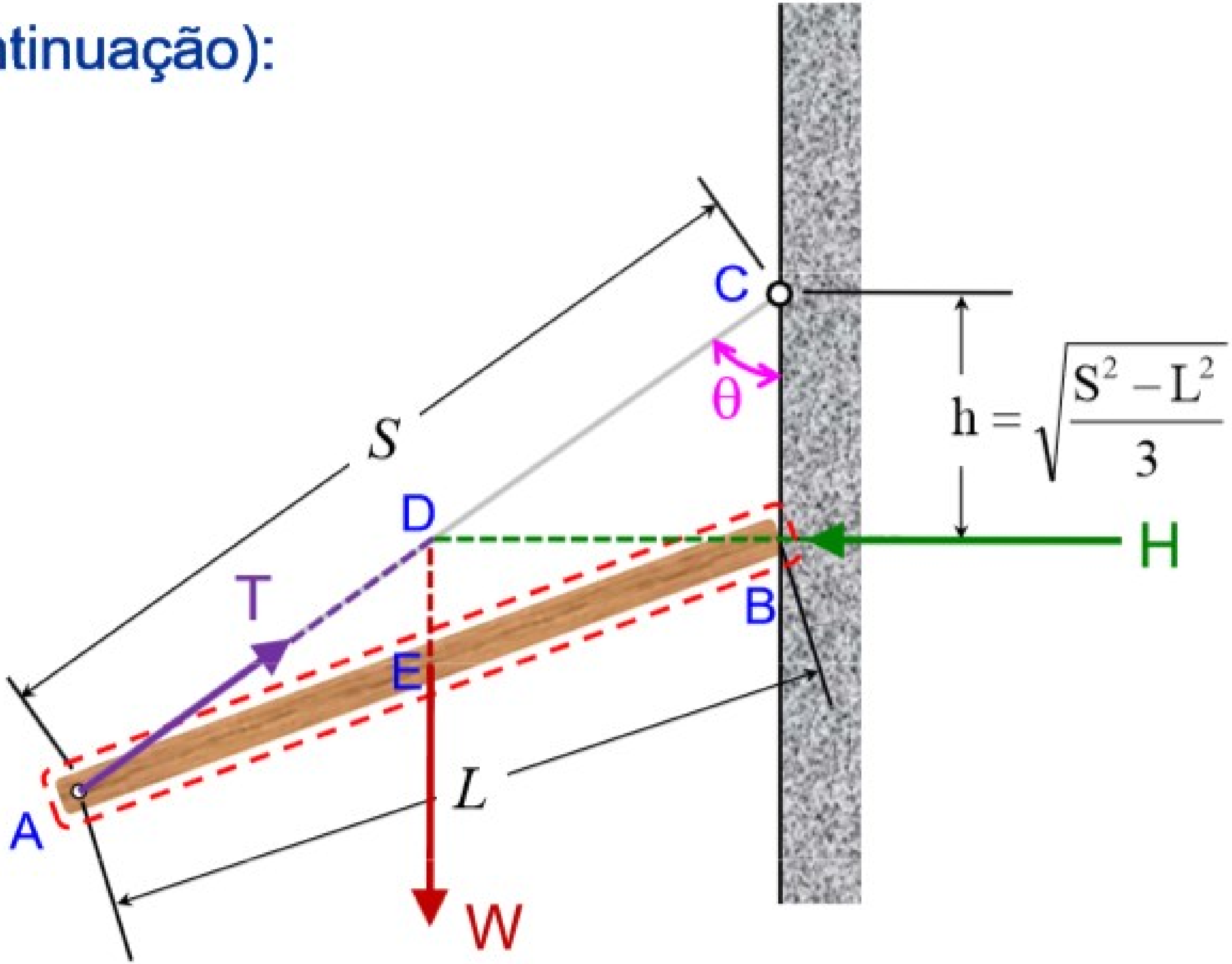
Exemplo (continuação):

$$\cos\theta \le 1$$

$$\frac{h}{S/2} \le 1$$

$$\frac{\sqrt{\dfrac{S^2 - L^2}{3}}}{S/2} \le 1$$

$$\boxed{S \le 2L}$$



Equilíbrio de um Corpo Rígido em Três Dimensões

Equilíbrio de um Corpo Rígido em 3D

- Quando o ***sistema força-binário equivalente*** de todas as ações ***atuantes no corpo***, em relação a qualquer ponto de referência, ***é nulo***, o corpo está em ***equilíbrio***!

- Para um ***corpo em equilíbrio***, o sistema de forças ***não causa*** qualquer movimento ***translacional ou rotacional*** ao corpo considerado.

Algebricamente o equilíbrio corresponde a

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \text{e} \quad \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{0}}$$

que em termos dos componentes retangulares pode ser expresso como

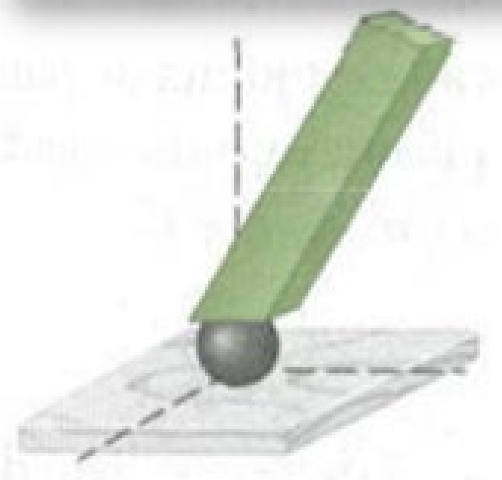
$$R_x = 0,\ R_y = 0 \ \text{ e } \ R_z = 0$$

juntamente com

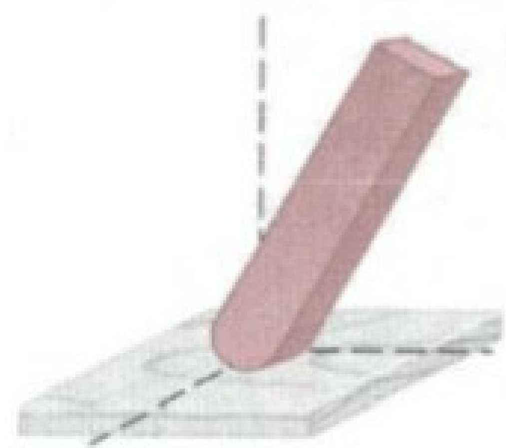
$$M_x = 0,\ M_y = 0 \ \text{ e } \ M_z = 0$$

Equilíbrio de um Corpo Rígido em 3D

Diagrama Espacial



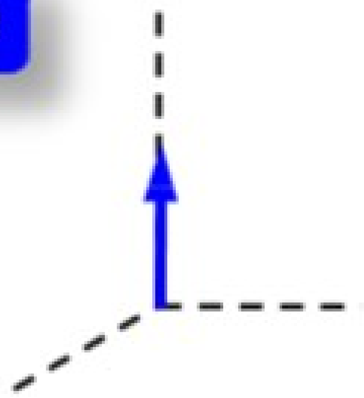
Esfera



Superfície sem atrito

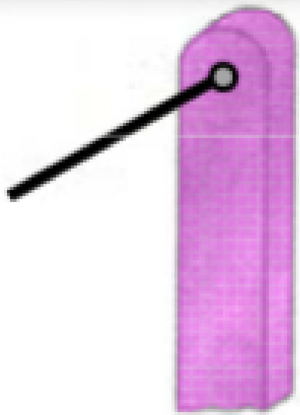
Diagrama de Corpo Livre

Força com linha de ação conhecida (perpendicular ao plano de deslizamento)



Equilíbrio de um Corpo Rígido em 3D

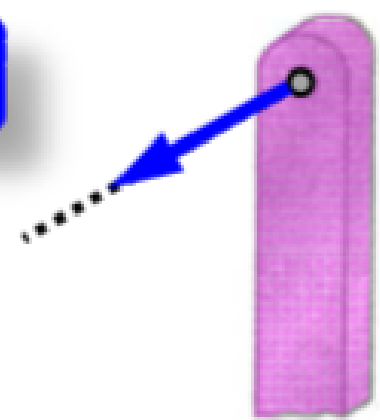
Diagrama Espacial



Cabo

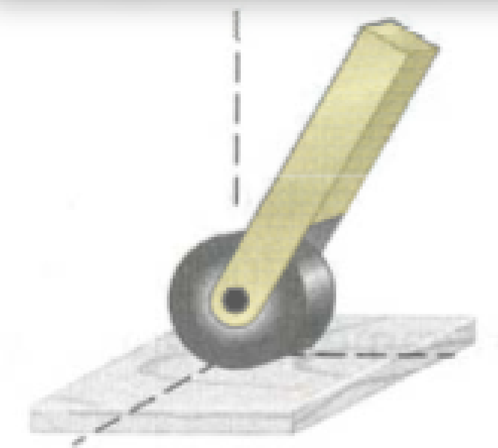
Diagrama de Corpo Livre

Força com linha de ação conhecida (na direção do cabo, puxando o objeto vinculado)

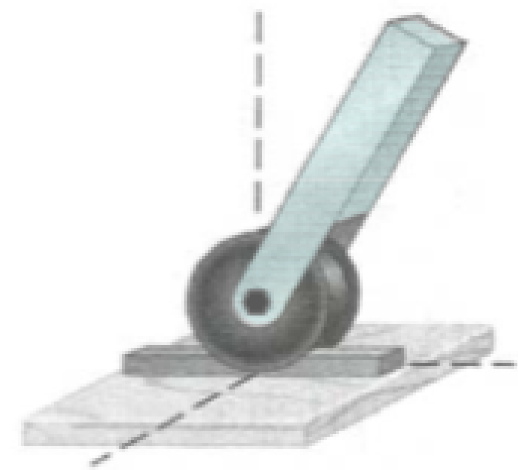


Equilíbrio de um Corpo Rígido em 3D

Diagrama Espacial



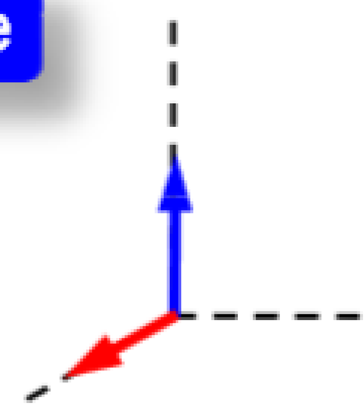
Rolete sobre superfície rugosa



Roda sobre trilho

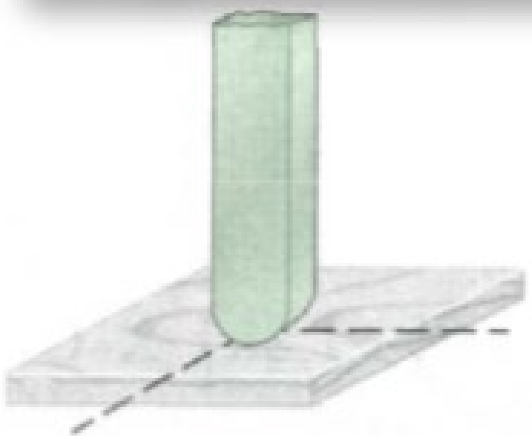
Diagrama de Corpo Livre

Forças impedindo os movimentos nas direções perpendiculares ao plano e à direção de deslizamento

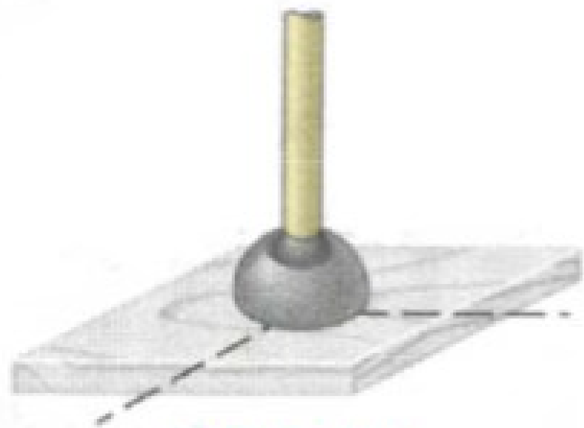


Equilíbrio de um Corpo Rígido em 3D

Diagrama Espacial



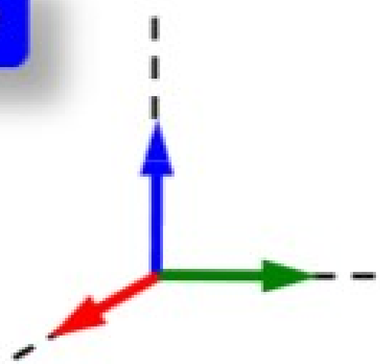
Superfície rugosa



Rótula ou
junta esférica

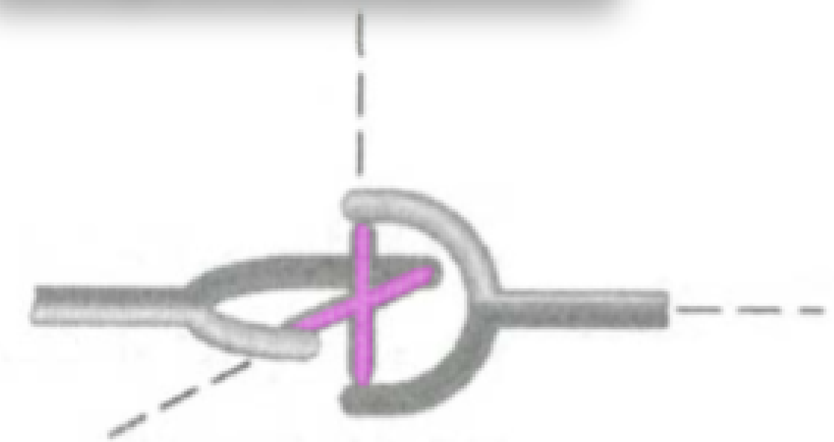
Diagrama de Corpo Livre

Forças impedindo o
movimento em todas as
direções



Equilíbrio de um Corpo Rígido em 3D

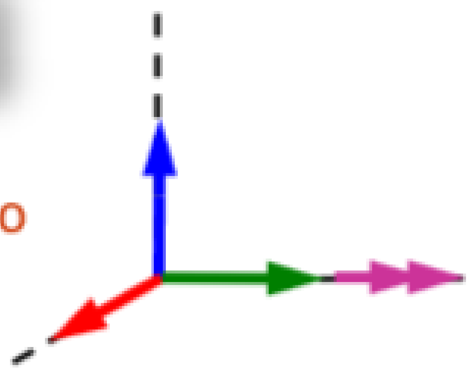
Diagrama Espacial



Junta universal

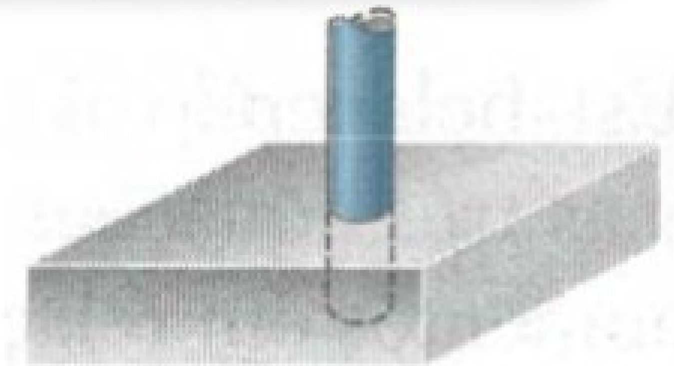
Diagrama de Corpo Livre

Forças impedindo o movimento em todas as direções e binário impedindo o giro em torno do eixo perpendicular à cruz da conexão



Equilíbrio de um Corpo Rígido em 3D

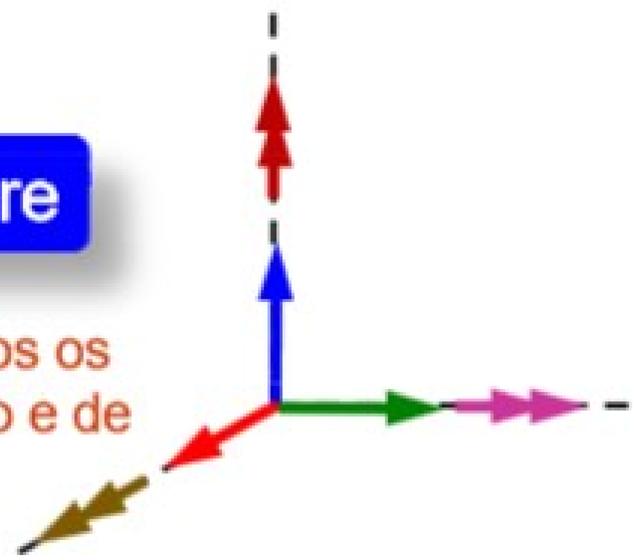
Diagrama Espacial



Engaste

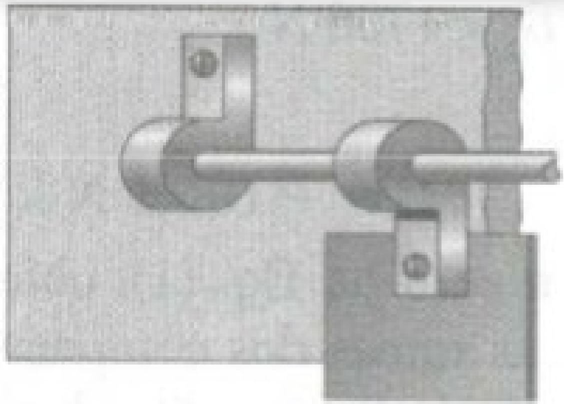
Diagrama de Corpo Livre

Forças e binários impedindo todos os movimento relativos de translação e de rotação

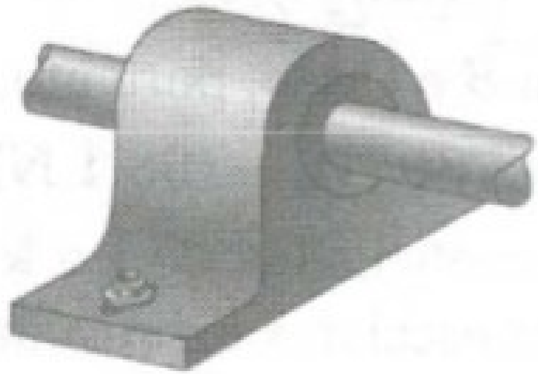


Equilíbrio de um Corpo Rígido em 3D

Diagrama Espacial



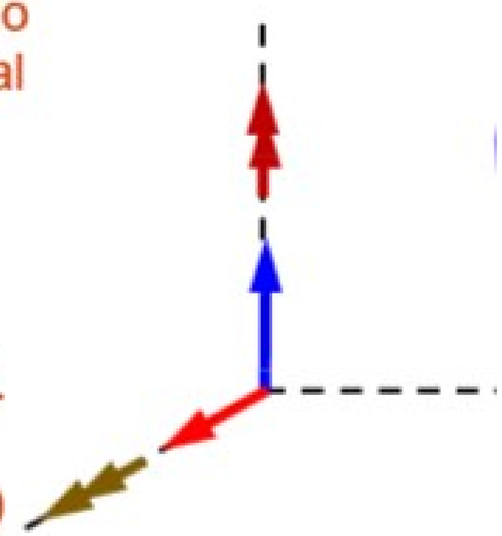
Dobradiça sustentando apenas carga radial



Mancal sustentando apenas carga radial

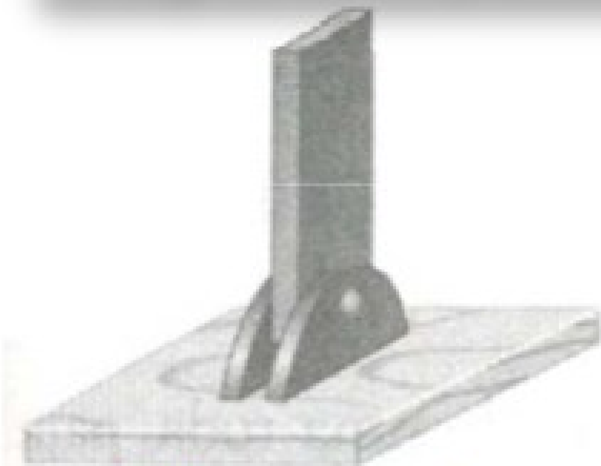
Diagrama de Corpo Livre

Forças impedindo o movimento radial (direção perpendicular ao eixo do arranjo). Podem apresentar binários (não apreciáveis em condições normais de uso)

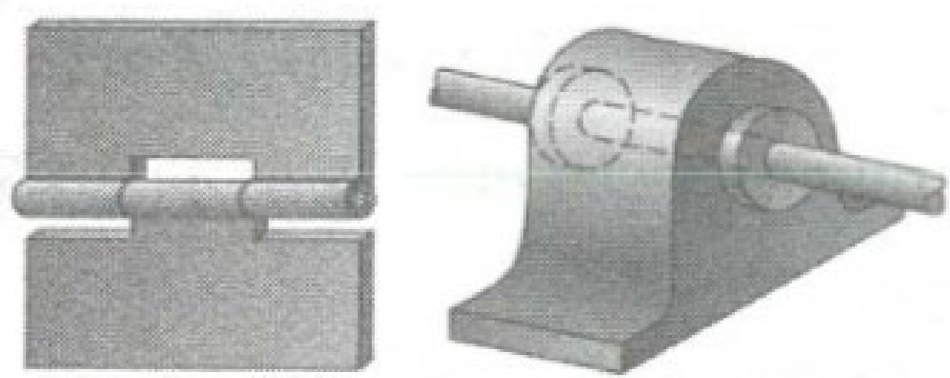


Equilíbrio de um Corpo Rígido em 3D

Diagrama Espacial



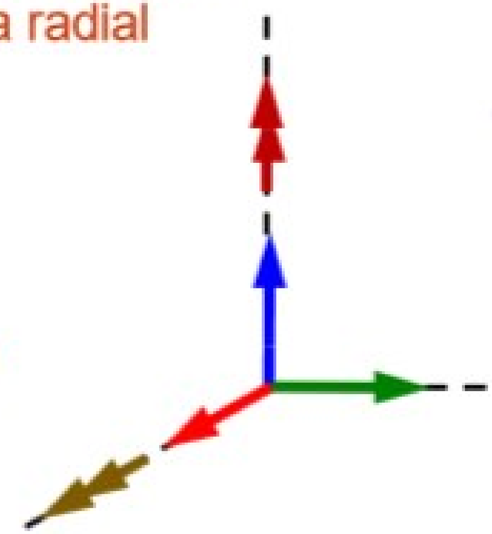
Pino e suporte



Dobradiça e mancal sustentando empuxo axial e carga radial

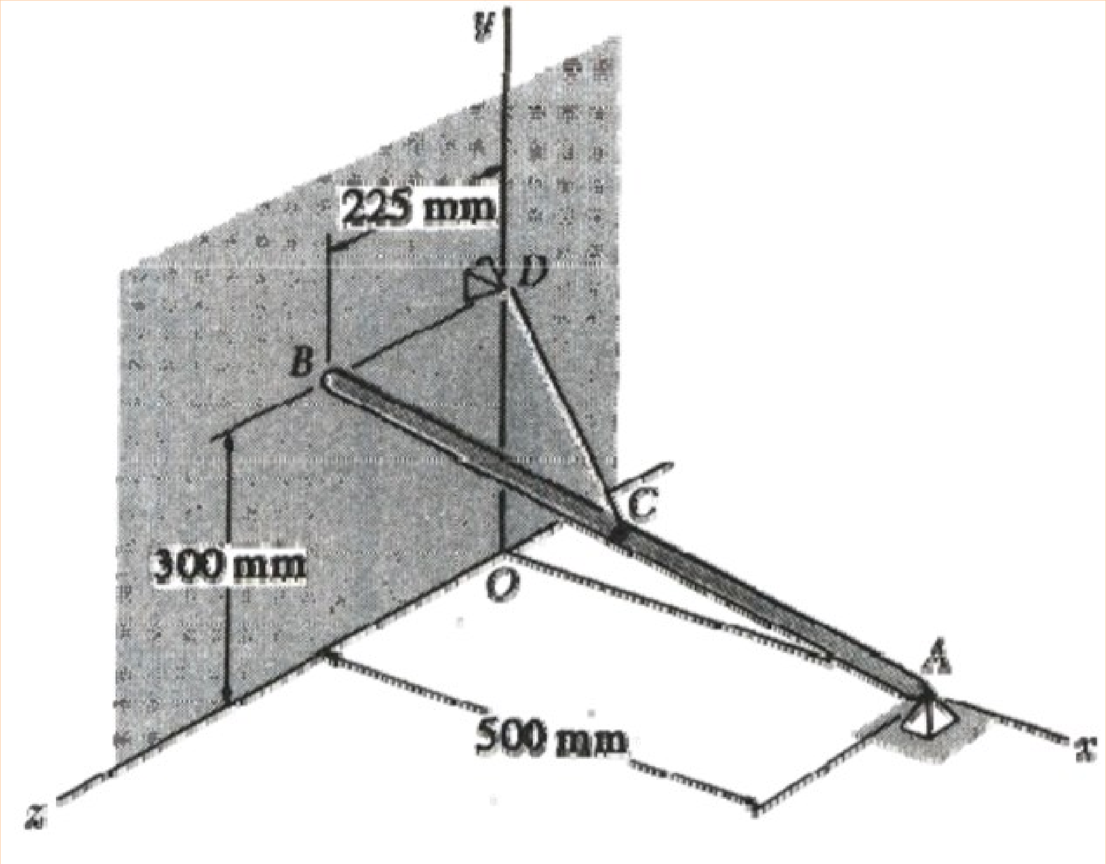
Diagrama de Corpo Livre

Forças impedindo todos os movimentos relativos translacionais. Podem apresentar binários (não apreciáveis em condições normais de uso)

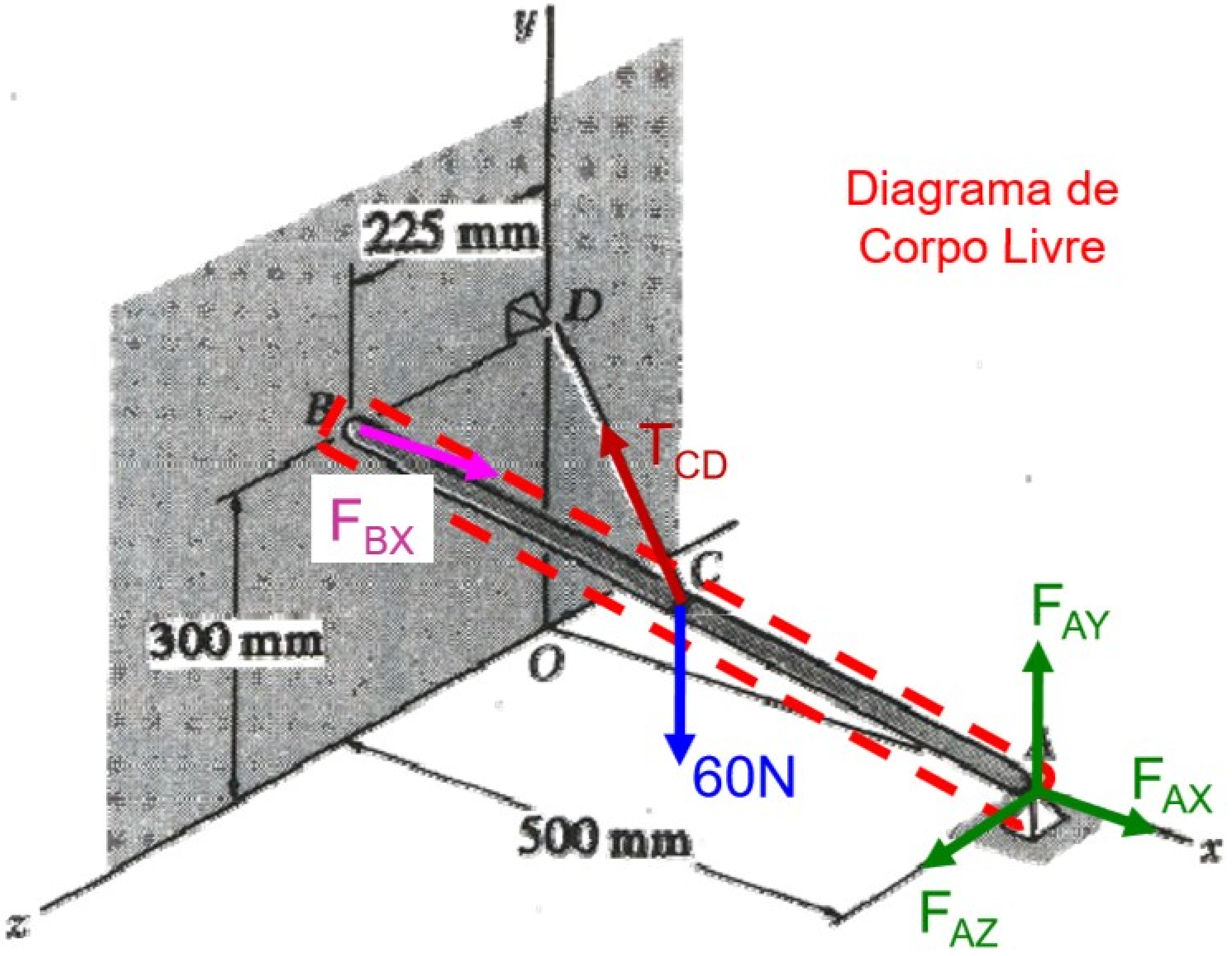


Exemplo 6

- **A barra uniforme AB pesa 60N. Ela tem uma junta esférica em A e está presa por um cabo CD fixo ao ponto médio C da barra. Sabendo que a barra está encostada em uma parede lisa no ponto B, determine a força de tração no cabo e as reações em A e B.**



Exemplo 6



y
225 mm
D
B
T_{CD}
F_{BX}
C
300 mm
O
60N
F_{AY}
A
F_{AX}
x
500 mm
F_{AZ}
z
Diagrama de
Corpo Livre

Exemplo 6

Diagrama de Corpo Livre

Expressar cada força na forma de vetores cartesianos:

Forças exercidas pelos APOIOS: normalmente é uma INCOGNITA

$F_A = (Ax)\hat{i} + (Ay)\hat{j} + (Az)\hat{k}$

Forças EXTERNAS: normalmente SE CONHECE SEU VALOR

$F = (Fx)\hat{i} + (Fy_1)\hat{j} + (Fz_1)\hat{k}$

Forças exercidas pelos CABOS: normalmente é uma INCOGNITA

$T = T[(\lambda x)\hat{i} + (\lambda y)\hat{j} + (\lambda z)\hat{k}]$

$\lambda = \dfrac{\overline{AB}}{AB}$

$\sum Fx = \sum Fy = \sum Fz = 0$

$F_A + F + T = 0$

$\sum Mx = \sum My = \sum Mz = 0$

$r_{BA} \times (F_A + F + T) = 0$

r_{BA} é o vetor posição dado por:

$r_B = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

$$Mo = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ rx & ry & rz \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$

Resolução do sistema de equações com 6 equações.

SOLUÇÃO

Exemplo 6

Diagrama de Corpo Livre

Expressar cada força na forma de vetores cartesianos:

Forças exercidas pelos APOIOS: normalmente é uma INCOGNITA

$$F_A = (Ax)\hat{i} + (Ay)\hat{j} + (Az)\hat{k}$$

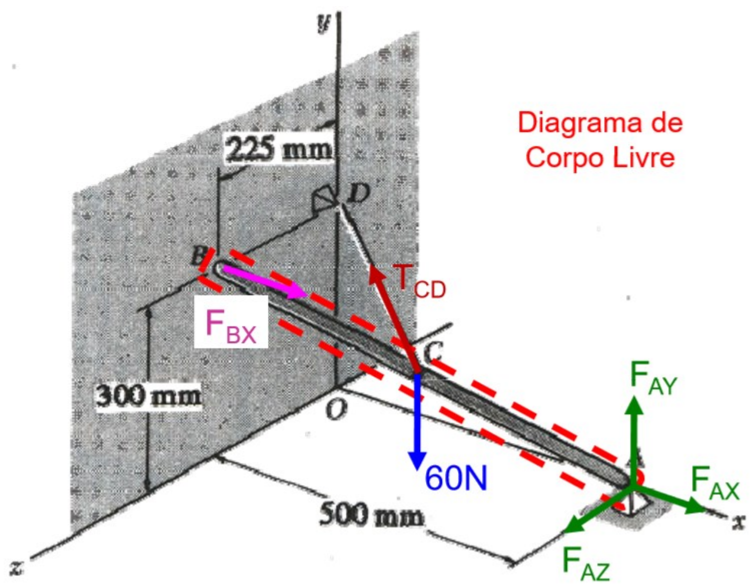
Forças EXTERNAS: normalmente SE CONHECE SEU VALOR

$$F = (Fx)\hat{i} + (Fy_1)\hat{j} + (Fz_1)\hat{k}$$

Forças exercidas pelos CABOS: normalmente é uma INCOGNITA

$$T = T\left[(\lambda x)\hat{i} + (\lambda y)\hat{j} + (\lambda z)\hat{k}\right]$$

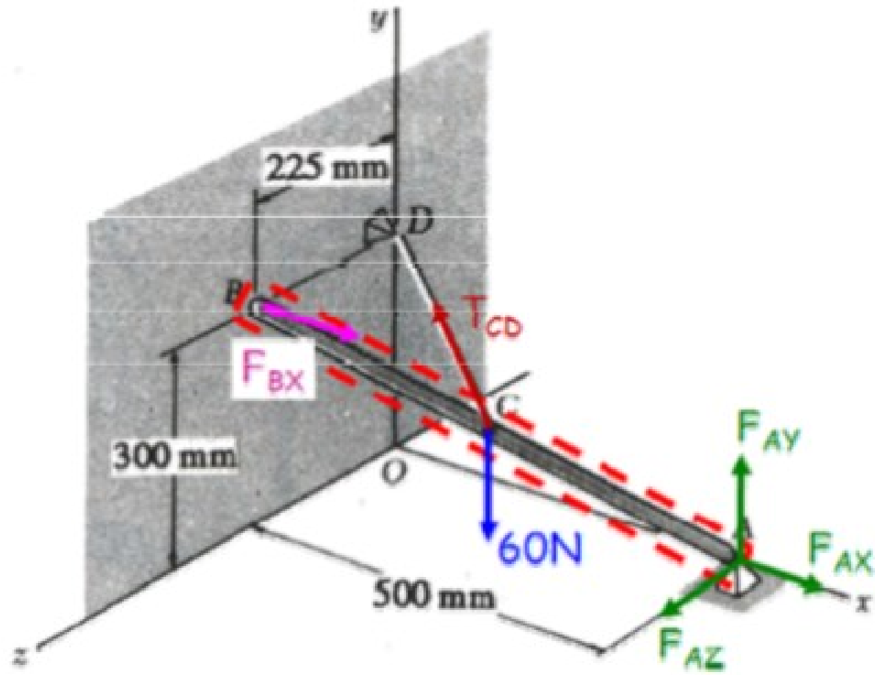
$$\lambda = \frac{\overline{AB}}{AB}$$



Exemplo 6

Exemplo (continuação):

Forças envolvidas



$$\vec{W} = (0; \quad -60; \quad 0)N$$

$$\vec{F}_A = (F_{AX}; \quad F_{AY}; \quad F_{AZ})$$

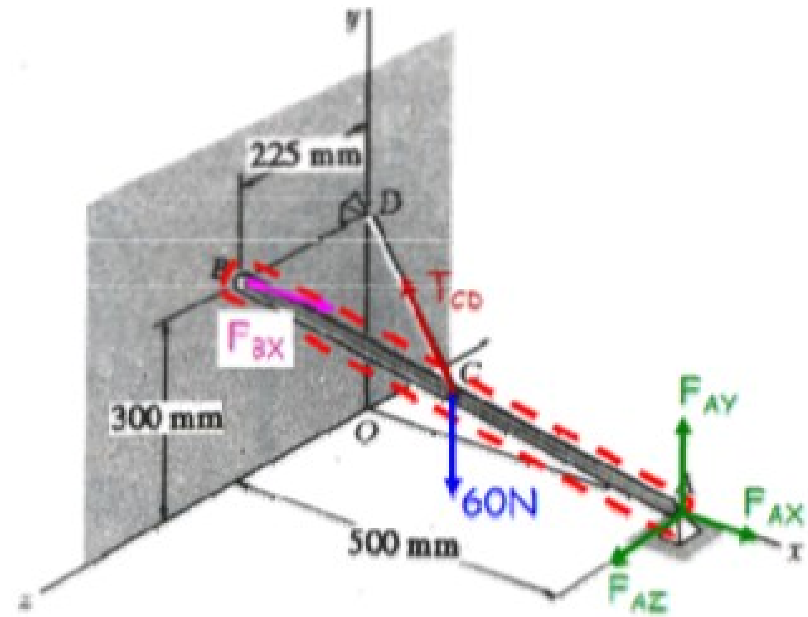
$$\vec{F}_B = (F_{BX}; \quad 0; \quad 0)$$

$$\vec{T}_{CD} = T_{CD}\hat{\lambda}_{CD} = (-0{,}8T_{CD}; \quad 0{,}48T_{CD}; \quad -0{,}36T_{CD})$$

Exemplo 6

Exemplo (continuação):

Sistema força-binário em relação ao ponto A



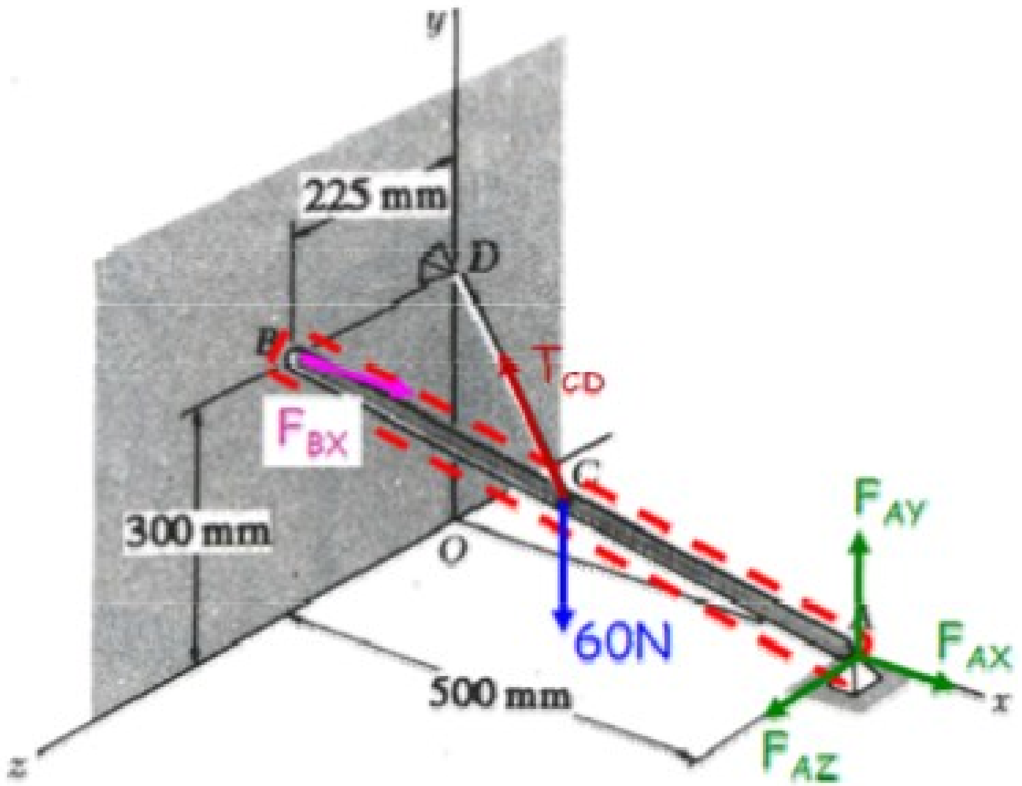
- $\vec{R}_A = \left(F_{AX} + F_{BX} - 0{,}8T_{CD}\,;\, -60 + F_{AY} + 0{,}48T_{CD}\,;\, F_{AZ} - 0{,}36T_{CD}\right)$

- $$\begin{aligned}\vec{M}_A &= \overrightarrow{AC}\times\vec{W} + \overrightarrow{AB}\times\vec{F}_B + \overrightarrow{AC}\times\vec{T}_{CD}\\ &= \overrightarrow{AC}\times\left(\vec{W}+\vec{T}_{CD}\right) + \overrightarrow{AB}\times\vec{F}_B\\ &= \overrightarrow{AC}\times\left(\vec{W}+\vec{T}_{CD}\right) + 2\overrightarrow{AC}\times\vec{F}_B\\ &= \overrightarrow{AC}\times\left(\vec{W}+\vec{T}_{CD}+2\vec{F}_B\right)\end{aligned}$$

Exemplo 6

Exemplo (continuação):

Imposição do equilíbrio



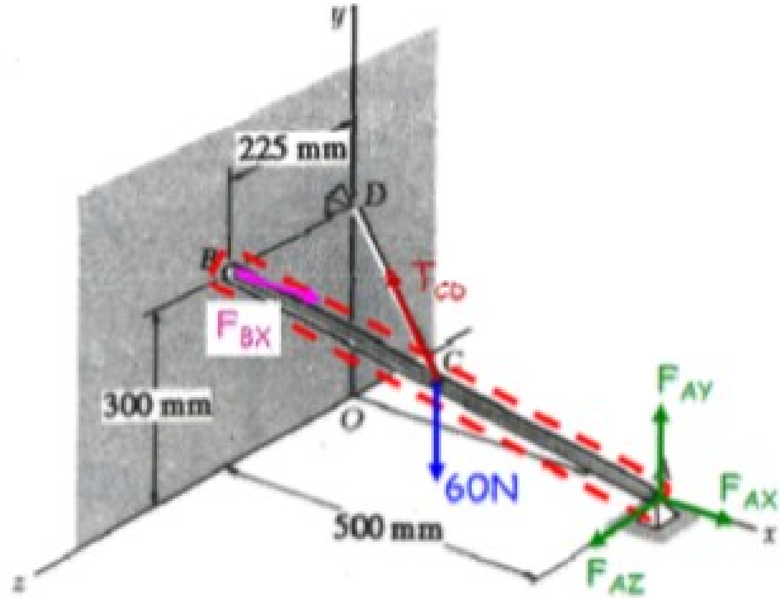
- $\vec{R}_A = \vec{0}$

- $\vec{M}_A = \vec{0}$

Exemplo 6

Exemplo (continuação):

Sistema de equações resultante



- $F_{AX} + F_{BX} - 0{,}8T_{CD} = 0$
- $-60 + F_{AY} + 0{,}48T_{CD} = 0$
- $F_{AZ} - 0{,}36T_{CD} = 0$
- $-108T_{CD} + 6750 = 0$
- $225F_{BX} - 180T_{CD} = 0$
- $15000 - 300F_{BX} = 0$

Exemplo 6

Exemplo (continuação):

Reações de apoio

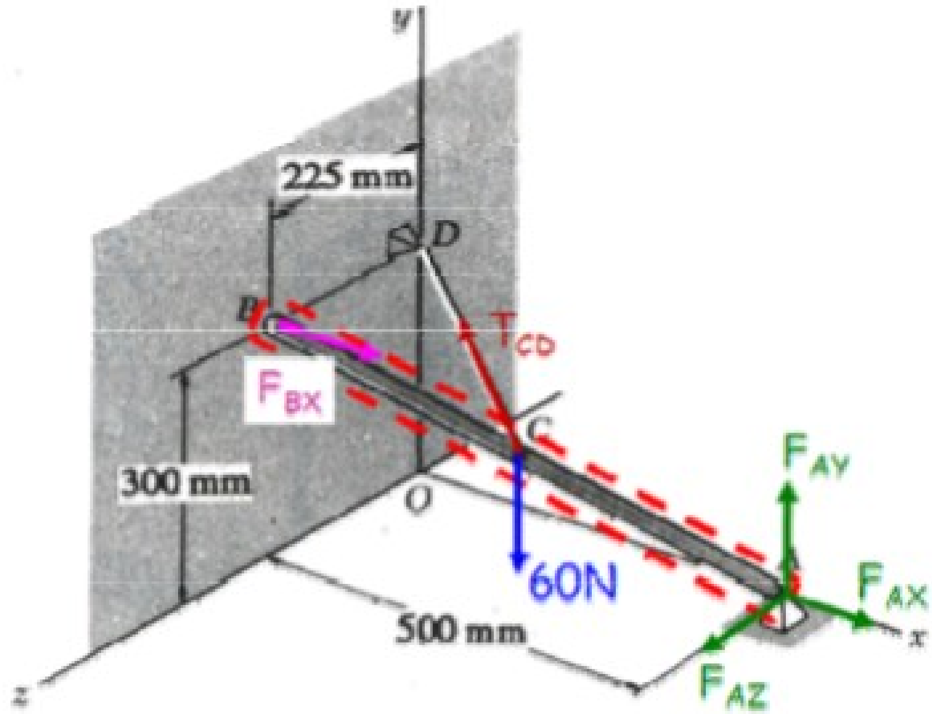
$$F_{AX} = 0$$

$$F_{AY} = 30N$$

$$F_{AZ} = 22{,}5N$$

$$F_{BX} = 50N$$

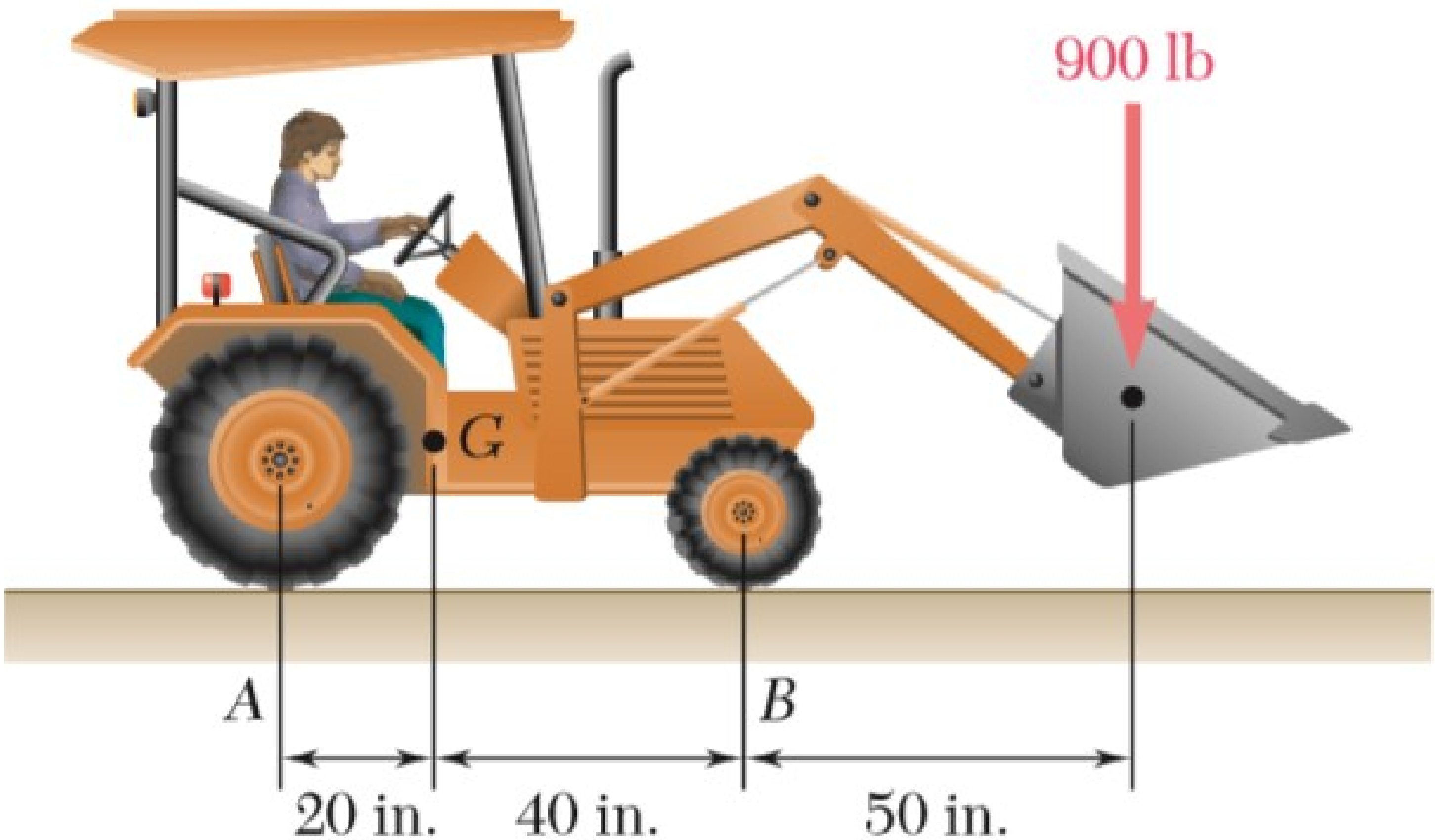
$$T_{CD} = 62{,}5N$$



Treliças

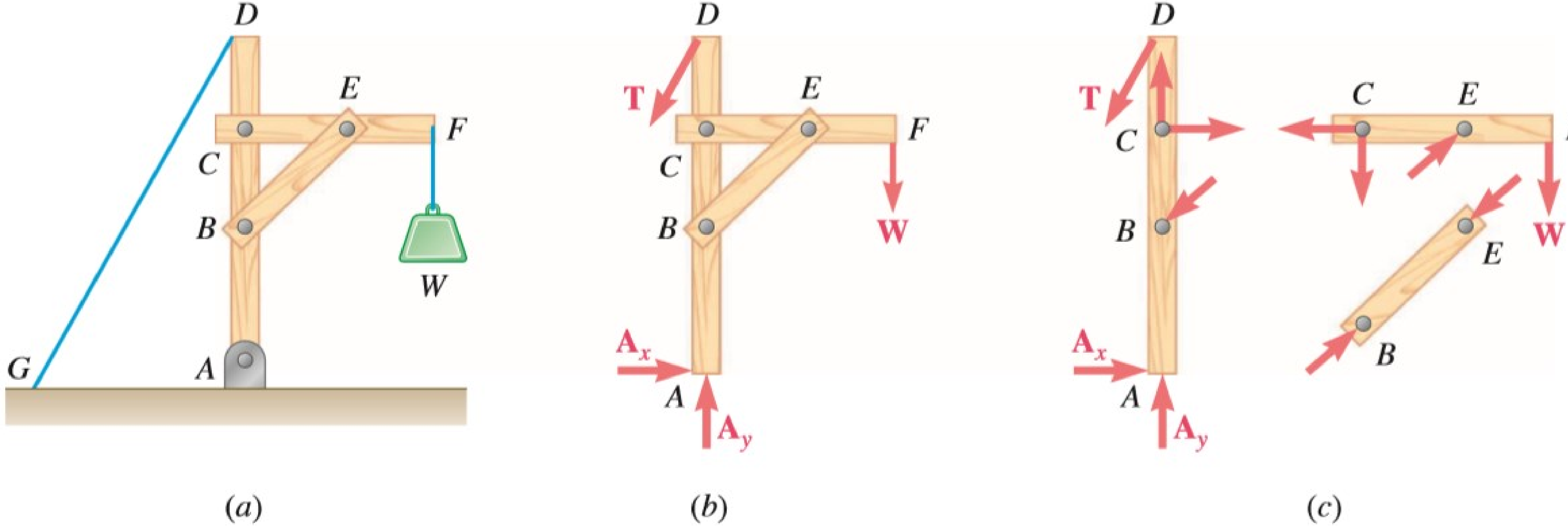
Treliças

- **Anteriormente:** estudamos o equilíbrio de um único corpo rígido → considerando as forças externas;



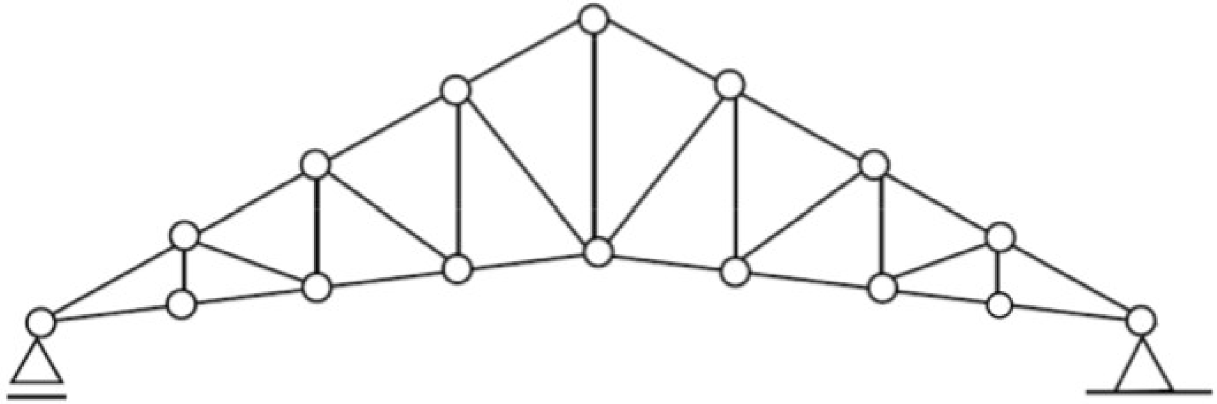
Treliças

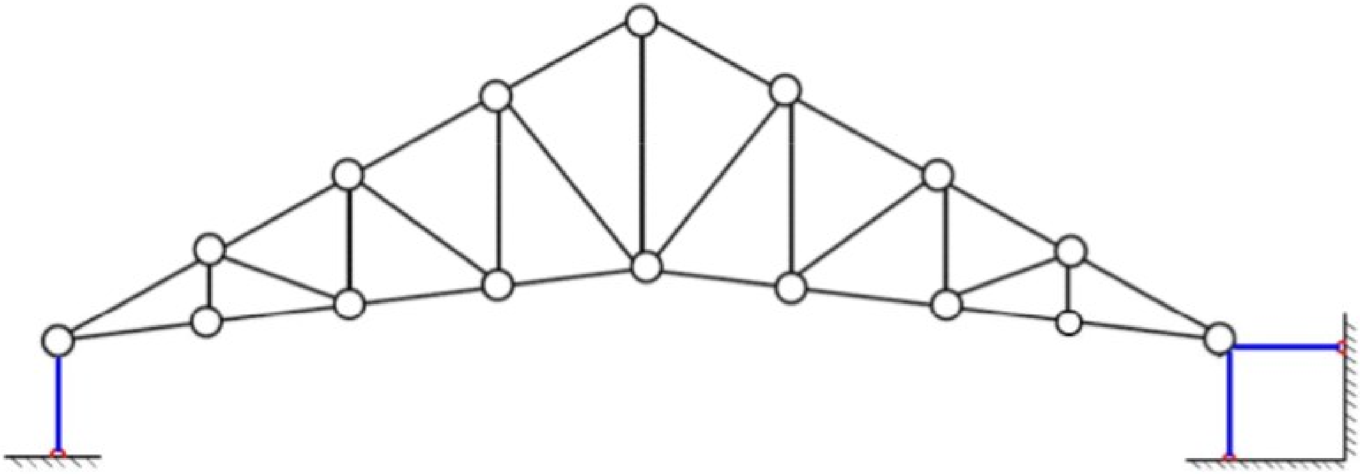
- **Agora:** equilíbrio de estruturas feitas de várias partes conectadas ➔ forças externas + forças que mantêm unidas as várias partes da estrutura (forças internas)



Treliças

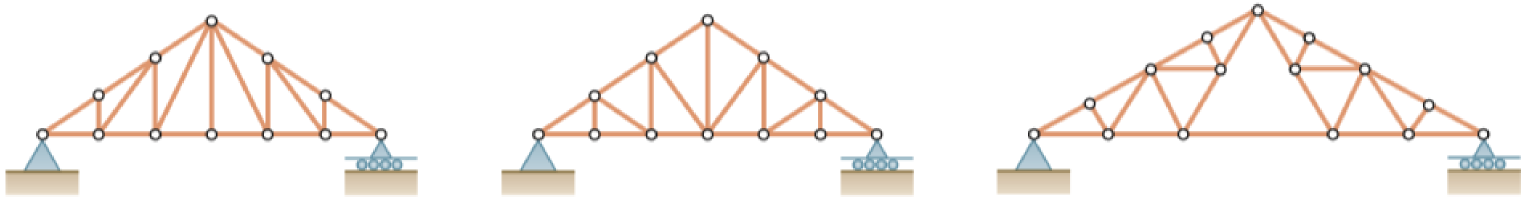
- **Definição:** São estruturas reticuladas cujas barras estão ligadas entre si nas suas extremidades por nós e com exterior por apoios.



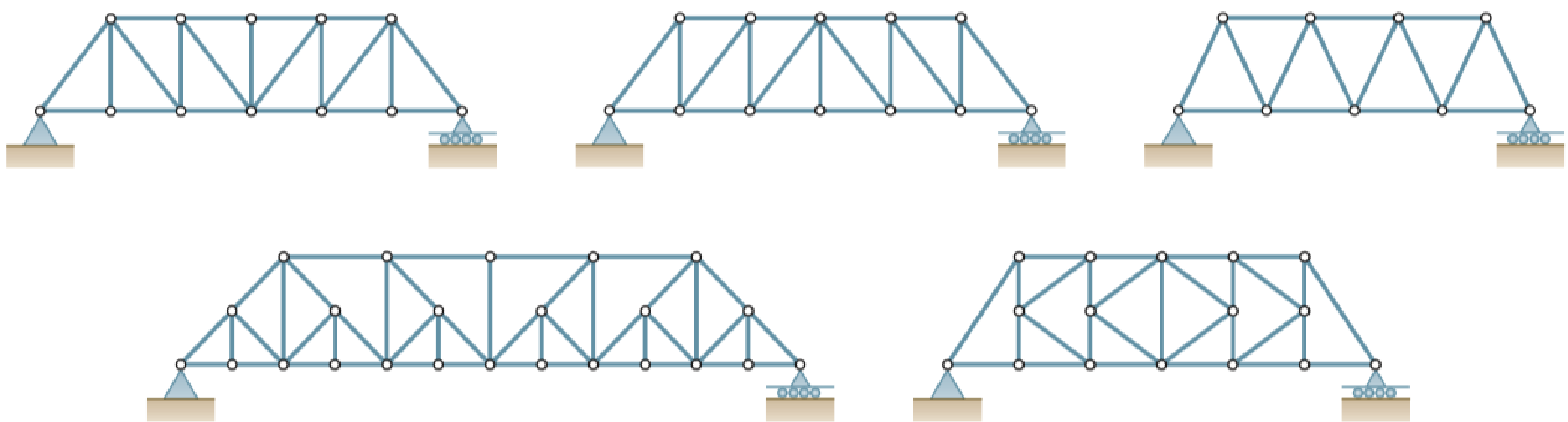


Treliças

- Cada treliça é projetada para transportar as cargas que atuam em seu plano e, portanto, podem ser tratadas como uma ***estrutura bidimensional***.



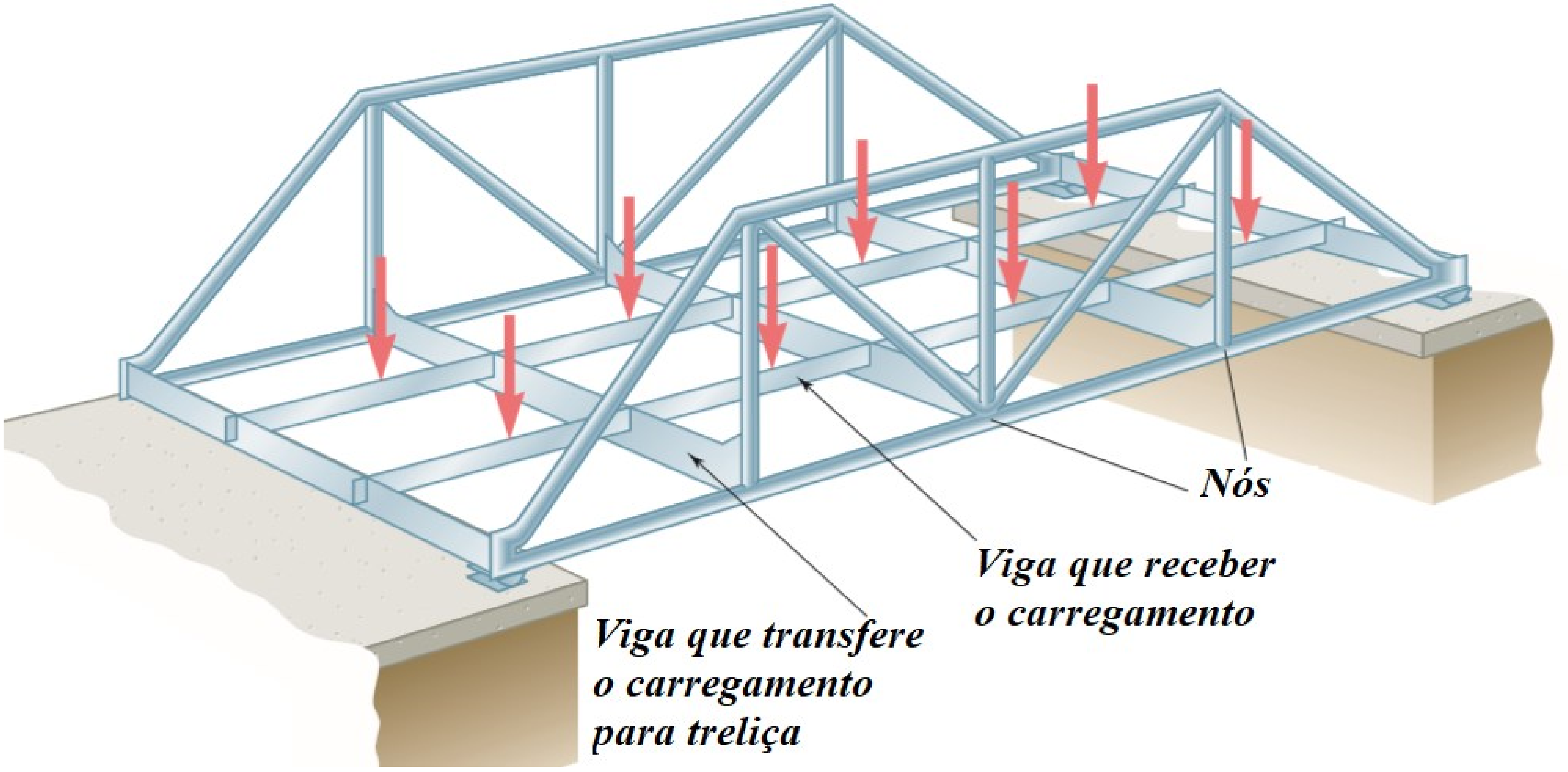
Typical Roof Trusses



Typical Bridge Trusses

Treliças

- Em geral, os membros de uma treliça são delgados e podem ***suportar pouca carga lateral***; todas as cargas, portanto, devem ser aplicadas nas várias juntas e não nos próprios membros.



Treliças

- Classificação quanto à sua determinação geométrica:

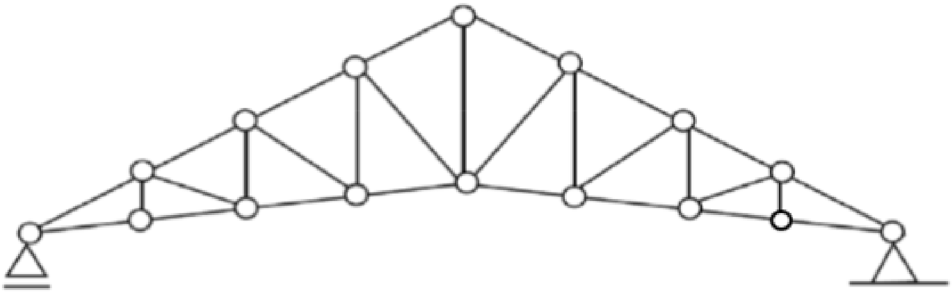
$b < 2\,n$ — Treliça indeterminada (móvel)

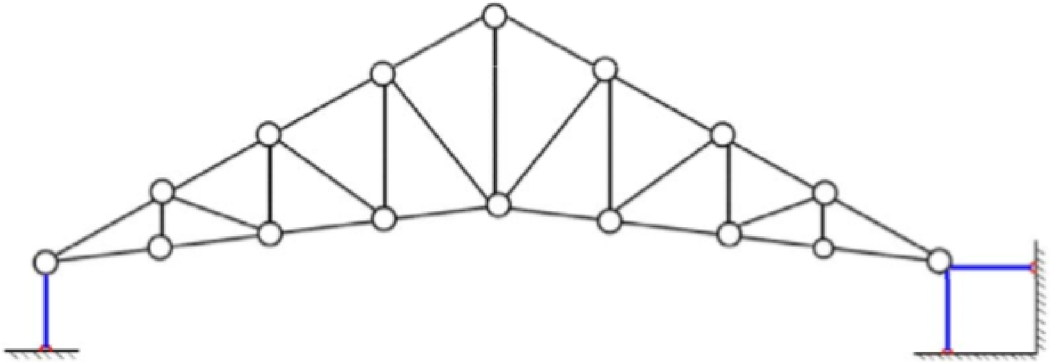
$b = 2\,n$ — Treliça determinada

$b > 2\,n$ — Treliça superdeterminada

Treliças

- Exemplo:





$$n = 16$$

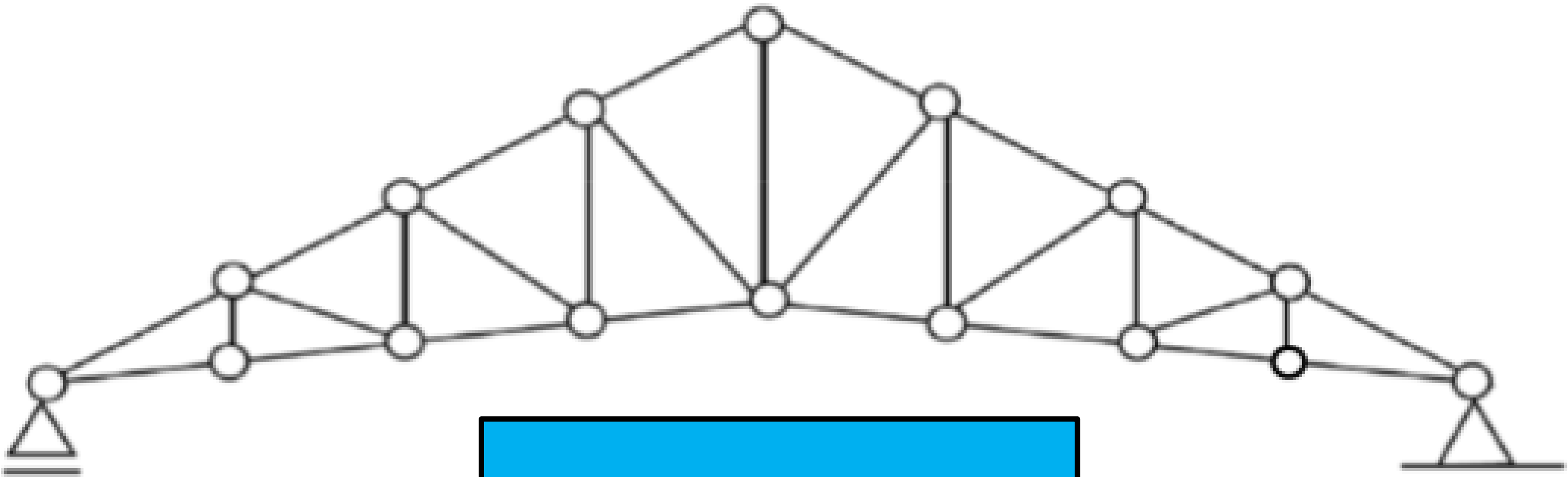
$$b = 32$$

$$b = 2\,n$$

Treliça determinada

Métodos de Resolução de estruturas Treliçadas determinadas

Métodos de Resolução



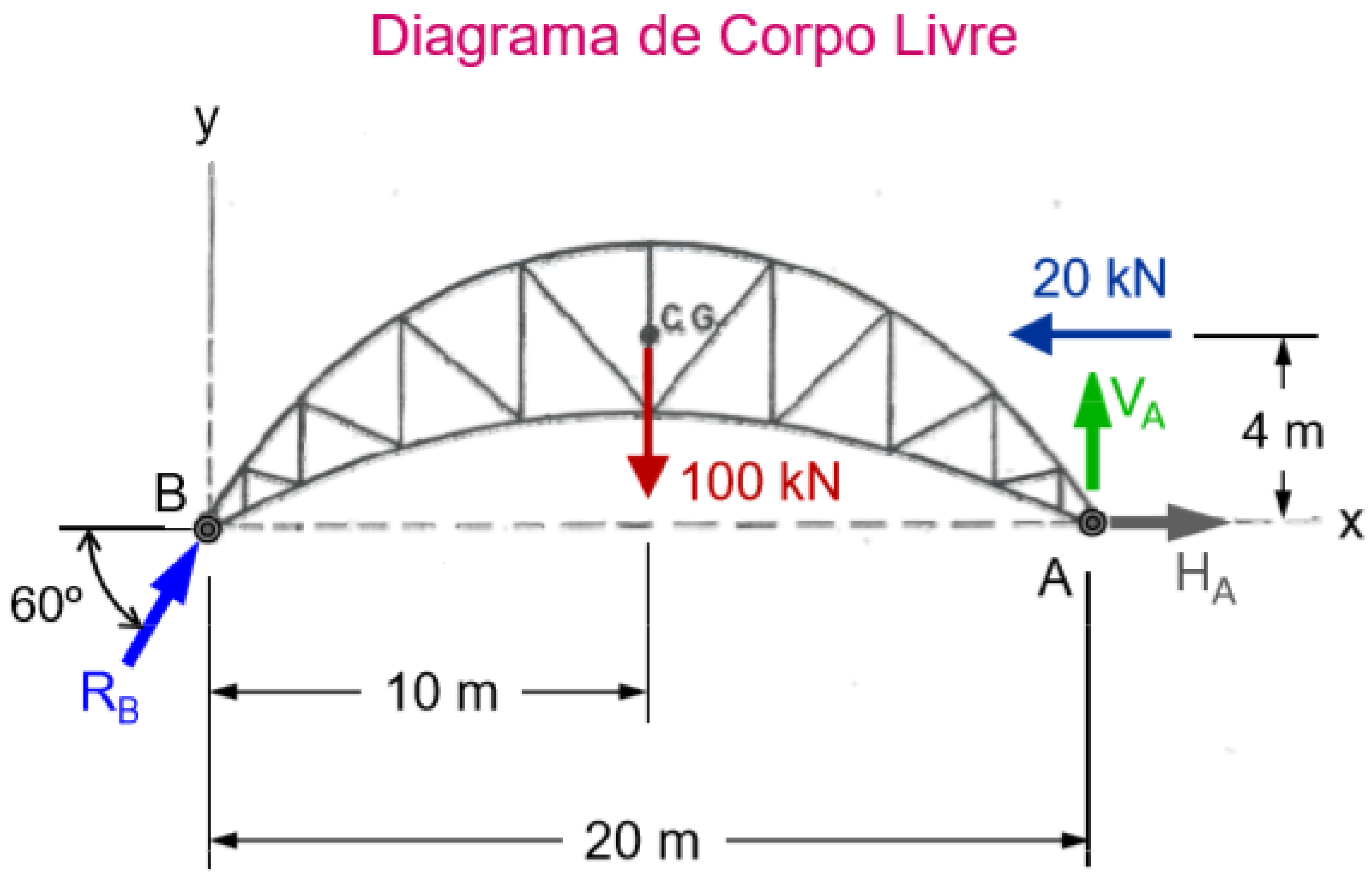
Resolução

Métodos dos Nós

Método das seções

MÉTODO DOS NÓS

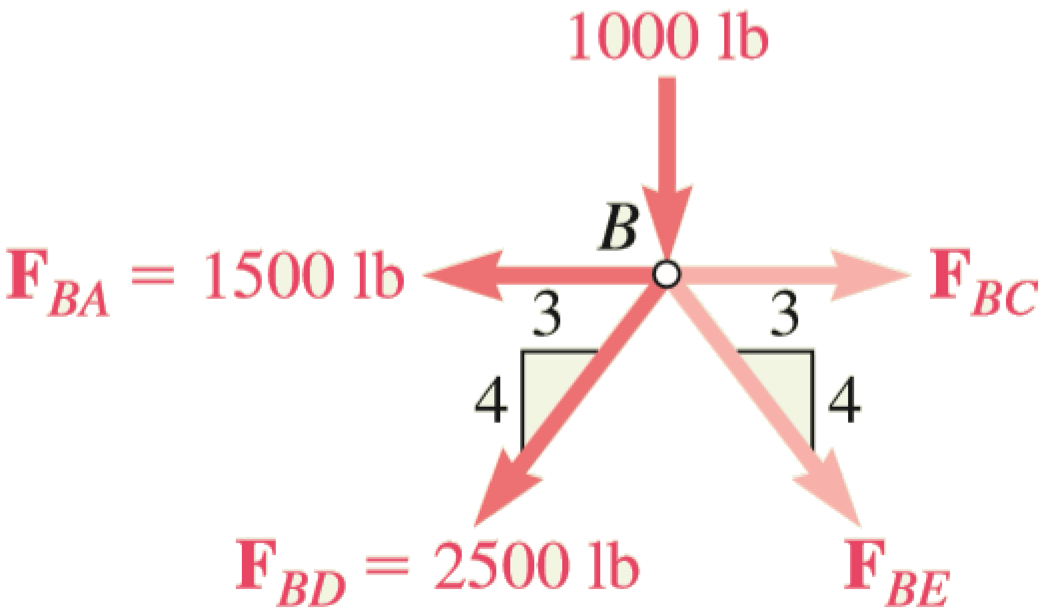
1. As reações nos apoios considerando a treliça inteira como um corpo livre;



MÉTODO DOS NÓS

1. As reações nos apoios considerando a treliça inteira como um corpo livre;

2. Diagrama de corpo livre de cada ***NÓ***, mostrando as forças exercidas no ***NÓ***;



MÉTODO DOS NÓS

1. As reações nos apoios considerando a treliça inteira como um corpo livre;

2. Diagrama de corpo livre de cada ***NÓ***, mostrando as forças exercidas no ***NÓ***;

Obs.: No caso de uma isostático, é sempre possível desenhar os ***DCL*** dos nós de tal forma que apenas duas forças desconhecidas sejam incluídas em cada diagrama!!!

MÉTODO DOS NÓS

1. As reações nos apoios considerando a treliça inteira como um corpo livre;

2. Diagrama de corpo livre de cada *NÓ*, mostrando as forças exercidas no *NÓ*;

3. Utilização das duas equações de equilíbrio correspondentes;

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -1000 - \tfrac{4}{5}(2500) - \tfrac{4}{5}F_{BE} = 0$$

$$F_{BE} = -3750 \text{ lb} \qquad F_{BE} = 3750 \text{ lb } C$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad F_{BC} - 1500 - \tfrac{3}{5}(2500) - \tfrac{3}{5}(3750) = 0$$

$$F_{BC} = +5250 \text{ lb} \qquad F_{BC} = 5250 \text{ lb } T$$

MÉTODO DOS NÓS

1. As reações nos apoios considerando a treliça inteira como um corpo livre;

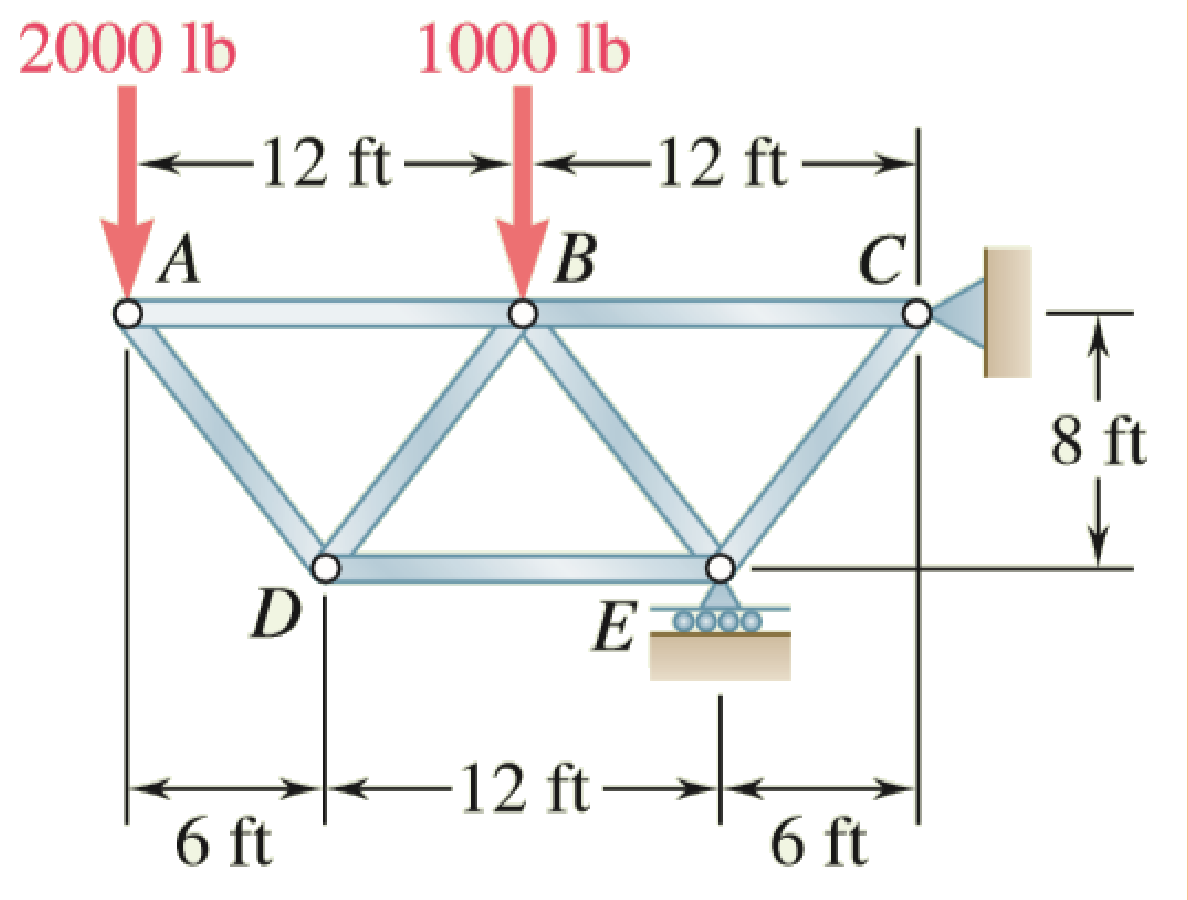
2. Diagrama de corpo livre de cada ***NÓ***, mostrando as forças exercidas no ***NÓ***;

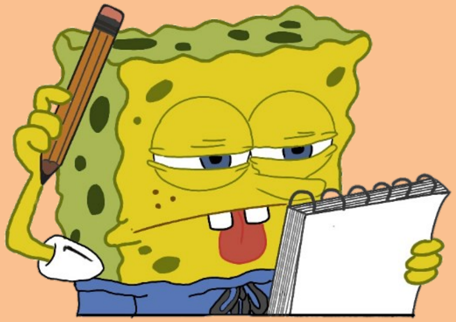
3. Utilização das duas equações de equilíbrio correspondentes;

Obs.: Um sinal positivo indica que o membro está em TRAÇÃO (+) e negativo indica COMPRESSÃO (-).

Exemplo 7

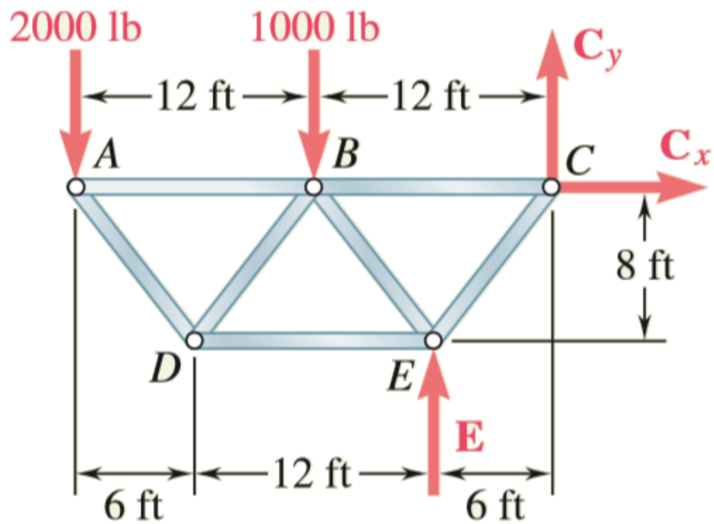
- **Usando o método dos NÓS, determine a força em cada membro da treliça mostrada.**





Exemplo 7

1. DCL & reações nos apoios:



$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad (2000 \text{ lb})(24 \text{ ft}) + (1000 \text{ lb})(12 \text{ ft}) - E(6 \text{ ft}) = 0$$

$$E = +10{,}000 \text{ lb} \qquad \mathbf{E} = 10{,}000 \text{ lb}\uparrow$$

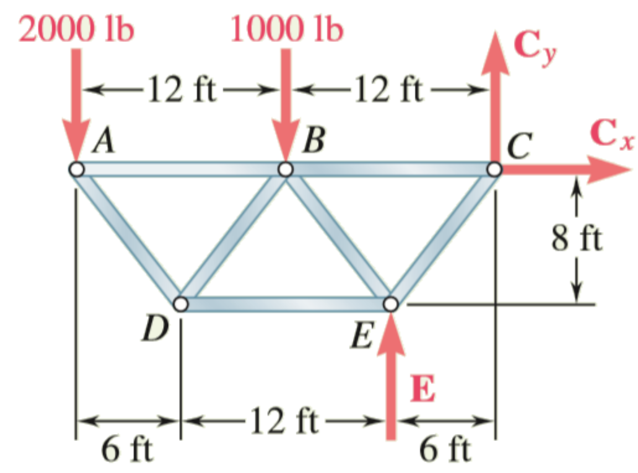
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \qquad \mathbf{C}_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -2000 \text{ lb} - 1000 \text{ lb} + 10{,}000 \text{ lb} + C_y = 0$$

$$C_y = -7000 \text{ lb} \qquad \mathbf{C}_y = 7000 \text{ lb}\downarrow$$

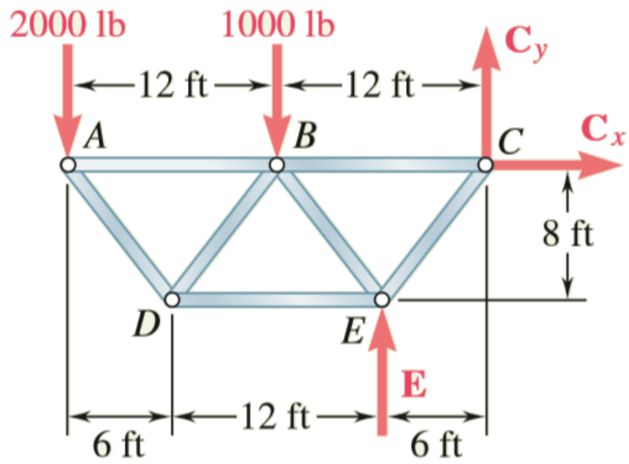
Exemplo 7

2. DCL de cada ***NÓ*** + ***Equações de Equilíbrio:***

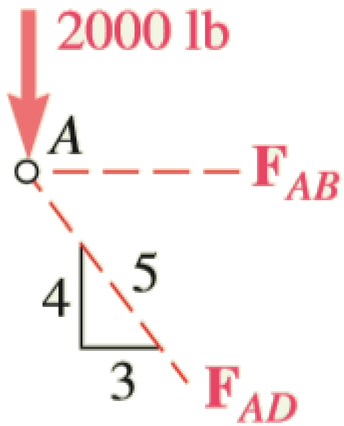


Exemplo 7

2. DCL de cada ***NÓ*** + ***Equações de Equilíbrio:***



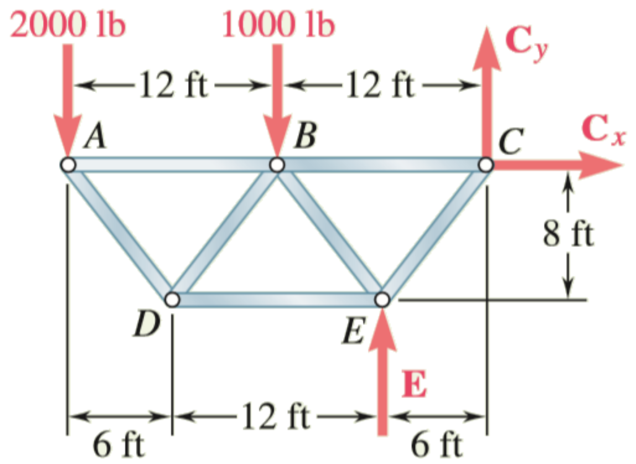
NÓ *A*:



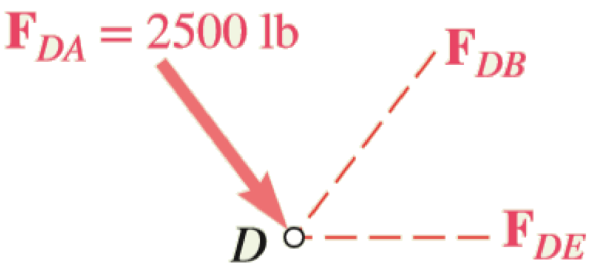
$$F_{AB} = 1500 \text{ lb } T$$
$$F_{AD} = 2500 \text{ lb } C$$

Exemplo 7

2. DCL de cada ***NÓ*** + ***Equações de Equilíbrio:***



NÓ *D*:

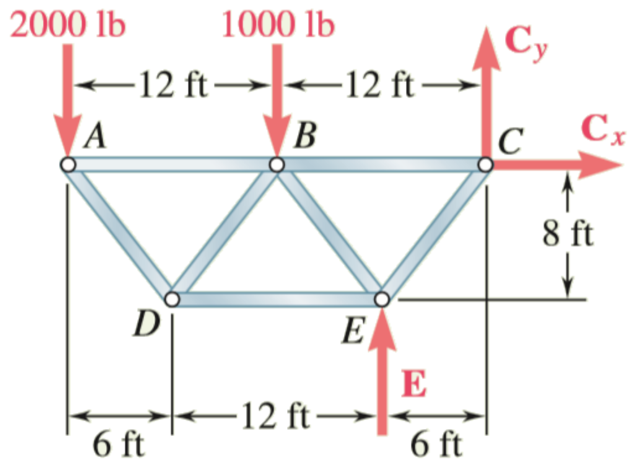


$$F_{DB} = 2500 \text{ lb } T$$

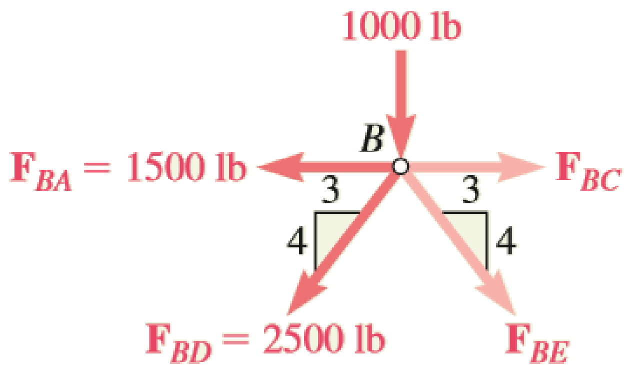
$$F_{DE} = 3000 \text{ lb } C$$

Exemplo 7

2. DCL de cada ***NÓ*** + ***Equações de Equilíbrio:***



NÓ *B*:



$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad -1000 - \tfrac{4}{5}(2500) - \tfrac{4}{5}F_{BE} = 0$$

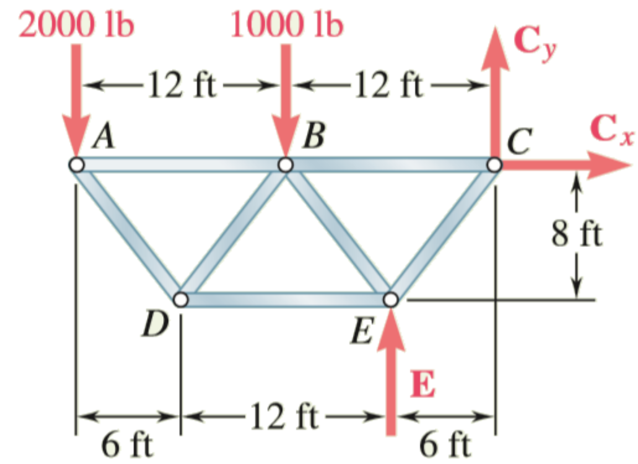
$$F_{BE} = -3750 \text{ lb} \qquad F_{BE} = 3750 \text{ lb } C$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \quad F_{BC} - 1500 - \tfrac{3}{5}(2500) - \tfrac{3}{5}(3750) = 0$$

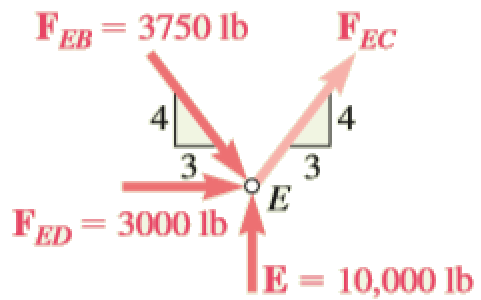
$$F_{BC} = +5250 \text{ lb} \qquad F_{BC} = 5250 \text{ lb } T$$

Exemplo 7

2. DCL de cada ***NÓ*** + ***Equações de Equilíbrio:***



NÓ *E*:

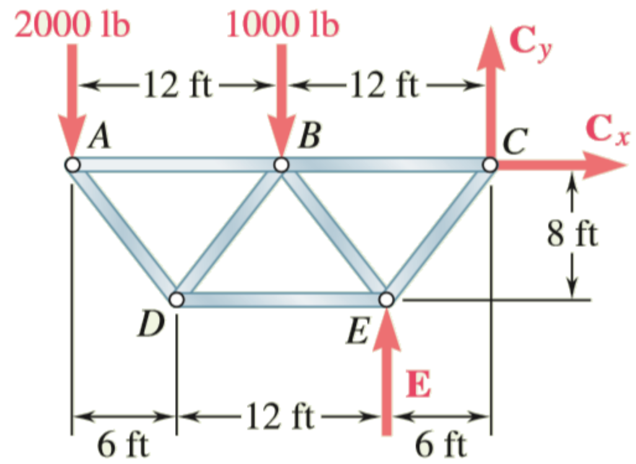


$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \qquad \tfrac{3}{5}F_{EC} + 3000 + \tfrac{3}{5}(3750) = 0$$

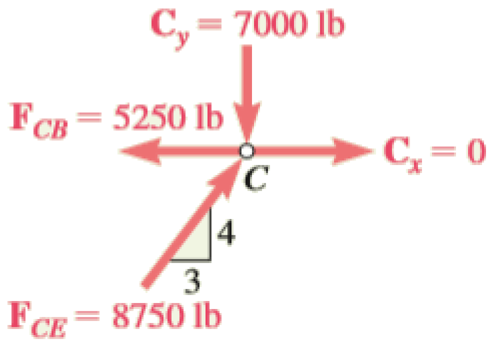
$$F_{EC} = -8750 \text{ lb} \qquad F_{EC} = 8750 \text{ lb } C$$

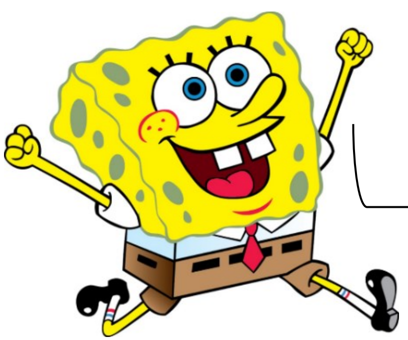
Exemplo 7

2. DCL de cada ***NÓ*** + ***Equações de Equilíbrio:***



NÓ *C*:

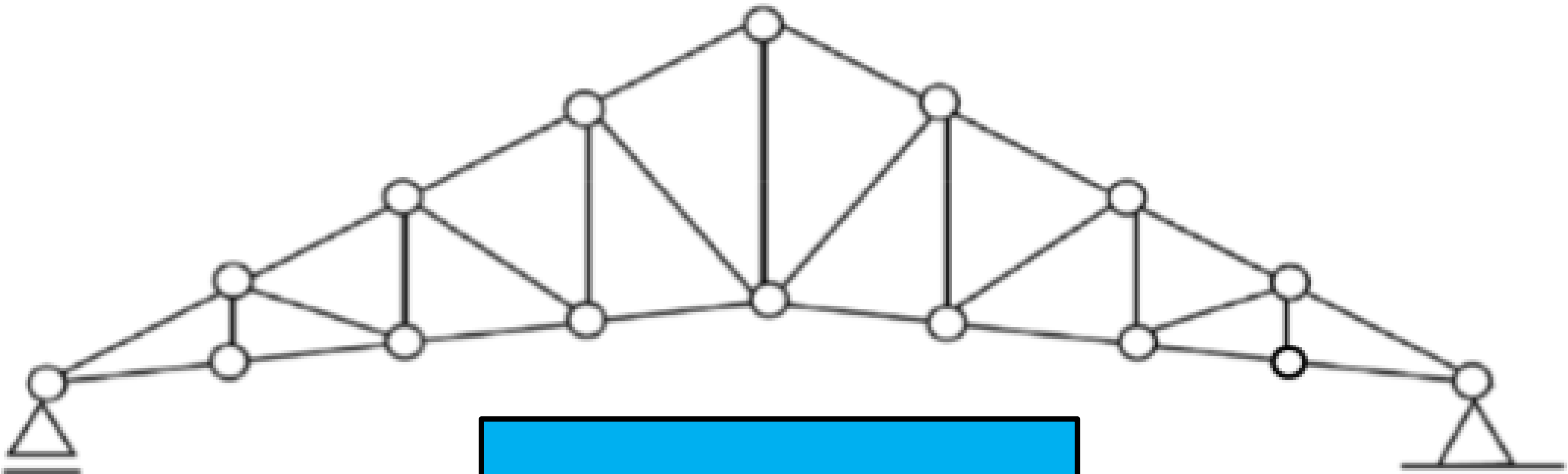




$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = -5250 + \tfrac{3}{5}(8750) = -5250 + 5250 = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = -7000 + \tfrac{4}{5}(8750) = -7000 + 7000 = 0$$

Métodos de Resolução



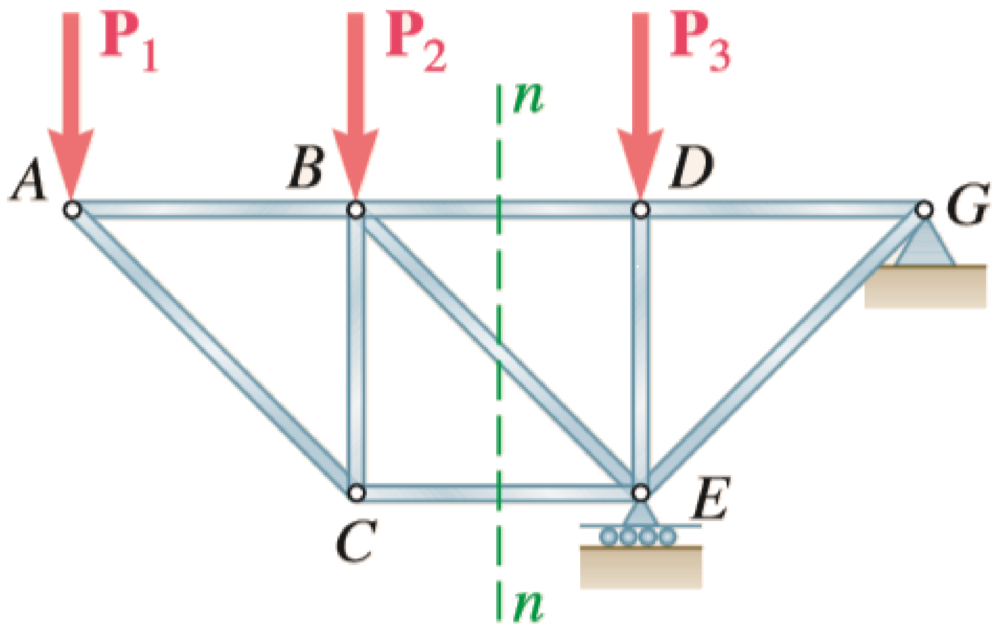
Resolução

Métodos dos Nós

Método das seções

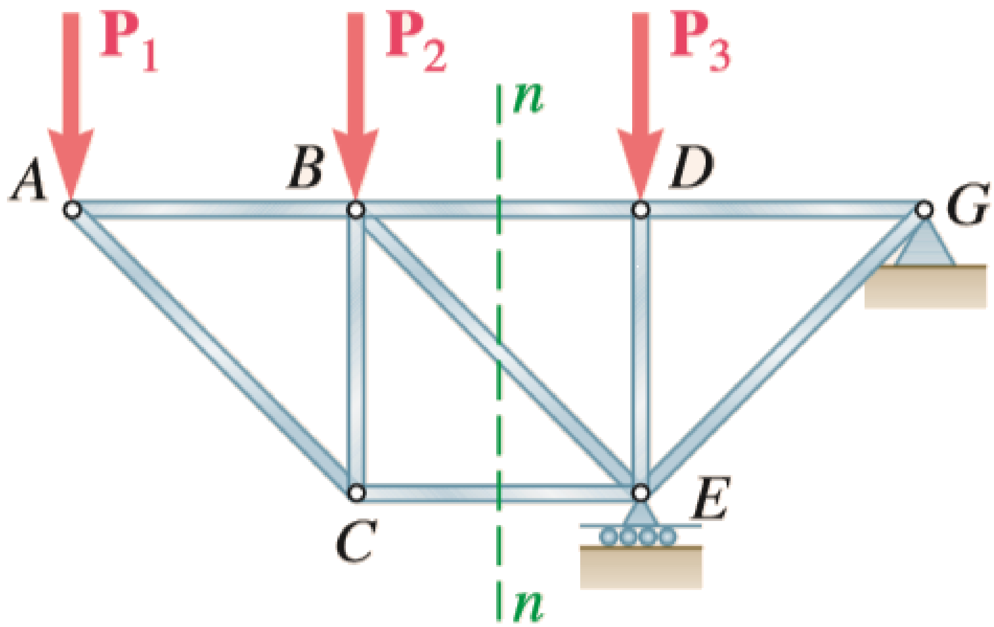
MÉTODO DAS SEÇÕES

O método das seções é ***geralmente*** preferível quando queremos ***determinar a força*** em apenas ***1 ou poucos membros***;



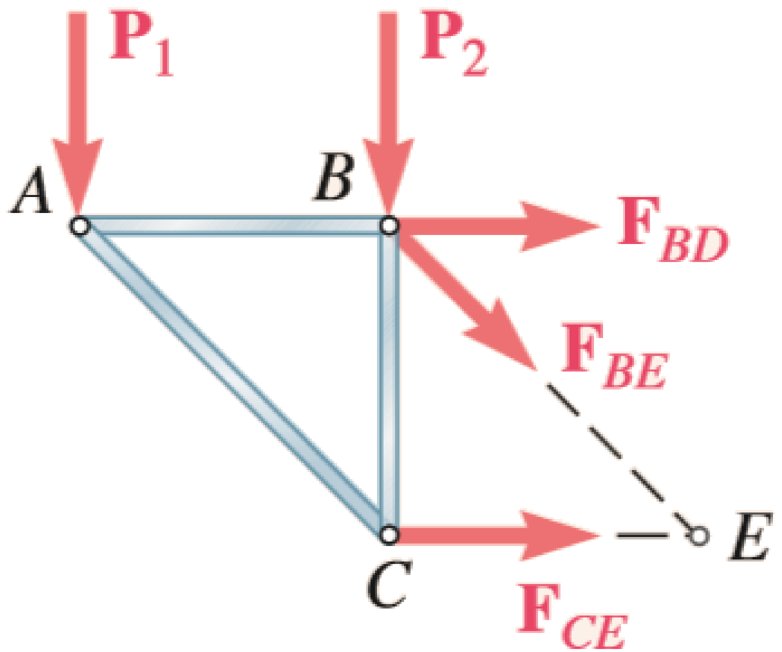
MÉTODO DAS SEÇÕES

1. Para determinar a força no membro da treliça passamos uma seção através dos membros ***BD***, ***BE*** e ***CE***;



MÉTODO DAS SEÇÕES

1. Para determinar a força no membro da treliça passamos uma seção através dos membros BD, BE e CE;
2. Remova esses membros; e use a porção ***ABC*** da treliça como um corpo livre



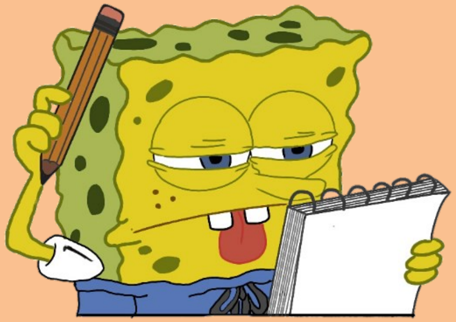
MÉTODO DAS SEÇÕES

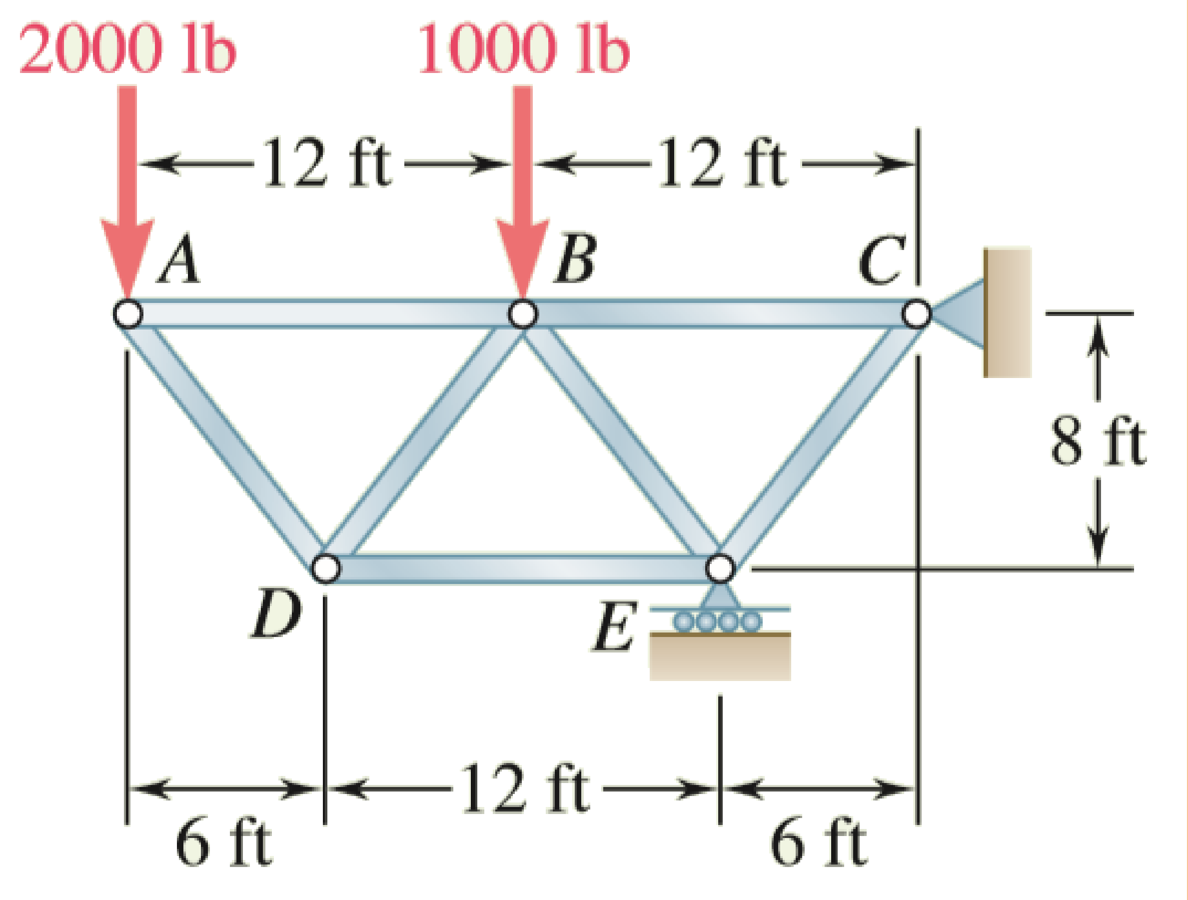
1. Para determinar a força no membro da treliça passamos uma seção através dos membros BD, BE e CE;
2. Remova esses membros; e use a porção ***ABC*** da treliça como um corpo livre

Obs.: Um sinal positivo indica que o membro está em TRAÇÃO (+) e negativo indica COMPRESSÃO (-).

Exemplo 8

➢ **Usando o método das SEÇÕES, determine a força nos membros da treliça mostrada.**





DICA IMPORTANTE

- **A aplicação dos métodos torna-se mais simples se, primeiramente, os membros que não estão sujeitos a nenhum carregamento (membros de força nula) são identificados;**

DICA IMPORTANTE

- **A aplicação dos métodos torna-se mais simples se, primeiramente, os membros que não estão sujeitos a nenhum carregamento (membros de força nula) são identificados;**

- **Os membros de força nula são usados para dar mais estabilidade à treliça durante a construção ou são usados como apoio adicional caso o carregamento externo seja alterado;**

DICA IMPORTANTE

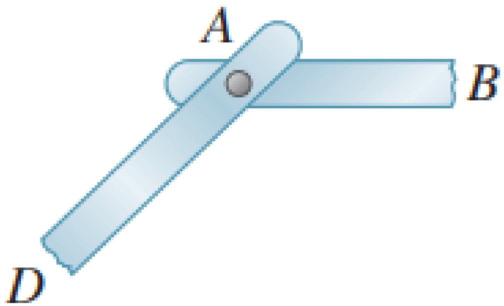
- **A aplicação dos métodos torna-se mais simples se, primeiramente, os membros que não estão sujeitos a nenhum carregamento (membros de força nula) são identificados;**

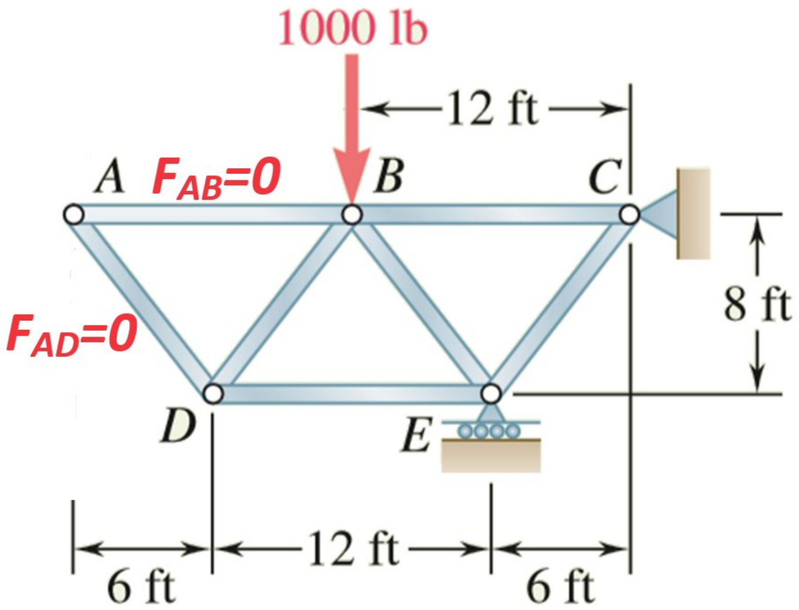
- **Os membros de força nula são usados para dar mais estabilidade à treliça durante a construção ou são usados como apoio adicional caso o carregamento externo seja alterado;**

- **Alguns dos membros de força nula de uma treliça podem ser determinados apenas por observação de cada um dos nós, sem a necessidade de cálculos.**

REGRAS: AS FORÇAS SERÃO NULAS

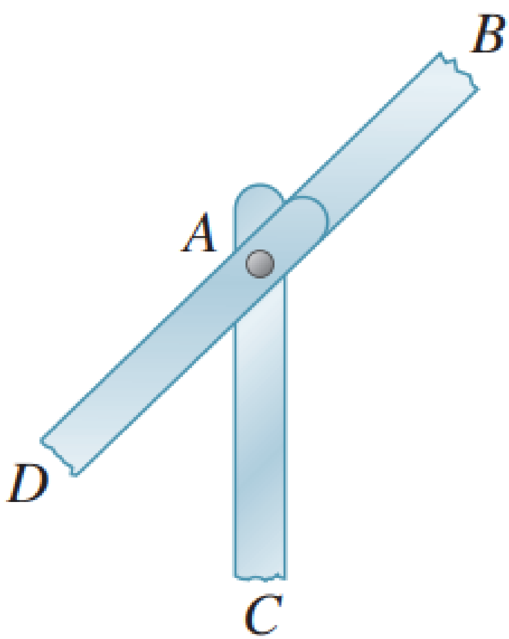
- **Quando no NÓ se tem apenas duas barras e não há forças aplicadas nele;**





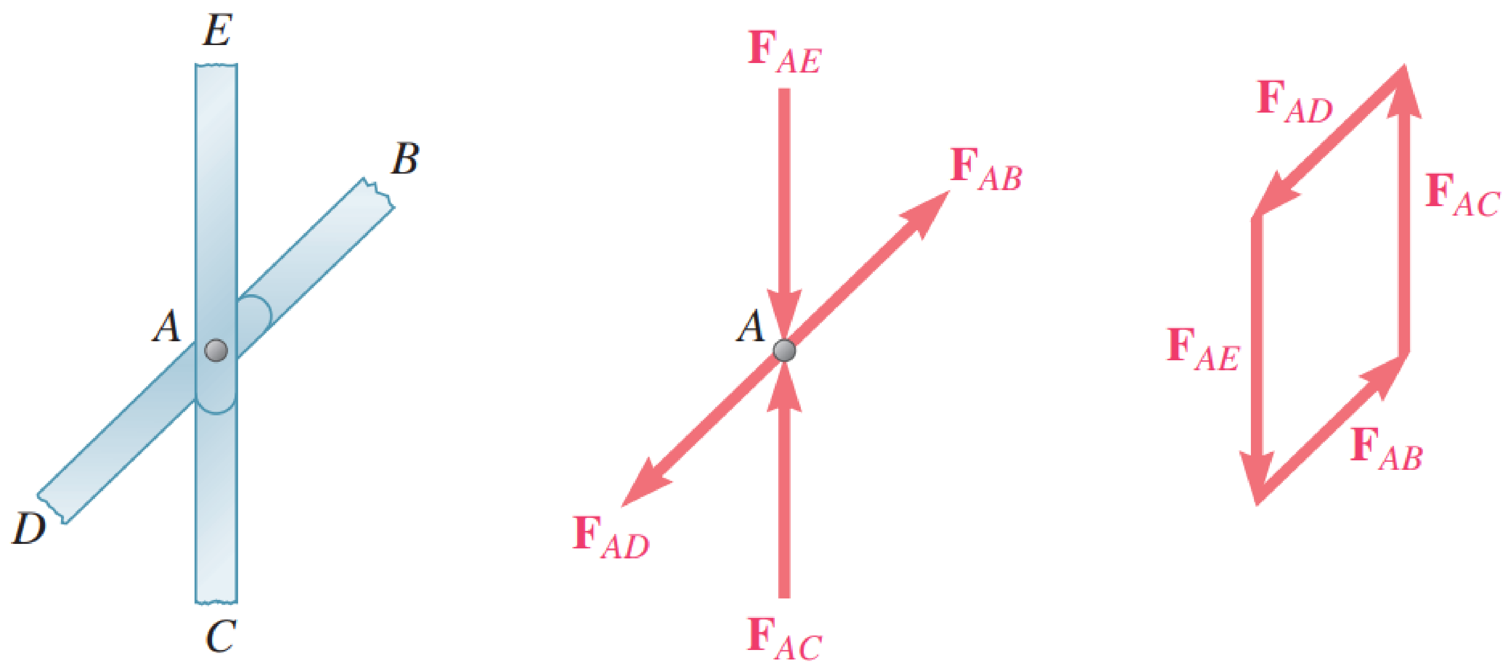
REGRAS: AS FORÇAS SERÃO NULAS

- **Quando no NÓ se tem duas barras na mesma direção (AB e AD) (colineares e sem forças aplicadas no NÓ) a força na terceira barra será nula (AC);**



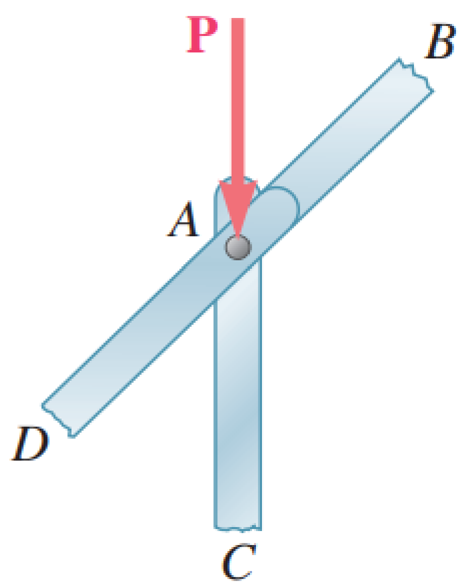
Outras Regras

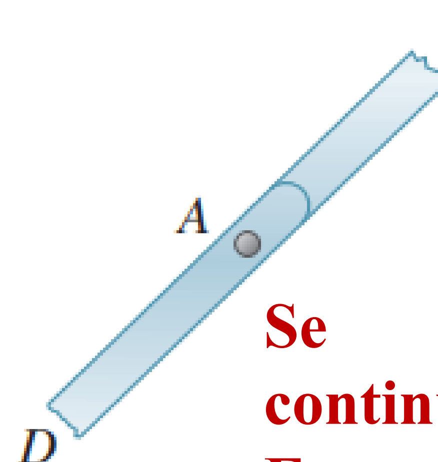
- **Numa junta conectando quatro membros dispostos ao longo de duas linhas retas que se cruzam, as forças nos membros opostos devem ser iguais;**



Outras Regras

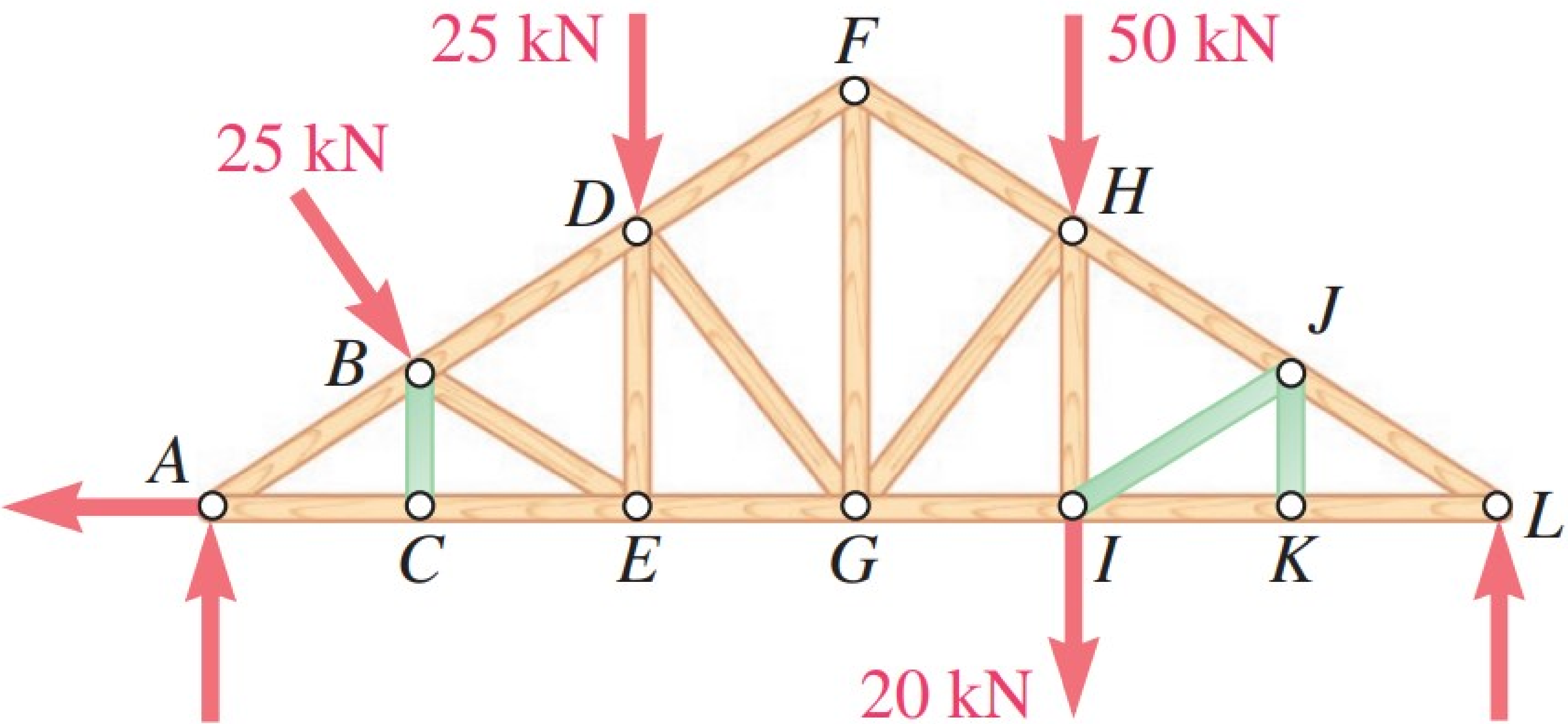
- Num NÓ que conecta **três membros** e suporta uma **carga P**. Onde dois membros estão na **mesma linha e a carga P atua ao longo do terceiro membro**. As forças nos **dois membros opostos devem ser iguais ($F_{AB}=F_{AD}$)**, e a força no o **outro membro deve ser igual a P ($F_{AC}=P$)**.



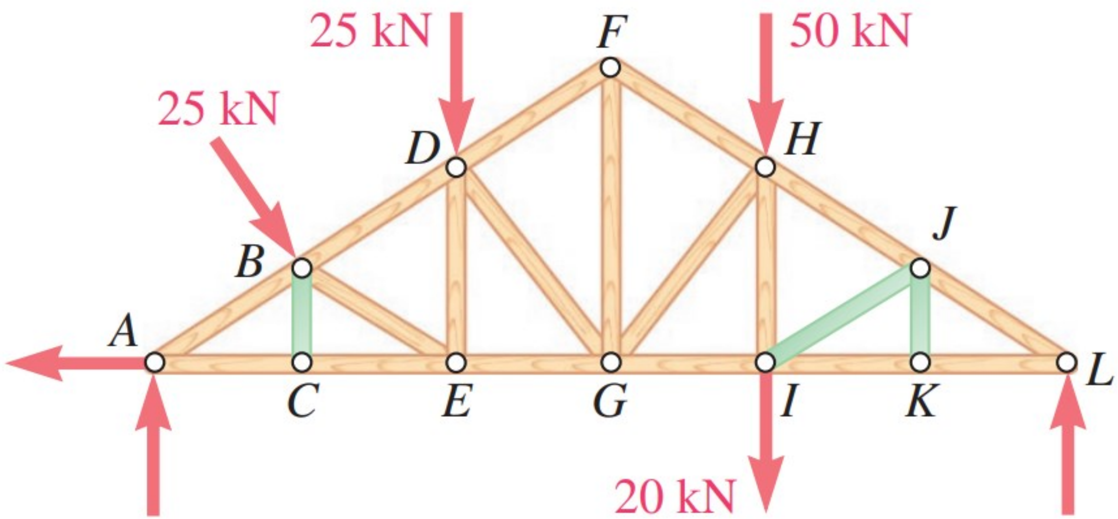


Se P=0, F_{AB} continua igual a F_{AD}

Exemplos



Exemplos

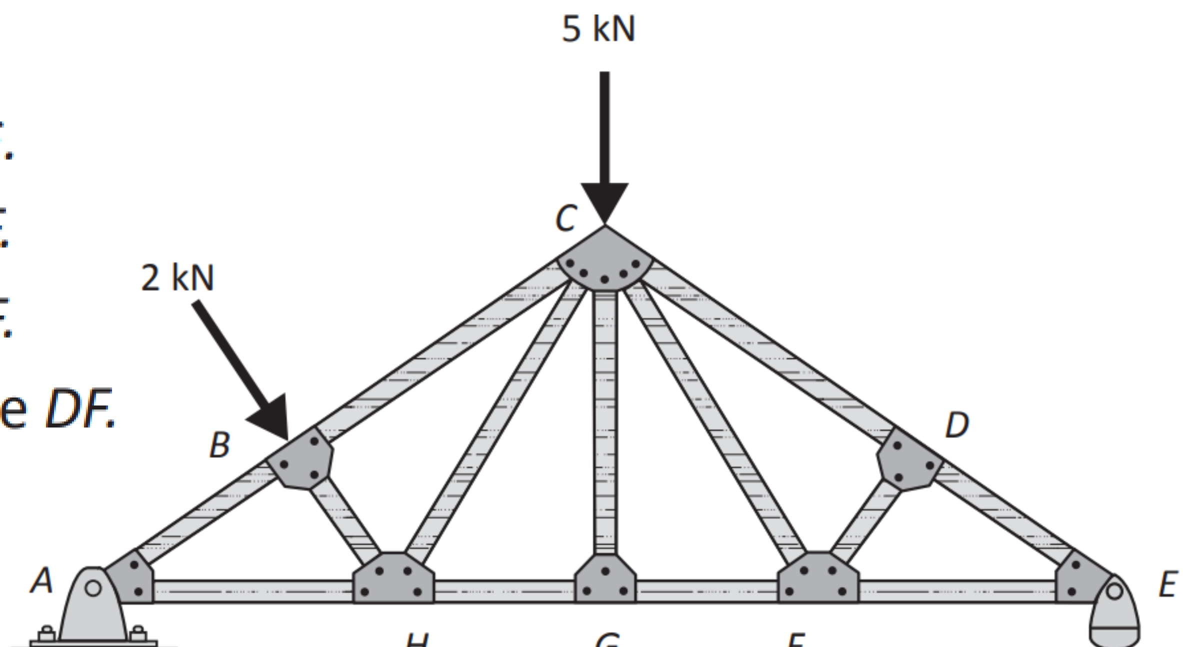


Observação: Embora os membros de força zero da Figura não transporte nenhuma carga nas condições de carga mostradas, o mesmo membros provavelmente carregariam cargas se as condições de carregamento fossem mudado. Além disso, mesmo no caso considerado, esses membros são necessário para suportar o peso da treliça e mantê-la na forma desejada.

Exemplo ENADE 2023

Considerando-se que todos os nós da treliça representada pela figura são conectados por pinos, é correto afirmar, apenas a partir da observação desses nós, que são elementos de força nula.

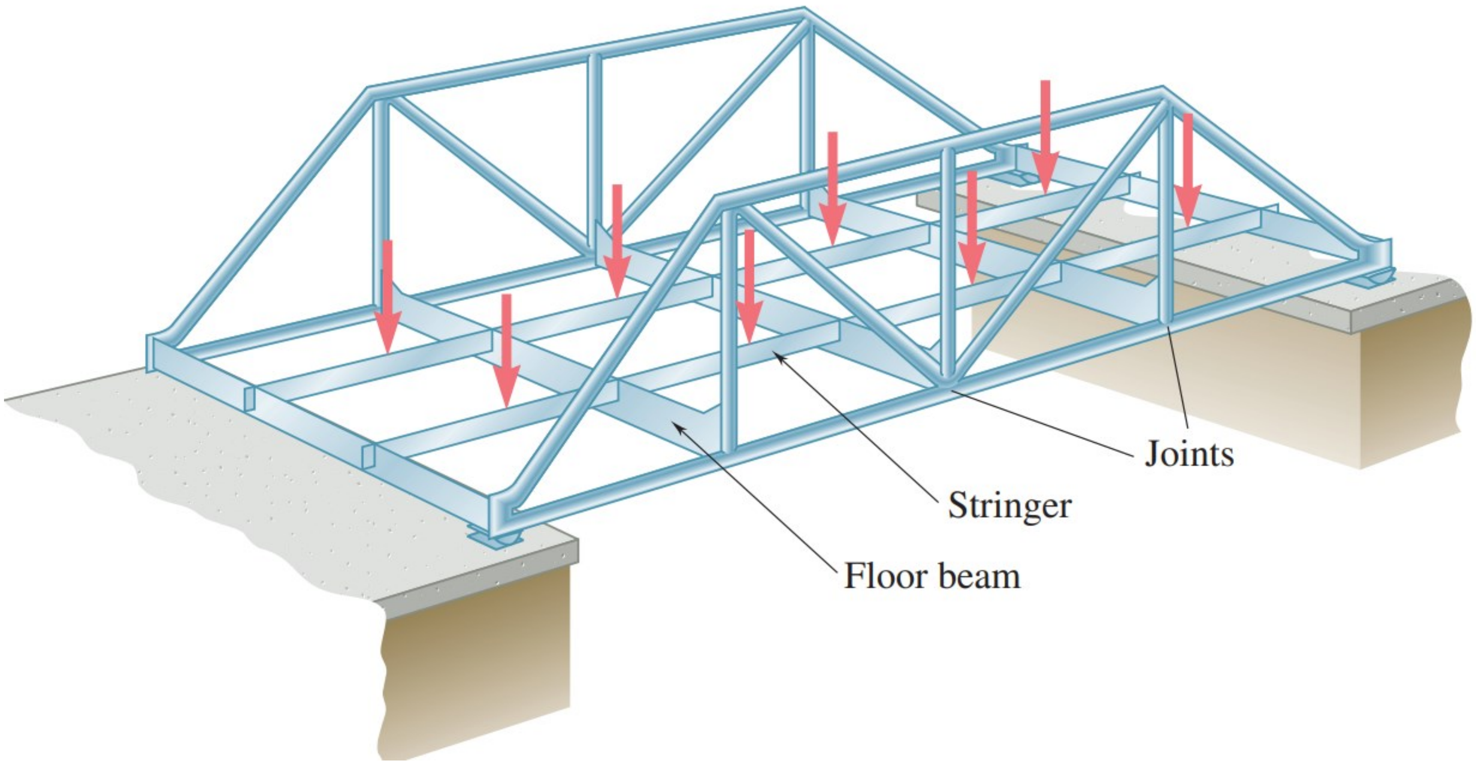
- **A** *BH* e *CH*.
- **B** *BH*, *CF* e *CG*.
- **C** *CF*, *CG* e *DF*.
- **D** *CF*, *CH* e *DF*.
- **E** *BH*, *CG*, *CH* e *DF*.



HIBBELER, R. C. **Estática**: mecânica para engenharia. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011 (adaptado).

Treliças Espaciais

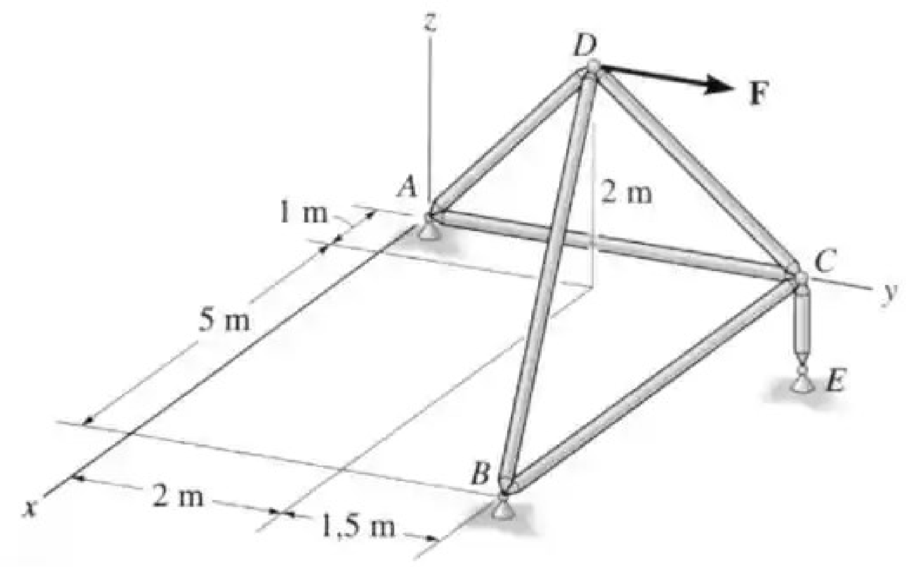
- As regras também se aplicam para treliças espaciais;



Treliças Espaciais

- **Uma regra adiciona para treliças espaciais é que:**

Para um mesmo NÓ, barras fora do plano de atuação das outras barras serão nulas.



Problema 6.60

…

CONTINUA na Próxima Aula