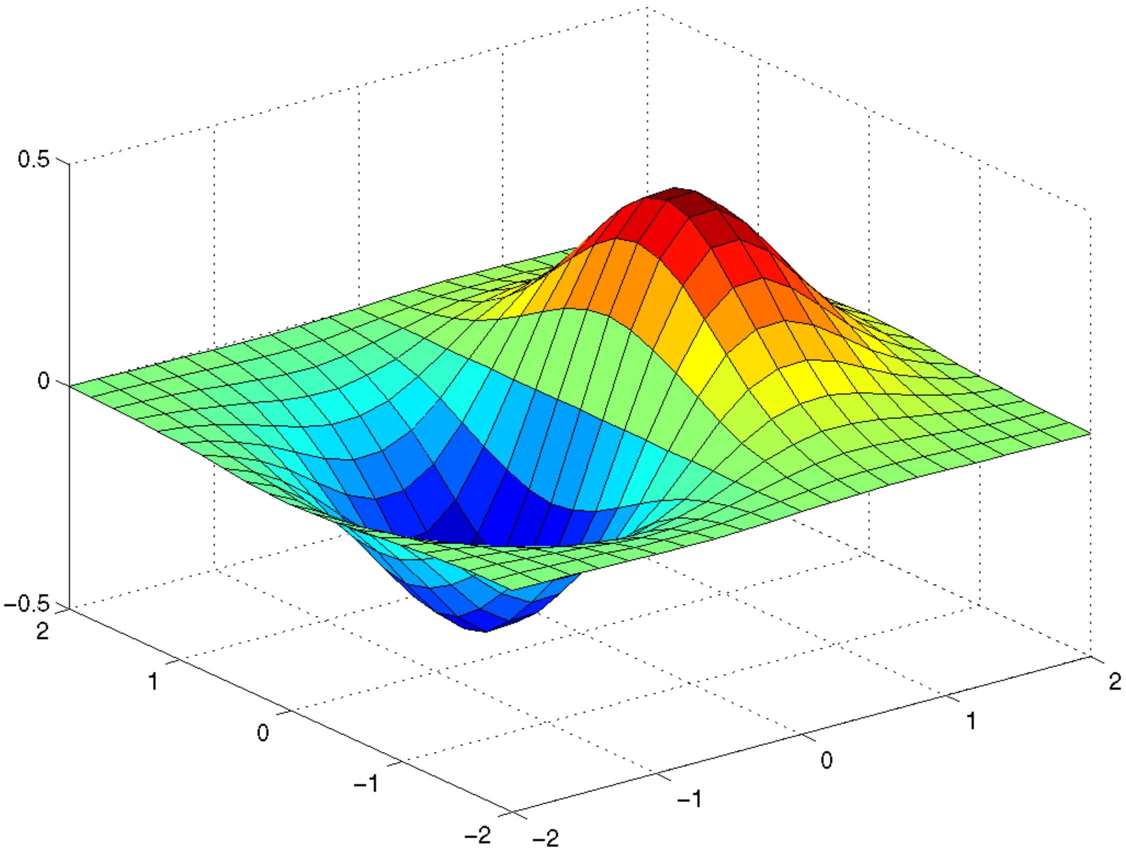
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS SERTÃO
EIXO TECNOLOGIA



Cálculo Numérico

Prof. Dr. Alverlando Silva Ricardo

Aula 4: PARTE I: ZEROS DE FUNÇÕES

ZEROS DE FUNÇÕES

INTRODUÇÃO

- Equações precisam ser resolvidas em todas as áreas da **CIÊNCIA E DA ENGENHARIA**.

INTRODUÇÃO

- Equações precisam ser resolvidas em todas as áreas da **CIÊNCIA E DA ENGENHARIA**.
- Uma equação de uma única variável pode ser escrita na forma:

$$f(x) = 0$$

INTRODUÇÃO

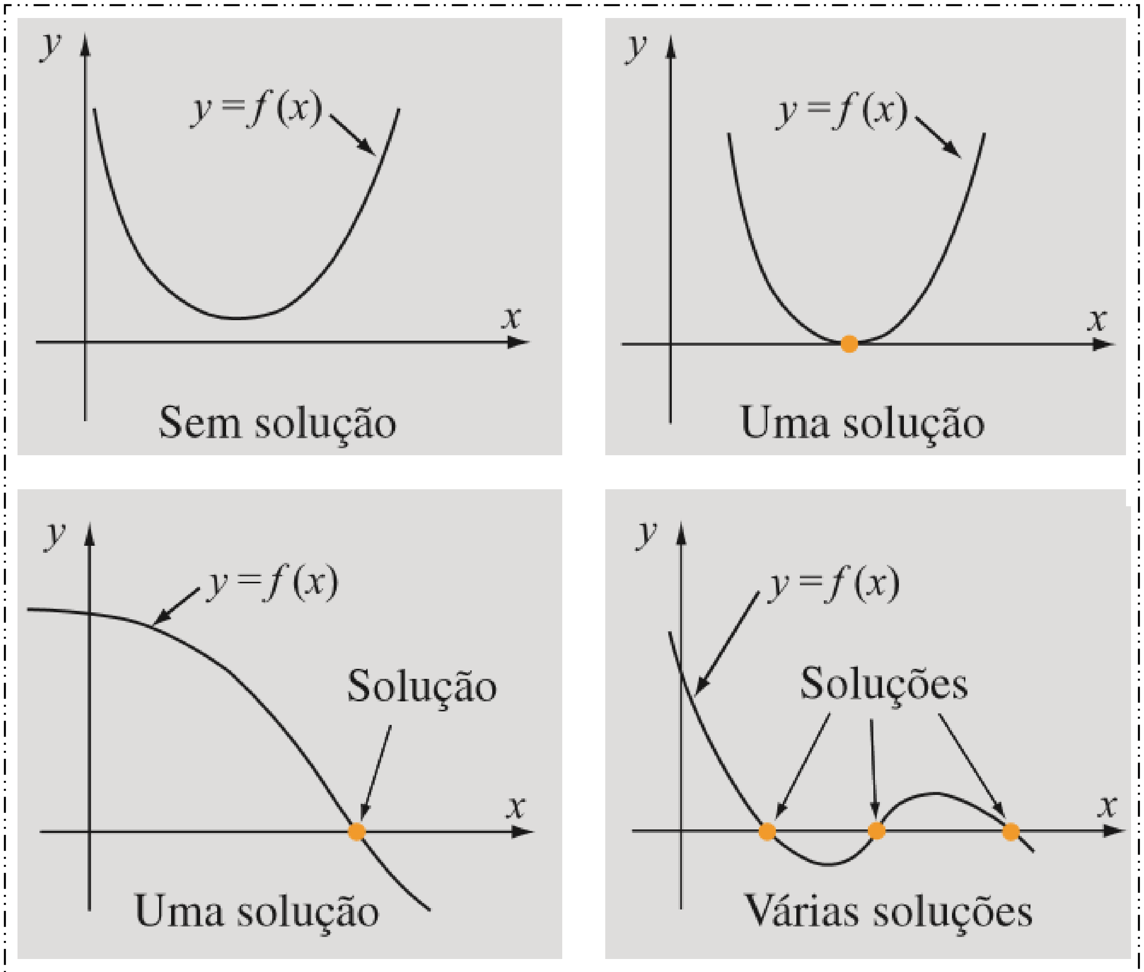
- Equações precisam ser resolvidas em todas as áreas da **CIÊNCIA E DA ENGENHARIA**.
- Uma equação de uma única variável pode ser escrita na forma:

$$f(x) = 0$$

- A solução dessa equação (***também chamada de raiz***) é um valor numérico de x que satisfaz à equação.

INTRODUÇÃO

➢ Graficamente, a solução é o ponto onde a função $f(x)$ cruza ou toca o eixo x:



INTRODUÇÃO

- Quando a equação é simples, o valor de *x* pode ser determinado analiticamente.

  - *Funções Algébricas (polinomiais):*

    - 1º grau – Equação da Reta;
    - 2º grau – Fórmula de Báskara;
    - **N-ésimo grau: como resolver?**

INTRODUÇÃO

- Em muitas situações, no entanto, é impossível determinar analiticamente a raiz de uma equação.

  - *Funções Transcendentais (não-polinomiais):*
    - Trigonométricas;
    - Exponenciais;
    - Logarítmicas;
    - (...)

EXEMPLOS

EXEMPLOS

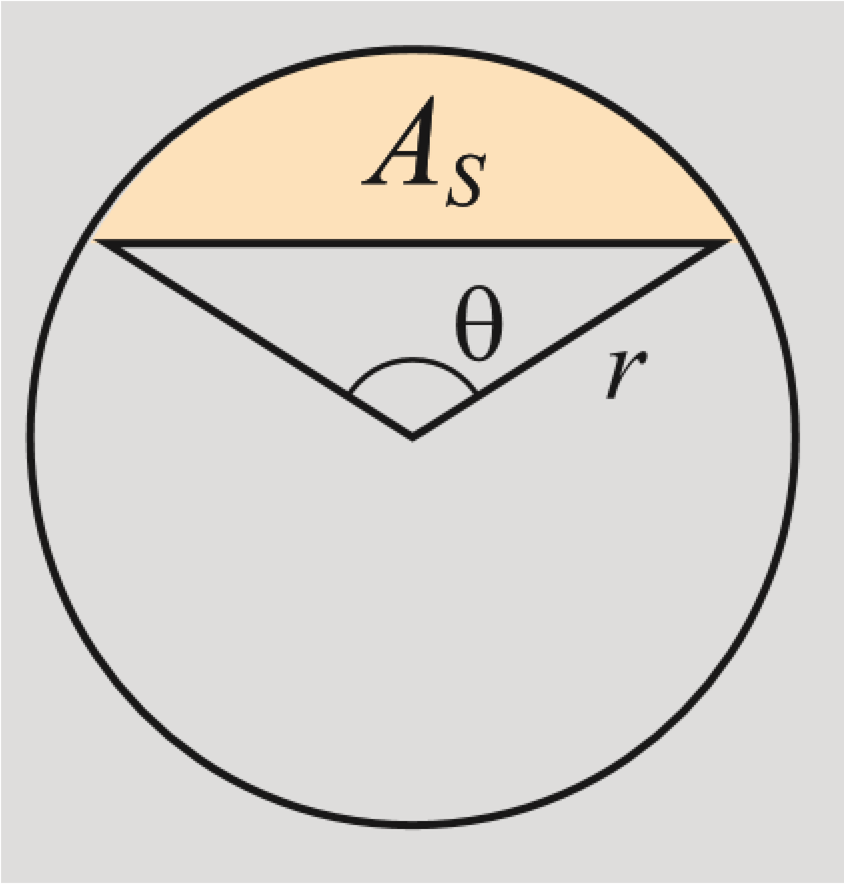
- A área do segmento A_S de um círculo com raio r (área sombreada da Figura) é dada por:

$$A_S = \frac{1}{2}r^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

Conhecidos

($A_S = 8\ m^2$)

$r = 3\ m$



EXEMPLOS

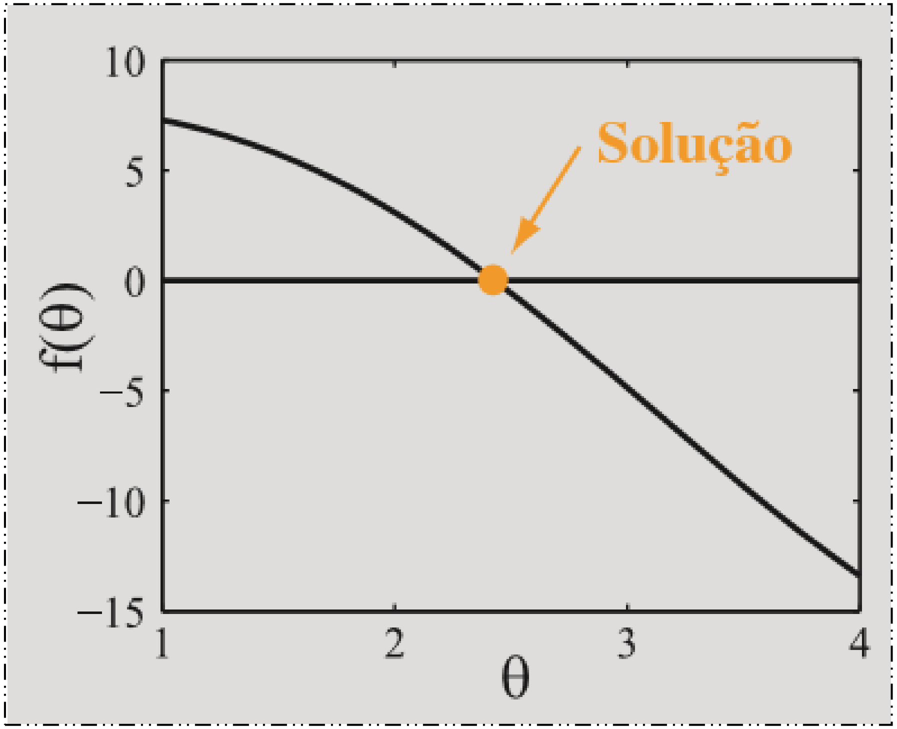
- A área do segmento A_S de um círculo com raio r (área sombreada da Figura) é dada por:

$$f(\theta) = 8 - 4{,}5(\theta - \operatorname{sen}\theta) = 0$$

$\downarrow$

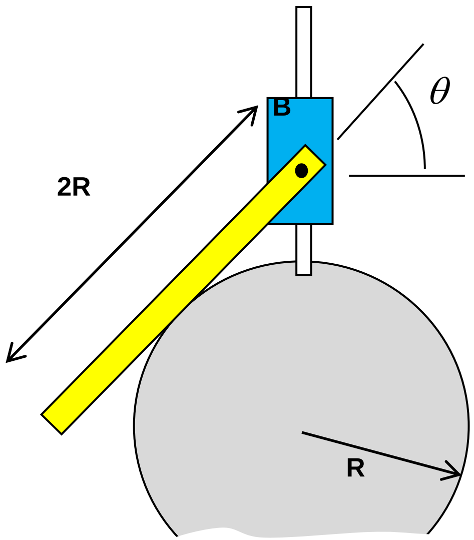
Qual o valor de θ ?

θ	$f(\theta)$
2 rad	3,0918
2,4 rad	0,2396
2,43 rad	0,003683
2,4304 rad	0,00052



EXEMPLOS

Problema*: Uma haste delgada de comprimento $2R$ e peso P está presa a um cursor em B e apoiada em um cilindro de raio R. Sabendo que o cursor pode se deslocar livremente ao longo de sua guia vertical, determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio. Despreze o atrito.



- Equação resultante durante o desenvolvimento da solução:

$$\cos^3(\theta) = \mathrm{sen}(\theta)$$

- Reformatação do problema:

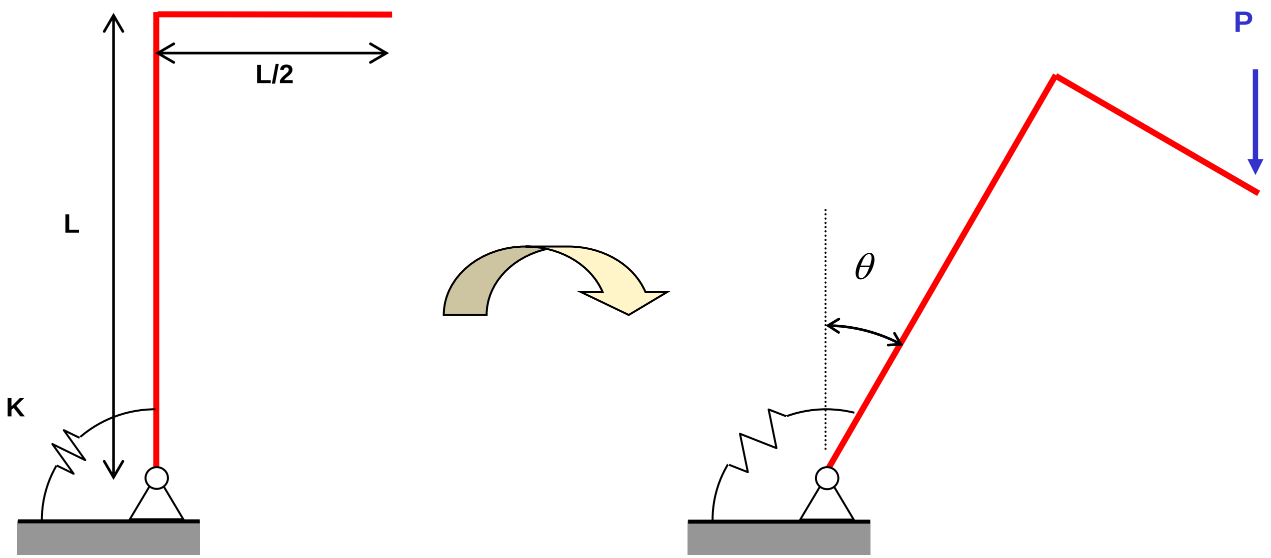
$$f(\theta) = \cos^3\theta - \mathrm{sen}\,\theta = 0$$

A solução da equação corresponde ao ***zero da função f(θ).***

*****Mecânica Vetorial para Engenheiros – Estática; F. P. Beer & E. R. Johnston, Jr.; 5ª Edição Revisada – 1994*

EXEMPLOS

Problema: Pórtico em *L* invertido com um apoio flexível de rotação.



- Equação resultante durante o desenvolvimento da solução:

$$\mathbf{(K/PL).\theta = 0{,}5.\cos(\theta) + sen(\theta)}$$

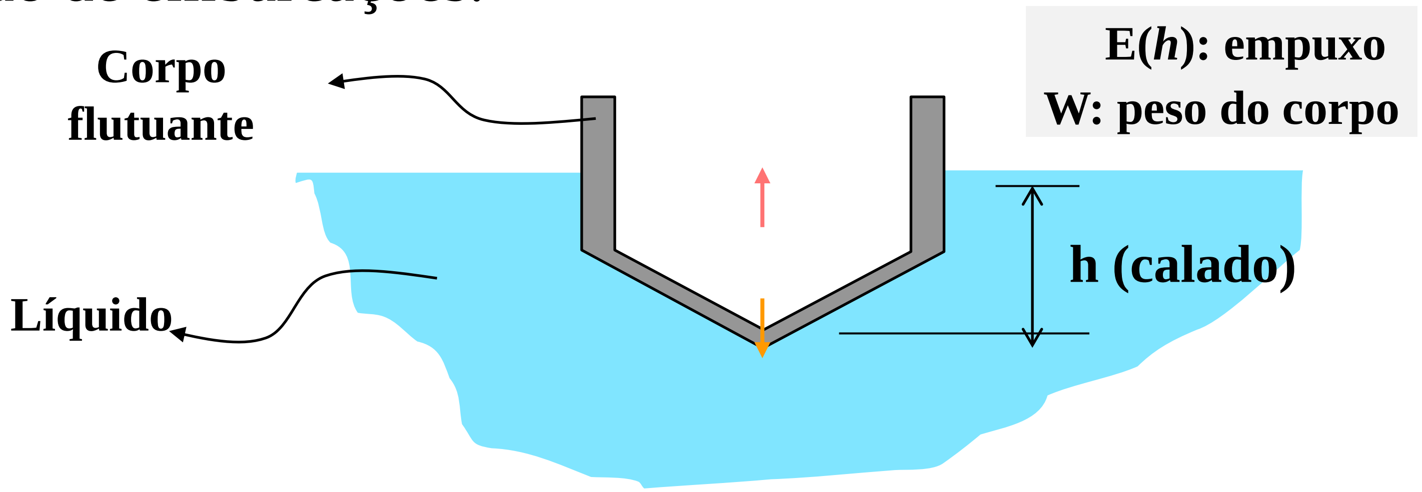
- Reformatação do problema:

$$\mathbf{f(\theta) = (K/PL).\theta - 0{,}5.\cos\theta - sen\theta = 0}$$

A solução da equação corresponde ao ***zero da função f(θ).***

EXEMPLOS

Problema: Aplicação do Princípio de Arquimedes para a determinação do calado de embarcações.



- Equação resultante durante o desenvolvimento da solução:

$$\gamma_{Sólido}.V_{Sólido} = \gamma_{Líquido}.V_{Líquido\ deslocado}(h)$$

- Reformatação do problema (***Função de h***):

$$f(h) = \gamma_{Sólido}.V_{Sólido} - \gamma_{Líquido}.V_{Líquido\ deslocado}(h) = 0$$

EXEMPLOS

Problema: Aplicação da Equação de Manning para a verificação da capacidade de vazão de dutos.

- A = Área molhada;
- R = Raio hidráulico (*A/p*);
- p = perímetro molhado;
- s = inclinação longitudinal do duto;
- n = parâmetro de rugosidade da superfície do duto;
- h = profundidade do duto;
- Q = vazão no duto.

- Equação resultante durante o desenvolvimento da solução:

$$\boldsymbol{Q = \frac{A.R^{2/3}.s^{1/2}}{n}}$$

- Reformatação do problema (***Função de h***):

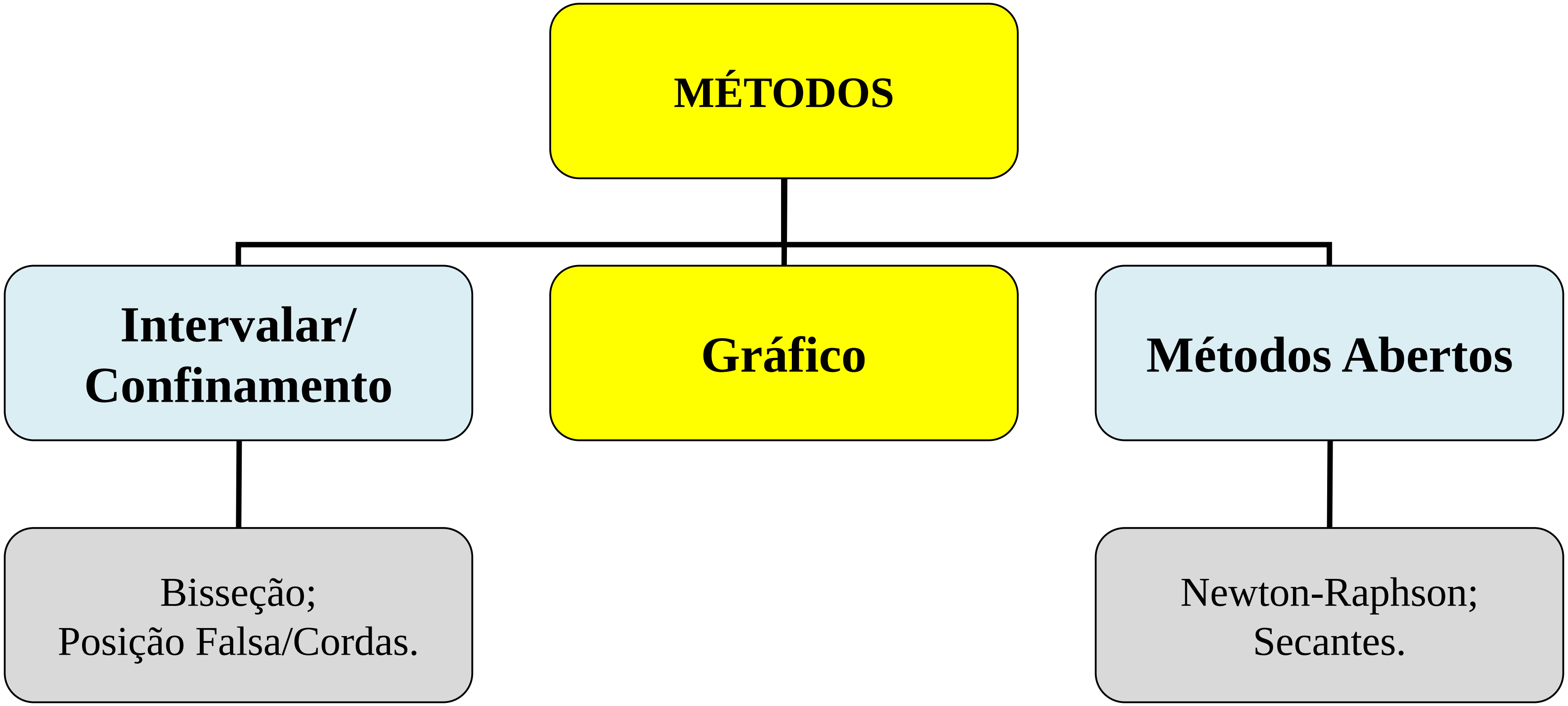
$$\boldsymbol{Q - \frac{A(h).R(h)^{2/3}.s^{1/2}}{n} = 0}$$

EXEMPLOS

- Como obter as raízes de uma função qualquer?

EXEMPLOS

- Como obter as raízes de uma função qualquer?
  - ***Resposta:*** *solução numérica (aproximada)*



Métodos de Solução Numérica

Métodos de Solução: Gráfico

1. Utiliza alguma sistemática para o **traçado do gráfico da função** estudada (softwares matemáticos);
2. O **intervalo inicial** de observação pode ser **criteriosamente definido** em função do entendimento físico do problema envolvido;
3. O **zero da função** corresponde ao **ponto de contato** do gráfico da função com o eixo das abscissas;
4. O intervalo de observação pode ser **refinado até se atingir a precisão** desejada.

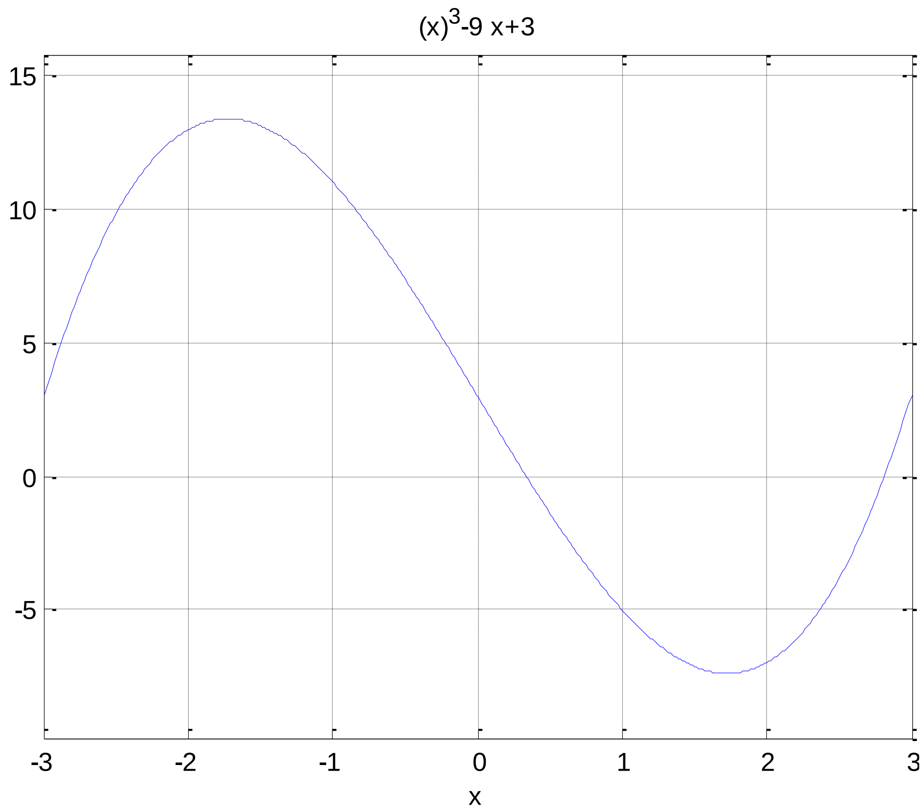
Métodos de Solução: Gráfico

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

*ezplot('(x)^3-9*x+3',[-3 3]), grid*

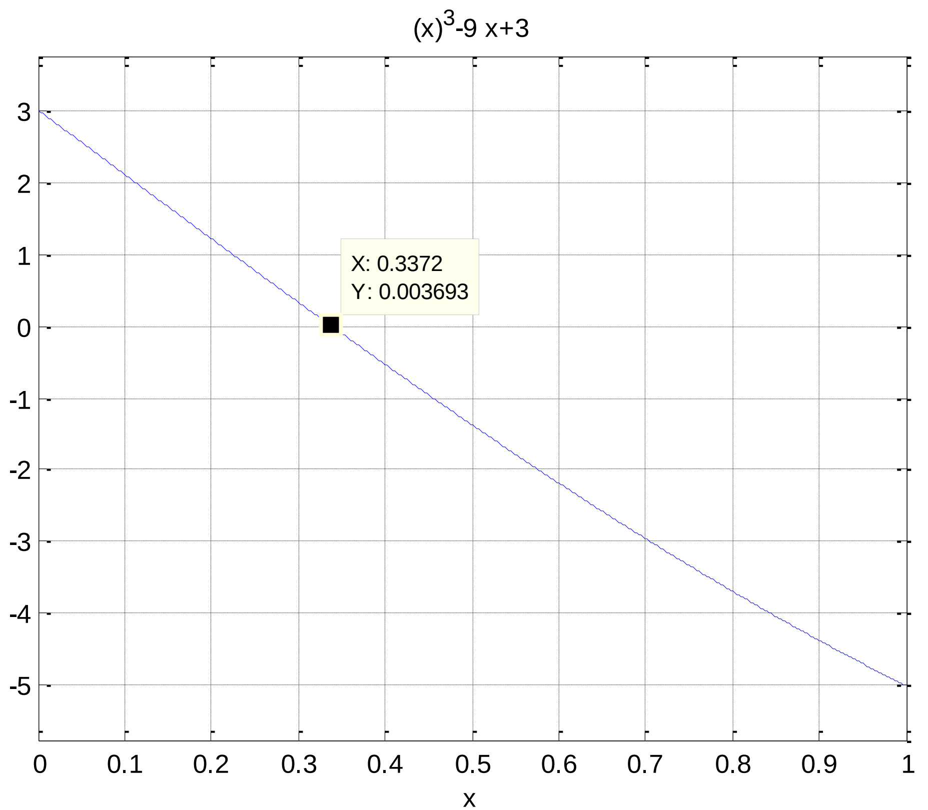
*ezplot('(x)^3-9*x+3',[0 1]), grid*

Métodos de Solução: Gráfico



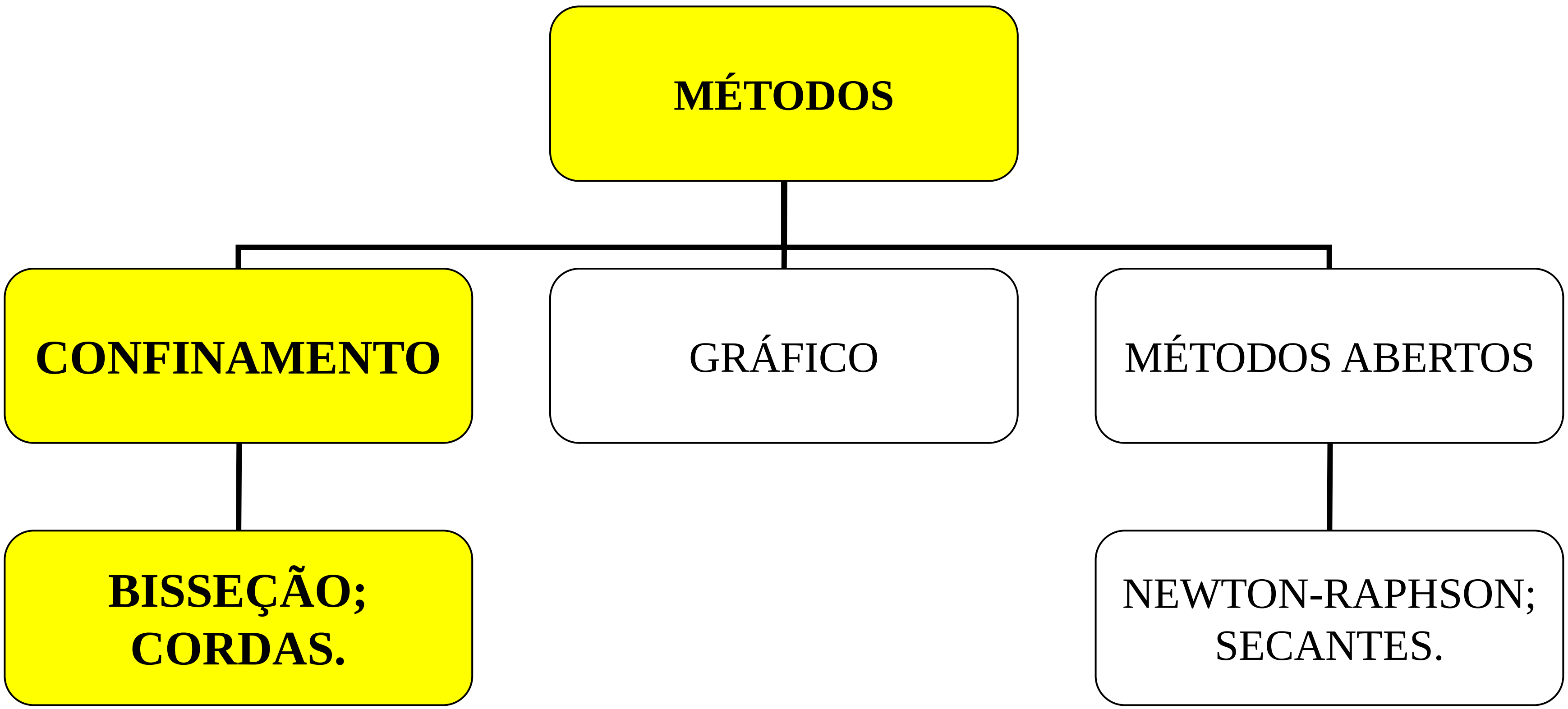
*ezplot('(x)^3-9*x+3',[-3 3]), grid*

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

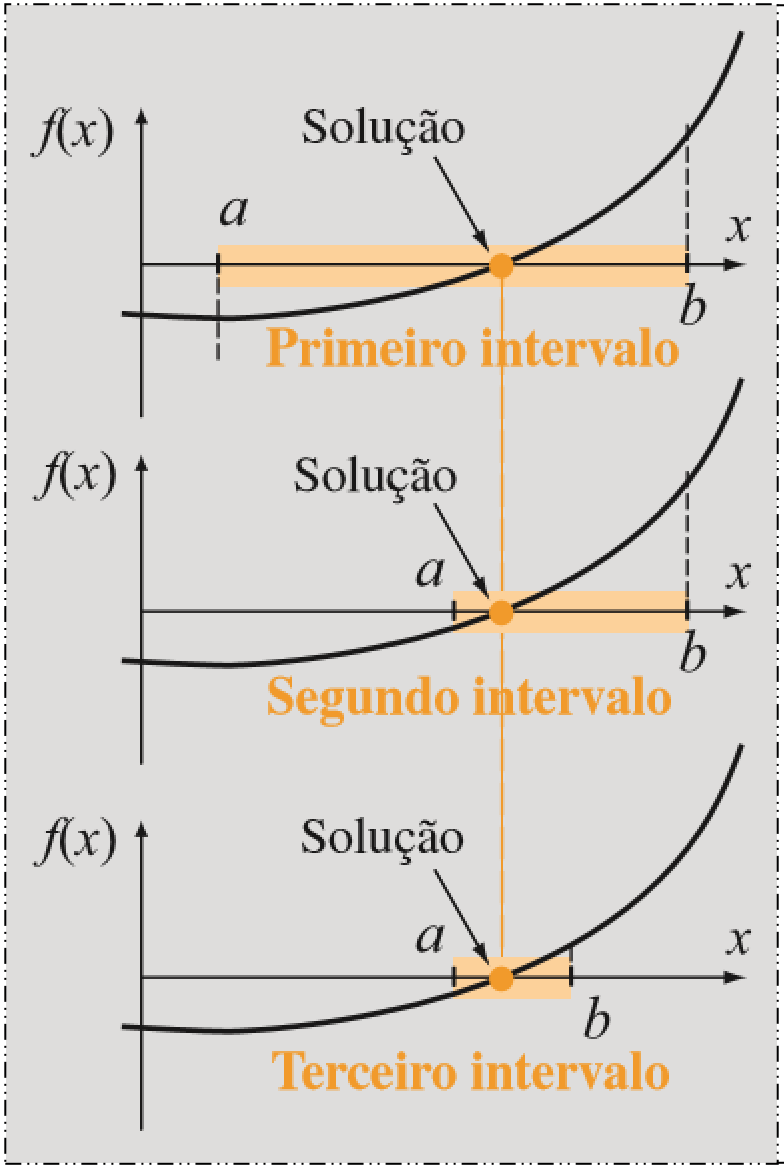


*ezplot('(x)^3-9*x+3',[0 1]), grid*

Métodos de Solução: CONFINAMENTO



Métodos de Solução: CONFINAMENTO



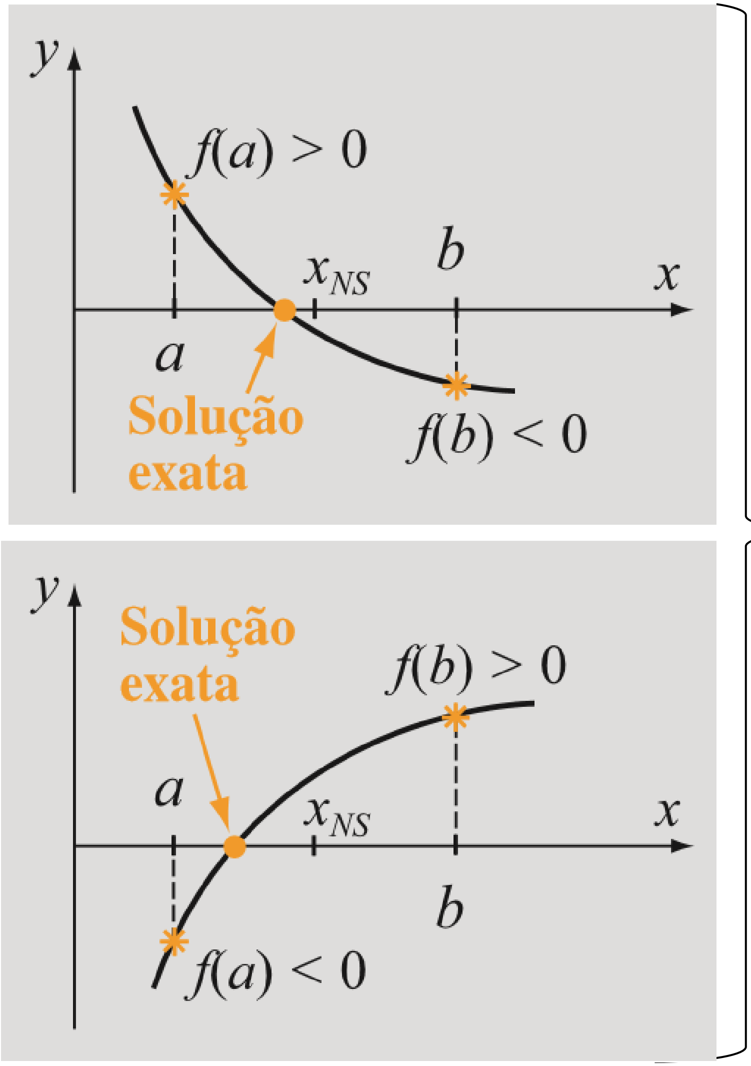
[a, b] = Intervalo que inclui a solução;

a = limite inferior;
b = limite superior;

- **Solução é APROXIMADA**

"o tamanho do intervalo é reduzido sucessivamente até que a distância entre os pontos finais seja menor que a precisão desejada para a solução ou um número de iteração máxima seja atingido"

Métodos de Solução: CONFINAMENTO



➢ **Pré-requisitos:**

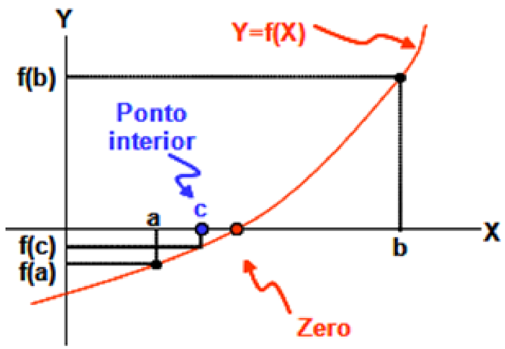
❑ Considere uma função *f(x)* **contínua dentro de um intervalo** [a, b];

❑ Considere ainda que nos ***extremos*** do intervalo [a, b] a função estudada ***apresente sinais contrários***. Ou seja, $f(a)*f(b) < 0$.

➢ **Resultado:**

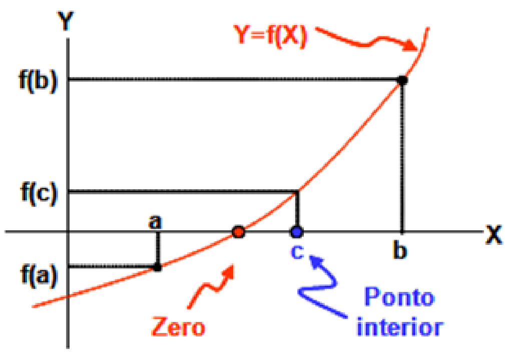
Garante-se a existência de pelo menos um zero dessa função dentro do intervalo [a, b].

Confinamento: BISSEÇÃO



Como f(a) apresenta o mesmo sinal de f(c)

Novo intervalo: [c, b]



Como f(b) apresenta o mesmo sinal de f(c)

Novo intervalo: [a, c]

1. Escolha o primeiro $[a_0, b_0]$ de forma que $f(a_0)*f(b_0) < 0$.
2. Calcule a primeira estimativa da solução numérica c_0 usando: $$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$
3. Determine se a solução exata está entre $[a_0, c_0]$ ou entre $[c_0, b_0]$. Por exemplo:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } f(a0) > 0\ (+) \\ \quad \color{red}{\mathbf{f(c0) < 0\ (-)}} \\ \quad f(b0) < 0\ (-) \end{array}\right\} \qquad b = c_0$$

4. Selecione o novo intervalo [a, b] e volte para o passo 2.

Os passos 2 a 4 são repetidos até que a **TOLERÂNCIA** especificada seja satisfeita ou um determinado limite de **ERRO** seja atingido.

Confinamento: BISSEÇÃO

Exemplo: encontrar o zero da função abaixo, no intervalo [0,1]. Adote $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Iteração 1:

- ***Passo 1:*** Definição do intervalo [a, b];

São dados o intervalo [a, b] = [0,1] e a tolerância desejada $\varepsilon = 0.01$.

$$f(0) = 3 > 0 \; e \; f(1) = -5 < 0 \therefore existe\ um\ zero\ no\ intervalo\_dado$$

- ***Passo 2***: Cálculo c_0, $f(c_0)$ e comparação com a tolerância

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5 \;\Rightarrow\; f(c_0) = -1.375 \;\therefore |f(c_0)| > 0.01$$

- ***Passo 3:*** Redefinição do intervalo [a, b]

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(0.5) < 0 \quad \Rightarrow \text{ redefiniçã o do intervalo } : [0{,}0.5] \\ f(1) < 0 \end{cases}$$

Confinamento: BISSEÇÃO

Exemplo: encontrar o zero da função abaixo, no intervalo [0,1]. Adote $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Iteração 2:

- ***Passo 2***: Cálculo c_0, $f(c_0)$ e comparação com a tolerância

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{0 + 0.5}{2} = 0.25 \quad \Rightarrow \quad f(c_1) = 0.766 \quad \therefore \left|f(c_1)\right| > 0.01$$

- ***Passo 3:*** Redefinição do intervalo [a, b]

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(0.25) > 0 \Rightarrow \text{redefiniçã o do intervalo } : [0.25, 0.5] \\ f(0.5) < 0 \end{cases}$$

Confinamento: BISSEÇÃO

Exemplo: encontrar o zero da função abaixo, no intervalo [0,1]. Adote $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Iteração 3:

- ***Passo 2:*** Cálculo c_0, $f(c_0)$ e comparação com a tolerância

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{0.25 + 0.5}{2} = 0.375 \Rightarrow f(c_2) = -0.322 \therefore |f(c_2)| > 0.01$$

- ***Passo 3:*** Redefinição do intervalo [a, b]

$$\begin{cases} f(0.25) > 0 \\ f(0.375) < 0 \Rightarrow \text{redefinição do intervalo}: [0.25, 0.375] \\ f(0.5) < 0 \end{cases}$$

Confinamento: BISSEÇÃO

Exemplo: encontrar o zero da função abaixo, no intervalo [0,1]. Adote $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Iteração 4:

- ***Passo 2***: Cálculo c_0, $f(c_0)$ e comparação com a tolerância

$$c_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{0.25 + 0.375}{2} = 0.312 \Rightarrow f(c_3) = 0.222 \therefore |f(c_3)| > 0.01$$

- ***Passo 3:*** Redefinição do intervalo [a, b]

$$\begin{cases} f(0.25) > 0 \\ f(0.312) > 0 \Rightarrow \text{redefinição do intervalo}: [0.312, 0.375] \\ f(0.375) < 0 \end{cases}$$

Confinamento: BISSEÇÃO

Exemplo: encontrar o zero da função abaixo, no intervalo [0,1]. Adote $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Iteração 5:

- ***Passo 2:*** Cálculo c_0, $f(c_0)$ e comparação com a tolerância

$$c_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = \frac{0.312 + 0.375}{2} = 0.343 \quad \Rightarrow \quad f(c_4) = -0.046 \quad \therefore |f(c_4)| > 0.01$$

- ***Passo 3:*** Redefinição do intervalo [a, b]

$$\begin{cases} f(0.312) > 0 \\ f(0.343) < 0 \Rightarrow \text{redefinição do intervalo} : [0.312, 0.343] \\ f(0.375) < 0 \end{cases}$$

Confinamento: BISSEÇÃO

Exemplo: encontrar o zero da função abaixo, no intervalo [0,1]. Adote $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Iteração 6:

- ***Passo 2***: Cálculo c_0, $f(c_0)$ e comparação com a tolerância

$$c_5 = \frac{a_5 + b_5}{2} = \frac{0.312 + 0.343}{2} = 0.327 \Rightarrow f(c_5) = 0.091 \therefore |f(c_5)| > 0.01$$

- ***Passo 3:*** Redefinição do intervalo [a, b]

$$\begin{cases} f(0.312) > 0 \\ f(0.327) > 0 \Rightarrow \text{redefinição do intervalo} : [0.327, 0.343] \\ f(0.343) < 0 \end{cases}$$

Confinamento: BISSEÇÃO

Exemplo: encontrar o zero da função abaixo, no intervalo [0,1]. Adote $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Iteração 7:

- ***Passo 2***: Cálculo c_0, $f(c_0)$ e comparação com a tolerância

$$c_6 = \frac{a_6 + b_6}{2} = \frac{0.327 + 0.343}{2} = 0.335 \Rightarrow f(c_6) = 0.022 \quad \therefore |f(c_6)| > 0.01$$

- ***Passo 3:*** Redefinição do intervalo [a, b]

$$\begin{cases} f(0.327) > 0 \\ f(0.335) > 0 \Rightarrow \text{redefiniçã o do intervalo} : [0.335, 0.3\ 43] \\ f(0.343) < 0 \end{cases}$$

Confinamento: BISSEÇÃO

Exemplo: encontrar o zero da função abaixo, no intervalo [0,1]. Adote $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Iteração 8:

- ***Passo 2***: Cálculo c_0, $f(c_0)$ e comparação com a tolerância

$$c_7 = \frac{a_7 + b_7}{2} = \frac{0.335 + 0.343}{2} = 0.339 \quad \Rightarrow f(c_7) = -0.012 \quad \therefore |f(c_7)| > 0.01$$

- ***Passo 3:*** Redefinição do intervalo [a, b]

$$\begin{cases} f(0.335) > 0 \\ f(0.339) < 0 \Rightarrow \text{redefiniçã o do intervalo } : [0.335, 0.3\ 39] \\ f(0.343) < 0 \end{cases}$$

Confinamento: BISSEÇÃO

Exemplo: encontrar o zero da função abaixo, no intervalo [0,1]. Adote $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Iteração 9:

➢ ***Passo 2***: Cálculo c_0, $f(c_0)$ e comparação com a tolerância

$$c_8 = \frac{a_8 + b_8}{2} = \frac{0.335 + 0.339}{2} = 0.337 \quad \Rightarrow \; f(c_8) = 0.005 \quad \therefore \left|f(c_8)\right| < 0.01$$

$$\boxed{\textit{Solução Aproximada } \bar{x} = 0.337}$$

Confinamento: BISSEÇÃO

Programa (MATLAB):

```
clear all

%*******************************************************************
%************************ DADOS DE ENTRADA: ************************
%*******************************************************************

F = inline('x^3-9*x+3');

a = 0;
b = 1;

imax = 20;

tol = 0.01;
```

Confinamento: BISSEÇÃO

Programa (MATLAB): (continuação)

```
%*********************** ALGORITMO: BISSEÇÃO ***********************
Fa = F(a);
Fb = F(b);
if Fa*Fb>0
    disp('Erro: A Função tem o mesmo sinal nos pontos a e b!')
else
    disp('interaçao    a           b          (ci)        f(ci)    Tolerancia');
        for i=1:imax
        ci = (a+b)/2;
        Fci=F(ci);
        toli = abs(Fci);
               fprintf('%3i    %11.6f %11.6f %11.6f %11.6f %11.6f\n',i,a,b,ci,Fci,toli)
               if Fci==0
                   fprintf('Uma solução exata x=%11.6f foi obtida', ci)
            break
        end
               if toli<tol
            break
        end
        if i == imax
             fprintf('Solução não obtida em in %i iterações', imax)
             break
        end
           if F(a)*F(ci)<0
            b=ci;
        else
            a=ci;
        end
    end
end
```

Confinamento: BISSEÇÃO

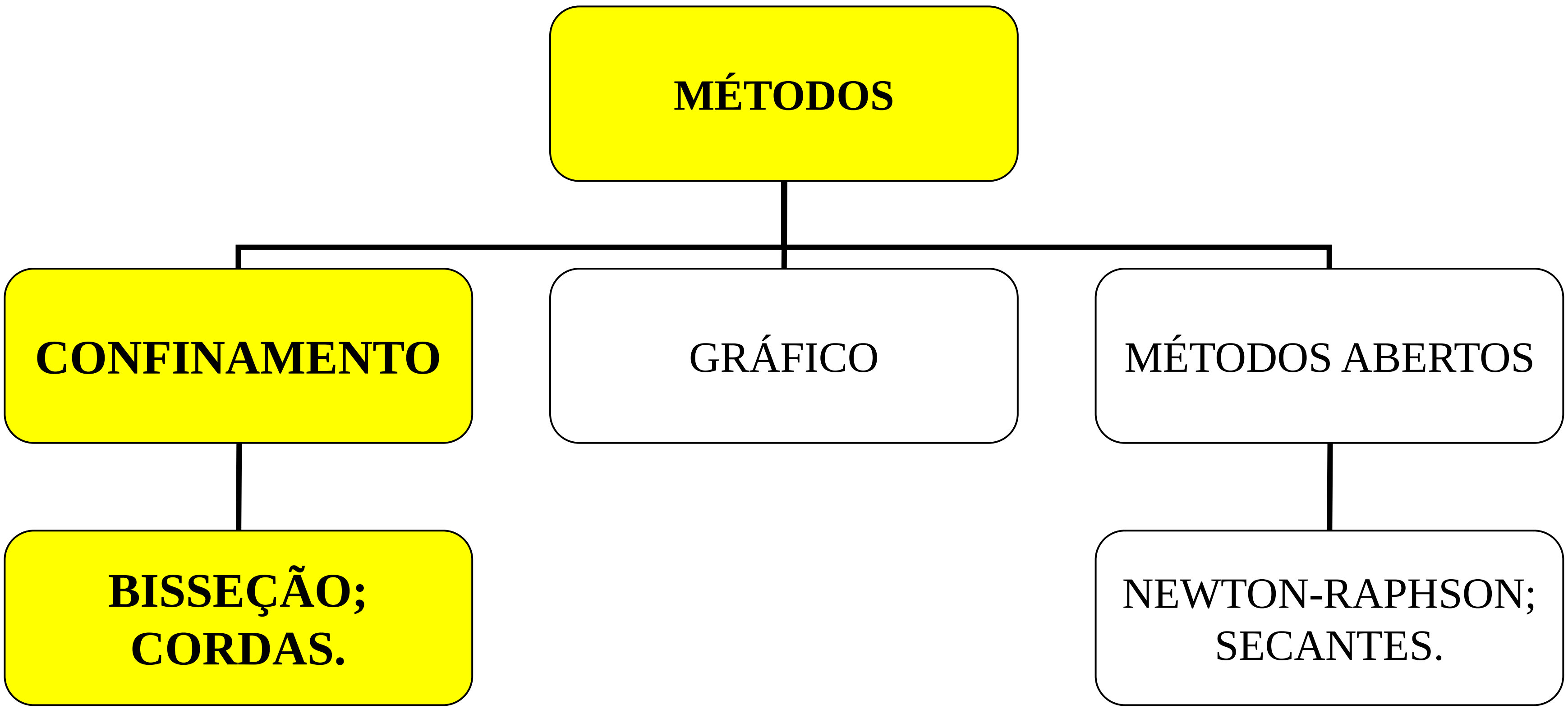
- ***Notas adicionais a respeito do método da bisseção:***

  - O método **sempre converge** para uma resposta, desde que uma raiz esteja contida no intervalo inicial [a, b];

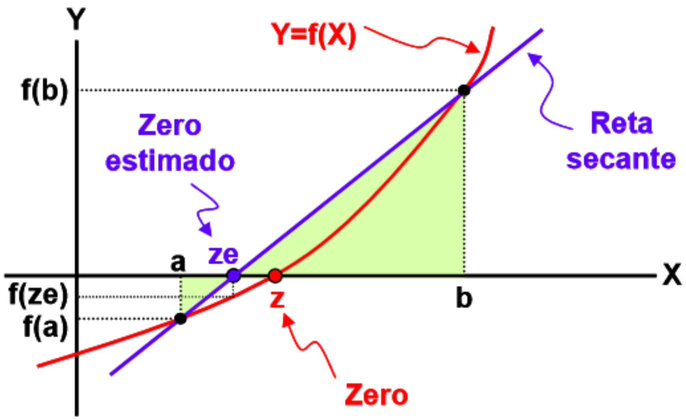
  - O método **pode falhar quando a função é tangente** ao eixo x, não o cruzando em $f(x) = 0$;

  - A **convergência** do método é **lenta** em comparação com outros métodos.

Métodos de Solução: CONFINAMENTO



Confinamento: CORDAS/POSIÇÃO FALSA



Equação de recorrência:

- Pela semelhança dos **triângulos retângulos** destacados na figura:

$$\frac{-f(a)}{ze-a}=\frac{f(b)}{b-ze}$$

$$\therefore \quad \boxed{ze=\frac{a\cdot f(b)-b\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}}$$

- No caso do Método da Bisseção considera-se a média aritmética de a e b:

$$c_0 = ze = \frac{a_0+b_0}{2}$$

- Em vez de tomar a média aritmética de a e b, o Método das CORDAS toma a média ponderada de a e b com pesos f(a) e f(b):

- A estimativa do zero da função é feita a partir da reta secante que une os pares extremos do intervalo analisado.

- O ponto em que essa reta secante intercepta o eixo das abscissas corresponde à estimativa do zero da função

Confinamento: CORDAS/POSIÇÃO FALSA

Exemplo: encontrar o zero da função abaixo, no intervalo [0,1]. Adote ε = 0.01.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Iteração 1:

- ***Passo 1:*** Definição do intervalo [a, b];

São dados o intervalo [a, b] = [0,1] e a tolerância desejada ε = 0.01.

$f(0) = 3 > 0 \text{ e } f(1) = -5 < 0 \therefore \textit{existe um zero no intervalo\_dado}$

- ***Passo 2***: Cálculo c_0, $f(c_0)$ e comparação com a tolerância

$$c_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{0 \cdot (-5) - 1 \cdot 3}{-5 - 3} = 0.375 \Rightarrow f(c_0) = -0.322 \therefore |f(c_0)| > 0.01$$

- ***Passo 3:*** Redefinição do intervalo [a, b]

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(0.375) < 0 \quad \Rightarrow \text{redefiniçã o do intervalo } :[0,0.375] \\ f(1) < 0 \end{cases}$$

Confinamento: CORDAS/POSIÇÃO FALSA

Exemplo: encontrar o zero da função abaixo, no intervalo [0,1]. Adote $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Iteração 2:

➢ ***Passo 2***: Cálculo c_0, $f(c_0)$ e comparação com a tolerância

$$c_1 = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = \frac{0 \cdot (-0.322) - 0.375 \cdot 3}{-0.322 - 3} = 0.338 \Rightarrow f(c_1) = -0.003 \therefore |f(c_1)| < 0.01$$

$$\boxed{\textit{Solução Aproximada } \bar{x} = 0.338}$$

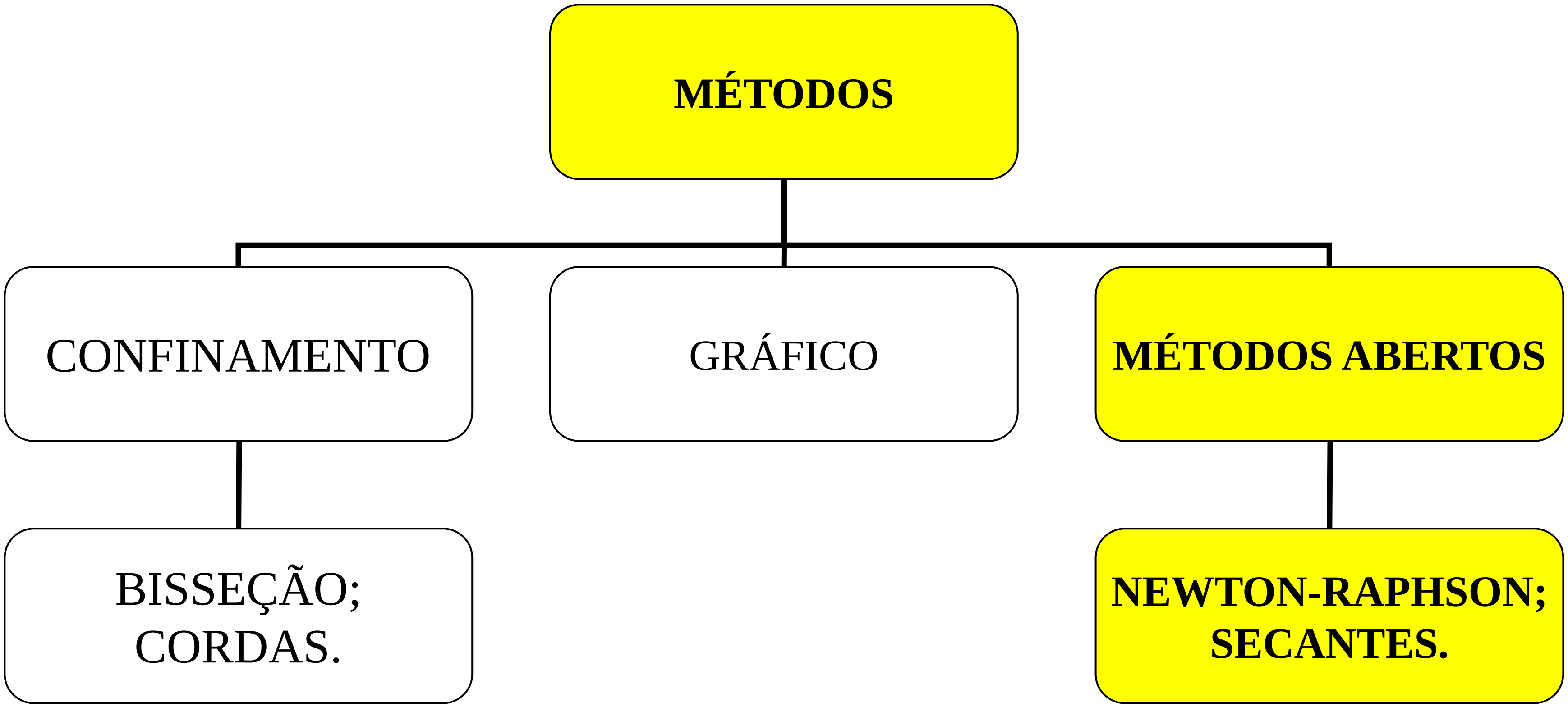
Confinamento: CORDAS/POSIÇÃO FALSA

- ***Notas adicionais a respeito do método das cordas:***

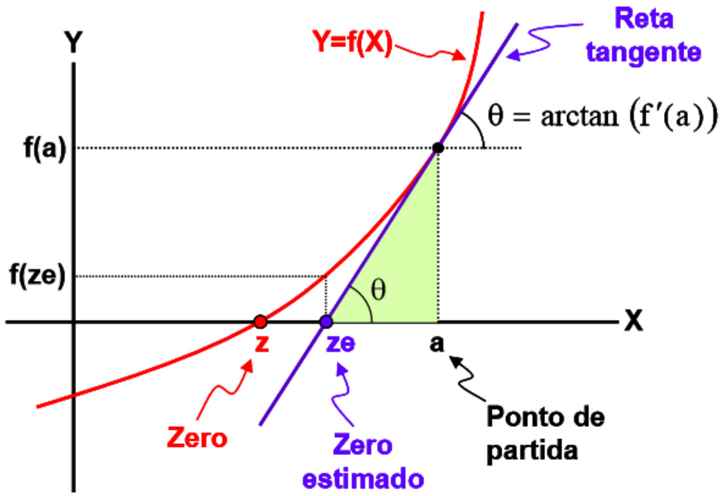
  - Obtém um ponto como raiz aproximada, sem que o intervalo [a, b] seja pequeno o suficiente;

  - Se for exigido que os critérios de parada $|b - a| < \varepsilon$ e $|f(c)| < \varepsilon$ sejam atendidos simultaneamente, o processo pode exceder o número máximo de iterações.

Métodos de Solução: ABERTOS



ABERTO: NEWTON



Equação de recorrência:

Para o **triângulo retângulo** destacado na figura:

$$\tan(\theta) = f'(a) = \frac{f(a)}{a - ze}$$

$$\therefore \boxed{ze = a - \frac{f(a)}{f'(a)}}$$

- Também conhecido com Método de Newton-Raphson devido a sistematização apresentada por Joseph Raphson em 1960.

- f(x) contínua em (a,b) e f'(x)≠0.

- A estimativa do zero da função é feita a partir da reta tangente à função em um ponto de partida;

- O ponto em que a reta tangente intercepta o eixo das abscissas corresponde à estimativa do zero da função

ABERTO: NEWTON

Exemplo: encontrar o zero da função abaixo, no intervalo [0,1]. Adote $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

- ***Passo 0: Cálculo da derivada da função:***

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$

$$\text{Chute Inicial}: x_0 = 0 \Leftrightarrow \text{encontraremos uma solução próximo de } 0$$

Iteração 1:

- ***Passo 1***: Cálculo x_1, $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f(x_1)$ e comparação com a tolerância

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{3}{-9} = 0.333 \Rightarrow f(x_1) = 0.04 \therefore |f(x_1)| > 0.01$$

ABERTO: NEWTON

Exemplo: encontrar o zero da função abaixo, no intervalo [0,1]. Adote $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Iteração 2:

- ***Passo 2:*** : Cálculo x_2, $f(x_1)$, $f'(x_1)$, $f(x_2)$ e comparação com a tolerância

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.333 - \frac{f(0.333)}{f'(0.333)}$$

$$x_2 = 0.333 - \frac{0.04}{-8.667} = 0.337 \Rightarrow f(x_1) = 0.005 \therefore |f(x_1)| < 0.01$$

$$\boxed{\text{Solução Aproximada } \bar{x} = 0.337}$$

ABERTO: NEWTON

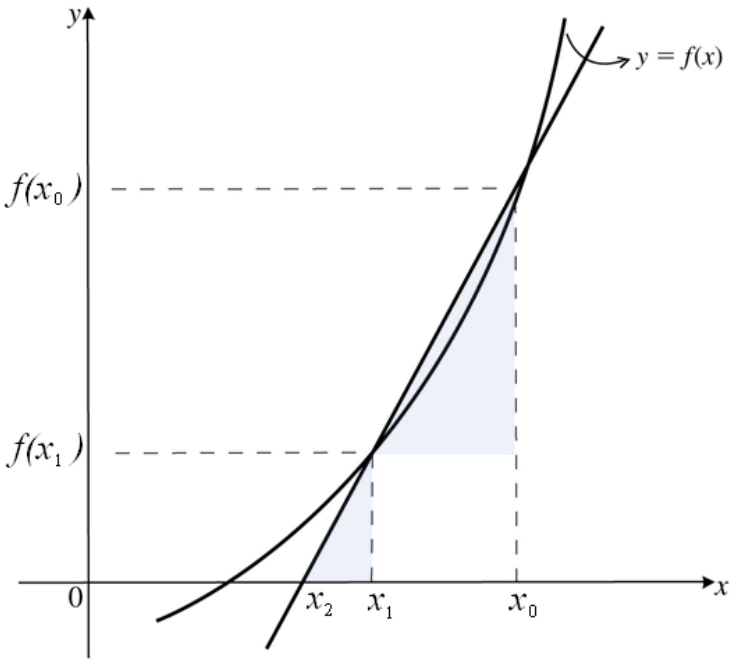
- ***Notas adicionais a respeito do método de Newton:***

  - Requer cálculos mais elaborados – derivadas de funções;

  - Escolha criteriosa da aproximação inicial (chute inicial);

  - Em geral, pode ser considerado um método de convergências rápida.

ABERTO: SECANTE



- A grande desvantagem do Método de Newton é a necessidade de se obter f'(x).

- Para contornar o problema, no Método das Secantes faz-se uma aproximação da derivada da função.

Por semelhança de triângulos:

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{f(x_1)}=\frac{x_0-x_1}{x_1-x_2}$$

$$x_2=\frac{x_0 f(x_1)-x_1 f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)} \longrightarrow \boxed{x_{k+2}=\frac{x_k f(x_{k+1})-x_{k+1} f(x_k)}{f(x_{k+1})-f(x_k)}}$$

ABERTO: SECANTE

Exemplo: encontrar o zero da função abaixo, no intervalo [0,1]. Adote $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

- ***Passo 0: chute inicial:***

$$\text{Chute Inicial}: x_0 = 0 \text{ e } x_1 = 1$$

Iteração 1:

- ***Passo 1***: Cálculo x_2 $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$ e comparação com a tolerância

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{0\,f(1) - 1\,f(0)}{f(1) - f(0)} = \frac{-3}{-5-3} = 0.375$$

$$f(x_2) = -0.322 \therefore |f(x_2)| > 0.01$$

ABERTO: SECANTE

Exemplo: encontrar o zero da função abaixo, no intervalo [0,1]. Adote $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Iteração 2:

- ***Passo 1***: Cálculo x_3 $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ e comparação com a tolerância

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{1 \cdot f(0.375) - 0.375 \cdot f(1)}{f(0.375) - f(1)} = \frac{-0.322 + 1.875}{-0.322 + 5} = 0.332$$

$$f(x_3) = 0.048 \therefore \left| f(x_3) \right| > 0.01$$

ABERTO: SECANTE

Exemplo: encontrar o zero da função abaixo, no intervalo [0,1]. Adote $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Iteração 3:

- ***Passo 1***: Cálculo x_4, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$ e comparação com a tolerância

$$x_4 = \frac{x_2 f(x_3) - x_3 f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = \frac{0.375 \cdot f(0.332) - 0.332 \cdot f(0.375)}{f(0.332) - f(0.375)} = 0.337$$

$$f(x_4) = 0.005 \therefore |f(x_4)| < 0.01$$

$$\boxed{\text{Solução Aproximada } \bar{x} = 0.337}$$

USO DE FUNÇÕES RESIDENTES DO MATLAB PARA RESOLVER EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

O COMANDO FZERO

```
x = fzero('function',x0)
```

Solução

Função a ser resolvida

Valor de *x* próximo ao ponto onde a função cruza o eixo

```
fzero('x^3-9*x+3',0);
fzero('x^3-9*x+3',5);
```

O COMANDO ROOTS (Polinômios)

```
r = roots(p)
```

r é um vetor coluna contendo as raízes do polinômio

p é um vetor linha com os coeficientes do polinômio

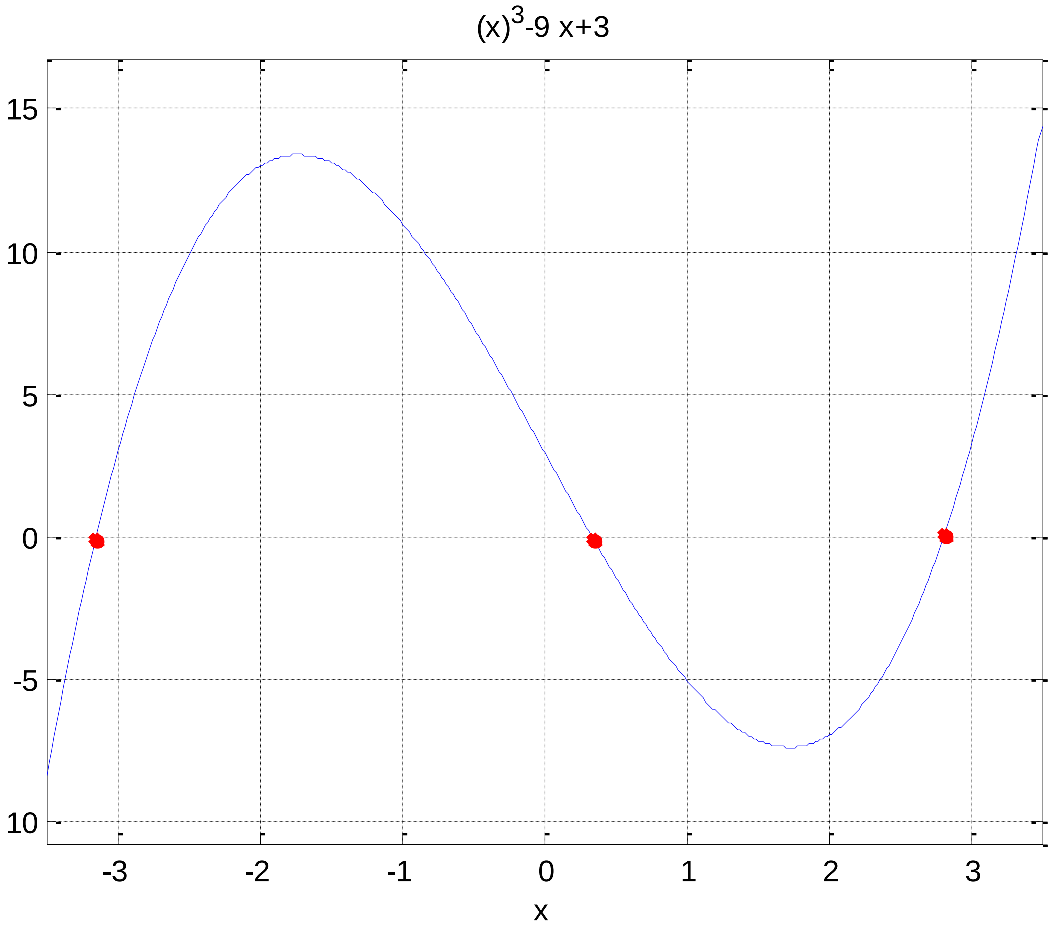
$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

```
P = [1 0 -9 3]; % vetor que define o polinômio

x = roots(P) % vetor das raízes do polinômio
```

EQUAÇÕES COM MÚLTIPLAS SOLUÇÕES

EQUAÇÕES COM MÚLTIPLAS SOLUÇÕES



- Mesmos procedimentos para cada intervalo [a, b]; [c, d]; [e, f].

...CONTINUA

ALGORITMOS

➢ BISSEÇÃO

ε - tolerância
max – número máximo de iterações

$$
\begin{aligned}
&\textit{Início}\\
&\quad i = 0\\
&\quad \textit{repita}\\
&\qquad c = \frac{a+b}{2}\\
&\qquad \textit{Se } f(a)f(c) < 0 \textit{ então}\\
&\qquad\quad b = c\\
&\qquad \textit{senão}\\
&\qquad\quad a = c\\
&\qquad \mathrm{i} = \mathrm{i} + 1\\
&\quad \textit{até que } \; |f(c)| < \varepsilon \;\; \textit{ou} \;\; |b-a| < \varepsilon \;\; \textit{ou} \;\; i > \max\\
&\textit{Fim}
\end{aligned}
$$

ALGORITMOS

➢ CORDAS

ε - tolerância
max – número máximo de iterações

Início

$i = 0$

repita

$$c = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

$Se\ f(a)f(c) < 0\ então$

$b = c$

senão

$a = c$

$i = i + 1$

$até\ que\ \ |f(c)| < \varepsilon\ \ ou\ \ |b - a| < \varepsilon\ \ ou\ \ i > \max$

Fim

ALGORITMOS

➢ NEWTON

ε - tolerância
max – número máximo de iterações

Início

$k = 0$

repita

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

se $|f(x_{k+1})| < \varepsilon$ *ou* $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ então

Fim

senão

$x_0 = x_{k+1}$

$k = k + 1$

até que $k > \max$

Fim

ALGORITMOS

SECANTE

1) Dados iniciais:

   a) x_0 e x_1: aproximações iniciais;

   b) ε_1 e ε_2: precisões.

2) Se $|f(x_0)| < \varepsilon_1$, faça $\bar{x} = x_0$. FIM.

3) $\left.\begin{array}{l} \text{Se } |f(x_1)| < \varepsilon_1 \\ \text{ou se } |x_1 - x_0| < \varepsilon_2 \end{array}\right]$ faça $\bar{x} = x_1$. FIM.

4) $k = 1$

5) $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$

6) $\left.\begin{array}{l} \text{Se } |f(x_2)| < \varepsilon_1 \\ \text{ou se } |x_2 - x_1| < \varepsilon_2 \end{array}\right]$ então faça $\bar{x} = x_2$. FIM.

7) $x_0 = x_1$
   $x_1 = x_2$

8) $k = k + 1$
   Volte ao passo 5.