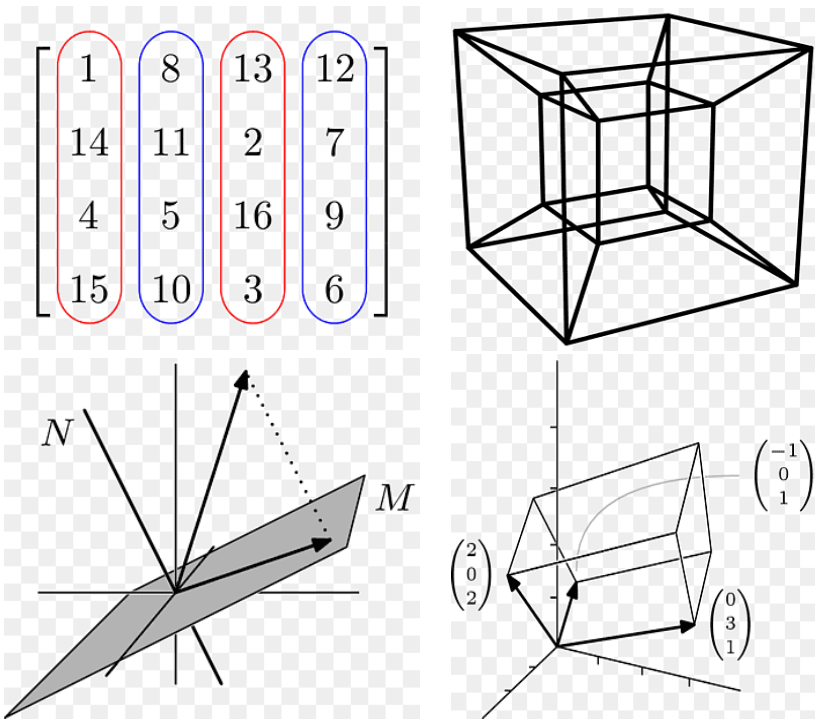
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS DE ENGENHARIAS E CIÊNCIAS AGRÁRIAS



https://www.pngwing.com/pt/free-png-xxiky

Introdução à Álgebra Linear

e suas aplicações

Prof. Dr. Alverlando Silva Ricardo

Parte 3: Formas Quadráticas e Transformações Lineares

Revisão de conceitos*

MATRIZES ORTOGONAIS

Matriz Ortogonal

- Matrizes Ortogonais: *é a classe das matrizes cujas inversas podem ser obtidas por transposição.*

DEFINIÇÃO 1 Dizemos que uma matriz quadrada A é ***ortogonal*** se sua transposta for sua inversa, ou seja, se

$$A^{-1} = A^T$$

ou, equivalentemente, se

$$AA^T = A^TA = I \tag{1}$$

Matriz Ortogonal

▶ EXEMPLO 1 Uma matriz ortogonal 3 × 3

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

é ortogonal, pois

$$A^TA = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Ortogonal

- Exemplo 2: *Dada a matriz canônica da rotação anti-horária de R^2 por um ângulo:*

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Essa matriz é ortogonal, qualquer que seja a escolha de θ, pois

$$A^T A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Ortogonal

- Quando falamos que uma matriz é ortogonal, significa que suas **linhas e colunas** têm duas características importantes:

1. São **ortogonais**: ou seja, formam ângulos retos (90°) entre si.
2. São **ortonormais**: além de serem ortogonais, cada linha e cada coluna também têm comprimento exatamente igual a **1**.

Matriz Ortogonal

➢ Exemplo:

Veja esta matriz simples A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✔ Checando ortonormalidade:

- **Linhas:**
  - Linha 1: $(1, 0)$ tem comprimento $\sqrt{1^2 + 0^2} = 1$
  - Linha 2: $(0, 1)$ tem comprimento $\sqrt{0^2 + 1^2} = 1$
  - Produto interno entre linhas: $(1, 0) \cdot (0, 1) = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0 \rightarrow$ são ortogonais.

Matriz Ortogonal

- Exemplo:

- **Colunas:**
  - Coluna 1: $(1, 0)$, comprimento = 1
  - Coluna 2: $(0, 1)$, comprimento = 1
  - Produto interno entre colunas: $(1, 0) \cdot (0, 1) = 0$, ortogonais.

Portanto, a matriz A é **ortogonal** porque as linhas e colunas são ortonormais (**ortogonais + comprimento 1**).

Matriz Ortogonal

- Propriedades fundamentais de matrizes ortogonais:

TEOREMA 7.1.2

(*a*) *A inversa de uma matriz ortogonal é ortogonal.*

(*b*) *Um produto de matrizes ortogonais é ortogonal.*

(*c*) *Se A for ortogonal, então* $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$.

▶ **EXEMPLO 3** **$\det(A) = \pm 1$ se A for uma matriz ortogonal**

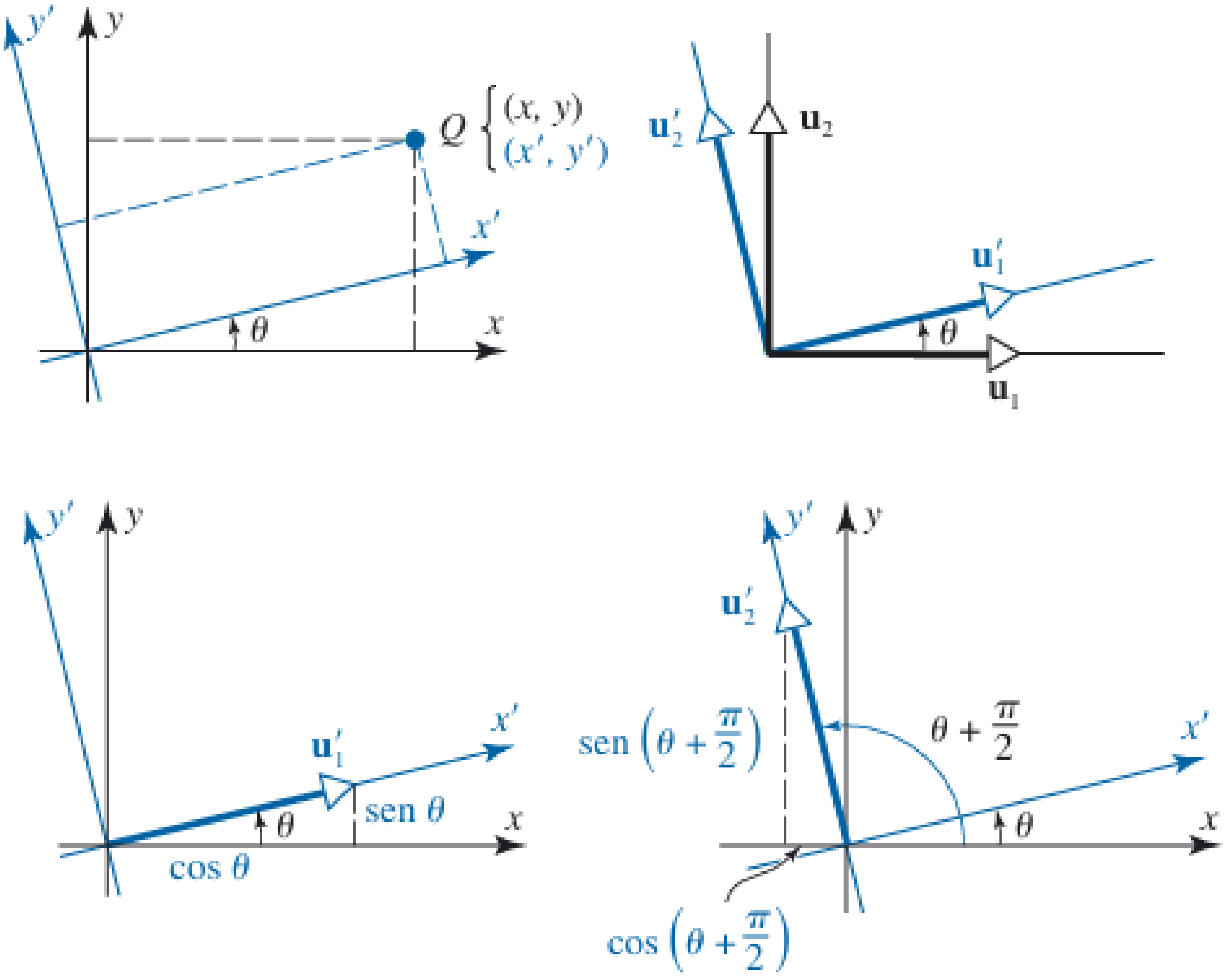
A matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

é ortogonal, pois seus vetores linha e coluna formam conjuntos ortonormais de R^2, em relação ao produto interno euclidiano. Deixamos para o leitor verificar que $\det(A) = 1$, e que uma troca de linhas produz uma matriz ortogonal com $\det(A) = -1$. ◀

Matriz Ortogonal

- Equações de rotação de R^2:



Matriz Ortogonal

- Equações de rotação de R^2:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= \quad x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ y' &= -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

Matriz Ortogonal

- Equações de rotação de R^3:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Diagonalização Ortogonal

Diagonalização Ortogonal

- Uma matriz A, simétrica, é Ortogonalmente Diagonalizável.

Diagonalização Ortogonal

- Se a matriz for simétrica, teremos:

$$[D] = [P^t][A][P]$$

sendo [P] a matriz cujas colunas são os autovetores ortonormais (processo de Gram-Schmidt) da matriz [A].

Diagonalização Ortogonal

- Se a matriz for simétrica, teremos:

$$[D] = [P^t][A][P]$$

o método de *Gram-Schmidt* é usado apenas para "corrigir" os autovetores originais, produzindo novos *vetores com comprimento 1 e perpendiculares entre si*.

Diagonalização Ortogonal

➢ Método de Gram-Schmidt :

Imagine que você tem dois vetores (em 2D para simplificar):

- $u = (1, 1)$
- $v = (1, 0)$

Você quer criar dois novos vetores que sejam **perpendiculares**.

Passo 1: Escolha o primeiro vetor e chame de u_1:

$$u_1 = u = (1, 1)$$

Passo 2: Crie o segundo vetor u_2, retirando dele a projeção sobre o primeiro vetor. A fórmula é assim:

$$u_2 = v - \text{projeção de } v \text{ em } u_1$$

A projeção é calculada por:

$$\text{proj}_{u_1}(v) = \frac{v \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1$$

Diagonalização Ortogonal

➢ Método de Gram-Schmidt :

- $v \cdot u_1 = (1,0) \cdot (1,1) = 1$
- $u_1 \cdot u_1 = (1,1) \cdot (1,1) = 1 + 1 = 2$

Então:

$$\text{proj}_{u_1}(v) = \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Agora, calcule u_2:

$$u_2 = v - \text{proj}_{u_1}(v) = (1,0) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Agora você tem dois vetores perpendiculares:

- $u_1 = (1,1)$
- $u_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

Diagonalização Ortogonal

➢ Método de Gram-Schmidt: Observação sobre Autovetores e Autovalores

👉 **Teorema Espectral:**

> "Se A é uma matriz real simétrica, então seus autovetores correspondentes a autovalores diferentes são automaticamente ortogonais."

📌 **Quando precisaríamos do Gram-Schmidt?**

Precisaríamos aplicar o método de Gram-Schmidt apenas se tivéssemos **mais de um autovetor associado ao mesmo autovalor**, e eles ainda não fossem ortogonais entre si.

Diagonalização Ortogonal

Exemplo: Encontre uma matriz ortogonal P que diagonaliza:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Diagonalização Ortogonal

Exemplo: Encontre uma matriz ortogonal P que diagonaliza:

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 8) = 0$$

Assim, os autovalores distintos de A são $\lambda = 2$ e $\lambda = 8$. Pelo método usado no Exemplo 7 da Seção 5.1, pode ser mostrado que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

formam uma base do autoespaço associado a $\lambda = 2$. Aplicando o processo de Gram--Schmidt a $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, obtemos os autovetores ortonormais seguintes.

Diagonalização Ortogonal

Temos dois vetores originais:

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nosso objetivo é obter dois vetores **ortonormais** a partir deles.

Diagonalização Ortogonal

📌 Passo 1: Escolha o primeiro vetor

Pegamos o vetor u_1 sem alteração por enquanto:

$$v_1 = u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

📌 Passo 2: Calcule o segundo vetor retirando dele a projeção no primeiro vetor

O segundo vetor v_2 será dado por:

$$v_2 = u_2 - \mathrm{proj}_{v_1}(u_2)$$

O que é projeção?

É o quanto o vetor u_2 está na direção do vetor v_1. A fórmula é:

$$\mathrm{proj}_{v_1}(u_2) = \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1$$

Diagonalização Ortogonal

Vamos calcular essa projeção:

1. Produto escalar $u_2 \cdot v_1$:

$$u_2 \cdot v_1 = (-1)(-1) + (0)(1) + (1)(0) = 1$$

2. Produto escalar $v_1 \cdot v_1$:

$$v_1 \cdot v_1 = (-1)^2 + (1)^2 + (0)^2 = 2$$

3. Agora, calculamos a projeção:

$$\text{proj}_{v_1}(u_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com isso, calculamos agora o vetor ortogonal v_2:

$$v_2 = u_2 - \text{proj}_{v_1}(u_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalização Ortogonal

📌 Passo 3: Ortonormalizar os vetores (tornar comprimento = 1)

Agora, vamos normalizar (dividir cada vetor pelo seu comprimento):

- Para o vetor $v_1 = [-1, 1, 0]$:

$$\|v_1\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Então o primeiro vetor ortonormal é:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diagonalização Ortogonal

- Para o vetor $v_2 = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1]$:

$$\|v_2\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Então o segundo vetor ortonormal é:

$$e_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Diagonalização Ortogonal

👉 Teorema Espectral:

> "Se A é uma matriz real simétrica, então seus autovetores correspondentes a autovalores diferentes são automaticamente ortogonais."

📌 Quando precisaríamos do Gram-Schmidt?

Precisaríamos aplicar o método de Gram-Schmidt apenas se tivéssemos **mais de um autovetor associado ao mesmo autovalor**, e eles ainda não fossem ortogonais entre si.

O autoespaço associado a $\lambda = 8$ tem

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

como base. Aplicando o processo de Gram-Schmidt a $\{\mathbf{u}_3\}$ (ou seja, normalizando $\mathbf{u}_3$), obtemos

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Diagonalização Ortogonal

Finalmente, usando $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ como vetores coluna, obtemos

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

que diagonaliza A ortogonalmente. Deixamos para o leitor confirmar que

$$P^TAP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

Decomposição Espectral

Decomposição Espectral

- Se A for uma matriz simétrica ortogonalmente diagonalizada por:

$$P = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_n]$$

- e se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ forem os autovalores de A associados aos vetores unitários $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$A = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T$$

que é denominada uma ***decomposição espectral de A***.‡

Decomposição Espectral

- Exemplo:

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

tem autovalores $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$ com autovetores associados

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(verifique). Normalizando esses vetores de base, obtemos

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Decomposição Espectral

- Exemplo:

de modo que uma decomposição espectral de A é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T = (-3) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$= (-3) \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \qquad (8)$$

O caso não diagonalizável: Teorema de Shur e Teorema de Hessenberg

Teoremas de Schur e Hessenberg

- Se A for uma matriz que não é diagonalizável ortogonalmente, ainda pode ser possível alcançar uma simplificação considerável na forma de P^TAP pela escolha apropriada da matriz ortogonal P.

TEOREMA 7.2.3 **Teorema de Shur**

Se A for uma matriz $n \times n$ com entradas reais e autovalores reais, então existe uma matriz ortogonal P tal que P^TAP é uma matriz triangular superior da forma

$$P^TAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \times & \cdots & \times \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

na qual $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores da matriz A repetidos de acordo com a multiplicidade.

É comum denotar a matriz triangular superior em (11) por S (de Schur), caso em que aquela equação pode ser reescrita como

$$A = PSP^T \tag{12}$$

que é, então, denominada uma ***decomposição de Schur*** de A.

Teoremas de Schur e Hessenberg

- Se A for uma matriz que não é diagonalizável ortogonalmente, ainda pode ser possível alcançar uma simplificação considerável na forma de P^TAP pela escolha apropriada da matriz ortogonal P.

TEOREMA 7.2.4 Teorema de Hessenberg

Se A for uma matriz $n \times n$ com entradas reais, *então existe uma matriz ortogonal P tal que P^TAP é da forma*

$$P^TAP = \begin{bmatrix} \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ \times & \times & \cdots & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \ddots & \times & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \tag{13}$$

É comum denotar a forma de Hessenberg superior em (13) por H (de Hessenberg), caso em que aquela equação pode ser reescrita como

$$A = PHP^T \tag{14}$$

que é, então, denominada uma ***decomposição de Hessenberg superior*** de A.

Teoremas de Schur e Hessenberg

Teorema	Para que serve (resumo simples)?	Matriz resultante
Schur	Simplificar matrizes complexas e encontrar autovalores facilmente (teoria e prática).	Triangular superior
Hessenberg	Simplificar cálculos numéricos e algoritmos rápidos para autovalores.	Quase triangular superior

Teorema	Procedimento passo-a-passo simples	Resultado prático
Schur	Autovalores → Autovetores → Matriz unitária → Triangular superior	Autovalores explícitos na diagonal
Hessenberg	Transformação ortogonal (Householder) → Zerar elementos abaixo da primeira subdiagonal	Matriz simplificada numericamente (Forma Hessenberg)

FORMAS QUADRÁTICAS

FORMAS QUADRÁTICAS

- Expressões da forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

ocorreram no nosso estudo de equações e ***sistemas lineares***. Se a_1, a_2, ..., a_n forem tratados como constantes fixadas, então essa expressão é uma função real das *n* variáveis x_1, x_2, ..., x_n, denominada forma linear de R^n.

FORMAS QUADRÁTICAS

- Agora, estudaremos ***funções reais de várias variáveis*** nas quais *cada termo é o quadrado de alguma variável ou o produto de duas variáveis*.

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2 + (\text{todos os termos } a_k x_i x_j \text{ possíveis nos quais } x_i \neq x_j)$$

- Essas funções surgem em uma variedade de aplicações, que incluem as vibrações de sistemas mecânicos, bem como a Geometria, a Estatística e a Engenharia Elétrica.

FORMAS QUADRÁTICAS

- Agora, estudaremos ***funções reais de várias variáveis*** nas quais *cada termo é o quadrado de alguma variável ou o produto de duas variáveis*.

- Uma forma quadrática arbitrária de R^2 pode ser escrita como:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2a_3 x_1 x_2$$

- Uma forma quadrática arbitrária de R^3 pode ser escrita como:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2a_4 x_1 x_2 + 2a_5 x_1 x_3 + 2a_6 x_2 x_3$$

FORMAS QUADRÁTICAS

- No formato matricial:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2a_3 x_1 x_2$$

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2a_4 x_1 x_2 + 2a_5 x_1 x_3 + 2a_6 x_2 x_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

FORMAS QUADRÁTICAS

- A matriz ***A*** será simétrica;

- A ***diagonal principal*** é formada pelos os coeficientes dos termos que estão ***elevado ao quadrado***, e suas entradas ***fora da diagonal*** são a *metade dos coeficientes dos termos com produto misto*:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

FORMAS QUADRÁTICAS

- Em geral, se ***A*** for uma matriz $n \times n$ simétrica e x for o vetor coluna $n \times 1$ das variáveis, então dizemos que a função:

$$Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

é a forma quadrática associada a ***A***. Quando for conveniente, podemos escrever na notação de produto como:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$

FORMAS QUADRÁTICAS

- No caso em que ***A*** for uma matriz diagonal, a forma quadrática x^TAx não tem termos com produto misto; por exemplo:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

FORMAS QUADRÁTICAS

- Exemplo 1: Expressando formas quadráticas em notação matricial

Em cada parte, expresse a forma quadrática em notação matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, sendo A simétrica.

(a) $2x^2 + 6xy - 5y^2$ (b) $x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_2$

FORMAS QUADRÁTICAS

- ➢ Exemplo 1: Expressando formas quadráticas em notação matricial

Em cada parte, expresse a forma quadrática em notação matricial $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, sendo A simétrica.

(a) $2x^2 + 6xy - 5y^2$ (b) $x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_2$

Solução As entradas diagonais de A são os coeficientes dos termos com quadrado, e as entradas fora da diagonal são a metade dos coeficientes dos termos com produto misto, portanto,

$$2x^2 + 6xy - 5y^2 = [x \quad y]\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3 = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

FORMAS QUADRÁTICAS

- Existem três tipos de problemas importantes que ocorrem nas aplicações de formas quadráticas.

Problema 1. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^2 ou R^3, que tipo de curva ou superfície é representada pela equação $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = k$?

FORMAS QUADRÁTICAS

- Existem três tipos de problemas importantes que ocorrem nas aplicações de formas quadráticas.

Problema 1. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^2 ou R^3, que tipo de curva ou superfície é representada pela equação $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = k$?

Problema 2. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^n, que condições deve satisfazer A para garantir que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ tenha valores positivos com $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$?

FORMAS QUADRÁTICAS

- Existem três tipos de problemas importantes que ocorrem nas aplicações de formas quadráticas.

Problema 1. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^2 ou R^3, que tipo de curva ou superfície é representada pela equação $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = k$?

Problema 2. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^n, que condições deve satisfazer A para garantir que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ tenha valores positivos com $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$?

Problema 3. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^n, quais são seus valores máximo e mínimo se $\mathbf{x}$ for condicionado a satisfazer $\|\mathbf{x}\| = 1$?

FORMAS QUADRÁTICAS

- Existem três tipos de problemas importantes que ocorrem nas aplicações de formas quadráticas.

Observação: ***Este problema não será aprofundado neste curso, pois envolve técnicas de otimização com restrições, geralmente abordadas em disciplinas específicas de Otimização.***

Problema 3. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^n, quais são seus valores máximo e mínimo se $\mathbf{x}$ for condicionado a satisfazer $\|\mathbf{x}\| = 1$?

FORMAS QUADRÁTICAS

- Muitas das técnicas para resolver esses problemas têm por base a simplificação da forma quadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\mathbf{x}$ obtida com uma substituição.

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}$$

que expressa as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em termos das variáveis novas $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Se P for invertível, então (5) é denominada uma ***mudança de variáveis***, e se P for ortogonal, dizemos que (5) é uma ***mudança de variáveis ortogonal***.

Fazendo a mudança de coordenadas $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ na forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, obtemos

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (P\,\mathbf{y})^T A(P\,\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P^T A P\mathbf{y} = \mathbf{y}^T(P^T A P)\mathbf{y} \tag{6}$$

$\boldsymbol{B = P^T AP}$ ***(simétrico)***

FORMAS QUADRÁTICAS

- Como a matriz $B = P^TAP$ é simétrica, a mudança de variáveis produz uma nova forma quadrática y^TBy nas variáveis $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

- Se escolhermos P para diagonalizar A ortogonalmente, então a nova forma quadrática será y^TDy, onde D é uma matriz diagonal com os ***autovalores de A na diagonal principal!***

FORMAS QUADRÁTICAS

- Se escolhermos P para diagonalizar A ortogonalmente, então a nova forma quadrática será $y^T Dy$, onde D é uma matriz diagonal com os ***autovalores de A na diagonal principal!***

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Assim, temos o resultado seguinte, denominado ***teorema dos eixos principais***.

FORMAS QUADRÁTICAS

- Teorema dos eixos principais

TEOREMA 7.3.1 Teorema dos eixos principais

Se A for uma matriz simétrica $n \times n$, então existe uma mudança de variáveis ortogonal que transforma a forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ na forma quadrática $\mathbf{y}^T D\mathbf{y}$ sem termos mistos. Especificamente, se P diagonaliza A ortogonalmente, então a mudança de variáveis $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ transforma a forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ na forma quadrática

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

na qual $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de A associados aos autovetores que constituem as colunas sucessivas de P.

A mudança de variáveis não altera a imagem de uma forma!

FORMAS QUADRÁTICAS

- Exemplo 2:

Encontre uma mudança de variáveis ortogonal que elimine os termos mistos da forma quadrática $Q = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ e expresse Q em termos das novas variáveis.

FORMAS QUADRÁTICAS

➢ Exemplo 2:

Encontre uma mudança de variáveis ortogonal que elimine os termos mistos da forma quadrática $Q = x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ e expresse Q em termos das novas variáveis.

Solução A forma quadrática pode ser expressa em notação matricial por

$$Q = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

FORMAS QUADRÁTICAS

- Exemplo 2:

Solução A forma quadrática pode ser expressa em notação matricial por

$$Q = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0$$

de modo que os autovalores são $\lambda = 0, -3, 3$. Deixamos para o leitor mostrar que bases ortonormais dos três autoespaços são

$$\lambda = 0: \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \lambda = -3: \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \lambda = 3: \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

FORMAS QUADRÁTICAS

- Exemplo 2:

Assim, a substituição $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ que elimina os termos mistos é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Isso produz a nova forma quadrática

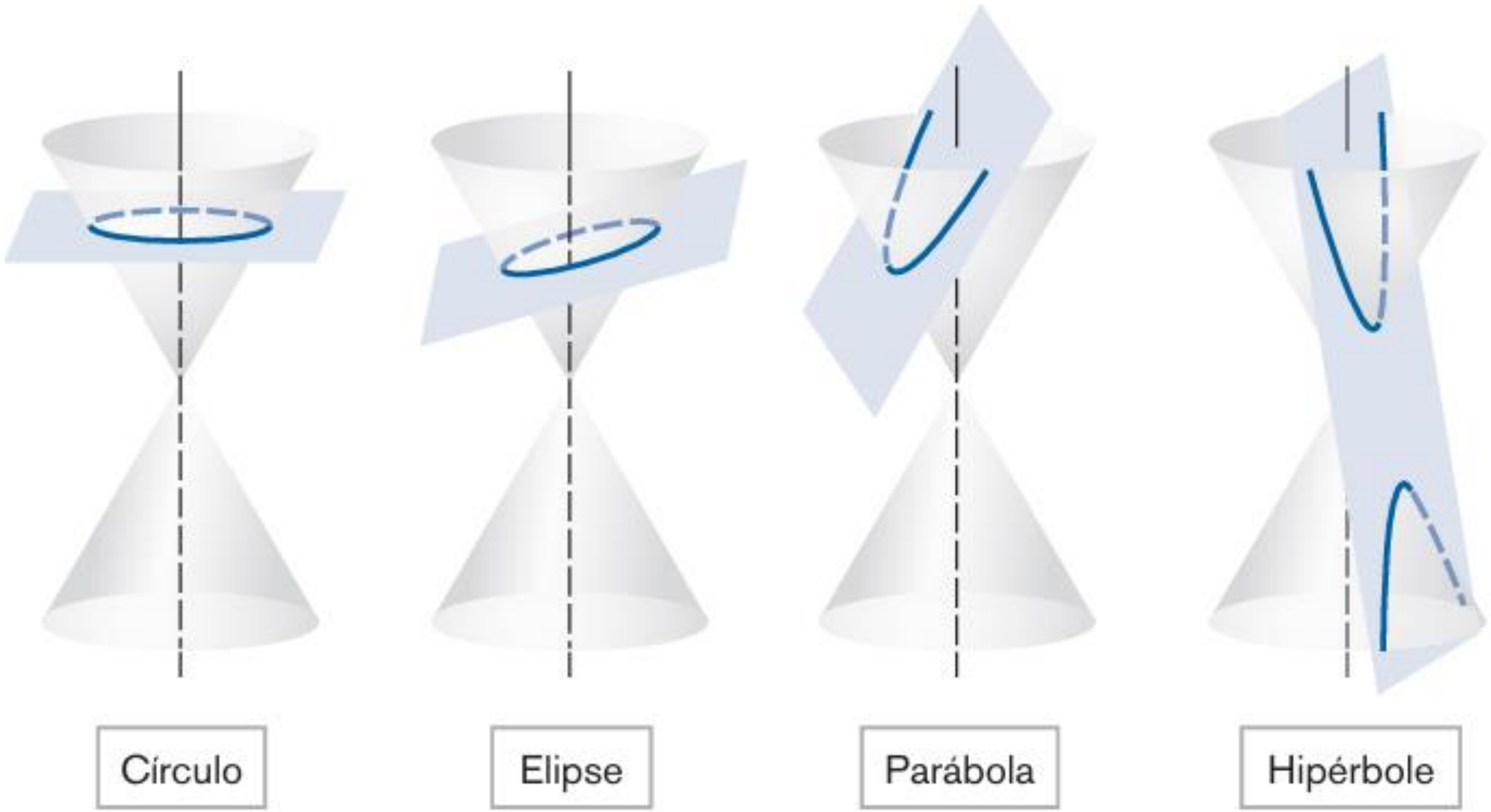
$$Q = \mathbf{y}^T(P^TAP)\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = -3y_2^2 + 3y_3^2$$

na qual não há termos mistos. ◄

Formas quadráticas na Geometria

Formas quadráticas na Geometria

- Uma cônica, é uma curva obtida cortando-se um cone circular reto por um plano.



Formas quadráticas na Geometria

- As formas quadráticas em R^2 surgem naturalmente no estudo de seções cônicas. Por exemplo, mostra-se em Geometria Analítica que uma equação da forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{7}$$

com a, b e c não todos nulos, representa uma seção cônica.‡ Se $d = e = 0$ em (7), então não existem termos lineares, e a equação se reduz a

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0 \tag{8}$$

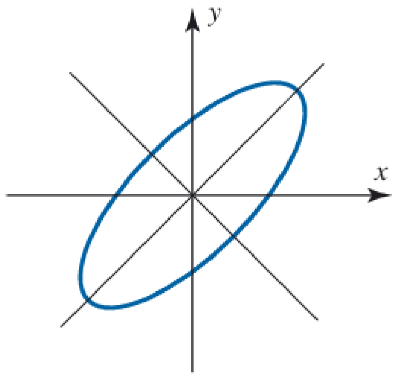
cônica central ou reduzida

Formas quadráticas na Geometria

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (7)$$

com a, b e c não todos nulos, representa uma seção cônica.[‡] Se $d = e = 0$ em (7), então não existem termos lineares, e a equação se reduz a

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0 \qquad (8)$$



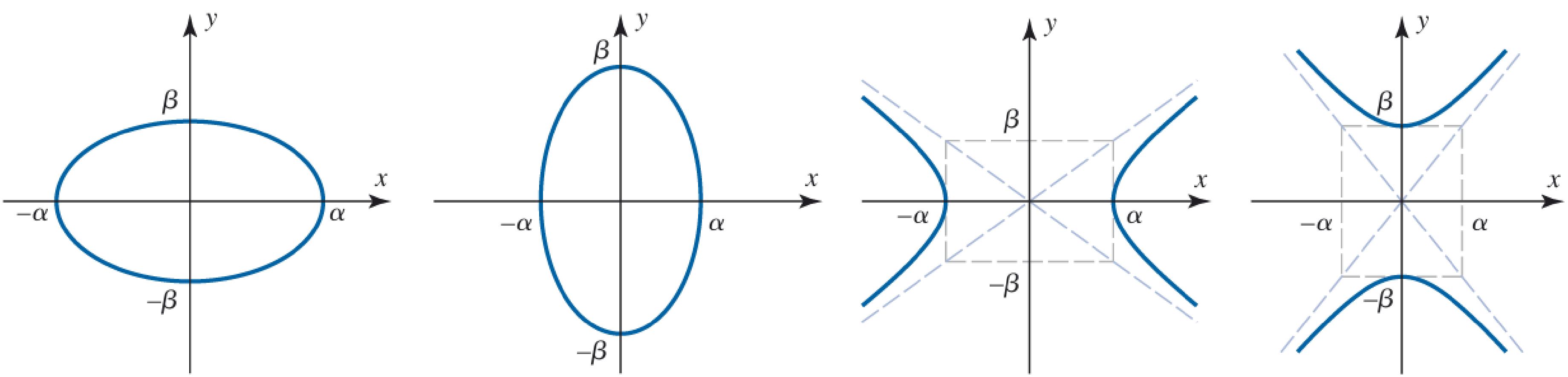
Uma cônica central girada para fora da posição canônica.

A existência de um termo misto (2bxy) indica que o gráfico da forma quadrática foi girado em torno da origem, como na Figura

Formas quadráticas na Geometria

- As cônica central ou reduzida: incluem os círculos, as elipses e as hipérboles, mas não as parábolas. Além disso, se b = 0 em (8), não há termos mistos, e dizemos que a equação 9 representa uma cônica central em posição canônica.

$$ax^2 + cy^2 + f = 0 \tag{9}$$



$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (\alpha \geq \beta > 0)$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (\beta \geq \alpha > 0)$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

Formas quadráticas na Geometria

- Passando a constante *f* nas Equações (8) e (9) para o lado direito e tomando k = -*f* podemos reescrever essas equações em formato matricial como

$$ax^2 + cy^2 + f = 0 \qquad (9)$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \qquad (10)$$

Formas quadráticas na Geometria

- Passando a constante *f* nas Equações (8) e (9) para o lado direito e tomando k = -*f* podemos reescrever essas equações em formato matricial como

$$ax^2 + cy^2 + f = 0 \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \tag{10}$$

- Os análogos tridimensionais das equações em (10) são:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k \tag{11}$$

Se a, b e c não forem todos nulos, então os gráficos dessas equações em R^3 são denominados ***quádricas centrais***, ou ***reduzidas***, e, mais especificamente, o gráfico da segunda equação é denominado ***quádrica central em posição canônica***.

Formas quadráticas na Geometria

- Agora estamos prontos para considerar o primeiro dos três problemas apresentados anteriormente:

Problema 1. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^2 ou R^3, que tipo de curva ou superfície é representada pela equação $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = k$?

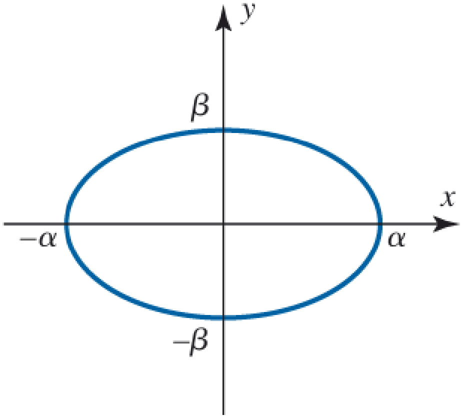
Problema 2. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^n, que condições deve satisfazer A para garantir que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ tenha valores positivos com $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$?

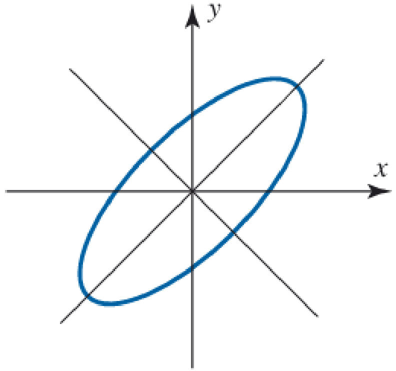
Problema 3. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^n, quais são seus valores máximo e mínimo se $\mathbf{x}$ for condicionado a satisfazer $\|\mathbf{x}\| = 1$?

Formas quadráticas na Geometria

- Se b = 0, então a cônica está em posição canônica e se b ≠ 0, ela está girada.

$$ax^2 + cy^2 + f = 0$$



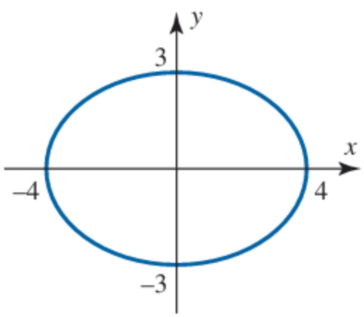


Uma cônica central girada para fora da posição canônica.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0$$

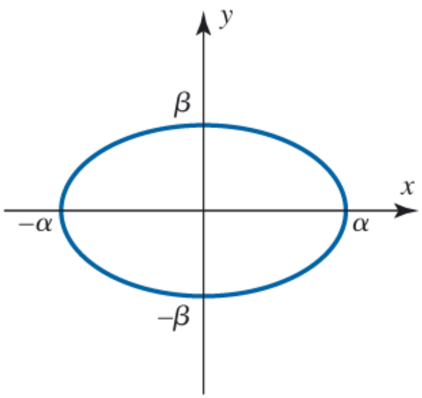
Formas quadráticas na Geometria

- É fácil identificar as cônicas centrais em posição canônica (*b = 0*) comparando sua equação com uma das equações em forma canônica. Por exemplo, a equação:



$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$$



$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$
$$(\alpha \geq \beta > 0)$$

pode ser reescrita como

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

que, por comparação com a Tabela 1, é a elipse mostrada na Figura 7.3.3.

Formas quadráticas na Geometria

- Se uma cônica central for girada para fora de sua posição canônica ($b \neq 0$), podemos identificá-la primeiro girando os eixos coordenados para colocá-la na posição canônica e então comparando sua equação com uma das equações em forma canônica da Tabela 1. Para encontrar uma rotação que elimine o termo misto da equação:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = k \tag{13}$$

Formas quadráticas na Geometria

- Se uma cônica central for girada para fora de sua posição canônica ($b \neq 0$), podemos identificá-la primeiro girando os eixos coordenados para colocá-la na posição canônica e então comparando sua equação com uma das equações em forma canônica da Tabela 1. Para encontrar uma rotação que elimine o termo misto da equação:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = k \tag{13}$$

é conveniente expressar a equação em forma matricial como

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x \quad y]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \tag{14}$$

e procurar uma mudança de variáveis

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

que diagonalize A e tal que $\det(P) = 1$. Como no Exemplo 4 da Seção 7.1 vimos que a matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{15}$$

Formas quadráticas na Geometria

- Nosso problema se reduz a encontrar θ que diagonalize A:

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{15}$$

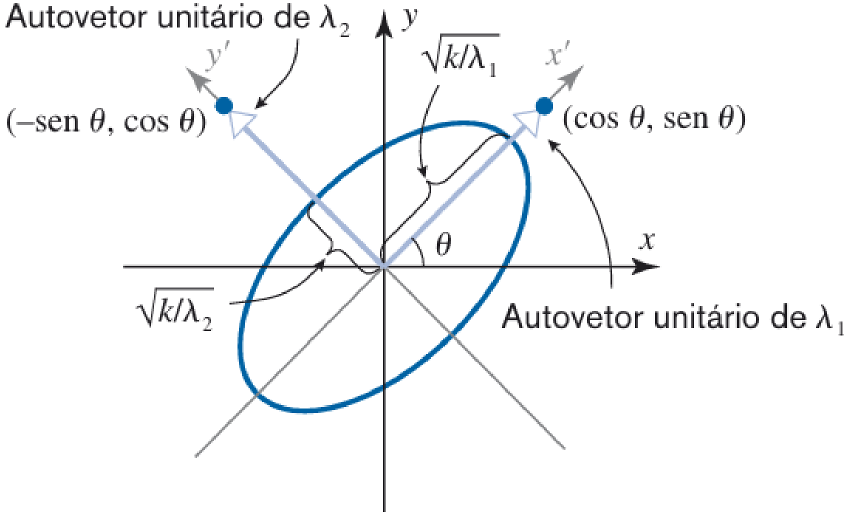
Formas quadráticas na Geometria

- Fazendo essa mudança de variáveis e efetuando a álgebra necessária para igualá-la a uma das formas canônicas da Tabela 1:

$$\mathbf{x}'^T D\mathbf{x}' = [x' \quad y'] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = k$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de A. A cônica pode agora ser identificada escrevendo (16) na forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = k$$



Formas quadráticas na Geometria

- Exemplo 4: Identificando uma cônica por eliminação do termo misto

(a) Identifique a cônica de equação $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ girando os eixos xy até colocar a cônica em posição canônica.

(b) Encontre o ângulo θ pelo qual foram girados os eixos xy na parte (a).

Formas quadráticas na Geometria

- Exemplo 4: Identificando uma cônica por eliminação do termo misto

Solução (a) A equação dada pode ser escrita no formato matricial como

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 36$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A é

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

portanto, os autovalores são $\lambda = 4$ e $\lambda = 9$. Deixamos para o leitor mostrar que bases ortonormais dos autoespaços são

$$\lambda = 4: \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad \lambda = 9: \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Formas quadráticas na Geometria

Assim, A é ortogonalmente diagonalizável por

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$[D] = [P^t][A][P]$$

Formas quadráticas na Geometria

Assim, A é ortogonalmente diagonalizável por

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Além disso, por acaso temos $\det(P) = 1$, de modo que sabemos que a substituição $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ executa uma rotação de eixos. Segue de (16) que a equação da cônica no sistema de coordenadas $x'y'$ é

$$[x' \quad y'] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 36$$

Se tivéssemos tido $\det(P) = -1$, então trocaríamos as colunas para inverter o sinal.

Formas quadráticas na Geometria

Assim, A é ortogonalmente diagonalizável por

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Além disso, por acaso temos $\det(P) = 1$, de modo que sabemos que a substituição $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ executa uma rotação de eixos. Segue de (16) que a equação da cônica no sistema de coordenadas $x'y'$ é

$$[x' \quad y'] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 36$$

que pode ser escrita como

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36 \quad \text{ou} \quad \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

Note que poderíamos usar as seguintes fórmulas:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = k$$

Formas quadráticas na Geometria

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = k$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A é

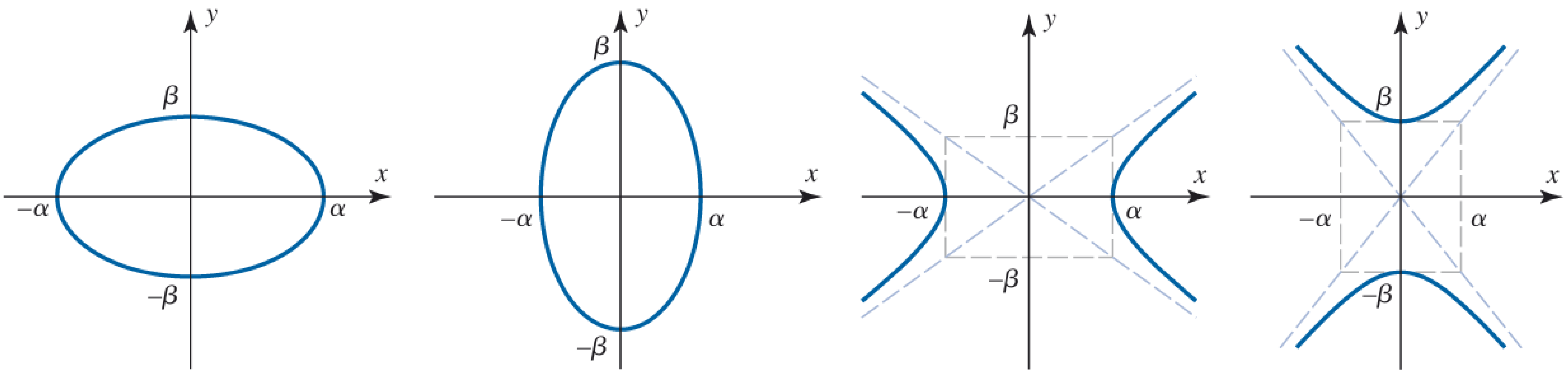
$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36 \quad \text{ou} \quad \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

Formas quadráticas na Geometria

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36 \quad \text{ou} \quad \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

Agora vemos da Tabela 1 que a cônica é uma elipse cujo eixo tem comprimento $2\alpha = 6$ na direção x' e comprimento $2\beta = 4$ na direção y'.



$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (\alpha \geq \beta > 0)$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (\beta \geq \alpha > 0)$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

Formas quadráticas na Geometria

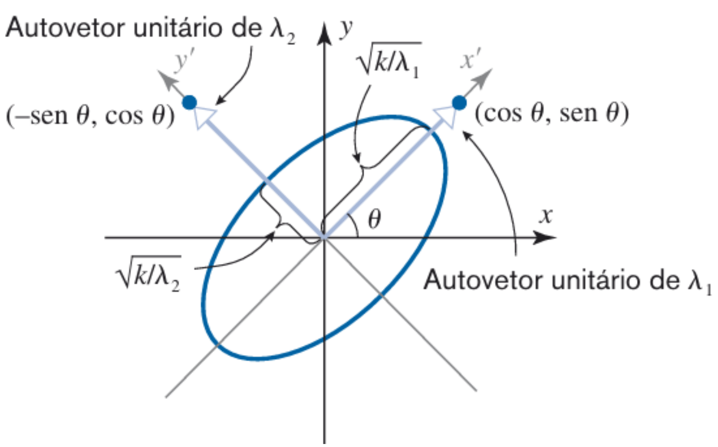
Solução (b) Segue de (15) que

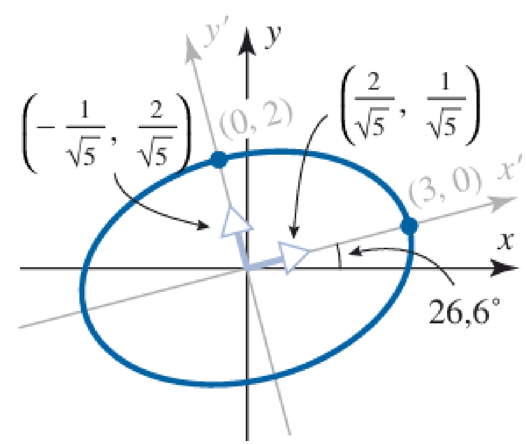
$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

o que implica

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2}$$

Assim, $\theta = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 26{,}6°$ (Figura 7.3.5). ◀





Formas quadráticas na Geometria

(a) Identifique a cônica de equação $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ girando os eixos xy até colocar a cônica em posição canônica.

(b) Encontre o ângulo θ pelo qual foram girados os eixos xy na parte (a).

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = k$$

Note que, se b ≠ 0 ***poderíamos usar as seguintes fórmulas:***

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = k$$

$$\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{a - c}{2b}$$

Formas quadráticas positivas

Formas quadráticas positivas

- Existem três tipos de problemas importantes que ocorrem nas aplicações de formas quadráticas.

Problema 1. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^2 ou R^3, que tipo de curva ou superfície é representada pela equação $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = k$?

Problema 2. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^n, que condições deve satisfazer A para garantir que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ tenha valores positivos com $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$?

Problema 3. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^n, quais são seus valores máximo e mínimo se $\mathbf{x}$ for condicionado a satisfazer $\|\mathbf{x}\| = 1$?

Formas quadráticas positivas

- Definições e Teoremas:

DEFINIÇÃO 1 Dizemos que uma forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é

positiva se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ com qualquer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

negativa se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$ com qualquer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

indefinida se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ tem valores tanto positivos quanto negativos

Formas quadráticas positivas

- Definições e Teoremas:

DEFINIÇÃO 1 Dizemos que uma forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é

positiva se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ com qualquer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

negativa se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$ com qualquer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

indefinida se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ tem valores tanto positivos quanto negativos

TEOREMA 7.3.2 *Seja A uma matriz simétrica. Valem as afirmações.*

(*a*) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ *é positiva se, e só se, todos os autovalores de A são positivos.*

(*b*) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ *é negativa se, e só se, todos os autovalores de A são negativos.*

(*c*) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ *é indefinida se, e só se, A tem pelo menos um autovalor positivo e pelo menos um autovalor negativo.*

Formas quadráticas positivas

- Definições e Teoremas:

TEOREMA 7.3.3 *Seja A uma matriz 2×2 simétrica. Valem as afirmações.*

(a) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$ *representa uma elipse se A for positiva.*

(b) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$ *não tem gráfico se A for negativa.*

(c) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$ *representa uma hipérbole se A for indefinida.*

Formas quadráticas positivas

➢ Definições e Teoremas:

No Exemplo 3, efetuamos uma rotação para mostrar que a equação

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$$

representa uma elipse com um eixo maior de comprimento 6 e eixo menor de comprimento 4. Essa conclusão também pode ser obtida reescrevendo a equação na forma

$$\frac{5}{36}x^2 - \frac{1}{9}xy + \frac{2}{9}y^2 = 1$$

e mostrando que a matriz associada

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{36} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

tem autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{9}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{4}$. Esses autovalores são positivos, de modo que a matriz A é positiva e a equação representa uma elipse. Além disso, segue de (21) que os eixos da elipse têm comprimentos $2/\sqrt{\lambda_1} = 6$ e $2/\sqrt{\lambda_2} = 4$, o que é consistente com o Exemplo 3.

Formas quadráticas positivas

- Identificando matrizes positivas:

- Uma matriz simétrica A é positiva se, e só se, o determinante de cada submatriz principal é positivo.

$$\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Primeira submatriz principal — Segunda submatriz principal — Terceira submatriz principal — Quarta submatriz principal $= A$

Formas quadráticas positivas

► **EXEMPLO 5** **Trabalhando com submatrizes principais**

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

é positiva, pois os determinantes

$$|2| = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

são todos positivos. Assim, podemos ter certeza de que todos autovalores de A são positivos e que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ com $\mathbf{x} \neq 0$. ◄

Otimização usando formas quadráticas

Otimização usando formas quadráticas

- Existem três tipos de problemas importantes que ocorrem nas aplicações de formas quadráticas.

Problema 1. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^2 ou R^3, que tipo de curva ou superfície é representada pela equação $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = k$?

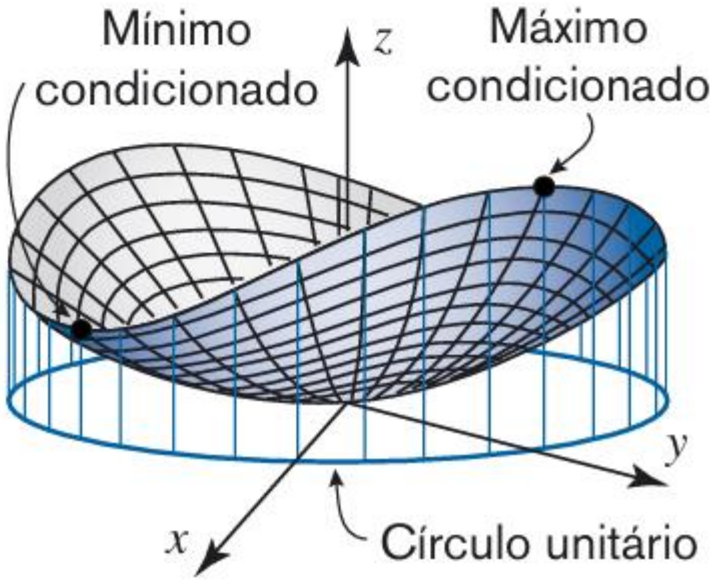
Problema 2. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^n, que condições deve satisfazer A para garantir que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ tenha valores positivos com $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$?

Problema 3. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^n, quais são seus valores máximo e mínimo se $\mathbf{x}$ for condicionado a satisfazer $\|\mathbf{x}\| = 1$?

Otimização usando formas quadráticas

- As formas quadráticas surgem numa variedade de problemas nos quais se exige encontrar o valor máximo ou mínimo de alguma quantidade.

Problemas de extremos condicionados



Otimização usando formas quadráticas

➢ Definições e Teoremas:

TEOREMA 7.4.1 **Teorema dos extremos condicionados**

Seja A uma matriz simétrica $n \times n$ *cujos autovalores em ordem decrescente de tamanho são* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. *Então*

(*a*) *a forma quadrática* $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ *atinge um valor máximo e um valor mínimo no conjunto de vetores tais que* $\|\mathbf{x}\| = 1$;

(*b*) *o valor máximo atingido na parte* (*a*) *ocorre num autovetor unitário associado ao autovalor* λ_1;

(*c*) *o valor mínimo atingido na parte* (*a*) *ocorre num autovetor unitário associado ao autovalor* λ_n.

Otimização usando formas quadráticas

EXEMPLO 1 Encontrando extremos condicionados

Encontre os valores máximo e mínimo da forma quadrática

$$z = 5x^2 + 5y^2 + 4xy$$

sujeita à condição $x^2 + y^2 = 1$.

Solução A forma quadrática pode ser expressa em notação matricial por

$$z = 5x^2 + 5y^2 + 4xy = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x \quad y]\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Deixamos para o leitor mostrar que os autovalores de A são $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = 3$ e que os autovetores associados são

$$\lambda_1 = 7\colon \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 3\colon \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalizando esses autovetores, obtemos

$$\lambda_1 = 7\colon \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 3\colon \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Assim, os extremos condicionados são

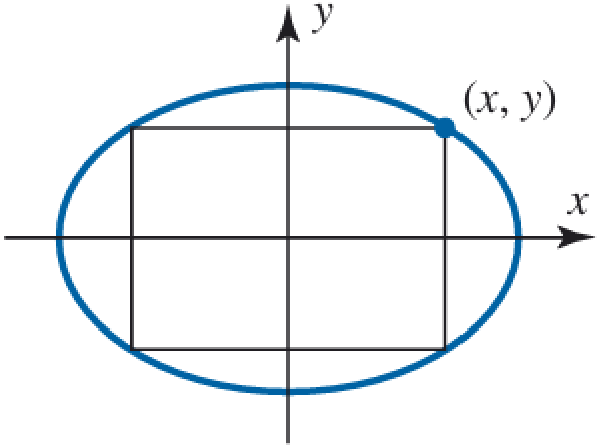
máximo condicionado: $z = 7$ em $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

mínimo condicionado: $z = 3$ em $(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ◀

Otimização usando formas quadráticas

► **EXEMPLO 2** **Um problema de extremos condicionados**

Queremos inscrever um retângulo na elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, conforme a Figura 7.4.2. Use métodos de autovalores para encontrar valores não negativos de x e y que forneçam o retângulo inscrito de área máxima.



▲ **Figura 7.4.2** Um retângulo inscrito na elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Otimização usando formas quadráticas

Solução A área z do retângulo inscrito é dada por $z = 4xy$, de modo que o problema é maximizar a forma quadrática $z = 4xy$ sujeita à restrição $4x^2 + 9y^2 = 36$. Nesse problema, o gráfico da equação restrita é uma elipse em vez de ser o círculo unitário exigido pelo Teorema 7.4.1, mas isso pode ser remediado reescrevendo a restrição como

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

e definindo novas variáveis x_1 e x_2 pelas equações

$$x = 3x_1 \quad \text{e} \quad y = 2y_1$$

Isso nos permite reformular o problema como segue:

$$\text{maximizar } z = 4xy = 24x_1 y_1$$

sujeita à restrição

$$x_1^2 + y_1^2 = 1$$

Para resolver esse problema, escrevemos a forma quadrática $z = 24x_1 y_1$ como

$$z = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x_1 \quad y_1] \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Otimização usando formas quadráticas

Agora deixamos para o leitor mostrar que o maior autovalor de A é $\lambda = 12$ e que o único autovetor associado com entradas não negativas é

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

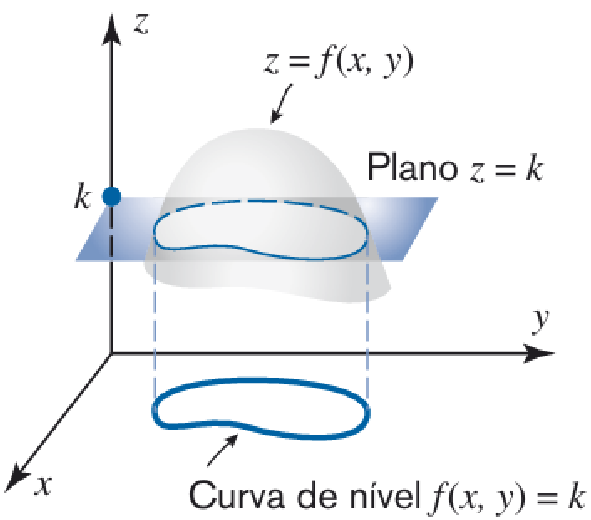
Assim, a área máxima é $z = 12$, que ocorre com

$$x = 3x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y = 2y_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

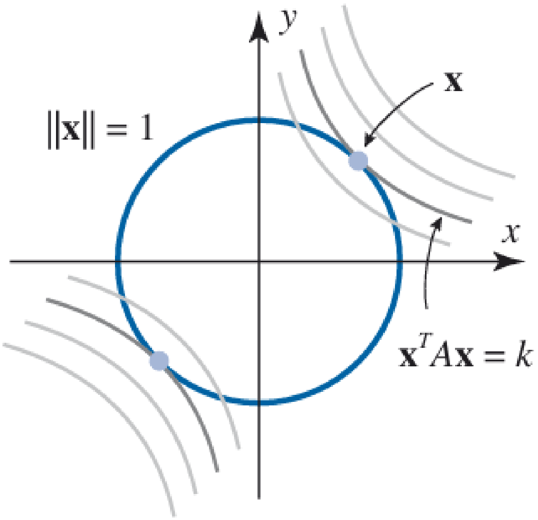
Otimização usando formas quadráticas

- Uma maneira útil de visualizar o comportamento de uma função de duas variáveis é considerar as curvas de nível.

Extremos condicionados e curvas de nível



▲ **Figura 7.4.3**



▲ **Figura 7.4.4**

Otimização usando formas quadráticas

➢ Usando a hessiana para classificar extremos relativos.

► EXEMPLO 4 **Usando a hessiana para classificar extremos relativos**

Encontre os pontos críticos da função

$$f(x, y) = \tfrac{1}{3}x^3 + xy^2 - 8xy + 3$$

e use os autovalores da matriz hessiana nesses pontos para determinar quais desses pontos, se houver algum, são máximos relativos, mínimos relativos ou pontos de sela.

Solução Para encontrar tanto os pontos críticos quanto a matriz hessiana, precisamos calcular as derivas parciais de primeira e segunda ordem de *f*. Essas derivadas são

$$\begin{aligned} &f_x(x, y) = x^2 + y^2 - 8y, \quad &&f_x(x, y) = 2xy - 8x, \quad &&f_{xy}(x, y) = 2y - 8 \\ &f_{xx}(x, y) = 2x, &&f_{yy}(x, y) = 2x && \end{aligned}$$

Assim, a matriz hessiana é

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y - 8 \\ 2y - 8 & 2x \end{bmatrix}$$

Otimização usando formas quadráticas

- Usando a hessiana para classificar extremos relativos.

Para encontrar os pontos críticos, igualamos f_x e f_y a zero. Isso fornece as equações

$$f_x(x, y) = x^2 + y^2 - 8y = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 2xy - 8x = 2x(y - 4) = 0$$

A resolução da segunda equação fornece $x = 0$ ou $y = 4$. Substituindo $x = 0$ na primeira equação e resolvendo em y, obtemos $y = 0$ ou $y = 8$; substituindo $y = 4$ na primeira equação e resolvendo em x, obtemos $x = 4$ ou $x = -4$. Assim, encontramos os quatro pontos críticos

$$(0, 0), \quad (0, 8), \quad (4, 4), \quad (-4, 4)$$

Calculando a matriz hessiana nesses pontos obtemos

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}, \quad H(0,8) = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H(4,4) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad H(-4,4) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Otimização usando formas quadráticas

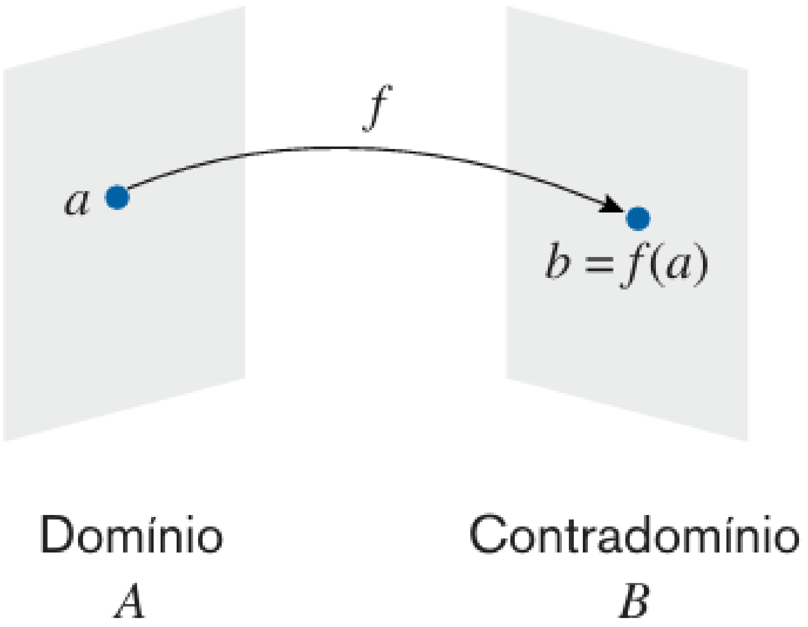
- Usando a hessiana para classificar extremos relativos.

Ponto crítico (x_0, y_0)	λ_1	λ_2	Classificação
$(0, 0)$	8	-8	Ponto de sela
$(0, 8)$	8	-8	Ponto de sela
$(4, 4)$	8	8	Mínimo relativo
$(-4, 4)$	-8	-8	Máximo relativo

Transformações Lineares

Conceitos Importantes

- **Funções e transformações:** Lembre que uma função é uma regra que associa a cada elemento de um conjunto A *um, e exatamente um*, elemento de um conjunto B. Se f associa o elemento b ao elemento a, então escrevemos:



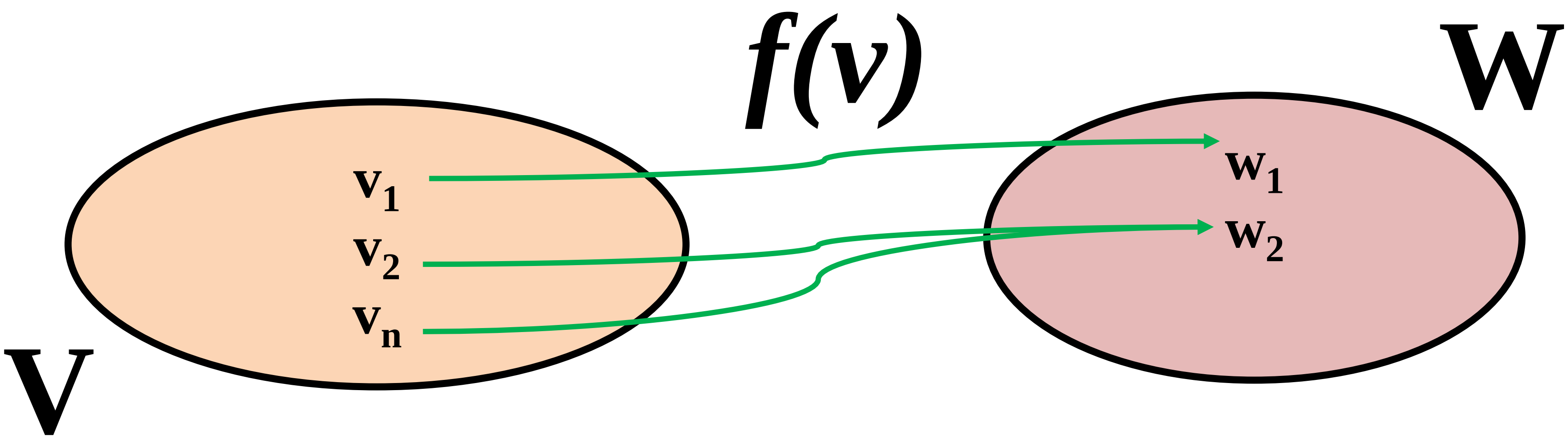
Conceitos Importantes

➢ Definição Geral:

DEFINIÇÃO 1 Se V e W forem espaços vetoriais e se f for uma função de domínio V e contradomínio W, dizemos que f é uma ***transformação*** de V em W, ou uma ***aplicação*** de V em W, que denotamos por

$$f : V \to \mathrm{W}$$

No caso especial em que $V = W$, também dizermos que uma transformação é um ***operador*** de V.



Conceitos Importantes

➢ Definição Geral:

Transformações Lineares Arbitrárias

Transformações Lineares Arbitrárias

- **Aplicações:** Os resultados aqui obtidos têm aplicações importantes na Física, na Engenharia e em várias áreas da Matemática.

Transformações Lineares Arbitrárias

➢ Definições e terminologia:

DEFINIÇÃO 1 Se $T : V \rightarrow W$ for uma função de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, então T é denominada ***transformação linear*** de V em W se as duas propriedades seguintes forem válidas com quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V e qualquer escalar k.

(i) $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ **[Homogeneidade]**

(ii) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ **[Aditividade]**

No caso especial em que $V = W$, a transformação linear é denominada ***operador linear*** do espaço vetorial V.

Transformações Lineares Arbitrárias

➢ Definições e terminologia:

DEFINIÇÃO 1 Se $T : V \rightarrow W$ for uma função de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, então T é denominada ***transformação linear*** de V em W se as duas propriedades seguintes forem válidas com quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V e qualquer escalar k.

(i) $T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$ **[Homogeneidade]**

(ii) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ **[Aditividade]**

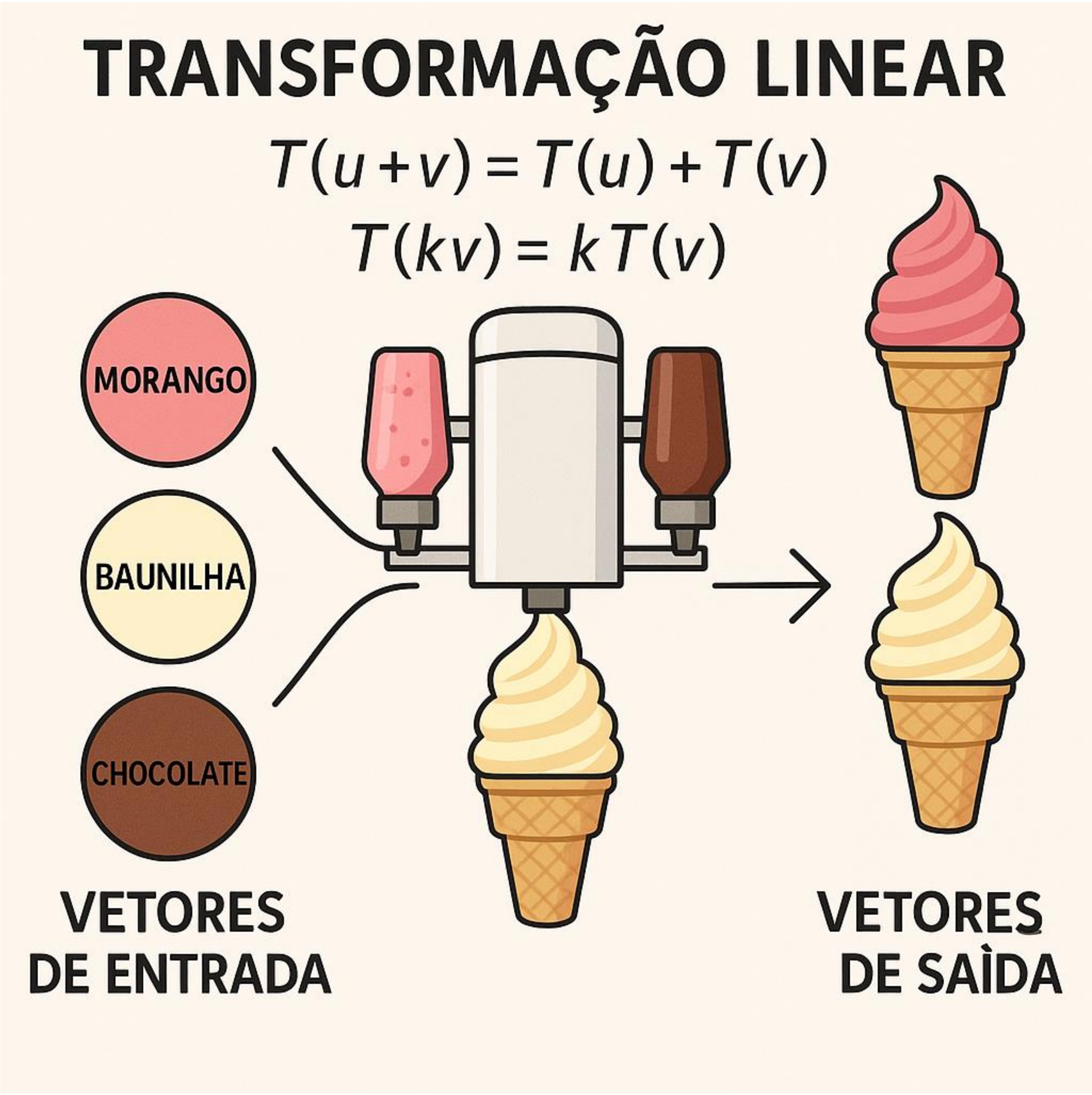
No caso especial em que $V = W$, a transformação linear é denominada ***operador linear*** do espaço vetorial V.

TEOREMA 8.1.1 *Se $T : V \rightarrow W$ for uma transformação linear, então*

(*a*) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(*b*) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$, *quaisquer que sejam* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *em* V.

Transformações Lineares Arbitrárias



Transformações Lineares Arbitrárias

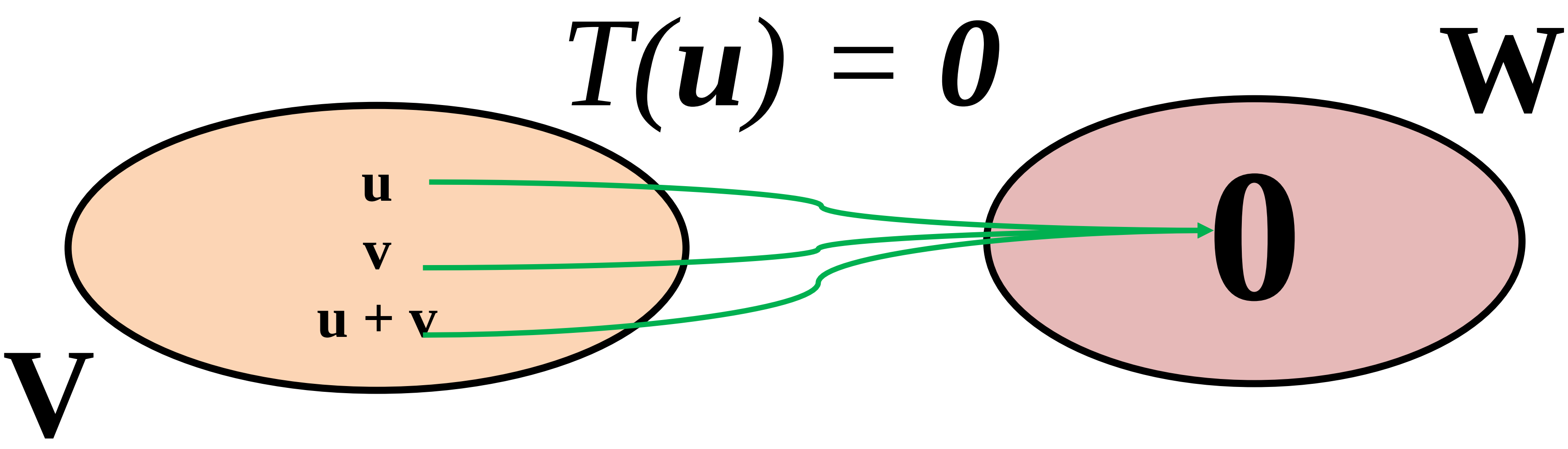
➢ **Exemplo 1:** A transformação nula.

Sejam V e W dois espaços vetoriais quaisquer. A aplicação $T : V \to W$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, qualquer que seja o vetor $\mathbf{v}$ em V, é a transformação linear denominada ***transformação nula*** ou ***zero***. Para ver que T é linear, observe que

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad T(k\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

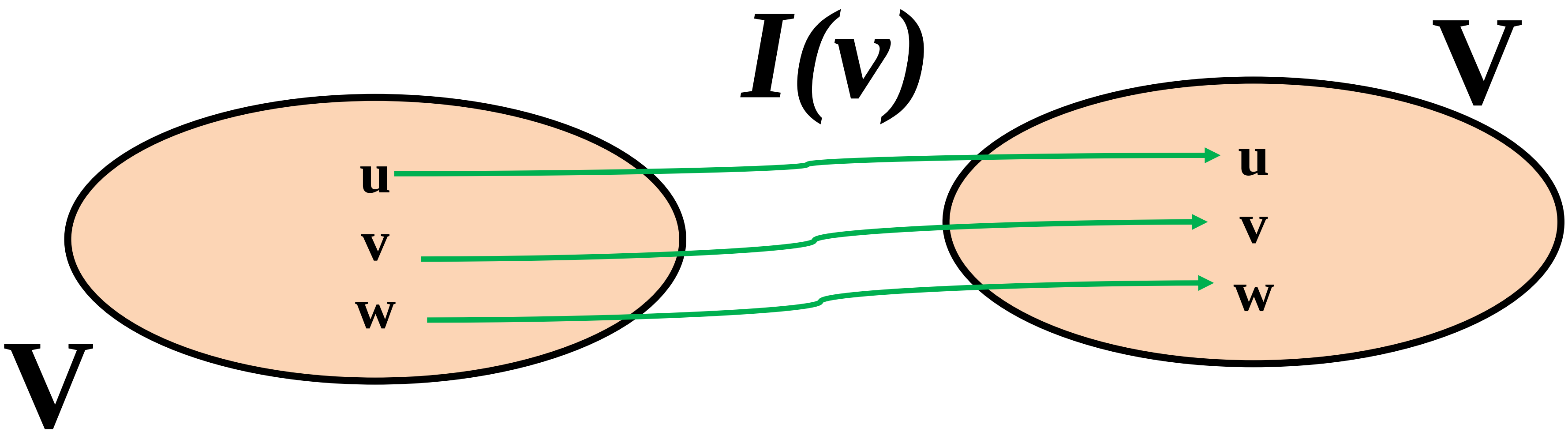
Portanto,

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad \text{e} \quad T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$$



Transformações Lineares Arbitrárias

- **Exemplo 2:** O operador identidade: Seja V um espaço vetorial qualquer. A aplicação $I : V \to V$ definida por $I(v)$ v é denominada operador identidade de V.



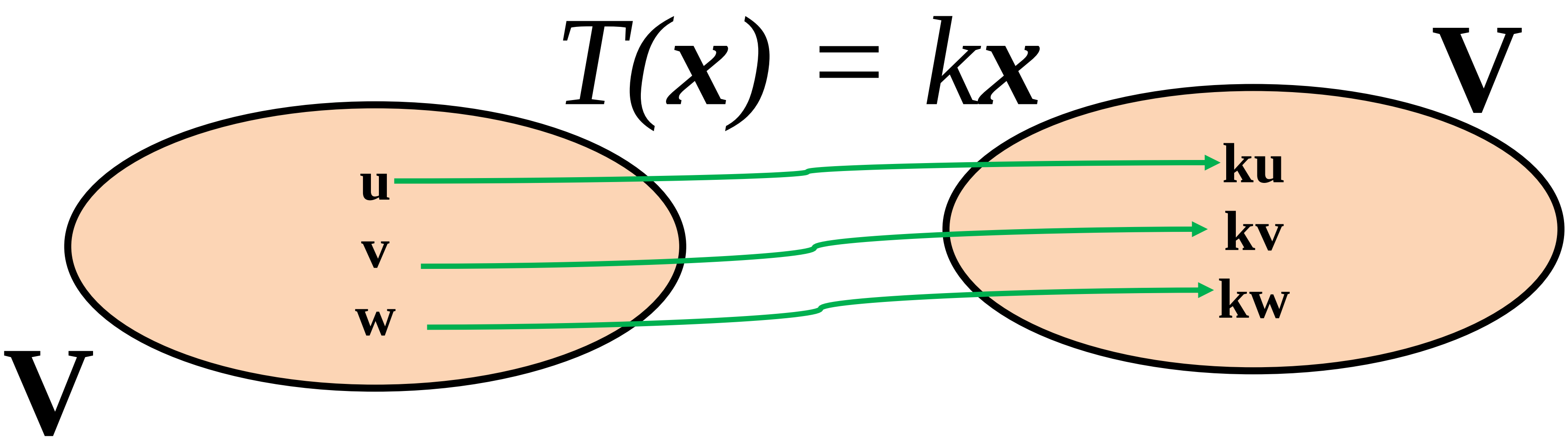
Transformações Lineares Arbitrárias

➢ Exemplo 3: Operadores dilatação e contração:

Se V for um espaço vetorial e k um escalar qualquer, então a aplicação $T : V \to V$ dada por $T(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ é um operador linear de V, pois, dados um escalar c e vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V quaisquer, então

$$T(c\mathbf{v}) = k(c\mathbf{v}) = c(k\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$$
$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u}+k\mathbf{v} = T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$$

Dizemos que T é uma ***contração*** de V de fator k se $0 < k < 1$ e uma ***dilatação*** de V de fator k se $k > 1$ (Figura 8.1.1).



Transformações Lineares Arbitrárias

- **Exemplo 4:** Uma transformação linear de P_n em P_{n+1}:

Seja $\mathbf{p} = p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ um polinômio em P_n e defina a transformação $T : P_n \to P_{n+1}$ por

$$T(\mathbf{p}) = T(p(x)) = xp(x) = c_0 x + c_1 x^2 + \cdots + c_n x^{n+1}$$

Essa transformação é linear, pois, dado qualquer escalar k e quaisquer polinômios $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$, temos

$$T(k\mathbf{p}) = T(kp(x)) = x(kp(x)) = k(xp(x)) = kT(\mathbf{p})$$

e

$$\begin{aligned} T(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) &= T(p_1(x) + p_2(x)) = x(p_1(x) + p_2(x)) \\ &= xp_1(x) + xp_2(x) = T(\mathbf{p}_1) + T(\mathbf{p}_2) \end{aligned}$$

Transformações Lineares Arbitrárias

- **Exemplo 5:** Transformações de espaços matriciais:

Seja M_{nn} o espaço vetorial das matrizes $n \times n$. Em cada parte, determine se a transformação é linear.

(a) $T_1(A) = A^T$ (b) $T_2(A) = \det(A)$

Transformações Lineares Arbitrárias

➢ **Exemplo 5:** Transformações de espaços matriciais:

Seja M_{nn} o espaço vetorial das matrizes $n \times n$. Em cada parte, determine se a transformação é linear.

(a) $T_1(A) = A^T$ (b) $T_2(A) = \det(A)$

Solução (a) Segue das partes (b) e (d) do Teorema 1.4.8 que

$$T_1(kA) = (kA)^T = kA^T = kT_1(A)$$
$$T_1(A + B) = (A + B)^T = A^T + B^T = T_1(A) + T_1(B)$$

de modo que T_1 é linear.

Transformações Lineares Arbitrárias

- **Exemplo 5:** Transformações de espaços matriciais:

Seja M_{nn} o espaço vetorial das matrizes $n \times n$. Em cada parte, determine se a transformação é linear.

(a) $T_1(A) = A^T$ (b) $T_2(A) = \det(A)$

Solução (b) Segue da Fórmula (1) da Seção 2.3 que

$$T_2(kA) = \det(kA) = k^n \det(A) = k^n T_2(A)$$

Assim, T_2 não é homogênea e, portanto, não é linear, se $n > 1$. Observe que a aditividade também falha, pois mostramos no Exemplo 1 da Seção 2.3 que $\det(A + B)$ e $\det(A) + \det(B)$ não são iguais em geral.

Transformações Lineares Arbitrárias

- **Exemplo 6:** Transformações de espaços matriciais:

- A transformação de T: $M_{2x2} \rightarrow$ R; $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$ é linear?

$$T_2(kA) = \det(kA) = k^n \det(A) = k^n T_2(A)$$

Transformações Lineares Arbitrárias

- **Exemplo 7:** Transformações de Funções diferenciáveis:

- A transformação de T: $f(x) \rightarrow f'(x)$; $T(f(x)) = f'(x)$ é linear?

Transformações Lineares Arbitrárias

- **Exemplo 8:** Transformações de Funções integráveis:

- A transformação de J: $f(t) \rightarrow \int f(\mathrm{t})\mathrm{d}t$; $\mathrm{J}(f(t)) = \int f(\mathrm{t})\mathrm{d}t$ é linear? Considere $f(t) = \mathrm{t}^2$.

Transformações Lineares Arbitrárias

- **Exemplo 8:** Transformações de Funções integráveis:

- A transformação de J: $f(t)$ ➔ $\int f(t)dt$; $J(f(t)) = \int f(t)dt$ é linear? Considere $f(t) = t^2$.

$$J(f) = \int_0^x t^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}$$

A transformação $J : V \to W$ é linear, pois, dados qualquer constante k e quaisquer funções f e g em V, as propriedades da integração garantem que

$$J(kf) = \int_0^x kf(t)\,dt = k\int_0^x f(t)\,dt = kJ(f)$$

$$J(f+g) = \int_0^x (f(t)+g(t))\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt = J(f) + J(g)$$ ◄

Transformações Lineares Arbitrárias e Vetores da Base

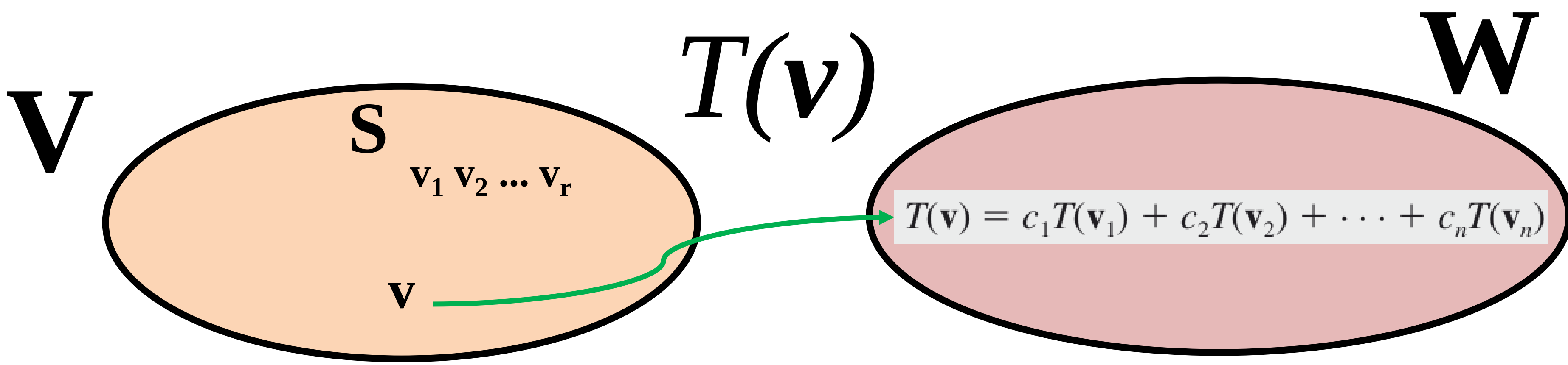
Transformações e Vetores da Base

➢ Teorema:

TEOREMA 8.1.2 *Se $V \to W$ for uma transformação linear, V um espaço vetorial de dimensão finita e $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de V, então a imagem de qualquer vetor $\mathbf{v}$ em V pode ser escrita como*

$$T(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n) \tag{3}$$

em que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são os coeficientes que expressam $\mathbf{v}$ como uma combinação linear dos vetores em S.

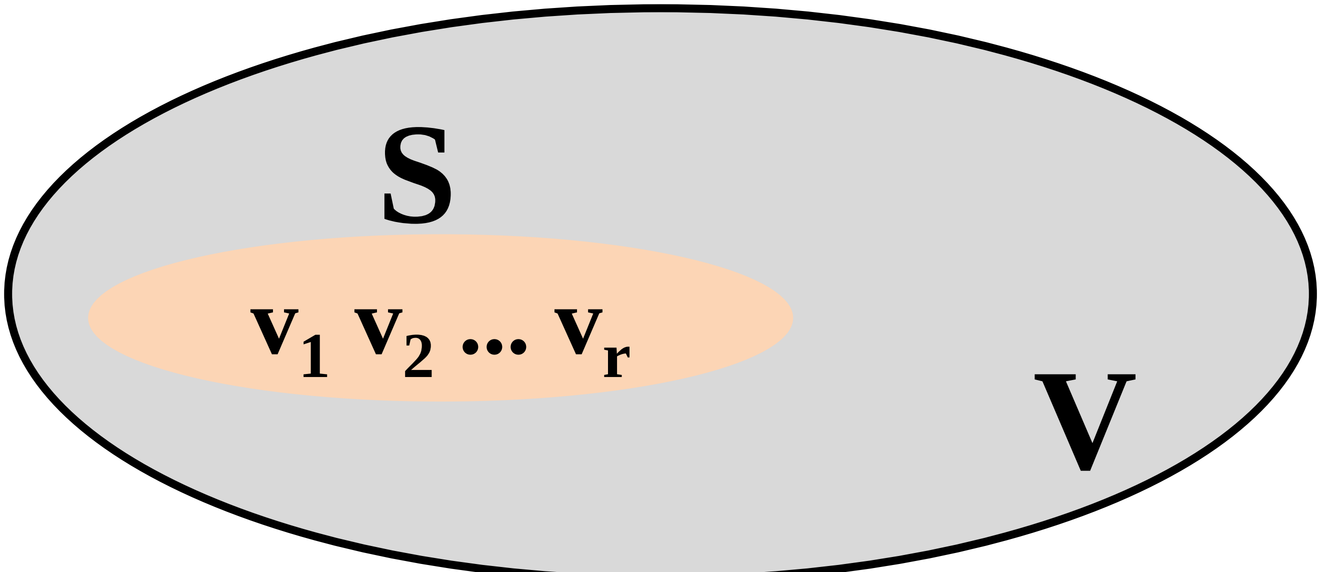


Bases e Dimensão

DEFINIÇÃO 1 Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma ***base*** de V se valerem as duas condições a seguir.

(a) S é linearmente independente.

(b) S gera V.



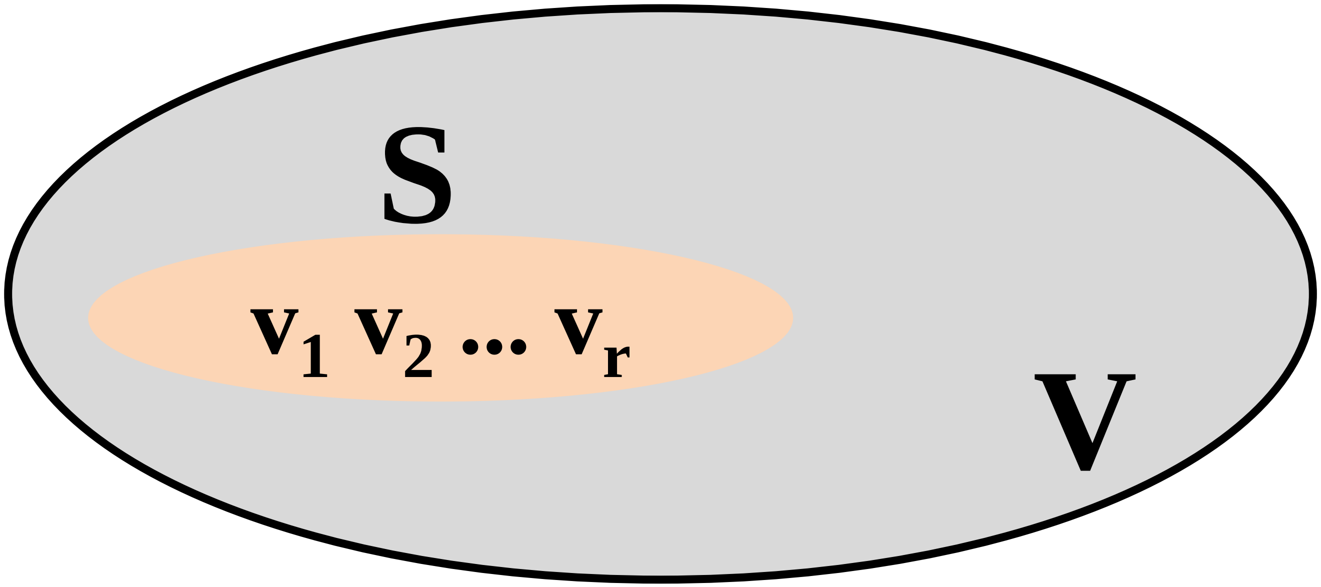
Bases e Dimensão

DEFINIÇÃO 2 Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, v_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V e se

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

é a expressão de um vetor $\mathbf{v}$ em termos da base S, então os escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são denominados ***coordenadas*** de $\mathbf{v}$ em relação à base S. O vetor $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ em R^n construído com essas coordenadas é denominado ***vetor de coordenadas de* v *em relação a S*** e é denotado por

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \tag{6}$$



Transformações e Vetores da Base

➢ **Exemplo 1:** Calculando com imagens de vetores de base:

Considere a base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de R^3 com

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$$

Seja $T : R^3 \to R^2$ a transformação linear tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 0), \quad T(\mathbf{v}_2) = (2, -1), \quad T(\mathbf{v}_3) = (4, 3)$$

Encontre uma fórmula para $T(x_1, x_2, x_3)$ e use essa fórmula para calcular $T(2, -3, 5)$.

Transformações e Vetores da Base

- **Exemplo 1:**

- Para solucionar o problema precisamos primeiro encontrar as coordenadas c_1, c_2 e c_3 que gera o R^3: (x_1, x_2 e x_3).

- Note que não precisamos confirmar que S é uma base pois o enunciado já afirma isso!

Transformações e Vetores da Base

Solução Inicialmente precisamos escrever $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ como uma combinação linear de $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Escrevendo

$$(x_1, x_2, x_3) = c_1(1, 1, 1) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, 0)$$

e equacionando componentes correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= x_1 \\ c_1 + c_2 \qquad &= x_2 \\ c_1 \qquad\qquad &= x_3 \end{aligned}$$

que dá $c_1 = x_3$, $c_2 = x_2 - x_3$, $c_3 = x_1 - x_2$, portanto,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= x_3(1, 1, 1) + (x_2 - x_3)(1, 1, 0) + (x_1 - x_2)(1, 0, 0) \\ &= x_3\mathbf{v}_1 + (x_2 - x_3)\mathbf{v}_2 + (x_1 - x_2)\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Transformações e Vetores da Base

Assim,

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= x_3 T(\mathbf{v}_1) + (x_2 - x_3)T(\mathbf{v}_2) + (x_1 - x_2)T(\mathbf{v}_3) \\ &= x_3(1, 0) + (x_2 - x_3)(2, -1) + (x_1 - x_2)(4, 3) \\ &= (4x_1 - 2x_2 - x_3, 3x_1 - 4x_2 + x_3) \end{aligned}$$

A partir dessa fórmula, obtemos

$$T(2, -3, 5) = (9, 23)$$

Núcleo e imagem de uma transformação

Núcleo e imagem de uma transformação

DEFINIÇÃO 2 Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O conjunto dos vetores em V que T transforma em 0 é denominado ***núcleo*** de T e é denotado por $\mathrm{Nuc}(T)$. O conjunto de todos os vetores em W que são imagem por T de pelo menos um vetor em V é denominado ***imagem*** de T e é denotado por $\mathrm{Im}(T)$.

Núcleo e imagem de uma transformação

DEFINIÇÃO 2 Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O conjunto dos vetores em V que T transforma em 0 é denominado ***núcleo*** de T e é denotado por $\mathrm{Nuc}(T)$. O conjunto de todos os vetores em W que são imagem por T de pelo menos um vetor em V é denominado ***imagem*** de T e é denotado por $\mathrm{Im}(T)$.

DEFINIÇÃO 3 Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Se a imagem de T tiver dimensão finita, dizemos que sua dimensão é o ***posto de T***, e se o núcleo de T tiver dimensão finita, dizemos que sua dimensão é a ***nulidade de T***. O posto de T é denotado por $\mathrm{pos}(T)$ e a nulidade por $\mathrm{nul}(T)$.

TEOREMA 8.1.4 Teorema da dimensão para transformações lineares

Se $T : V \to W$ for uma transformação linear de um espaço vetorial V de dimensão n num espaço vetorial W, então

$$\mathrm{pos}(T) + \mathrm{nul}(T) = n \qquad (7)$$

Núcleo e imagem de uma transformação

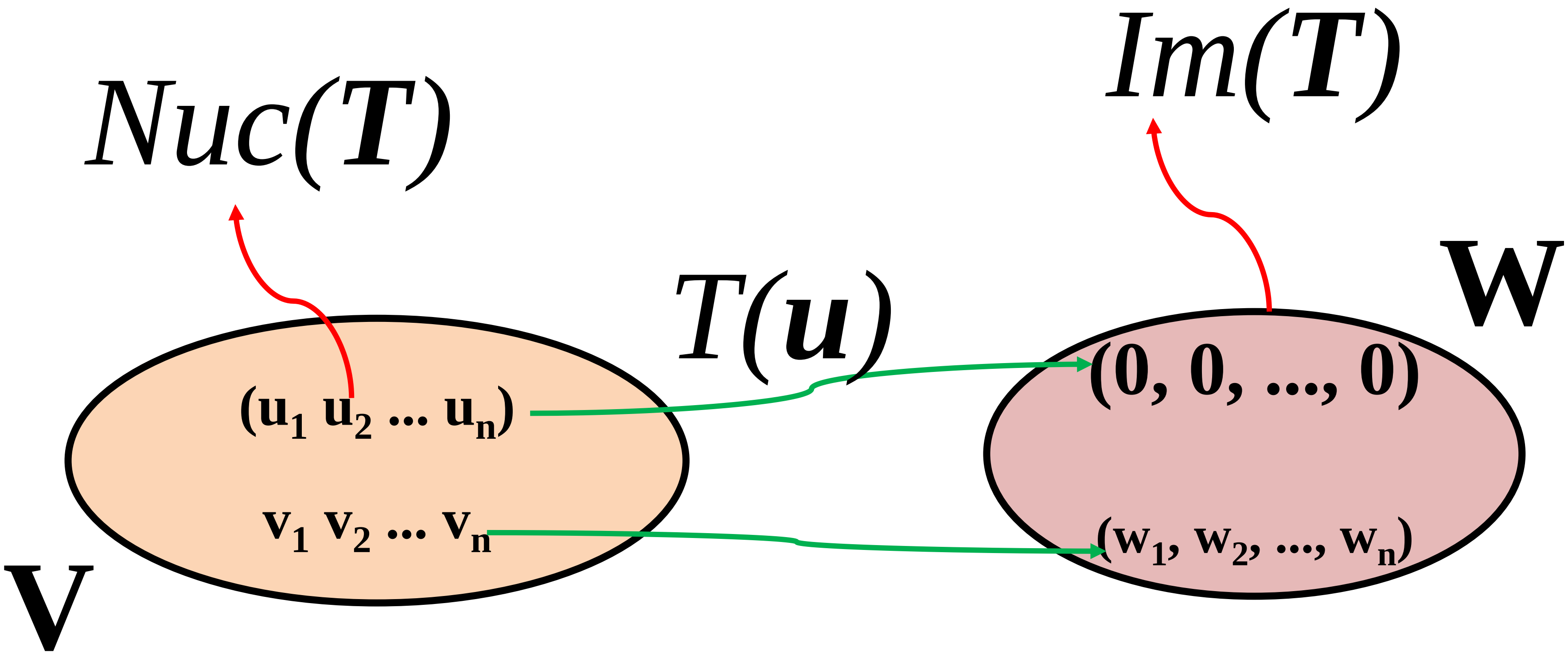
DEFINIÇÃO 2 Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O conjunto dos vetores em V que T transforma em 0 é denominado ***núcleo*** de T e é denotado por $\mathrm{Nuc}(T)$. O conjunto de todos os vetores em W que são imagem por T de pelo menos um vetor em V é denominado ***imagem*** de T e é denotado por $\mathrm{Im}(T)$.

DEFINIÇÃO 3 Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Se a imagem de T tiver dimensão finita, dizemos que sua dimensão é o ***posto de T***, e se o núcleo de T tiver dimensão finita, dizemos que sua dimensão é a ***nulidade de T***. O posto de T é denotado por $\mathrm{pos}(T)$ e a nulidade por $\mathrm{nul}(T)$.

Dimensão é o número de vetores na Base

Núcleo e imagem de uma transformação

DEFINIÇÃO 2 Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. O conjunto dos vetores em V que T transforma em 0 é denominado ***núcleo*** de T e é denotado por Nuc(T). O conjunto de todos os vetores em W que são imagem por T de pelo menos um vetor em V é denominado ***imagem*** de T e é denotado por Im(T).



Núcleo e imagem de uma transformação

DEFINIÇÃO 2 Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. O conjunto dos vetores em V que T transforma em 0 é denominado ***núcleo*** de T e é denotado por $\text{Nuc}(T)$. O conjunto de todos os vetores em W que são imagem por T de pelo menos um vetor em V é denominado ***imagem*** de T e é denotado por $\text{Im}(T)$.

💭 Pensando como uma máquina:

Imagina que T é uma **máquina** que transforma vetores.

O **núcleo** é o grupo dos vetores que, ao entrar na máquina, saem como **(0, 0)**.

Imagine que T é uma **máquina de transformar vetores**. Você coloca um vetor (x, y) na entrada e ela te dá um novo vetor na saída. A **imagem** é o **conjunto de todas as saídas possíveis** que essa máquina pode produzir.

Núcleo e imagem de uma transformação

Núcleo e imagem de uma transformação

➢ Exemplo 1:

Seja $T : R^2 \to R^2$ o operador linear dado pela fórmula

$$T(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$$

Em cada caso, decida se o vetor está em Im(T).

(a) $(1, -4)$ (b) $(5, 0)$ (c) $(-3, 12)$

Seja $T : R^2 \to R^2$ o operador linear do Exercício 14. Em cada caso, decida se o vetor está em Nuc(T).

(a) $(5, 10)$ (b) $(3, 2)$ (c) $(1, 1)$

Núcleo e imagem de uma transformação

➢ Exemplo 1:

Seja $T : R^2 \to R^2$ o operador linear dado pela fórmula

$$T(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$$

Em cada caso, decida se o vetor está em Im(T).

(a) $(1, -4)$ (b) $(5, 0)$ (c) $(-3, 12)$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -8x + 4y = -4 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 4:

$$\begin{cases} 8x - 4y = 4 \\ -8x + 4y = -4 \end{cases} \Rightarrow 0 = 0$$

✅ Está na imagem.

Núcleo e imagem de uma transformação

- **Exemplo 1:**

Seja $T : R^2 \to R^2$ o operador linear dado pela fórmula

$$T(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$$

Em cada caso, decida se o vetor está em Im(T).

(a) $(1, -4)$ (b) $(5, 0)$ (c) $(-3, 12)$

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -8x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow 8x - 4y = 0 \Rightarrow 2x - y = 0$$

Comparando com $2x - y = 5$, temos contradição.

❌ Não está na imagem.

Núcleo e imagem de uma transformação

➢ Exemplo 1:

Seja $T : R^2 \rightarrow R^2$ o operador linear dado pela fórmula

$$T(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$$

Em cada caso, decida se o vetor está em Im(T).

(a) $(1, -4)$ (b) $(5, 0)$ (c) $(-3, 12)$

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -8x + 4y = 12 \end{cases} \Rightarrow 8x - 4y = -12 \Rightarrow 2x - y = -3$$

Sistemas são compatíveis.

✅ Está na imagem.

Núcleo e imagem de uma transformação

➢ **Exemplo 1:**

Seja $T: R^2 \to R^2$ o operador linear do Exercício 14. Em cada caso, decida se o vetor está em Nuc(T).

(a) (5, 10) (b) (3, 2) (c) (1, 1)

Parte 2 – Verificar se o vetor está no núcleo de T, isto é, se

$$T(x, y) = (0, 0)$$

Sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -8x + 4y = 0 \end{cases}$$

Núcleo e imagem de uma transformação

➢ Exemplo 1:

Seja $T : R^2 \to R^2$ o operador linear do Exercício 14. Em cada caso, decida se o vetor está em Nuc(T).

(a) (5, 10) (b) (3, 2) (c) (1, 1)

(a) $(5, 10)$: $y = 2x$? $\to 10 = 2 \cdot 5$ ✅

✅ Está no núcleo.

(b) $(3, 2)$: $2 \cdot 3 = 6 \neq 2$ ❌

❌ Não está no núcleo.

(c) $(1, 1)$: $2 \cdot 1 = 2 \neq 1$ ❌

❌ Não está no núcleo.

Núcleo e imagem de uma transformação

- **Exemplo 2:**

Seja $T : P_2 \to P_3$ a transformação linear definida por $T(p(x)) = xp(x)$. Em cada caso, decida se o vetor está em $\mathrm{Nuc}(T)$.

(a) x^2 (b) 0 (c) $1 + x$

Seja $T : P_2 \to P_3$ a transformação linear do Exercício 18. Em cada caso, decida se o vetor está em $\mathrm{Im}(T)$.

(a) $x + x^2$ (b) $1 + x$ (c) $3 - x^2$

Núcleo e imagem de uma transformação

➢ Exemplo 2:

Seja $T : P_2 \to P_3$ a transformação linear definida por $T(p(x)) = xp(x)$. Em cada caso, decida se o vetor está em $\text{Nuc}(T)$.

(a) x^2 (b) 0 (c) $1 + x$

Se $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P_2$, então:

$$T(p(x)) = x \cdot p(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3$$

➡ E isso está em P_3, ou seja, no espaço dos polinômios de grau até 3.

Núcleo e imagem de uma transformação

➢ Exemplo 2:

Seja $T : P_2 \to P_3$ a transformação linear definida por $T(p(x)) = xp(x)$. Em cada caso, decida se o vetor está em $\text{Nuc}(T)$.

(a) x^2 (b) 0 (c) $1 + x$

(a) x^2: ❌

(b) 0: ✅

(c) $1 + x$: ❌

Núcleo e imagem de uma transformação

➢ Exemplo 2:

Seja $T : P_2 \to P_3$ a transformação linear do Exercício 18. Em cada caso, decida se o vetor está em $\mathrm{Im}(T)$.

(a) $x + x^2$ (b) $1 + x$ (c) $3 - x^2$

(a) $x + x^2$: ✅ está na imagem (termo constante é 0)

(b) $1 + x$: ❌ não está (tem termo constante)

(c) $3 - x^2$: ❌ não está (tem termo constante)

Núcleo e imagem de uma transformação

- **Exemplo 3:**

Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por:

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}, \quad \text{onde } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- **Encontre o núcleo, a imagem e determine as bases do núcleo e da imagem e depois diga qual o posto e a nulidade.**

Núcleo e imagem de uma transformação

➢ Exemplo 3:

➢ 1. Núcleo Nuc(T)

$$A \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo a multiplicação:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Mas perceba: a **segunda equação é igual à primeira multiplicada por 2** — então é **redundante**.

Núcleo e imagem de uma transformação

- **Exemplo 3:**
- **1. Núcleo Nuc(T)**

Vamos resolver só a primeira:

$$x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$$

Solução geral:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix} = y \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Base do Núcleo

Núcleo e imagem de uma transformação

- **Exemplo 3:**
- **2. Imagem *Im*(*T*)**

A imagem é o **espaço gerado pelas colunas da matriz** A:

$$\text{Colunas: } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Mas perceba:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{as colunas são **dependentes**}$$

Então a imagem é gerada apenas por uma delas.

Base da Imagem

Núcleo e imagem de uma transformação

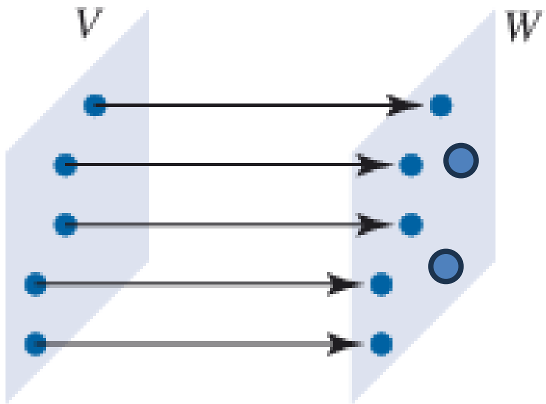
- **Exemplo 3:**
- **3. Posto e Nulidade**

- **Posto** = dimensão da imagem = número de vetores na base da imagem = $\boxed{1}$
- **Nulidade** = dimensão do núcleo = número de vetores na base do núcleo = $\boxed{1}$

Transformações Lineares: Injetora, Sobrejetora e Bijetora

Injetora e Sobrejetora

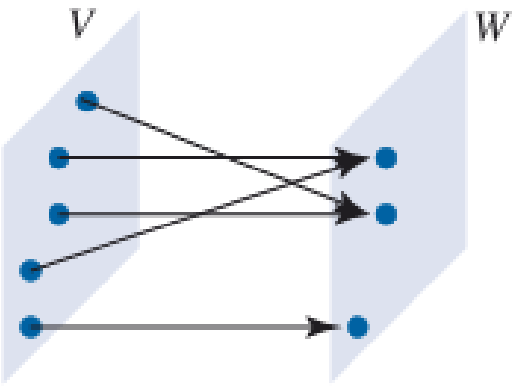
DEFINIÇÃO 1 Se $T : V \to W$ for uma transformação linear de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, dizemos que T é uma transformação ***injetora*** se T transformar vetores distintos de V em vetores distintos de W.



Injetora. Vetores distintos em V têm imagens distintas em W.

Injetora e Sobrejetora

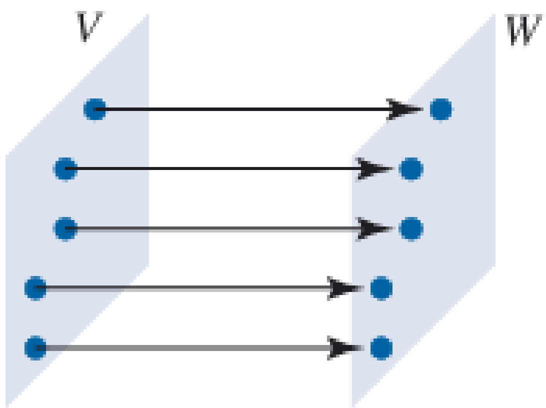
DEFINIÇÃO 2 Se $T: V \to W$ for uma transformação linear de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, dizemos que T é uma transformação ***sobrejetora*** ou, simplesmente, ***sobre*** W, se qualquer vetor em W for a imagem de pelo menos um vetor em V.



Não injetora. Existem vetores distintos em V com a mesma imagem.

Bijetora

DEFINIÇÃO 1 Se $T : V \to W$ for uma transformação linear de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, dizemos que T é uma transformação ***injetora*** se T transformar vetores distintos de V em vetores distintos de W.



Injetora. Vetores distintos em V têm imagens distintas em W.

Injetora e Sobrejetora

- *O próximo teorema fornece uma maneira útil de dizer se uma dada transformação linear é injetora a partir de seu núcleo:*

TEOREMA 8.2.2 *Se V for um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ for um operador linear, as afirmações seguintes são equivalentes.*

(*a*) *T é injetor.*

(*b*) $\text{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

(*c*) *T é sobrejetor, ou seja,* $\text{Im}(T) = V$.

Injetora e Sobrejetora

A transformações lineares $T_1 : P_3 \rightarrow R^4$ e $T_2 : M_{22} \rightarrow R^4$ definidas por

$$T_1(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a, b, c, d)$$

$$T_2\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, b, c, d)$$

são injetoras e sobre (verifique isso mostrando que seus núcleos contêm apenas o vetor nulo).

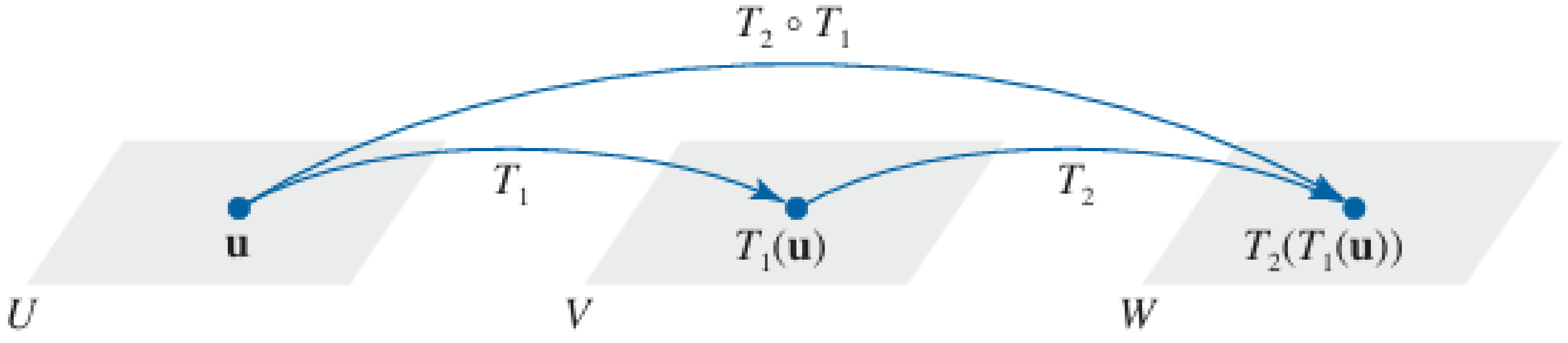
Composições e transformações lineares

Composições e transformações lineares

DEFINIÇÃO 1 Se $T_1 : U \to V$ e $T_2 : V \to W$ forem transformações lineares, então a ***composição de T_2 com T_1***, denotada por $T_2 \circ T_1$ (que lemos "T_2 bola T_1") é a aplicação definida pela fórmula

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{u}) = T_2(T_1(\mathbf{u})) \tag{1}$$

em que $\mathbf{u}$ é um vetor em U.



Composições e transformações lineares

TEOREMA 8.3.1 *Se* $T_1 : U \to V$ *e* $T_2 : V \to W$ *forem transformações lineares, então* $(T_2 \circ T_1) : U \to W$ *também é uma transformação linear.*

Composições e transformações lineares

► **EXEMPLO 1** **Composição de transformações lineares**

Sejam $T_1 : P_1 \to P_2$ e $T_2 : P_2 \to P_2$ as transformações lineares dadas pelas fórmulas

$$T_1(p(x)) = xp(x) \quad \text{e} \quad T_2(p(x)) = p(2x + 4)$$

Então a composição $(T_2 \circ T_1) : P_1 \to P_2$ é dada pela fórmula

$$(T_2 \circ T_1)(p(x)) = T_2(T_1(p(x))) = T_2(xp(x)) = (2x + 4)p(2x + 4)$$

Em particular, se $p(x) = c_0 + c_1 x$, então

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(p(x)) &= (T_2 \circ T_1)(c_0 + c_1 x) = (2x + 4)(c_0 + c_1(2x + 4)) \\ &= c_0(2x + 4) + c_1(2x + 4)^2\end{aligned}$$

Matrizes de transformações lineares arbitrárias

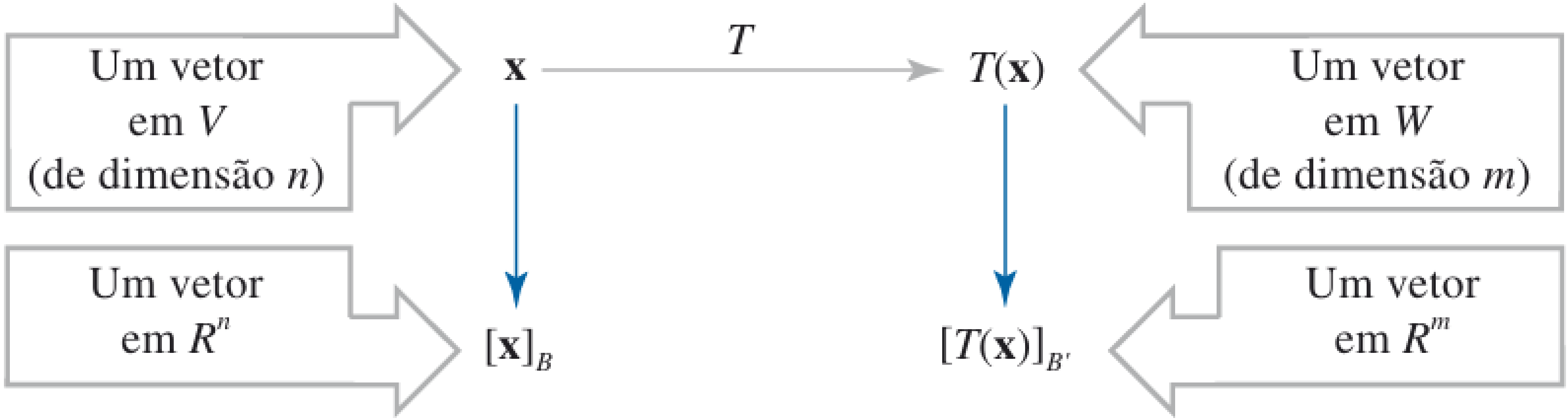
Matrizes de transformações lineares

- *Uma transformação linear de um espaço de dimensão n para um de dimensão m pode ser representada por uma multiplicação de matriz de Rn em Rm.*

- *Isso é útil em cálculos computacionais, já que computadores lidam muito bem com matrizes.*

Matrizes de transformações lineares

- *Nosso objetivo é encontrar uma matriz A de tamanho m x n tal que a multiplicação por A transforma o vetor $[x]_{base}$ no vetor $[T(x)]_{base}$, qualquer que seja o vetor v em V.*



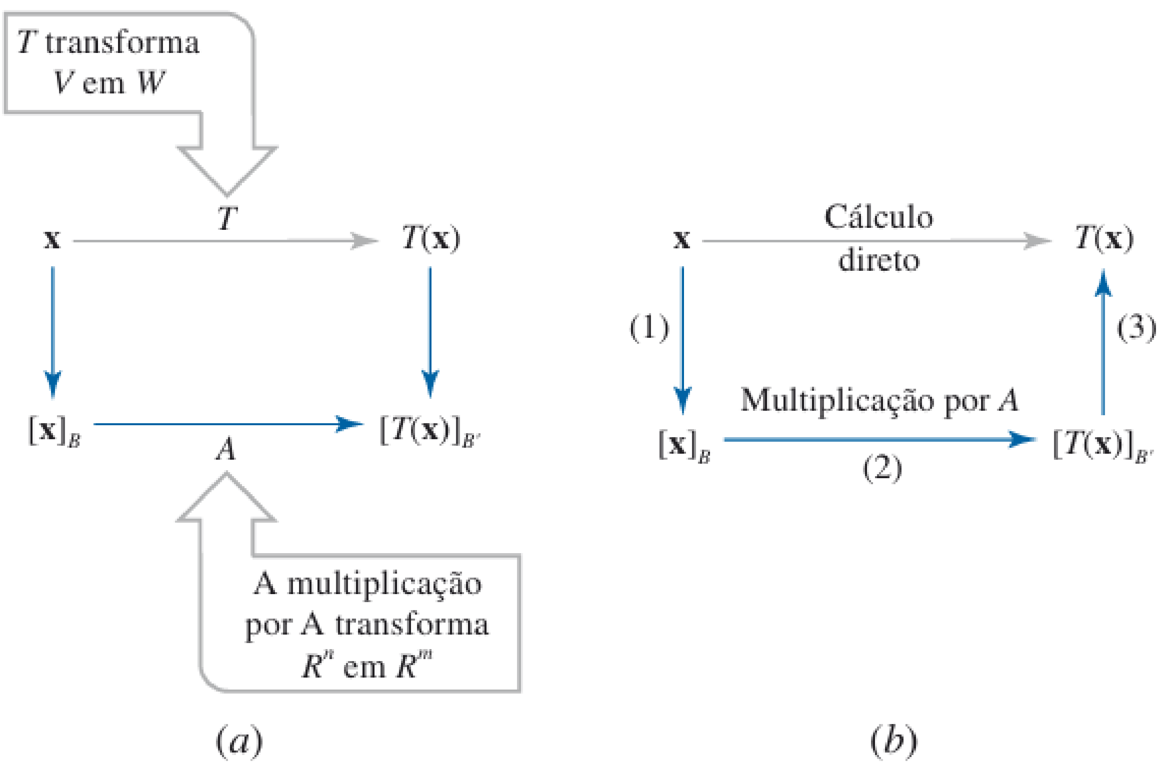
Matrizes de transformações lineares

Encontrando $T(\mathbf{x})$ indiretamente

Passo 1. Calcule o vetor de coordenadas $[\mathbf{x}]_B$.

Passo 2. Multiplique $[\mathbf{x}]_B$ à esquerda por A para obter $[T(\mathbf{x})]_{B'}$.

Passo 3. Reconstrua $T(\mathbf{x})$ a partir de seu vetor de coordenadas $[T(\mathbf{x})]_{B'}$.



Matrizes de transformações lineares

- **Exemplo 1:** Dado o operador linear T: $R^2 \rightarrow R^2$, $T(x, y) = (x + y, x - y)$, determine:

- A matriz $[T]_B$, que representa T na base $B = \{(1, 2), (0, -1)\}$

- O vetor $T(v)_B$ utilizando $[T]_B$, Sabendo que $v = (4, 2)$.

Matrizes de transformações lineares

- **Exemplo 1:** Dado o operador linear T: $R^2 \rightarrow R^2$, $T(x, y) = (x + y, x - y)$, determine:
- A matriz $[T]_B$, que representa T na base $B = \{(1, 2), (0, -1)\}$

Passo 1: Aplicar T aos vetores da base:

$$T(1, 2) = (x + y, x - y) = (1 + 2, 1 - 2) = (3, -1)$$

$$T(0, -1) = (x + y, x - y) = (0 - 1, 0 + 1) = (-1, 1)$$

Matrizes de transformações lineares

➢ **Exemplo 1:** Dado o operador linear T: $R^2 \rightarrow R^2$, $T(x, y) = (x + y, x - y)$, determine:

Passo 2: Escrever cada imagem como combinação linear dos vetores da base:

Queremos encontrar escalares a e b tais que:

$$(3, -1) = a(1, 2) + b(0, -1)$$

e depois para:

$$(-1, 1) = a'(1, 2) + b'(0, -1)$$

Vamos resolver **um por um**:

Matrizes de transformações lineares

Passo 2: Escrever cada imagem como combinação linear dos vetores da base:

Resolver para $(3, -1)$

Escrevemos:

$$a(1,2) + b(0,-1) = (a, 2a) + (0, -b) = (a, 2a - b)$$

Igualando:

$$(a, 2a - b) = (3, -1)$$

Isso gera o sistema:

$$\begin{cases} a = 3 \\ 2a - b = -1 \end{cases}$$

Substituindo $a = 3$ na segunda equação:

$$2(3) - b = -1 \quad \Rightarrow \quad 6 - b = -1 \quad \Rightarrow \quad b = 7$$

✅ Então:

$$a = 3, \quad b = 7$$

Matrizes de transformações lineares

Passo 2: Escrever cada imagem como combinação linear dos vetores da base:

Resolver para $(-1,1)$

Agora para o segundo vetor:

$$a'(1,2)+b'(0,-1)=(a',2a')+(0,-b')=(a',2a'-b')$$

Igualando:

$$(a',2a'-b')=(-1,1)$$

Sistema:

$$\begin{cases} a'=-1 \\ 2a'-b'=1 \end{cases}$$

Substituindo $a'=-1$ na segunda equação:

$$2(-1)-b'=1 \quad \Rightarrow \quad -2-b'=1 \quad \Rightarrow \quad b'=-3$$

✅ Então:

$$a'=-1, \quad b'=-3$$

Matrizes de transformações lineares

Passo 3: Montar a matriz $[T]_B$:

Agora, organizamos:

- Primeira coluna: $(3, 7)$ (coeficientes de $(1, 2)$ e $(0, -1)$ para $(3, -1)$)
- Segunda coluna: $(-1, -3)$ (coeficientes de $(1, 2)$ e $(0, -1)$ para $(-1, 1)$)

Assim:

$$[f]_B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Matrizes de transformações lineares

- O vetor $T(v)_B$ utilizando $[T]_B$, Sabendo que $v = (4, 2)$.

Primeiro, precisamos expressar v **nas coordenadas da base** B!

A base B é:

$$B = \{(1,2),(0,-1)\}$$

Então queremos encontrar escalares α e β tais que:

$$v = \alpha(1,2) + \beta(0,-1)$$

Ou seja:

$$(4,2) = (\alpha, 2\alpha) + (0, -\beta) = (\alpha, 2\alpha - \beta)$$

Isso gera o sistema:

$$\begin{cases} \alpha = 4 \\ 2\alpha - \beta = 2 \end{cases}$$

Matrizes de transformações lineares

➢ O vetor $f(v)_B$ utilizando T_B, Sabendo que $v = (4, 2)$.

Substituindo $\alpha = 4$ na segunda equação:

$$2(4) - \beta = 2$$

$$8 - \beta = 2$$

$$\beta = 6$$

✅ Então:

- Coordenadas de v na base B: $(4, 6)$.

Matrizes de transformações lineares

- O vetor $f(v)_B$ utilizando T_B, Sabendo que $v = (4, 2)$.

Multiplicamos a matriz $[f]_B$ pelo vetor $(4, 6)$:

$$[f]_B \times \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Fazendo o produto:

- Primeira linha:

$$(3)(4) + (-1)(6) = 12 - 6 = 6$$

- Segunda linha:

$$(7)(4) + (-3)(6) = 28 - 18 = 10$$

Então:

$$\mathbf{f}(\mathbf{v})_B = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Matrizes de transformações lineares

- **Exemplo 2:** Dada a transformação T: $R^3 \rightarrow R^2$, $T(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y)$ e as Bases:

A = {(1, 0, 0), (2, -1, 0), (0, 1, 1)} no domínio (R^3)

B = {(-1, 1), (0, 1)} no domínio (R^2)

- Determine a matriz $[T]_B$, nas Bases A e B.

Matrizes de transformações lineares

- **Exemplo 2:** Dada a transformação T: $R^3 \rightarrow R^3$, $T(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y)$ e as Bases:

Passo 1: Aplicar T a cada vetor da Base A:

- Para $(1, 0, 0)$:

$$T(1,0,0) = (2(1) + 0 - 0,\ 1 + 2(0)) = (2,1)$$

- Para $(2, -1, 0)$:

$$T(2,-1,0) = (2(2) + (-1) - 0,\ 2 + 2(-1)) = (4-1, 2-2) = (3,0)$$

- Para $(0, 1, 1)$:

$$T(0,1,1) = (2(0) + 1 - 1,\ 0 + 2(1)) = (0,2)$$

Matrizes de transformações lineares

- **Exemplo 2:** Dada a transformação $T: R^3 \rightarrow R^3$, $T(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y)$ e as Bases:

Passo 2: Escrever cada vetor obtido como combinação linear dos vetores da base B:

Base B é:

$$B = \{(-1,1),(0,1)\}$$

Então para um vetor (a,b), queremos encontrar escalares α e β tais que:

$$(a,b) = \alpha(-1,1) + \beta(0,1)$$

ou seja:

$$(a,b) = (-\alpha, \alpha + \beta)$$

Matrizes de transformações lineares

Passo 2: Escrever cada vetor obtido como combinação linear dos vetores da base B:

$$(-\alpha, \alpha + \beta) = (2, 1)$$

Sistema:

$$\begin{cases} -\alpha = 2 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

Da primeira equação:

$$\alpha = -2$$

Substituindo na segunda:

$$-2 + \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 3$$

Então:

- Coordenadas de $T(1,0,0)$ em B: $(-2,3)$

Matrizes de transformações lineares

Passo 2: Escrever cada vetor obtido como combinação linear dos vetores da base B:

$$(-\alpha, \alpha + \beta) = (3, 0)$$

Sistema:

$$\begin{cases} -\alpha = 3 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação:

$$\alpha = -3$$

Substituindo na segunda:

$$-3 + \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 3$$

Então:

- Coordenadas de $T(2, -1, 0)$ em B: $(-3, 3)$

Matrizes de transformações lineares

Passo 2: Escrever cada vetor obtido como combinação linear dos vetores da base B:

Sistema:

$$\begin{cases} -\alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 2 \end{cases}$$

Da primeira equação:

$$\alpha = 0$$

Substituindo na segunda:

$$0 + \beta = 2 \quad \Rightarrow \quad \beta = 2$$

Então:

- Coordenadas de $T(0, 1, 1)$ em B: $(0, 2)$

Matrizes de transformações lineares

- **Exemplo 2:** Dada a transformação T: $R^3 \rightarrow R^3$, $T(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y)$ e as Bases:

Passo 3: Montar a matriz $[T]_B$:

Cada coluna da matriz será formada pelas coordenadas que encontramos:

- Primeira coluna: $(-2, 3)$
- Segunda coluna: $(-3, 3)$
- Terceira coluna: $(0, 2)$

Assim:

$$[T]_A^B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrizes de transformações lineares

- **Exemplo 3:** Dado o operador linear f: $R^2 \rightarrow R^2$, representado na base canônica pela matriz A, determine os vetores v_1, v_2, e v_3: tais que $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 2v_2$ e $f(v_3) = (4, 4)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Matrizes de transformações lineares

- **Exemplo 3:** Dado o operador linear f: $R^2 \rightarrow R^2$, representado na base canônica pela matriz A, determine os vetores v_1, v_2, e v_3: tais que $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 2v_2$ e $f(v_3) = (4, 4)$.

Dado:

$$f(x, y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Queremos:

1. $f(v_1) = v_1$
2. $f(v_2) = 2v_2$
3. $f(v_3) = (4, 4)$

Matrizes de transformações lineares

- **Exemplo 3:** Dado o operador linear f: $R^2 \rightarrow R^2$, representado na base canônica pela matriz A, determine os vetores v_1, v_2, e v_3: tais que $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 2v_2$ e $f(v_3) = (4, 4)$.

Ou seja:

$$\begin{cases} x + 3y = x \\ -x + 5y = y \end{cases}$$

Primeira equação:

$$x + 3y = x \quad \Rightarrow \quad 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$$-x + 5(0) = y = 0 \quad \Rightarrow \quad -x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Então:

$$v_1 = (0, 0)$$

Matrizes de transformações lineares

🔵 Resolver $f(v_2) = 2v_2$

Sistema:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} x + 3y = 2x \\ -x + 5y = 2y \end{cases}$$

Primeira equação:

$$x + 3y = 2x \quad \Rightarrow \quad 3y = x \quad \Rightarrow \quad x = 3y$$

Segunda equação substituindo $x = 3y$:

$$-(3y) + 5y = 2y \quad \Rightarrow \quad -3y + 5y = 2y \quad \Rightarrow \quad 2y = 2y$$

✅ Verdade para qualquer y.

Então os vetores v_2 têm a forma:

$$v_2 = (3y, y)$$

Por exemplo, podemos escolher:

$$y = 1 \quad \Rightarrow \quad v_2 = (3, 1)$$

Matrizes de transformações lineares

- Resolver $f(v_3) = (4,4)$

Sistema:

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -x + 5y = 4 \end{cases}$$

Primeira equação:

$$x = 4 - 3y$$

Matrizes de transformações lineares

Substituindo na segunda:

$$-(4-3y)+5y=4$$

$$-4+3y+5y=4$$

$$8y=8$$

$$y=1$$

Substituindo de volta:

$$x=4-3(1)=1$$

Então:

$$v_3=(1,1)$$

Matrizes de transformações lineares

EXEMPLO 5 Operador linear de P_2

Seja $T : P_2 \rightarrow P_2$ o operador linear definido por

$$T(p(x)) = p(3x - 5)$$

isto é, $T(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) = c_0 + c_1(3x - 5) + c_2(3x - 5)^2$.

(a) Encontre $[T]_B$ em relação à base $B = \{1, x, x^2\}$.

(b) Use o procedimento indireto para calcular $T(1 + 2x + 3x^2)$.

(c) Confira o resultado em (b) calculando diretamente $T(1 + 2x + 3x^2)$.

Matrizes de transformações lineares

Passo 1: Escreva T e identifique os elementos em relação a cada elemento da base

$$T(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) = c_0 + c_1(3x - 5) + c_2(3x - 5)^2.$$

$$1 \qquad\qquad x \qquad\qquad x^2$$

Queremos descobrir como o operador T transforma cada vetor da base B.

Lembre-se:

O operador T **pega o polinômio** e **substitui** x **por** $3x - 5$.

Ou seja, sempre que você ver um x no polinômio, troca por $(3x - 5)$.

Vamos fazer isso **um por um**:

Matrizes de transformações lineares

$$T(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) = c_0 + c_1\cancel{(3x - 5)} + c_2\cancel{(3x - 5)^2}.$$

1

Solução (a) Pela fórmula de T,

$$T(1) = 1, \quad T(x) = 3x - 5, \quad T(x^2) = (3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

Coordenadas:

- 1 aparece: coeficiente $= 1$
- x aparece? Não → coeficiente $= 0$
- x^2 aparece? Não → coeficiente $= 0$

Assim, as coordenadas de $T(1)$ na base B são:

$$(1, 0, 0)$$

Matrizes de transformações lineares

$$T(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) \cancel{= c_0} + c_1(3x - 5) + c_2\cancel{(3x - 5)}^2.$$

X

Solução (a) Pela fórmula de T,

$$T(1) = 1, \quad T(x) = 3x - 5, \quad T(x^2) = (3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

Coordenadas:

- Constante (1): -5
- Termo linear (x): 3
- Termo quadrático (x^2): 0

Assim, as coordenadas de $T(x)$ na base B são:

$$(-5, 3, 0)$$

Matrizes de transformações lineares

$$T(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) = \cancel{c_0} + \cancel{c_1(3x - 5)} + c_2(3x - 5)^2.$$

x^2

Solução (a) Pela fórmula de T,

$$T(1) = 1, \quad T(x) = 3x - 5, \quad T(x^2) = (3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

Coordenadas:

- Constante (1): 25
- Termo linear (x): -30
- Termo quadrático (x^2): 9

Assim, as coordenadas de $T(x^2)$ na base B são:

$$(25, -30, 9)$$

Matrizes de transformações lineares

Passo 2: Escreva a Matriz $[T]_B$

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(x)]_B = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(x^2)]_B = \begin{bmatrix} 25 \\ -30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Matrizes de transformações lineares

Solução (*b*)

Passo 1. O vetor de coordenadas de $\mathbf{p} = 1 + 2x + 3x^2$ em relação à base $B = \{1, x, x^2\}$

$$[\mathbf{p}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Matrizes de transformações lineares

Passo 2. Multiplicando $[\mathbf{p}]_B$ pela matriz $[T]_B$ encontrada na parte (a), obtemos

$$[T]_B\,[\mathbf{p}]_B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ -84 \\ 27 \end{bmatrix} = [T(\mathbf{p})]_B$$

Passo 3. Reconstruindo $T(\mathbf{p}) = T(1 + 2x + 3x^2)$ a partir de $[T(\mathbf{p})]_B$, obtemos

$$T(1 + 2x + 3x^2) = 66 - 84x + 27x^2$$

Solução (c) Calculando diretamente,

$$\begin{aligned} T(1 + 2x + 3x^2) &= 1 + 2(3x - 5) + 3(3x - 5)^2 \\ &= 1 + 6x - 10 + 27x^2 - 90x + 75 \\ &= 66 - 84x + 27x^2 \end{aligned}$$

de acordo com o resultado em (b). ◀

Matrizes de transformações lineares

▶ EXEMPLO 1 A matriz de uma transformação linear

Seja $T : P_1 \to P_2$ a transformação linear definida por

$$T(p(x)) = xp(x)$$

Encontre a matriz de T em relação às bases canônicas

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \quad \text{e} \quad B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$$

em que

$$\mathbf{u}_1 = 1, \quad \mathbf{u}_2 = x\,; \quad \mathbf{v}_1 = 1, \quad \mathbf{v}_2 = x, \quad \mathbf{v}_3 = x^2$$

Considere a transformação linear $T : P_1 \to P_2$ do Exemplo 1 e use o procedimento de três passos descrito na figura seguinte para calcular

$$T(a + bx) = x(a + bx) = ax + bx^2$$

Matrizes de transformações lineares

Passo 1: Escreva T e identifique os elementos em relação a cada elemento da base

$$T(a + bx) = x(a + bx)$$

$$1 \qquad x$$

Matrizes de transformações lineares

Passo 1: Escreva T e identifique os elementos em relação a cada elemento da base

$$T(a + bx) = x(a + \cancel{bx})$$

1

$$T(\mathbf{u}_1) = T(1) = (x)(1) = x$$

$$[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Matrizes de transformações lineares

Passo 1: Escreva T e identifique os elementos em relação a cada elemento da base

$$T(a + bx) = \cancel{x(a} + bx)$$

$$x$$

$$T(\mathbf{u}_2) = T(x) = (x)(x) = x^2$$

$$[T(\mathbf{u}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes de transformações lineares

Passo 2: Escreva a Matriz $[T]_B$

$$[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{u}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz de T em relação a B e B' é

$$[T]_{B',B} = \left[[T(\mathbf{u}_1)]_{B'} \mid [T(\mathbf{u}_2)]_{B'}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes de transformações lineares

Passo 1. O vetor de coordenadas de $\mathbf{x} = a + bx$ em relação à base $B = \{1, x\}$ é

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Passo 2. Multiplicando $[\mathbf{x}]_B$ pela matriz $[T]_{B',B}$ encontrada no Exemplo 1, obtemos

$$[T]_{B',B}[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix} = [T(\mathbf{x})]_{B'}$$

Passo 3. Reconstruindo $T(\mathbf{x}) = T(a + bx)$ a partir de $[T(\mathbf{x})]_{B'}$, obtemos

$$T(a + bx) = 0 + ax + bx^2 = ax + bx^2$$

Matrizes de transformações lineares

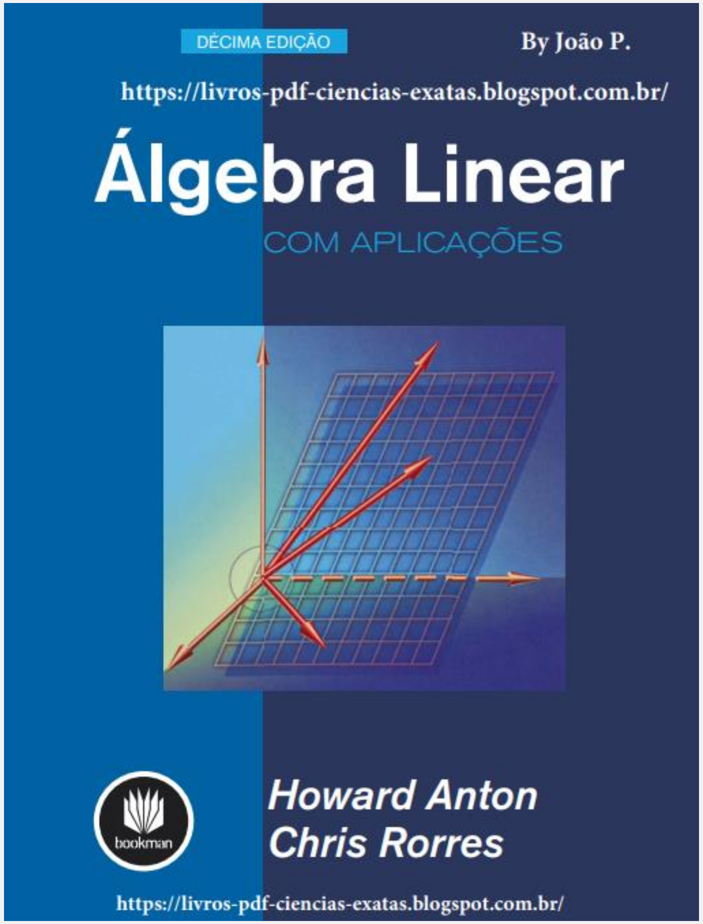
- A matriz de um operador linear T: V → V depende da base selecionada para V. Um dos problemas fundamentais da Álgebra Linear é escolher uma base de V que torne a matriz de T tão simples quanto possível, digamos, por exemplo, uma matriz diagonal ou triangular.

- Um dos principais temas em textos mais avançados de Álgebra Linear é o de determinar a forma "mais simples possível" (Semelhantes);

- Às vezes, é possível obter uma matriz diagonal; outras vezes, devemos nos contentar com uma matriz triangular ou de alguma outra forma (esse assunto não será abordado nesse curso).

EXERCÍCIOS

Maiores informações podem ser encontradas:



Continua com aplicações da álgebra em outras disciplinas ...