UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS SERTÃO
EIXO TECNOLOGIA

Campus do Sertão
Delmiro Gouveia - Santana do Ipanema

Mecânica dos Sólidos I

Prof. Dr. Alverlando Ricardo

Aula 5: Forças Distribuídas: Centro de Gravidade, Centro de Massa e Centróide

INTRODUÇÃO

CARACTERÍSTICA DOS CORPOS

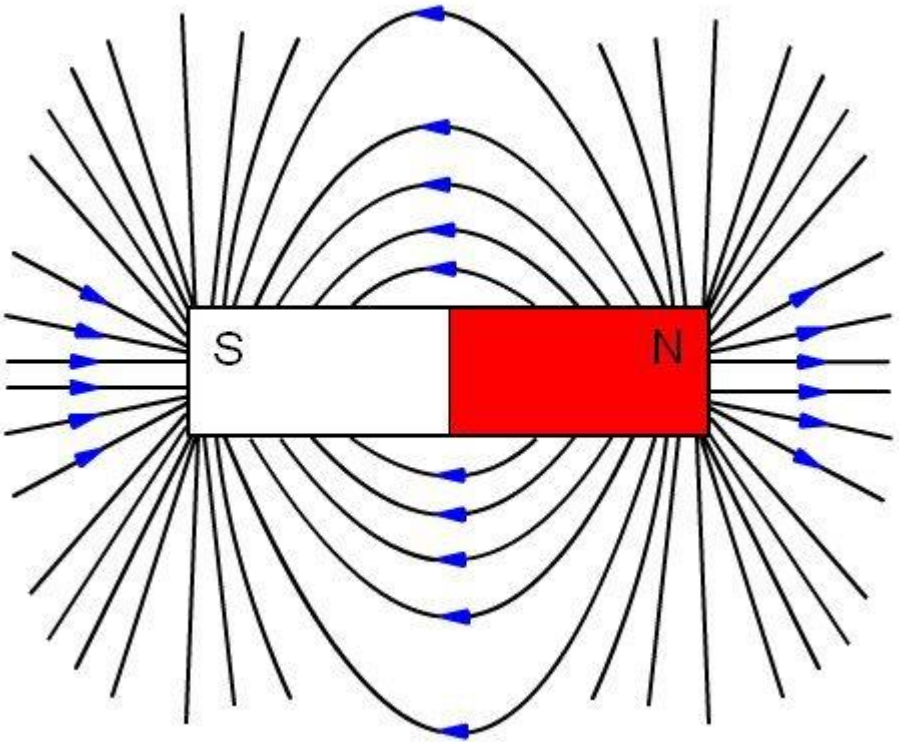
❑ Transmissão de Forças:

- ➢ **Contato direto;**
- ➢ Ação eletromagnética;
- ➢ Centrífuga;
- ➢ Gravitacional.

CARACTERÍSTICA DOS CORPOS

- **Transmissão de Forças·**

  - Contato direto;
  - **Ação eletromagnética;**
  - Centrífuga;
  - Gravitacional.



CARACTERÍSTICA DOS CORPOS

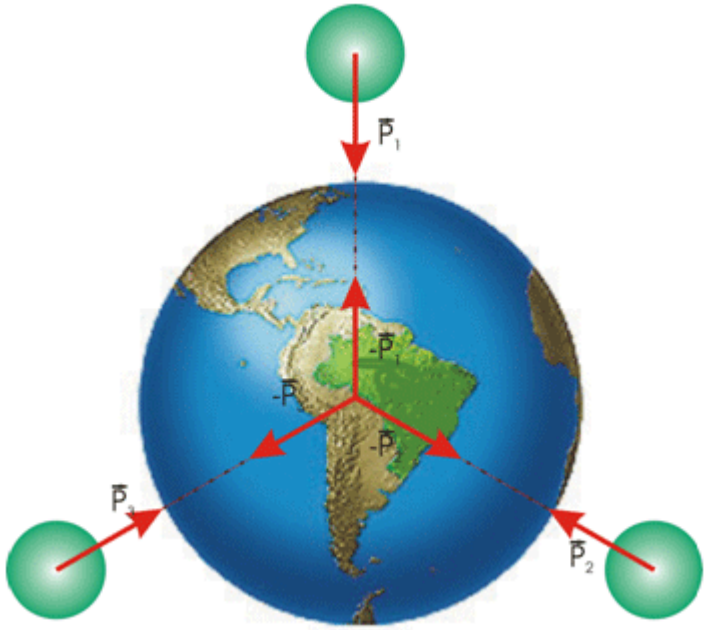
❑ Transmissão de Forças:

- ➢ Contato direto;
- ➢ Ação eletromagnética;
- ➢ **Centrífuga;**
- ➢ Gravitacional.

CARACTERÍSTICA DOS CORPOS

❑ Transmissão de Forças:

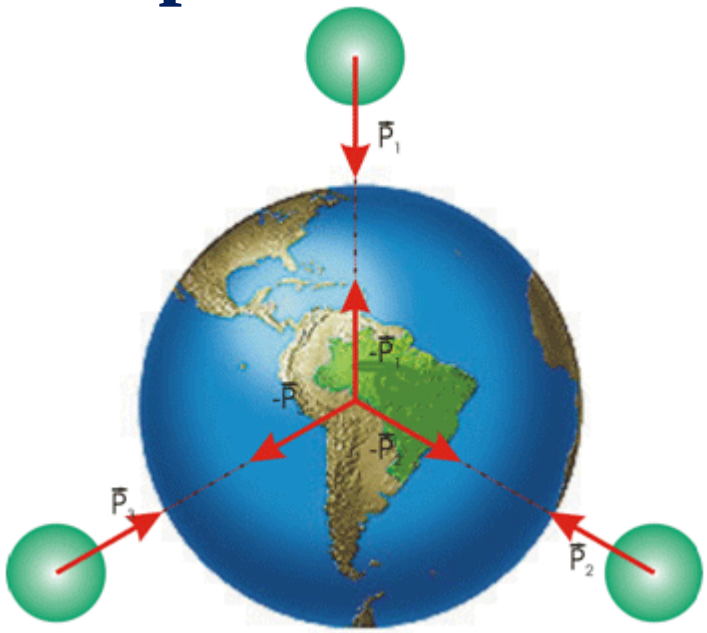
- ➢ Contato direto;
- ➢ Ação eletromagnética;
- ➢ Centrífuga;
- ➢ **Gravitacional.**



Dentre estas ações, a ação gravitacional merece certo destaque por ser uma força fundamental de atração que age entre todos os corpos.

CARACTERÍSTICA DOS CORPOS

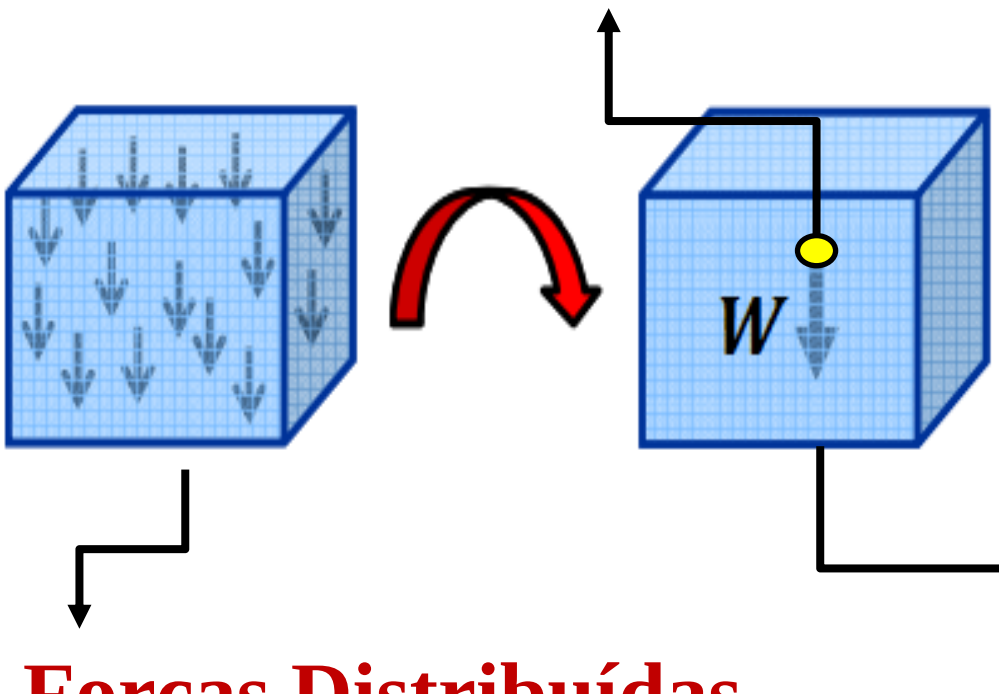
- **A Terra exerce uma força sobre cada uma das partículas que constituem o corpo.**

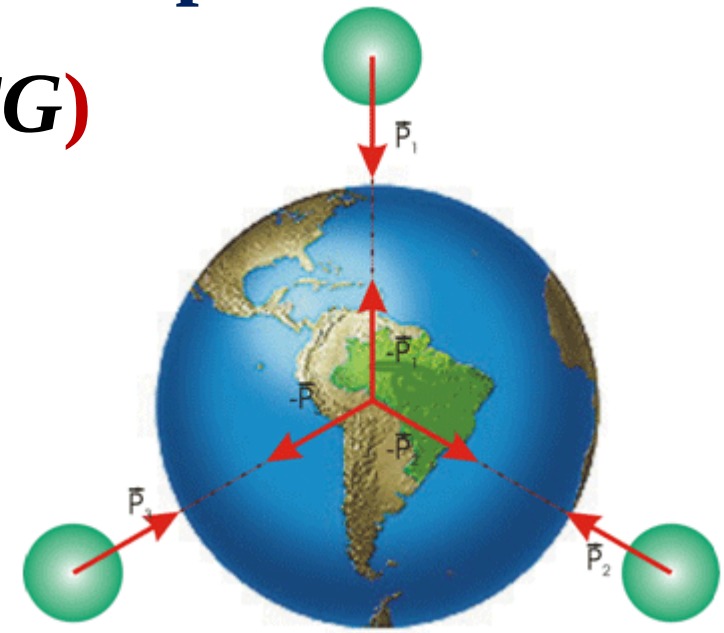


CARACTERÍSTICA DOS CORPOS

- A Terra exerce uma força sobre cada uma das partículas que constituem o corpo.

Centro de Gravidade (*CG*)





Forças Distribuídas

Forças Equivalente (*W*)

CARACTERÍSTICA DOS CORPOS

- **O centro de gravidade ≠ centro de massa ≠ centroide.**

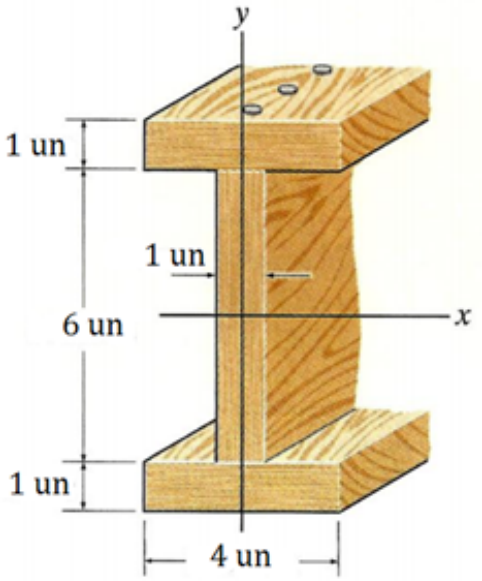
- **Centroide =** conceito puramente geométrico;

- **Centro de gravidade e de massa =** estão relacionados com as propriedades físicas de um corpo.

A partir desses conceitos, chega-se ao conceito de ***MOMENTO DE INÉRCIA***.

CARACTERÍSTICA DOS CORPOS

Aplicação: Esses conceitos são utilizados no dimensionamento de vigas para determinar a tensões atuantes numa seção transversal.



$$\sigma = \frac{M_{máx} \cdot y}{I_x}$$

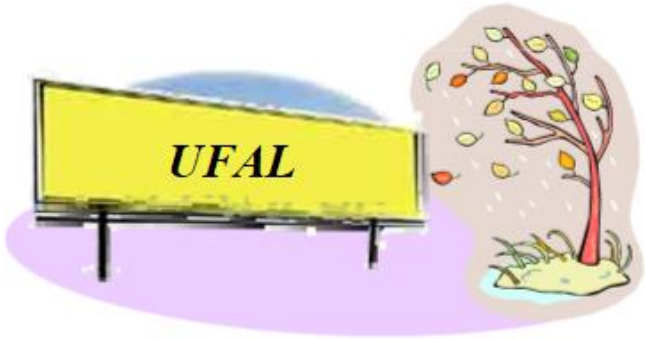
Sendo:

$M_{máx}$ - momento máximo atuante na viga;
Y - distância do local de aplicação do carregamento até o centroide da viga;
I_x - momento de inércia em relação ao eixo x.

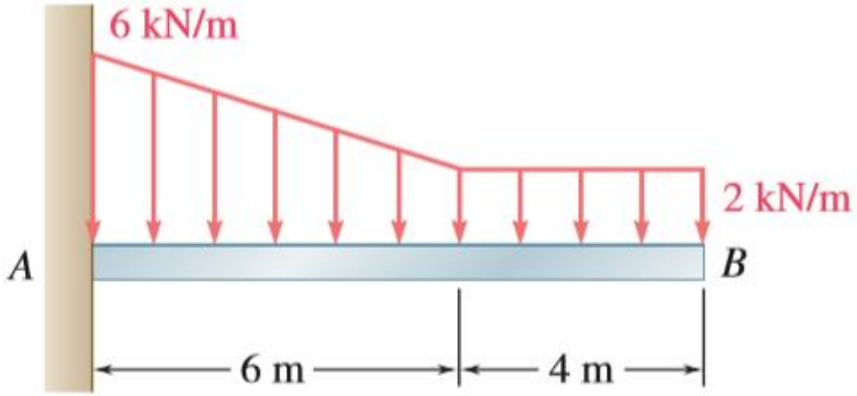
CARACTERÍSTICA DOS CORPOS

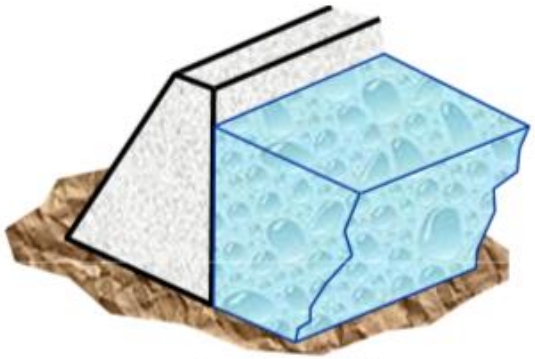
Aplicação: Consideração de ações distribuídas nos problemas de equilíbrio.

Ação gravitacional



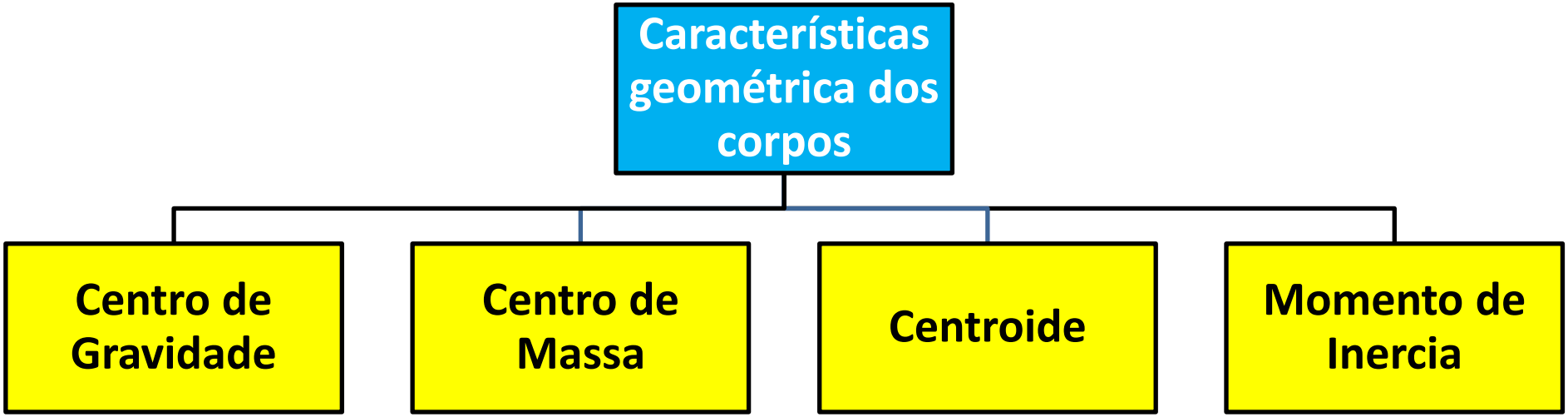
Ação do vento





Ação hidrostática

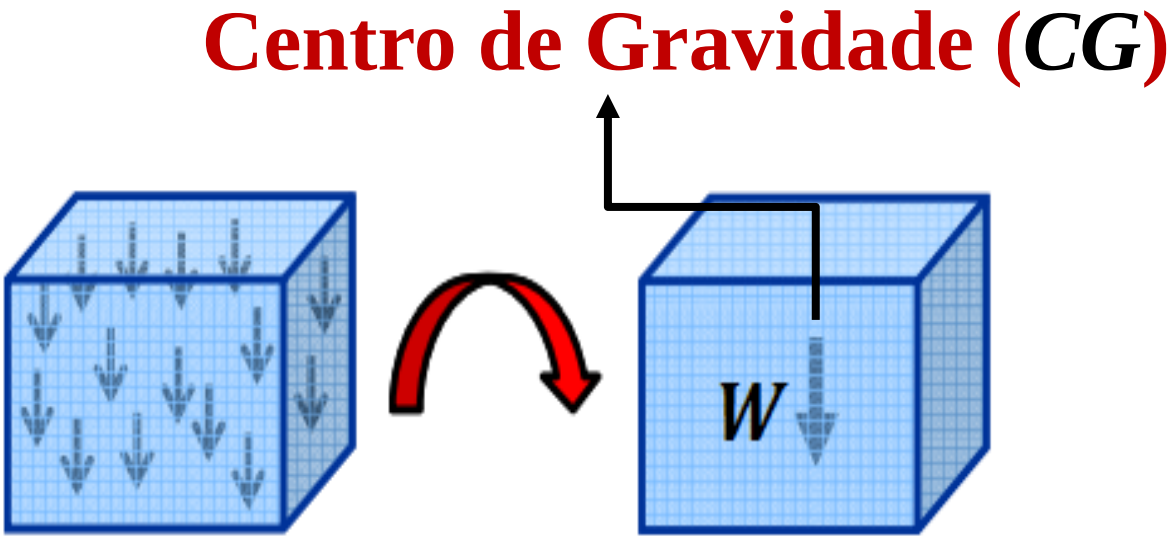
CARACTERÍSTICA DOS CORPOS



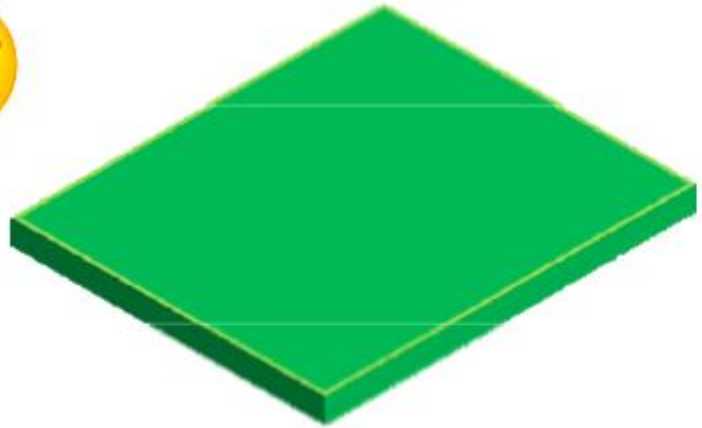
CENTRO DE GRAVIDADE (CG) OU BARICENTRO

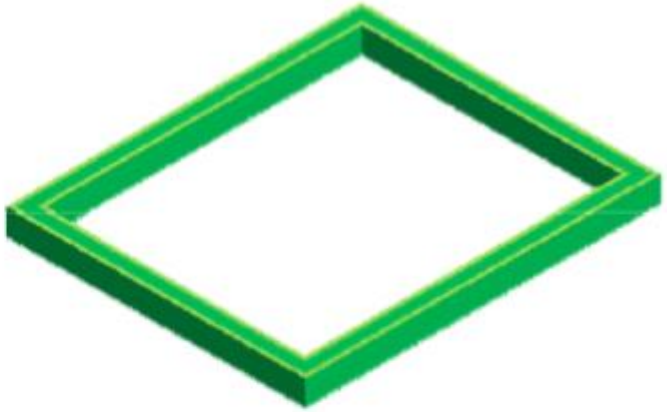
CENTRO DE GRAVIDADE

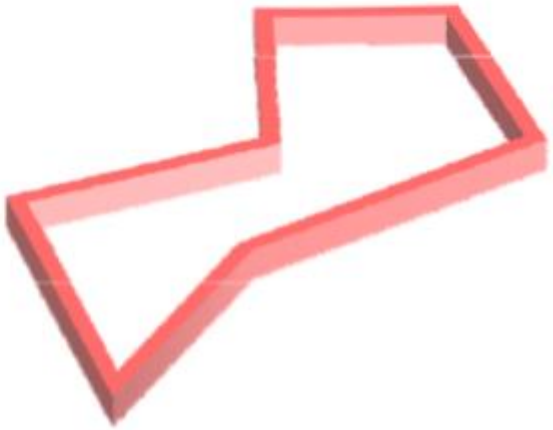
- O ***centro de gravidade*** ou ***baricentro*** de um corpo é a ***posição*** onde pode ser considerada a aplicação da força de gravidade resultante equivalente de todo o corpo!



CENTRO DE GRAVIDADE

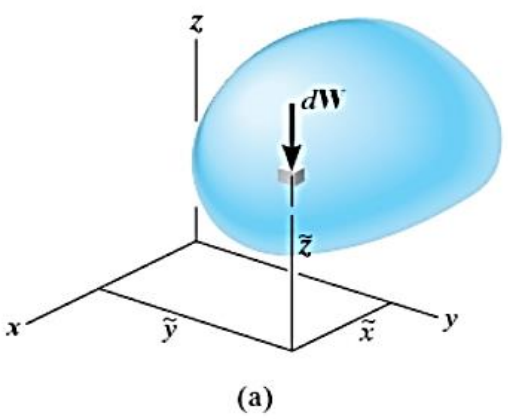




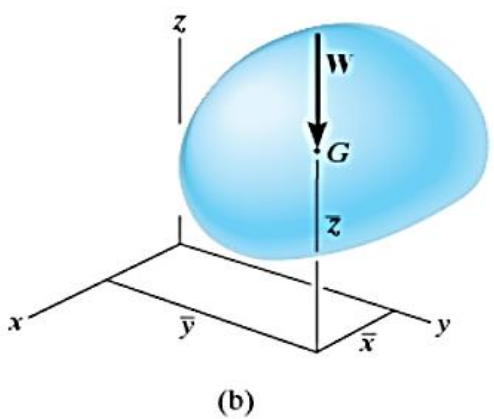


CENTRO DE GRAVIDADE

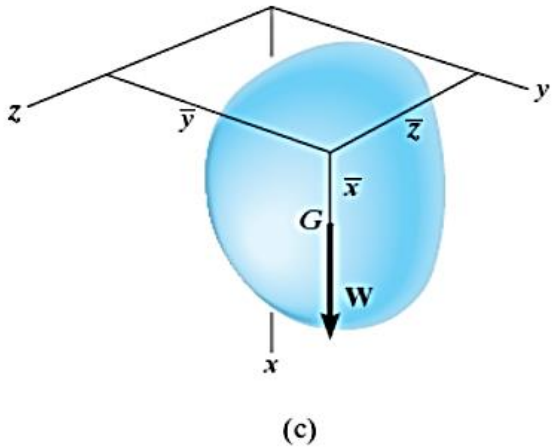
- Para determinar esse ponto, considere o sistema formado por infinitos números de partículas com peso *dW*.



(a)

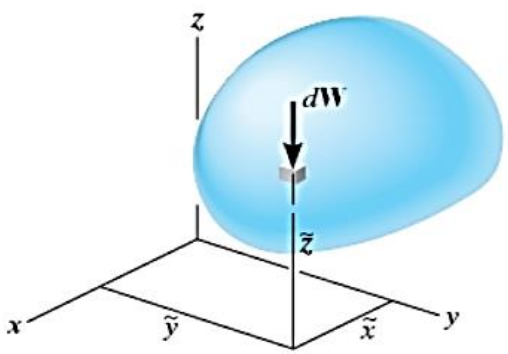


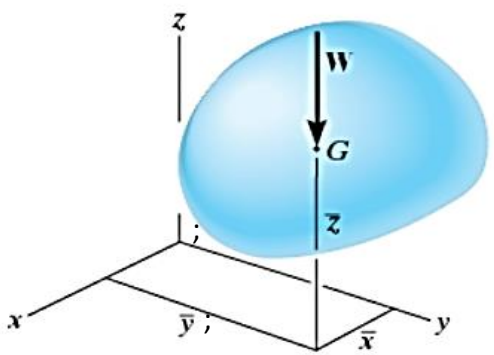
(b)

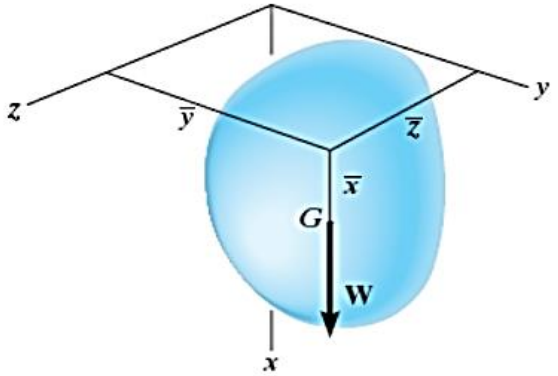


(c)

CENTRO DE GRAVIDADE







- O sistema de forças deve estar em equilíbrio, Logo:

Força resultante

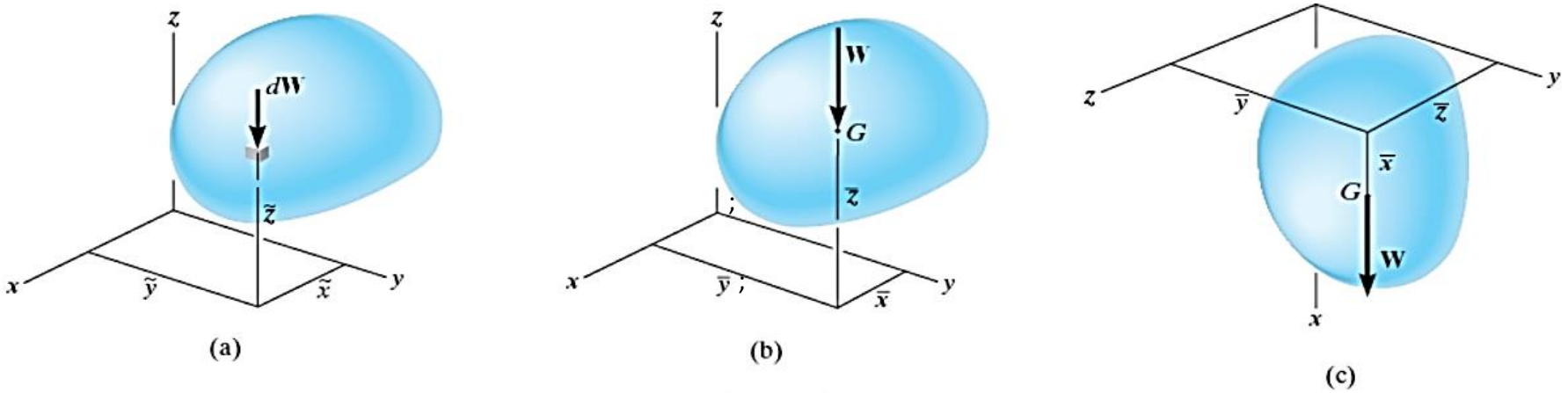
$$W = \int dW$$

Momento em torno do eixo

$$\bar{x} \cdot W = \int \tilde{x}\, dW \qquad \bar{y} \cdot W = \int \tilde{y}\, dW \qquad \bar{z} \cdot W = \int \tilde{z}\, dW$$

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dW}{\int dW} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dW}{\int dW} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\, dW}{\int dW}$$

CENTRO DE GRAVIDADE



- Se γ é o peso específico do corpo, então $dW = \gamma.dV$, e portanto:

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\,\gamma dV}{\int_V \gamma dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\,\gamma dV}{\int_V \gamma dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\,\gamma dV}{\int_V \gamma dV}$$

CENTRO DE MASSA

CENTRO DE MASSA

- Em problemas dinâmicos é necessário localizar um ponto denominado centro de massa.

- A densidade ρ (massa por unidade de volume) se relaciona com o peso específico pela equação $\gamma = \rho.g$;

- Substituindo essa relação na equação anterior, obtemos uma equação similar utilizada para determinar o centro de massa do corpo.

CENTRO DE MASSA

- Em problemas dinâmicos é necessário localizar um ponto denominado centro de massa.

- A densidade ρ (massa por unidade de volume) se relaciona com o peso específico pela equação $\gamma = \rho.g$;

- Substituindo essa relação na equação anterior, obtemos uma equação similar utilizada para determinar o centro de massa do corpo.

CENTRO DE MASSA

- Em problemas dinâmicos é necessário localizar um ponto denominado centro de massa.

- A densidade ρ (massa por unidade de volume) se relaciona com o peso específico pela equação $\gamma = \rho.g$;

- Substituindo essa relação na equação anterior, obtemos uma equação similar utilizada para determinar o centro de massa do corpo.

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\rho g dV}{\int_V \rho g dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\rho g dV}{\int_V \rho g dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\rho g dV}{\int_V \rho g dV}$$

CENTRÓIDE OU CENTRO GEOMÉTRICO

CENTRÓIDE

- O Centroide C é um ponto que define o centro geométrico de um objeto.

- Se o material que compõe corpo é feito de material homogêneo ou uniforme, então a sua densidade ρ será constante.

- As fórmulas resultantes definem o centroíde de um corpo, que são independentes do peso (g), dependendo apenas de sua geométria.

CENTRÓIDE

- O Centroide C é um ponto que define o centro geométrico de um objeto.

- Se o material que compõe corpo é feito de material homogêneo ou uniforme, então a sua densidade ρ será constante.

- As fórmulas resultantes definem o centroíde de um corpo, que são independentes do peso (g), dependendo apenas de sua geométria.

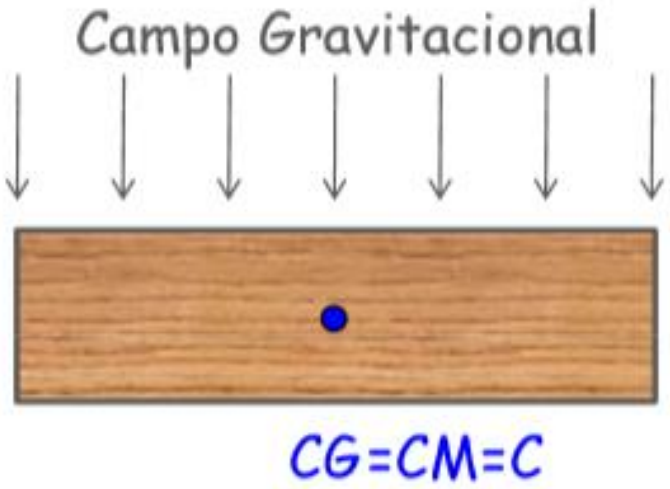
CENTRÓIDE

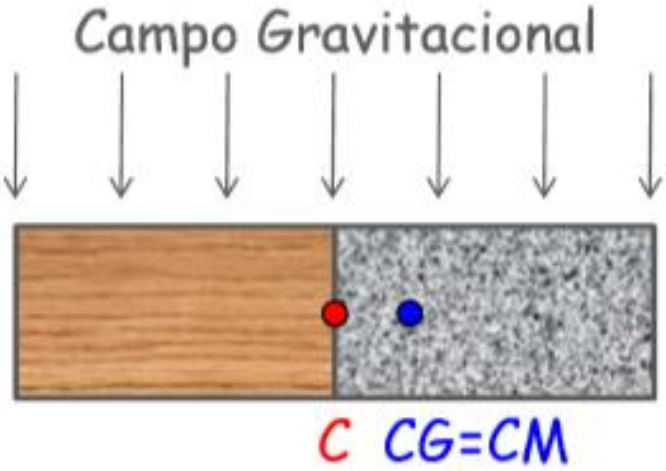
- O Centroide C é um ponto que define o centro geométrico de um objeto.

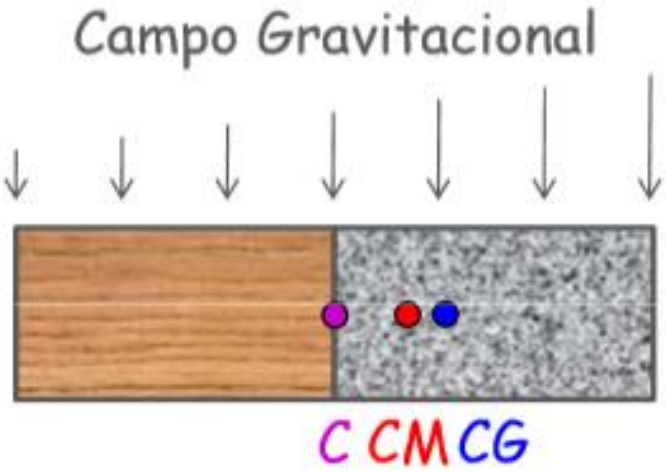
- Se o material que compõe corpo é feito de material homogêneo ou uniforme, então a sua densidade ρ será constante.

- As fórmulas resultantes definem o centroíde de um corpo, que são independentes do peso (g), dependendo apenas de sua geometria.

Diferenças entre: CG, CM e Centróide



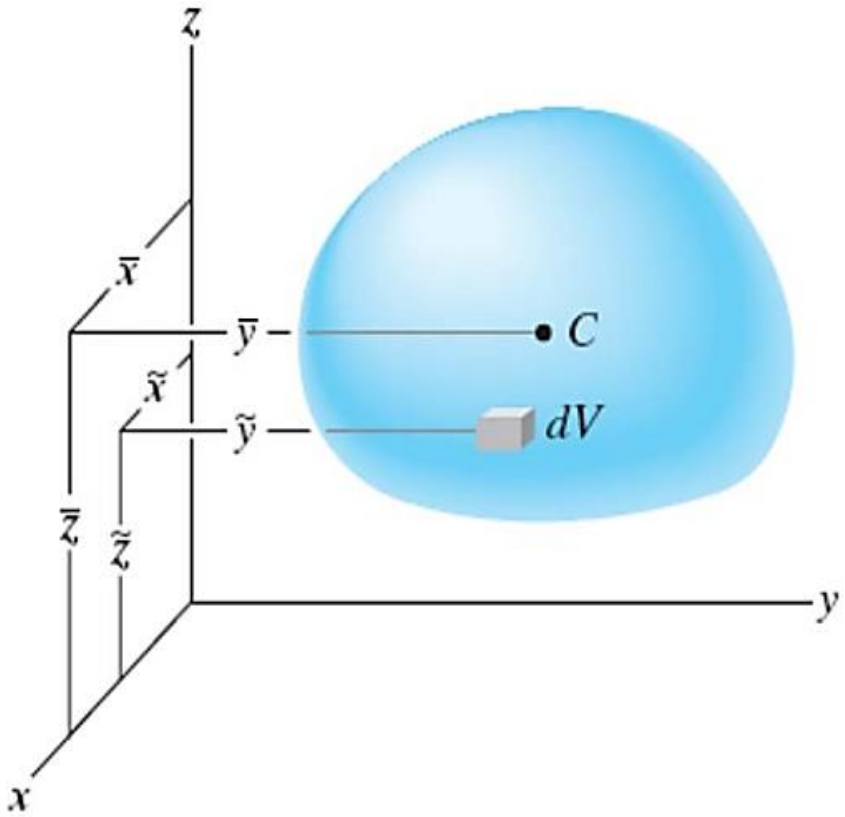




CENTRÓIDE DE UM VOLUME, DE UMA ÁREA E DE UMA LINHA

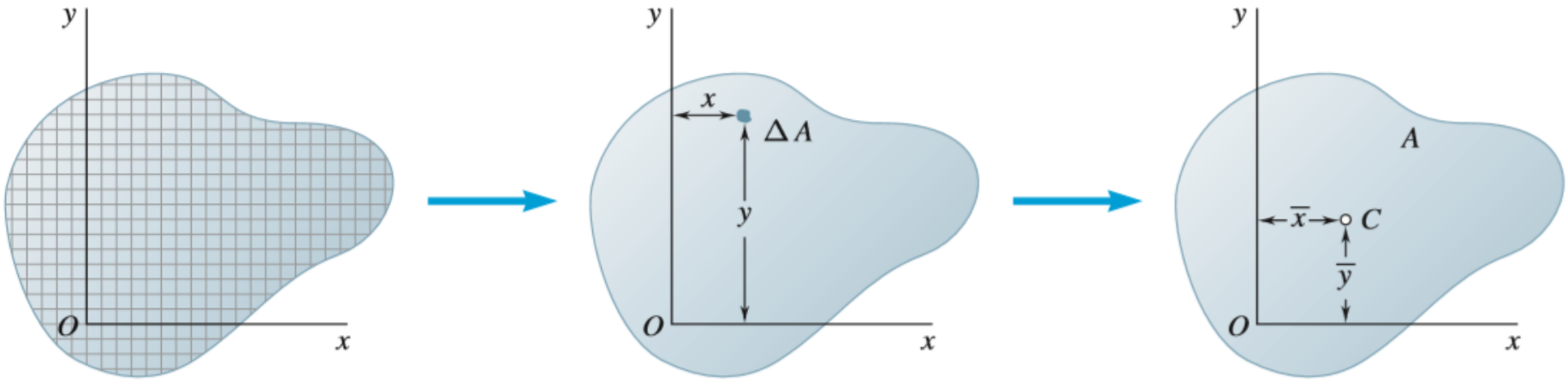
CENTRÓIDE DE UM VOLUME

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\,dV}{\int_V dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\,dV}{\int_V dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\,dV}{\int_V dV}$$



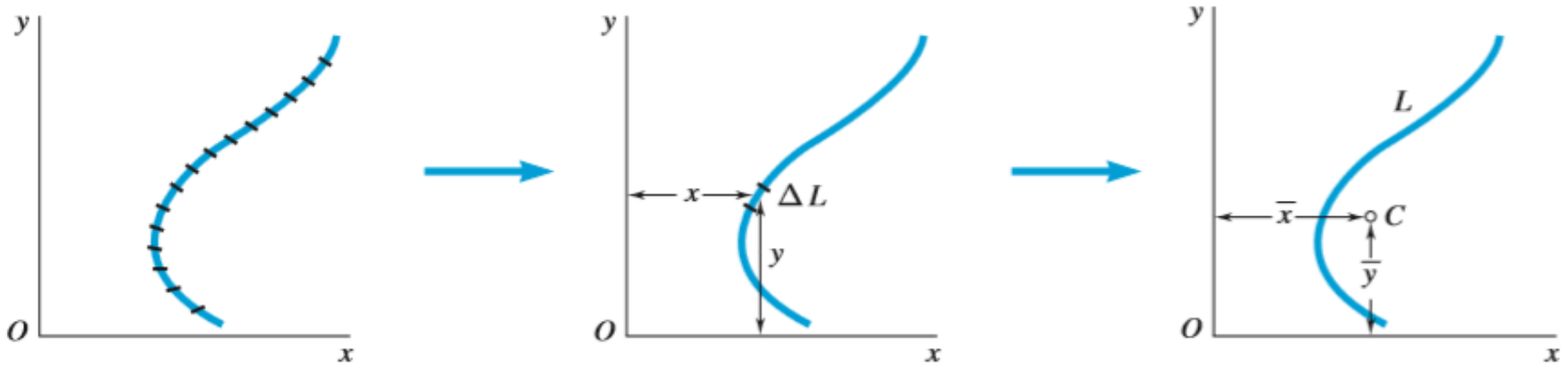
CENTRÓIDE DE UMA ÁREA

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA}$$



CENTRÓIDE DE UMA LINHA

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\,dL}{\int_L dL} \qquad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\,dL}{\int_L dL} \qquad \bar{z} = \frac{\int_L \tilde{z}\,dL}{\int_L dL}$$

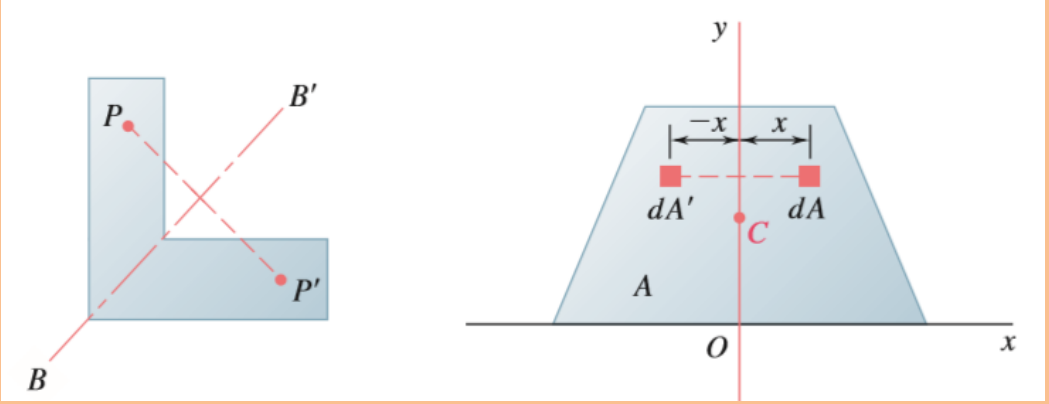


OBSERVAÇÃO

- É sempre interessante escolher um sistema de coordenadas que simplifique as equações descritas até aqui.

- Considerar sempre as possíveis simetrias do corpo avaliado.

- Nos casos, em que a forma geométrica tem um eixo de simetria, o centroide deverá ficar sobre o eixo.

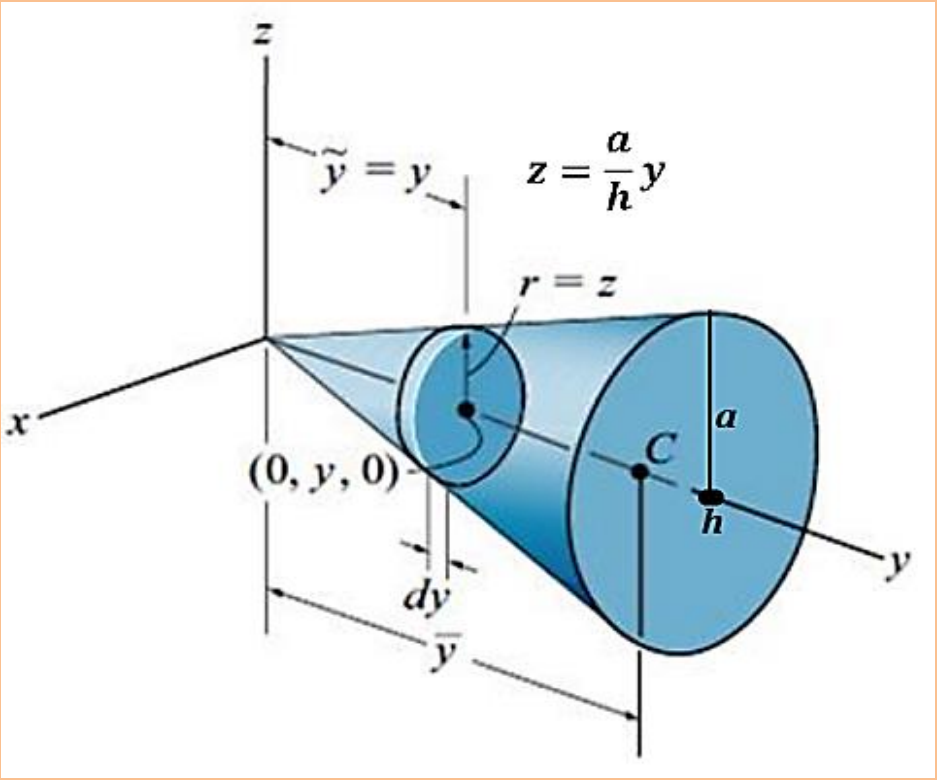


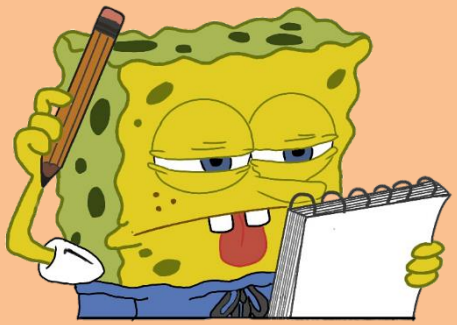
Determinação do C.G, C.M ou do C

- selecionar o sistema de coordenadas adequado;
- representação adequada dos elementos infinitesimais;
- consideração das possíveis simetrias;
- expressar o comprimento dL, ou a área dA, ou o volume dV em termos das coordenadas;
- determinar os braços dos momentos nos termos das coordenadas;
- representar a integral em função da mesma variável;
- os limites de integração são definidos com base nos valores extremos da coordenada avaliada.

EXEMPLO 1

- Determinar o CG, o CM e o centroide (C) do cone de revolução mostrado abaixo, sabendo que o material do sólido é homogêneo. E se fosse um paraboloide, o que mudaria?

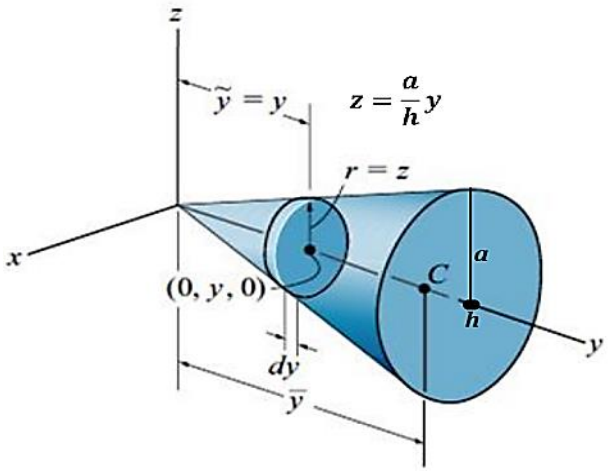




EXEMPLO 1

- Determinar o CG, o CM e o centroide (C) do cone de revolução mostrado abaixo, sabendo que o material do sólido é homogêneo. E se fosse um paraboloide, o que mudaria?

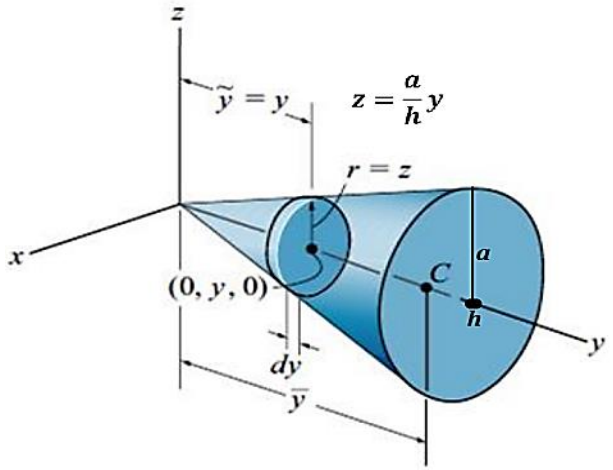
Observe que, como o cone é simétrico em relação ao eixo y, logo sabemos que o centroide se encontrará sobre esse eixo, consequentemente os braços x e z serão nulos.



EXEMPLO 1

- Determinar o CG, o CM e o centroide (C) do cone de revolução mostrado abaixo, sabendo que o material do sólido é homogêneo. E se fosse um paraboloide, o que mudaria?

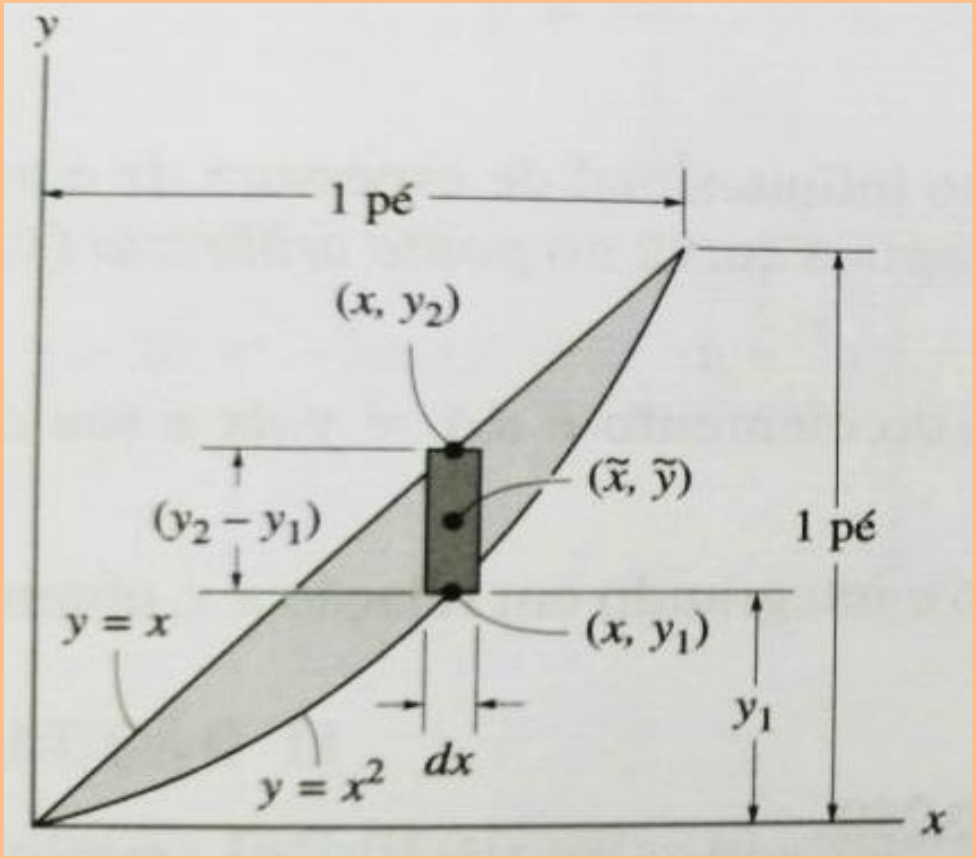
$$\bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\,dV}{\int_V dV}$$

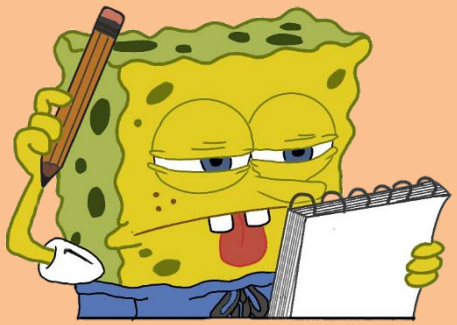


$$\bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\,dV}{\int_V dV} = \frac{\int_y y\left(\pi r^2 dy\right)}{\int_y \left(\pi r^2 dy\right)} = \frac{\int_y y\pi (a/h)^2 y^2 dy}{\int_y \pi (a/h)^2 y^2 dy} = \frac{\int_0^h \pi (a/h)^2 y^3 dy}{\int_0^h \pi (a/h)^2 y^2 dy} = \frac{\left(\pi (a/h)^2 h^4\right)/4}{\left(\pi (a/h)^2 h^3\right)/3} = \frac{3h}{4}$$

EXERCÍCIO PARA O LAR

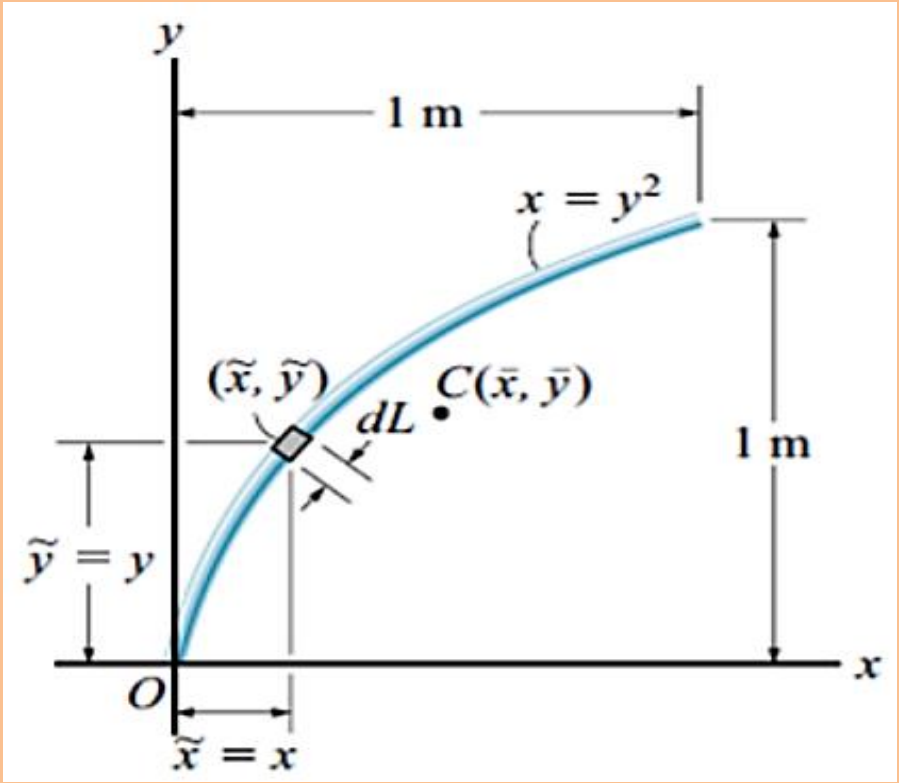
- Localizar a coordenada x do centroide da área sombreada limitada pelas duas curvas $y = x$ e $y = x^2$, conforme ilustra a figura.

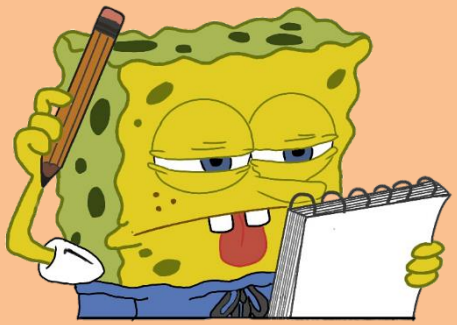




EXEMPLO 2

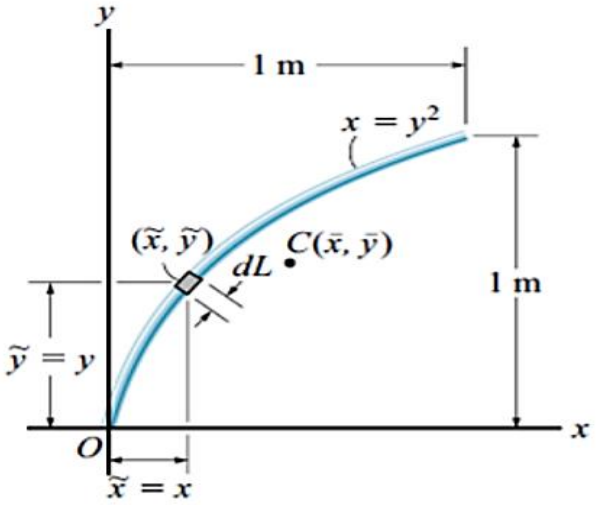
- Localize o centroide da haste dobrada na forma de um arco parabólico mostrada abaixo.





EXEMPLO 2

- Localize o centroide da haste dobrada na forma de um arco parabólico mostrada abaixo.



$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\,dy$$

$$dL = \sqrt{(2y)^2 + 1}\,dy$$

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\,dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^1 x\sqrt{4y^2+1}\,dy}{\int_0^1 \sqrt{4y^2+1}\,dy} = \frac{\int_0^1 y^2\sqrt{4y^2+1}\,dy}{\int_0^1 \sqrt{4y^2+1}\,dy}$$

$$= \frac{0.6063}{1.479} = 0.410m$$

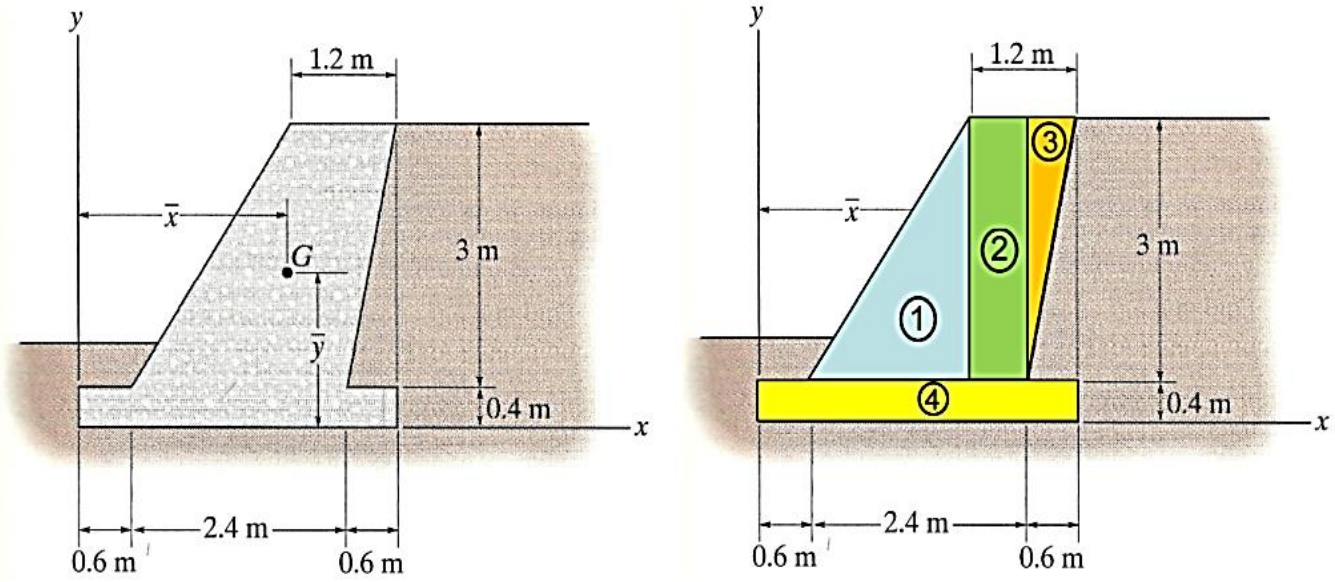
$$\bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\,dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^1 y\sqrt{4y^2+1}\,dy}{\int_0^1 \sqrt{4y^2+1}\,dy}$$

$$= \frac{0.8484}{1.479} = 0.574m$$

CORPOS COMPOSTOS

CORPOS COMPOSTOS

- Um corpo pode ser dividido em um conjunto de corpos com formatos mais simples (retângulos, triângulos, círculos, etc.)



- Assim, pode-se eliminar a necessidade de integração para obter o centroide ou CG de corpos com formatos mais complexos.

CORPOS COMPOSTOS

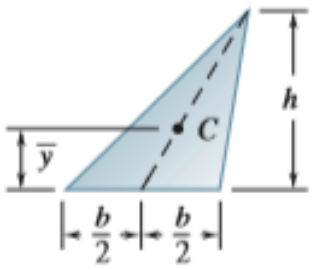
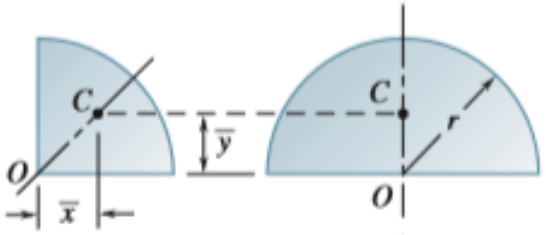
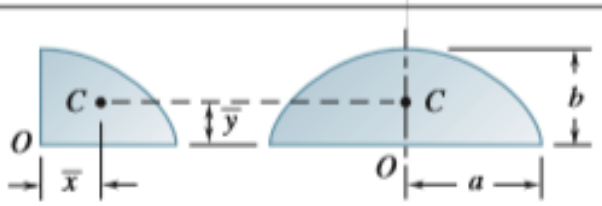
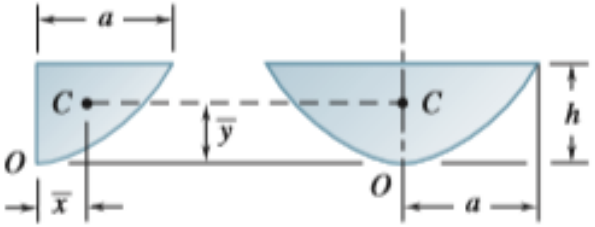
- Um corpo pode ser dividido em um conjunto de corpos com formatos mais simples (retângulos, triângulos, círculos, etc.)

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA}$$

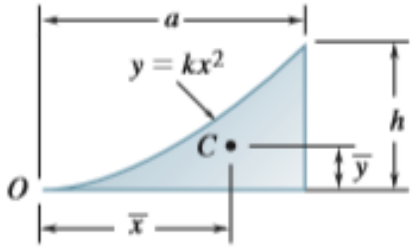
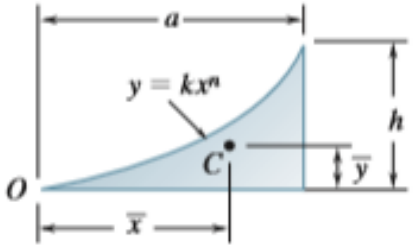
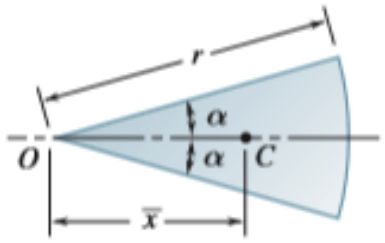
$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}A}{\sum A} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}A}{\sum A}$$

- Assim, pode-se eliminar a necessidade de integração para obter o centroide ou CG de corpos com formatos mais complexos.

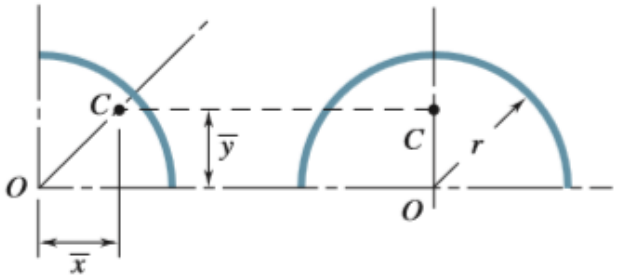
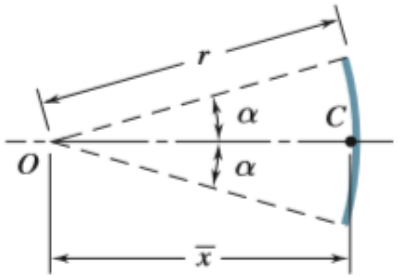
Superfícies de Formatos Usuais

Shape		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
Triangular area			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarter-circular area		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicircular area		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Quarter-elliptical area		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Semielliptical area		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Semiparabolic area		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parabolic area		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$

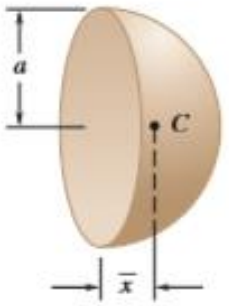
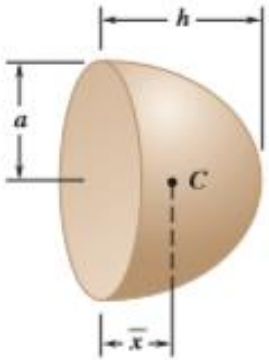
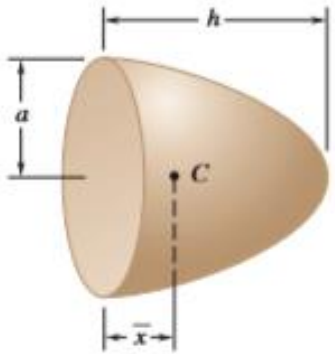
Superfícies de Formatos Usuais

Parabolic spandrel		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
General spandrel		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Circular sector		$\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

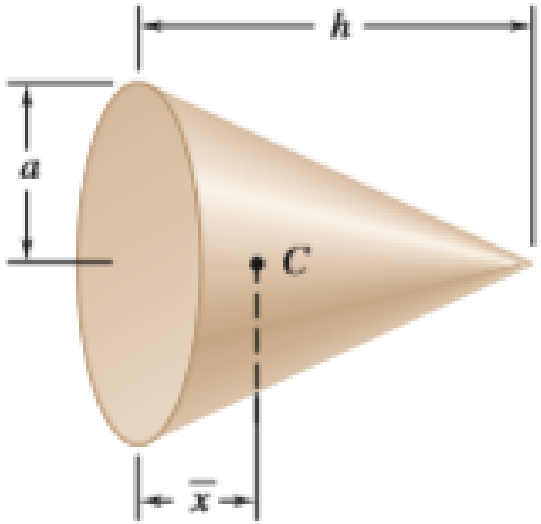
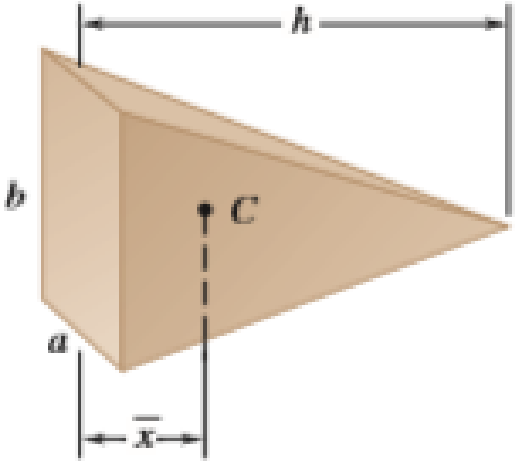
Superfícies de Formatos Usuais

Shape		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Length
Quarter-circular arc		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Semicircular arc		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arc of circle		$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Superfícies de Formatos Usuais

Shape		$\bar{x}$	Volume
Hemisphere		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
Semiellipsoid of revolution		$\frac{3h}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^2 h$
Paraboloid of revolution		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}\pi a^2 h$

Superfícies de Formatos Usuais

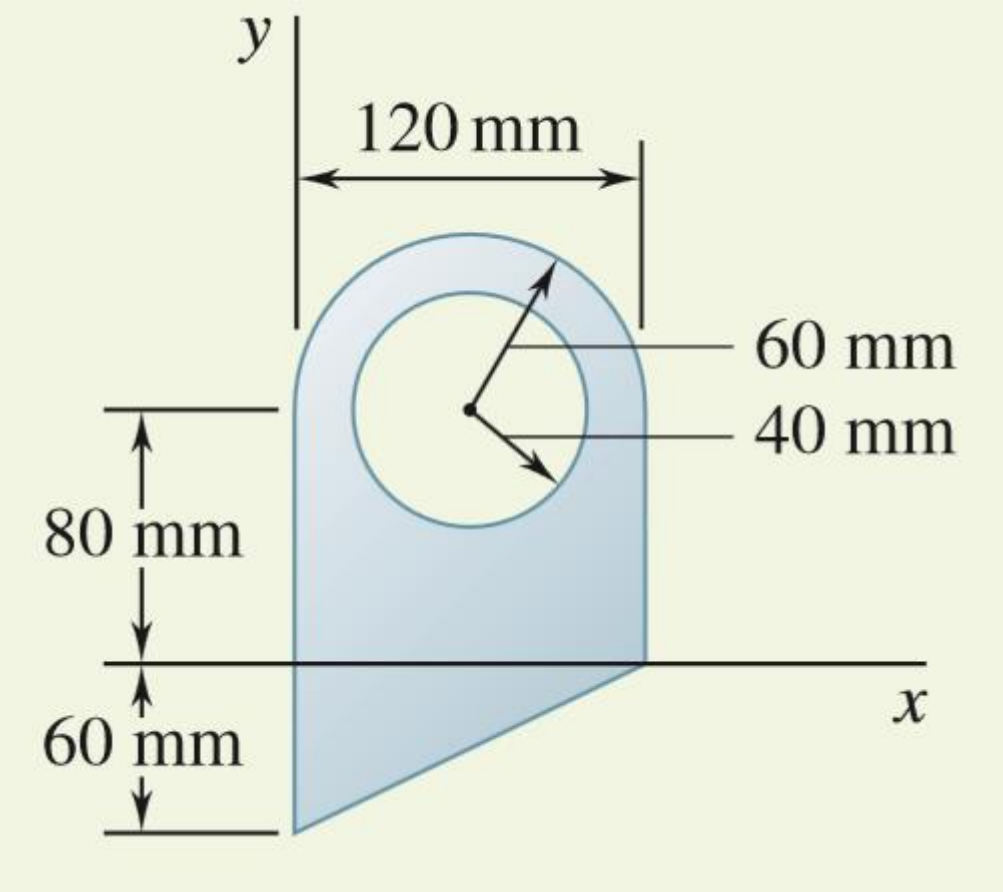
Cone		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi a^2 h$
Pyramid		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}abh$

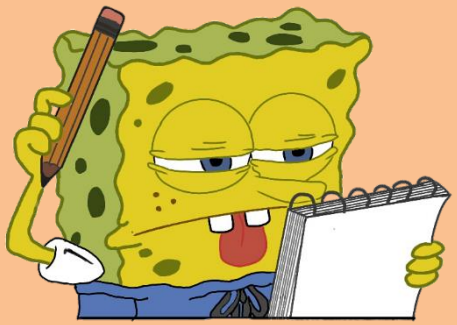
PROCEDIMENTOS

- Dividir o corpo em partes geométricas mais simples;
- Tratar possíveis furos no corpo como uma parte adicional com peso negativo;
- Estabelecer os eixos coordenados e os braços de momento (x, y e z);
- Determinar L, ou A ou V do elemento avaliado;
- Determinar o CG ou centroide de cada elemento;
- Organizar os cálculos em uma tabela e determinar pelo somatório de cada resultado o CG ou centroide do corpo.

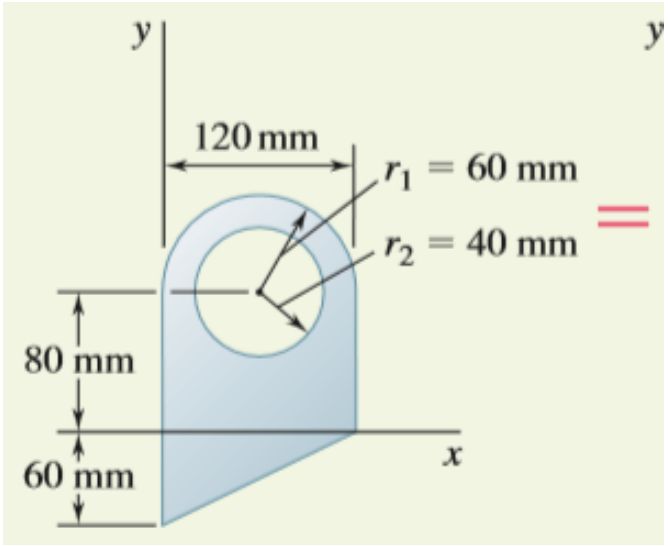
EXEMPLO 3

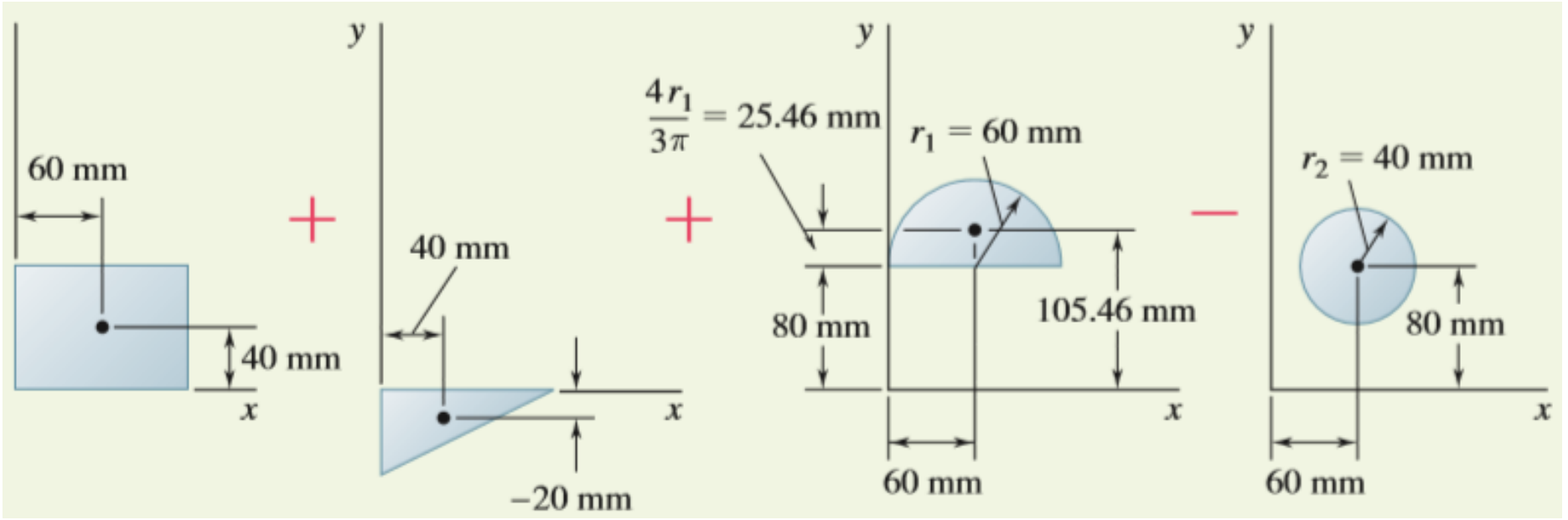
- Localizar o centroide da área abaixo.



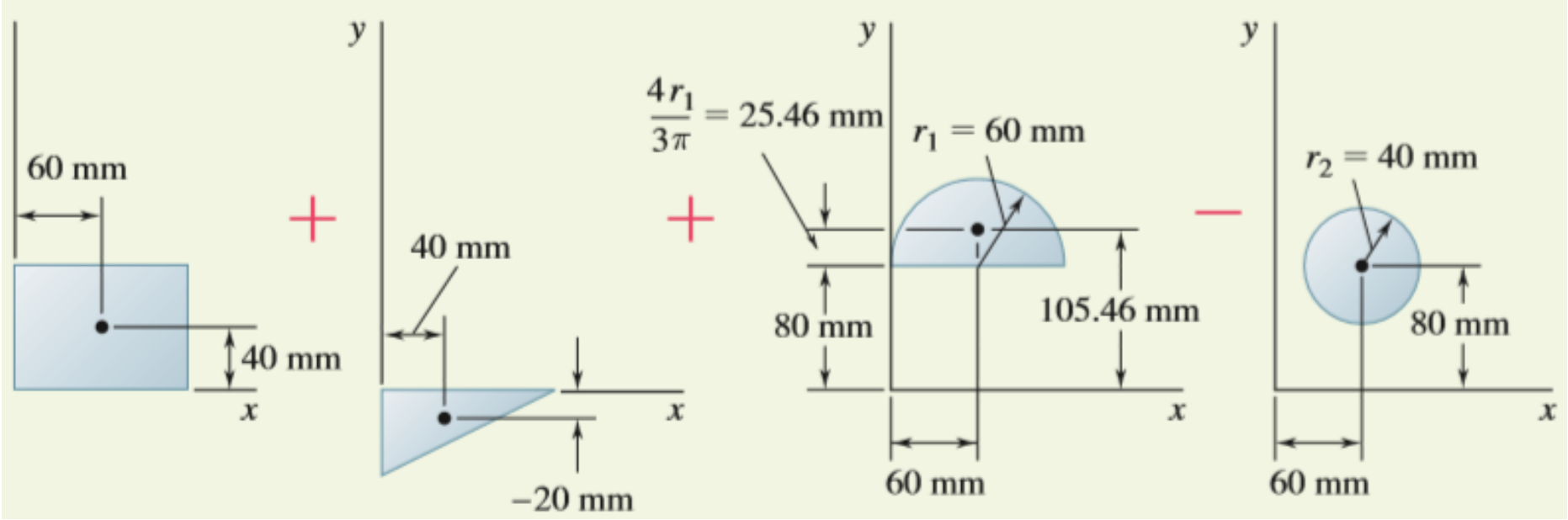


EXEMPLO 3


y
y
120 mm
$r_1 = 60$ mm
$r_2 = 40$ mm
80 mm
60 mm
x


y
60 mm
40 mm
x
y
40 mm
x
−20 mm
y
$\frac{4r_1}{3\pi} = 25.46$ mm
$r_1 = 60$ mm
80 mm
105.46 mm
x
60 mm
y
$r_2 = 40$ mm
80 mm
x
60 mm

EXEMPLO 3



Component	A, mm^2	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm^3	$\bar{y}A$, mm^3
Rectangle	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triangle	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	−20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicircle	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Circle	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma\bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma\bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

EXEMPLO 3

Component	A, mm^2	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm^3	$\bar{y}A$, mm^3
Rectangle	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triangle	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	-20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicircle	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Circle	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma \bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma \bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A: \qquad \bar{X}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

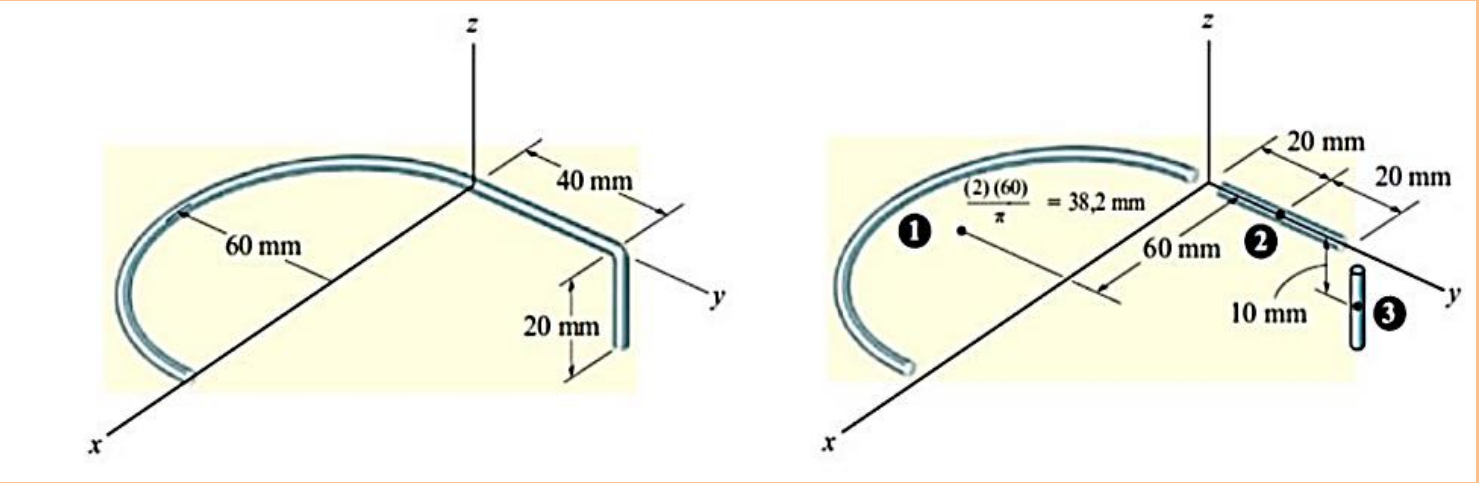
$$\bar{X} = 54.8 \text{ mm}$$

$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A: \qquad \bar{Y}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\bar{Y} = 36.6 \text{ mm}$$

Exercício para o lar

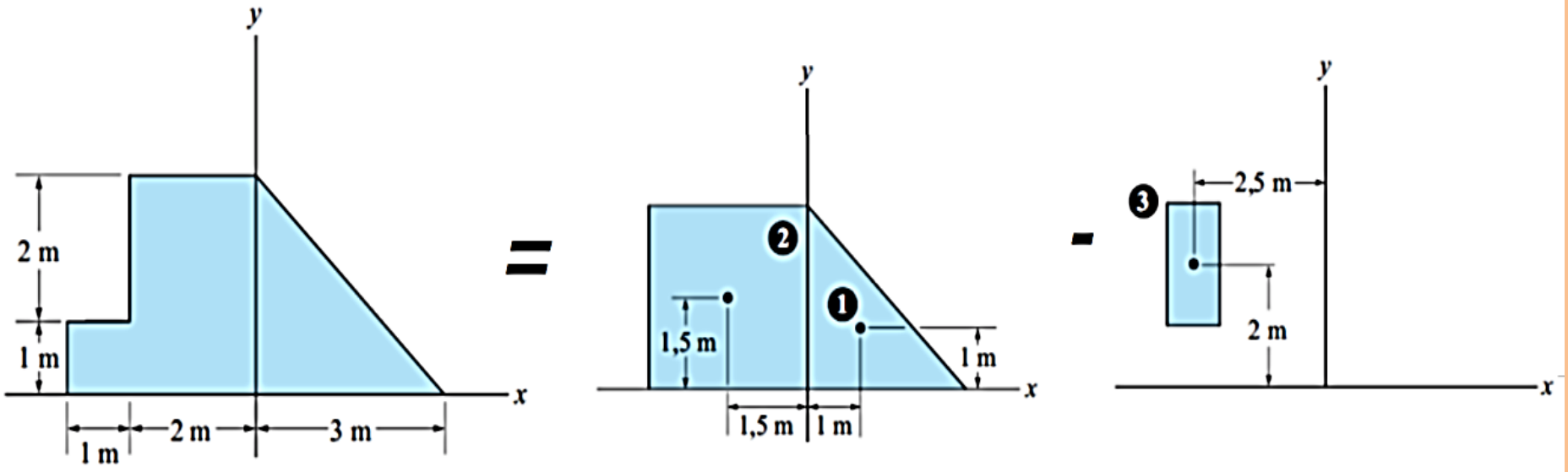
- Localizar o centroide do arame dobrado mostrado abaixo.

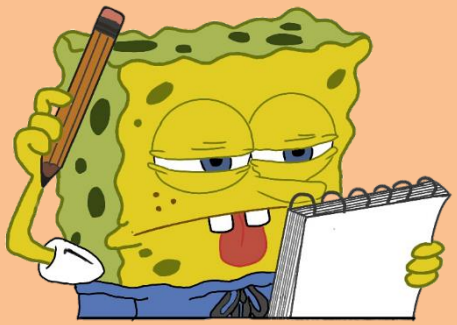


Segmento	L (mm)	$\tilde{x}$ (mm)	$\tilde{y}$ (mm)	$\tilde{z}$ (mm)	$\tilde{x}L$ (mm²)	$\tilde{y}L$ (mm²)	$\tilde{z}L$ (mm²)
1	Π.60 = 188,5	60	-38,2	0	11310	-7200	0
2	40	0	20	0	0	800	0
3	20	0	40	-10	0	800	-200
Σ	248,5	---	---	---	11310	-5600	-200
			$\bar{x}; \bar{y}; \bar{z}$				
		$\bar{x} = \sum \tilde{x}L / \sum I$	45,5	$\bar{y} = \sum \tilde{y}L /$	-22,5	$\bar{z} = \sum \tilde{z}L / \sum I$	-0,805

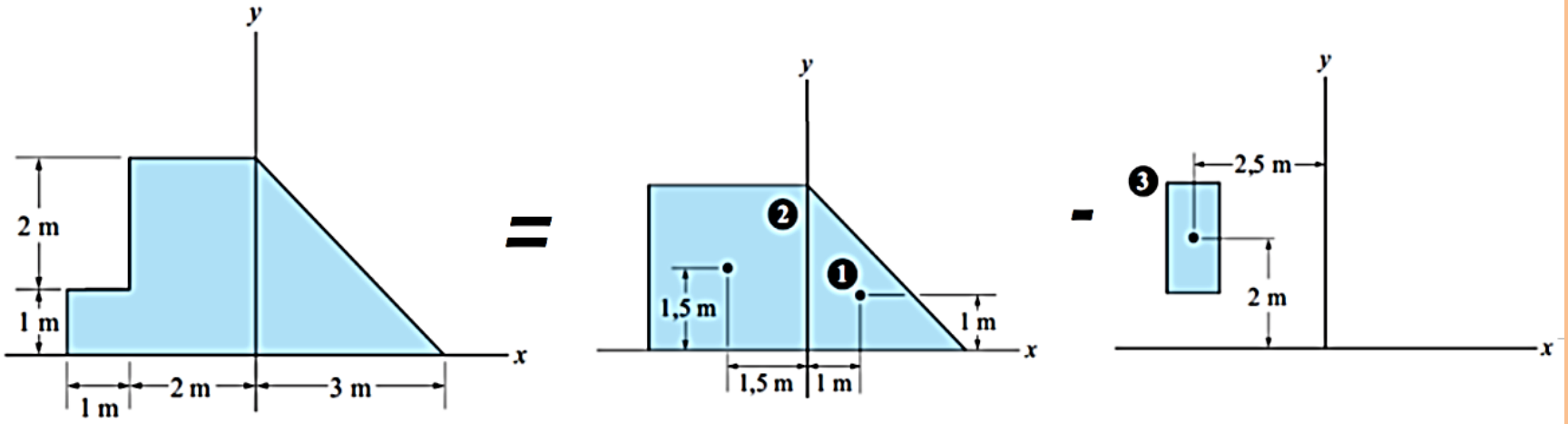
EXEMPLO 4

- Localizar o centroide da área abaixo.





EXEMPLO 4



Segmento	$A\ (m)$	$\tilde{x}\ (m)$	$\tilde{y}\ (m)$	$\tilde{z}\ (m)$	$\tilde{x}A\ (m^2)$	$\tilde{y}A\ (m^2)$	$\tilde{z}A\ (m^2)$
1	4,5	1	1	0	4,5	4,5	0
2	9	-1,5	1,5	0	-13,5	13,5	0
3	-2	-2,5	2	0	5	-4	0
Σ	11,5	---	---	---	-4	14	0
			$\bar{x}; \bar{y}; \bar{z}$				
		$\bar{x} = \sum \tilde{x}L / \sum I$	-0,348	$\bar{y} = \sum \tilde{y}L / \sum I$	1,22	$\bar{z} = \sum \tilde{z}L / \sum$	0

Teoremas de Pappus-Guldin

Teoremas de Pappus-Guldin

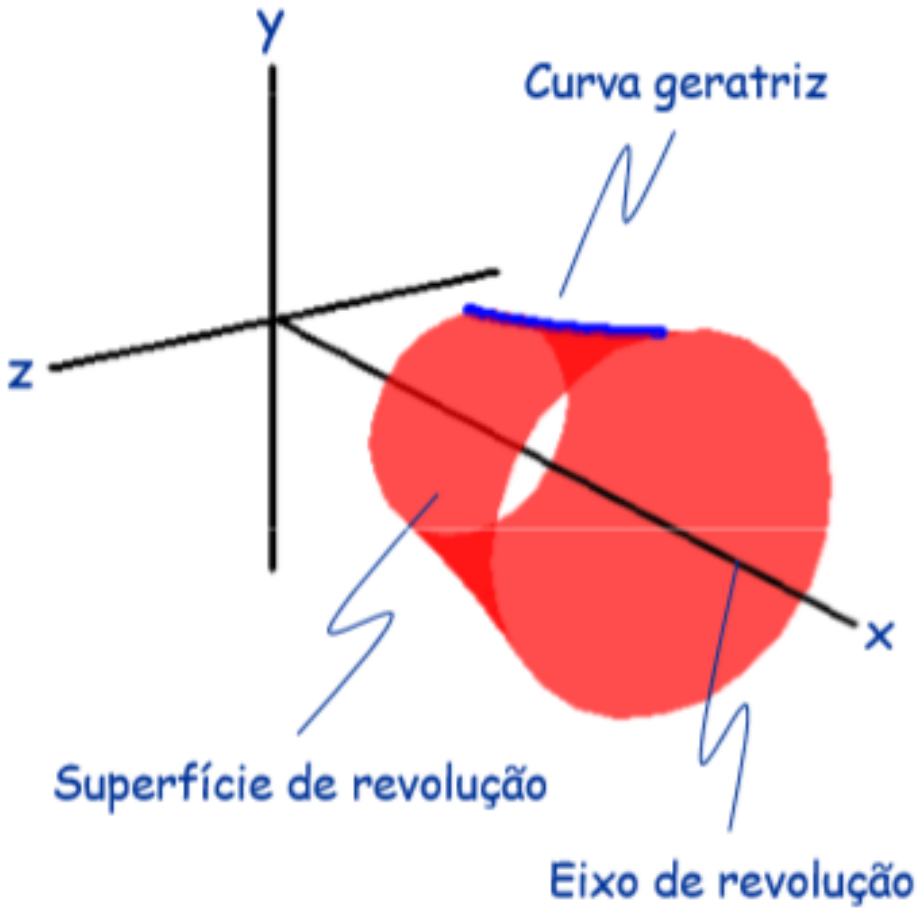
- Cálculo de área de superfície de revolução e volume de sólido de revolução.

- Formulados inicialmente pelo geômetra grego Pappus (século III d.C.)

- Restabelecidos posteriormente pelo matemático suíço Guldinus, ou Guldin (1577-1643).

Teoremas de Pappus-Guldin

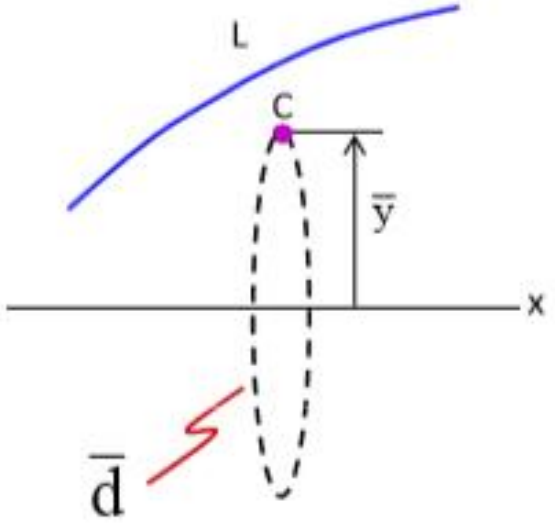
Superfície de revolução

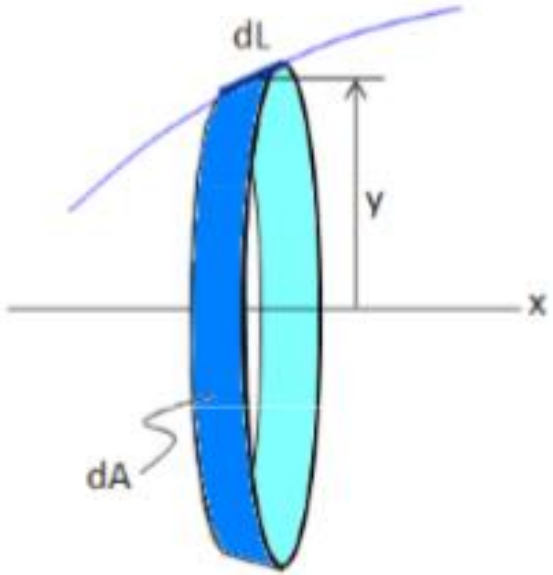


Teoremas de Pappus-Guldin

1° Teorema de Pappus-Guldin

A área de uma superfície de revolução é dada pelo produto do comprimento da curva geratriz pela distância percorrida pelo centróide da mesma durante a geração da superfície em pauta.



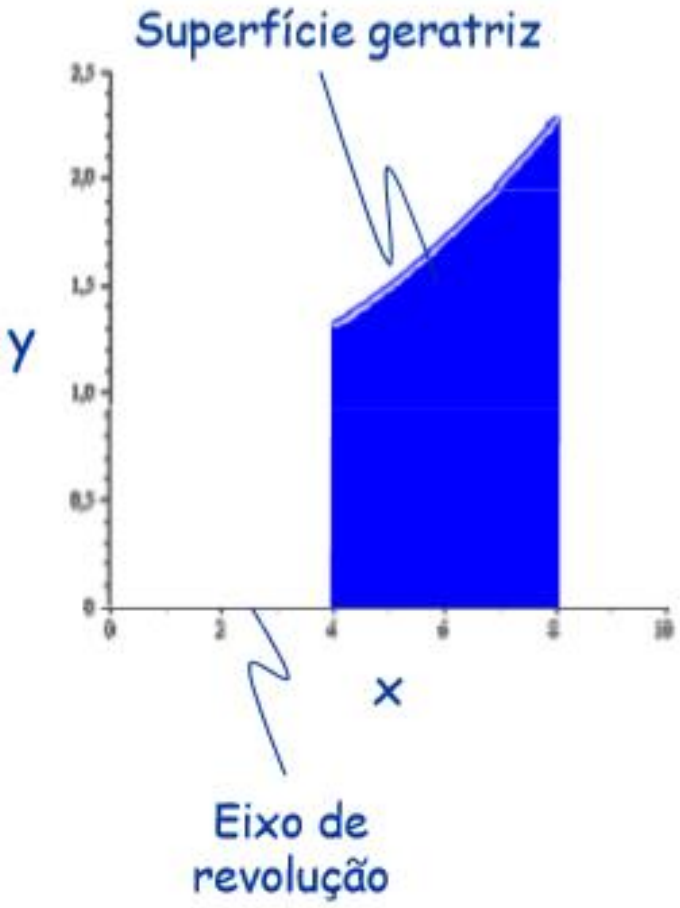


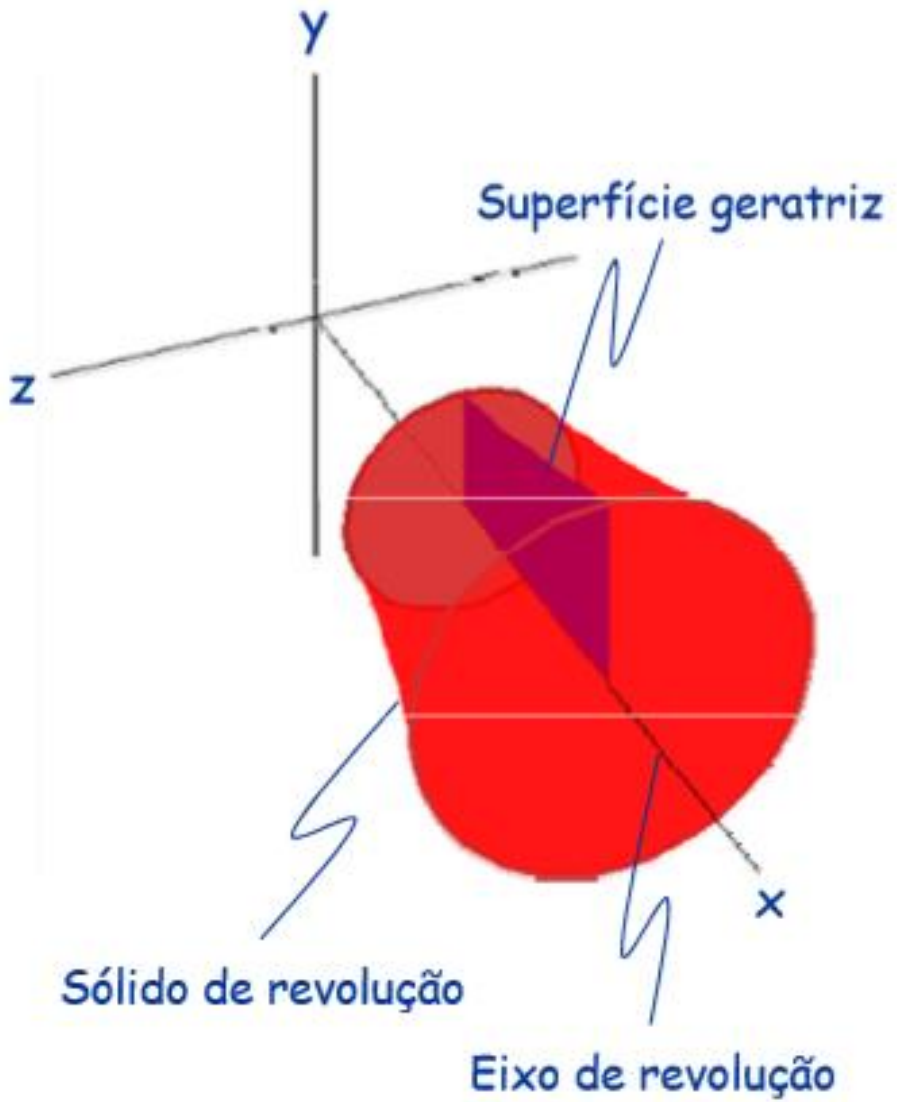
$$A = \int dA \qquad dA = 2\pi y dL \qquad A = \int 2\pi y dL$$

$$A = 2\pi \int y dL \qquad A = 2\pi \bar{y} L \qquad \boxed{A = \bar{d} L}$$

Teoremas de Pappus-Guldin

Sólido de revolução

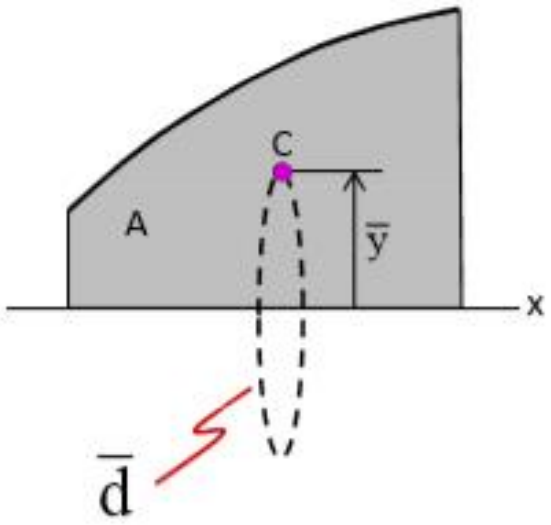


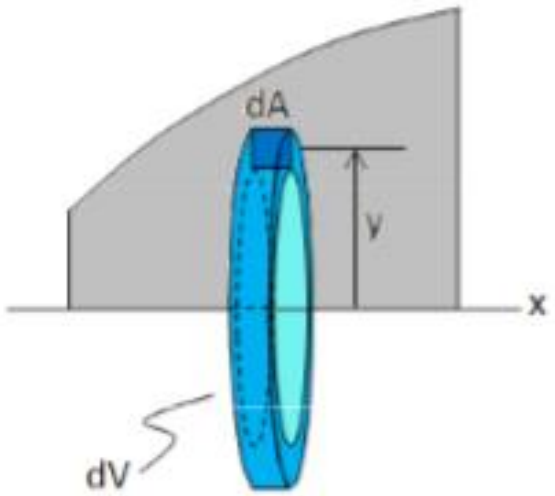


Teoremas de Pappus-Guldin

2° Teorema de Pappus-Guldin

O volume de um sólido de revolução é dado pelo produto da área da superfície geratriz pela distância percorrida pelo centróide da mesma durante a geração do sólido em pauta.





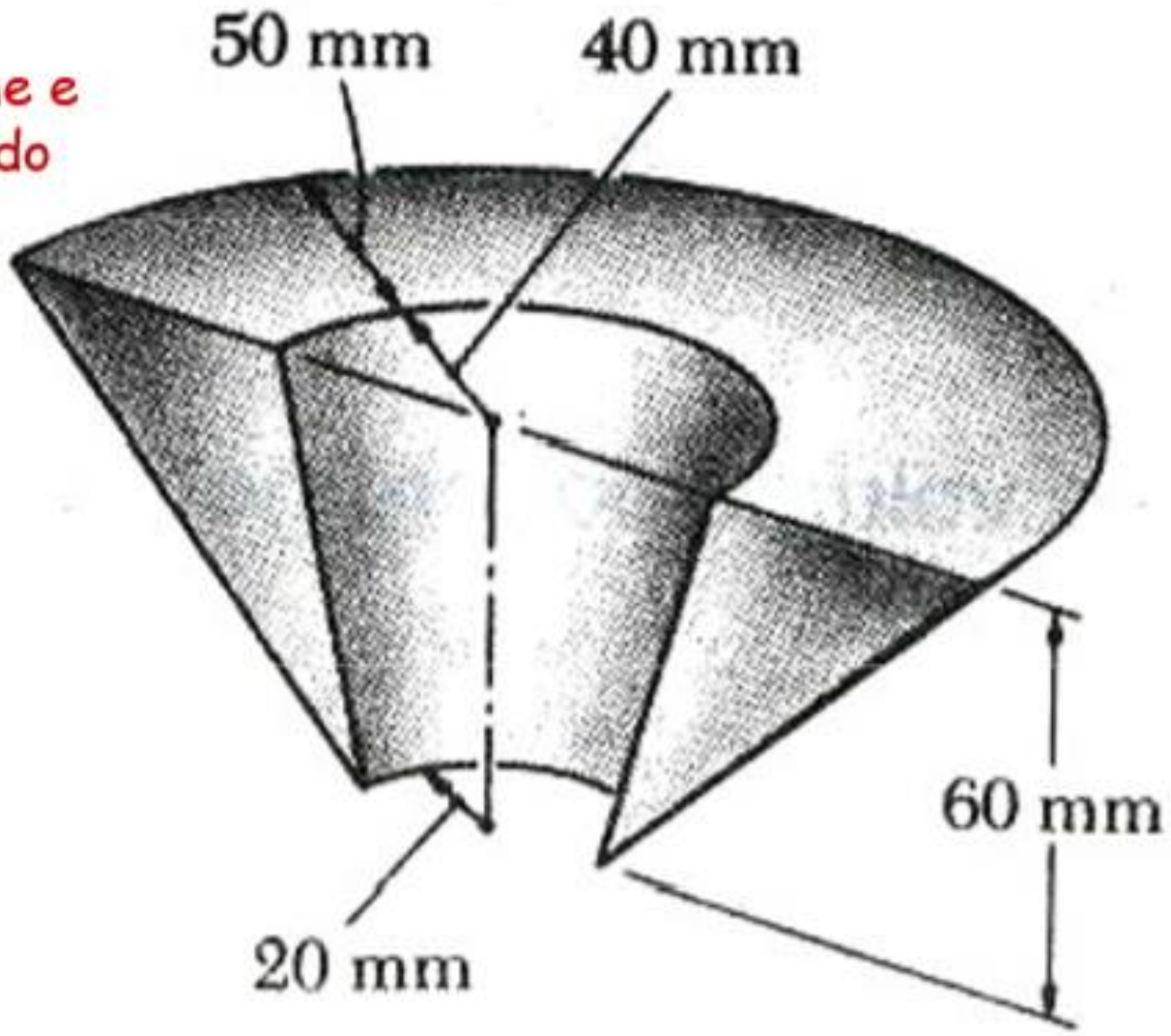
$$V = \int dV \qquad dV = 2\pi y dA \qquad V = \int 2\pi y dA$$

$$V = 2\pi \int y dA \qquad V = 2\pi \bar{y} A \qquad \boxed{V = \bar{d} A}$$

Teoremas de Pappus-Guldin

Exemplo:

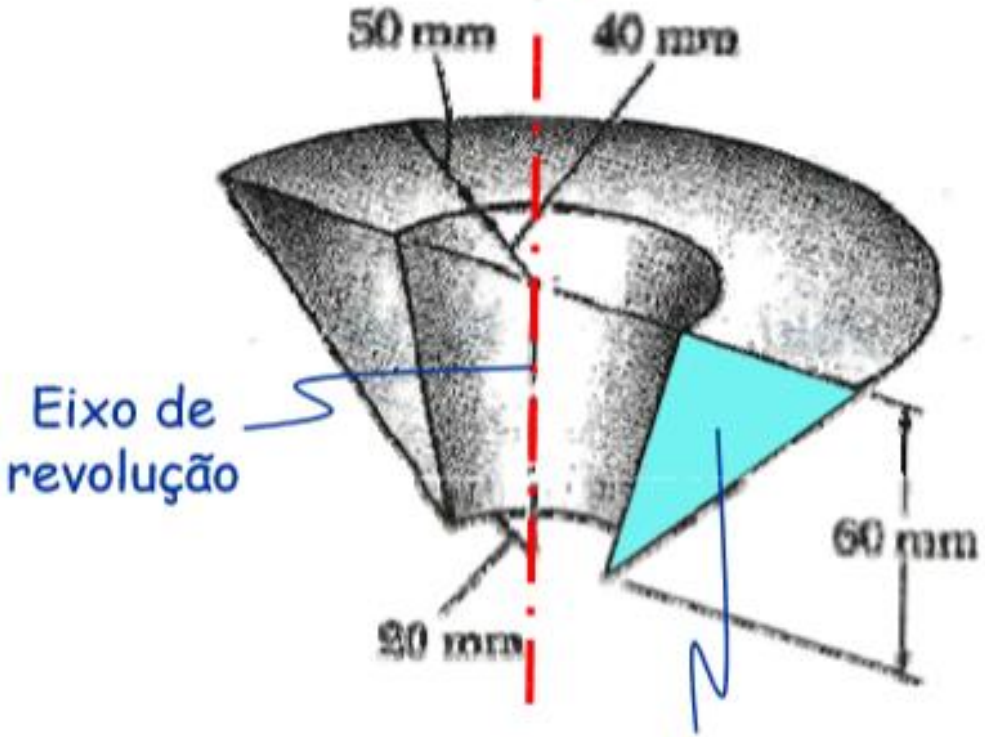
Determine o volume e a área superficial do sólido mostrado.

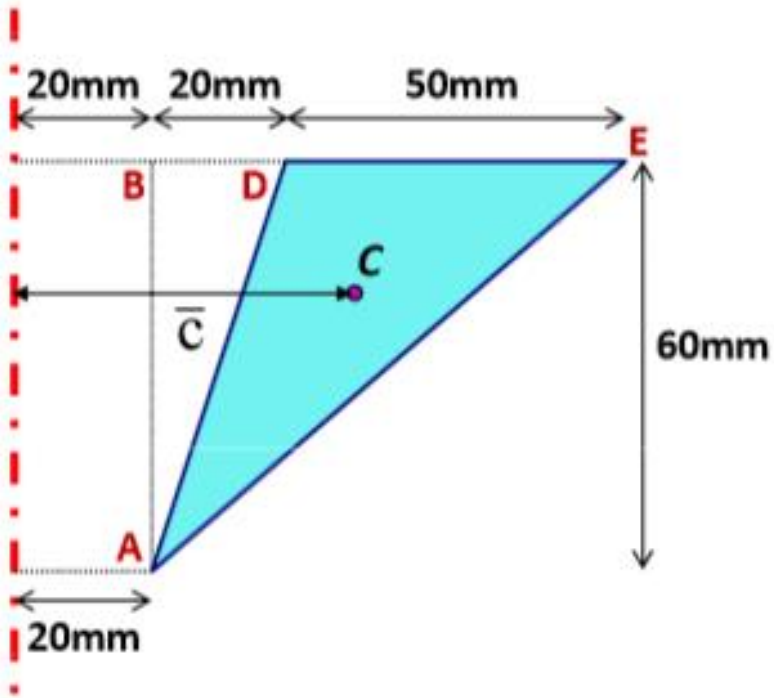


Teoremas de Pappus-Guldin

Exemplo (continuação):

Cálculo do volume pelo 2º Teorema de Pappus-Guldin



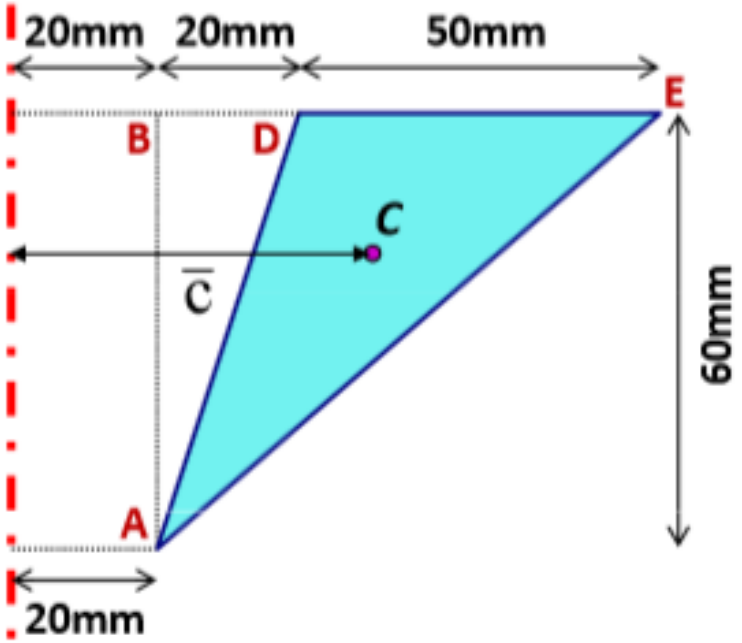


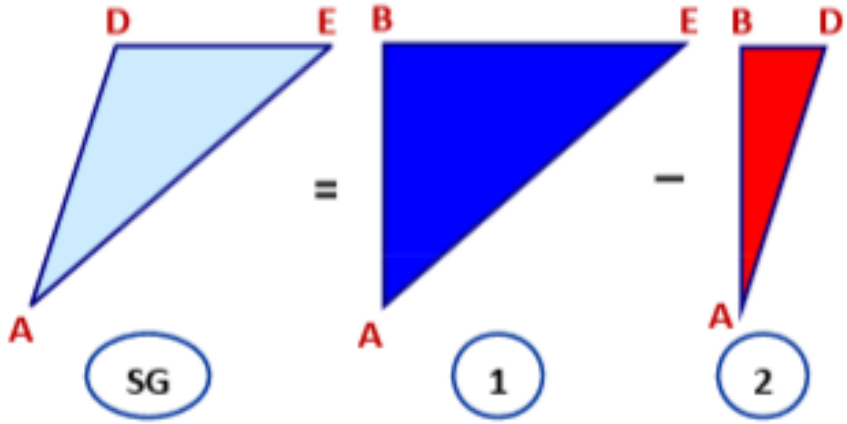
$$V^{SR} = \pi \bar{c} A^{SG} = \pi Q_{ER}^{SG}$$

Teoremas de Pappus-Guldin

Exemplo (continuação):

Cálculo do volume pelo 2º Teorema de Pappus-Guldin (cont.)





$$Q_{ER}^{SG} = Q_{ER}^{1} - Q_{ER}^{2}$$

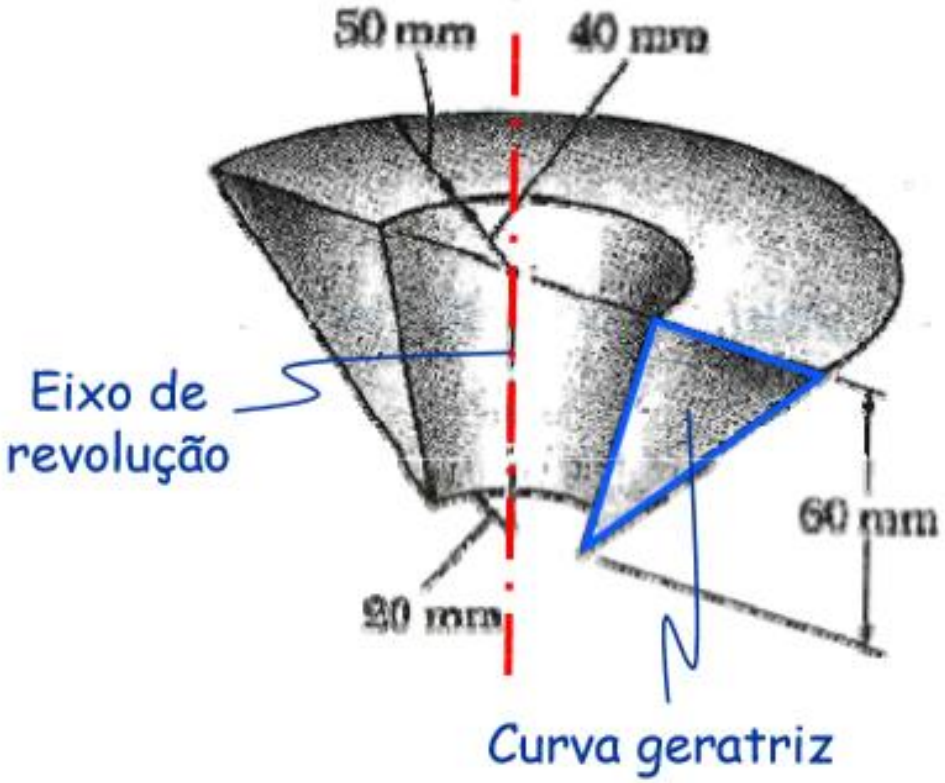
$$Q_{ER}^{SG} = \frac{70 \cdot 60}{2} \cdot \left(\frac{70}{3} + 20 \right) - \frac{20 \cdot 60}{2} \cdot \left(\frac{20}{3} + 20 \right)$$

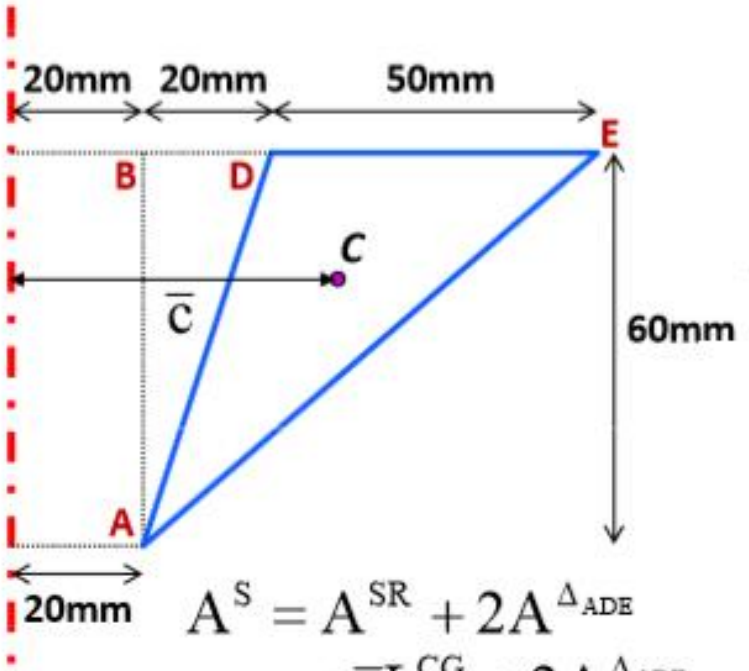
$$Q_{ER}^{SG} = 75000 \text{ mm}^3 \Rightarrow V^{SR} = 75000\pi \text{ mm}^3$$

Teoremas de Pappus-Guldin

Exemplo (continuação):

Cálculo da área pelo 1º Teorema de Pappus-Guldin



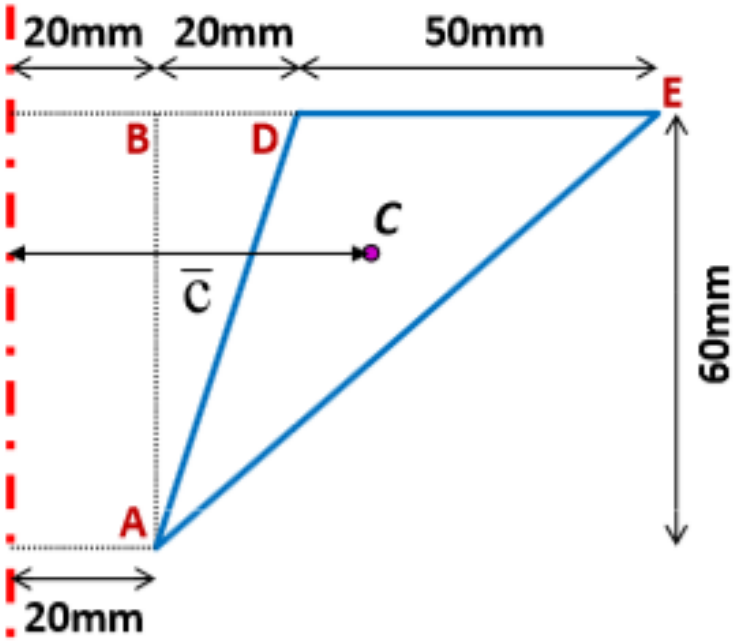


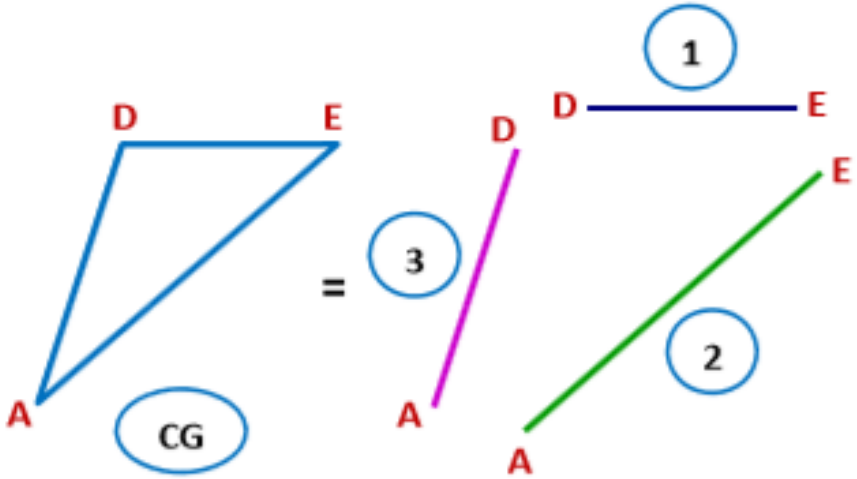
$$A^S = A^{SR} + 2A^{\Delta_{ADE}}$$
$$= \pi \overline{c} L^{CG} + 2A^{\Delta_{ADE}}$$
$$= \pi Q_{ER}^{CG} + 2A^{\Delta_{ADE}}$$

Teoremas de Pappus-Guldin

Exemplo (continuação):

Cálculo da área pelo 1º Teorema de Pappus-Guldin (cont.)





$$Q_{ER}^{CG} = Q_{ER}^{1} + Q_{ER}^{2} + Q_{ER}^{3}$$

$$Q_{ER}^{CG} = 50 \cdot \frac{40+90}{2} + \sqrt{70^2+60^2} \cdot \frac{90+20}{2} + \sqrt{20^2+60^2} \cdot \frac{40+20}{2}$$

$$Q_{ER}^{CG} = 10218{,}1\ \text{mm}^2 \Rightarrow A^S = 10218{,}1\pi + 50 \cdot 60 = \boxed{35101{,}2\ \text{mm}^2}$$

...

CONTINUA na Próxima Aula