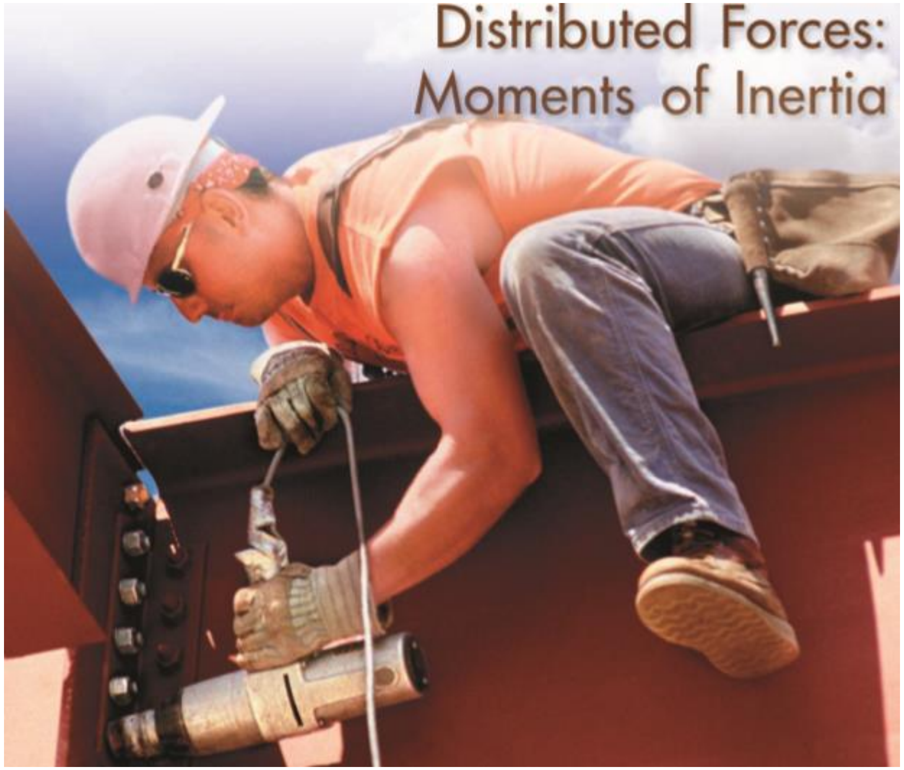
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS SERTÃO
EIXO TECNOLOGIA



Mecânica dos Sólidos I

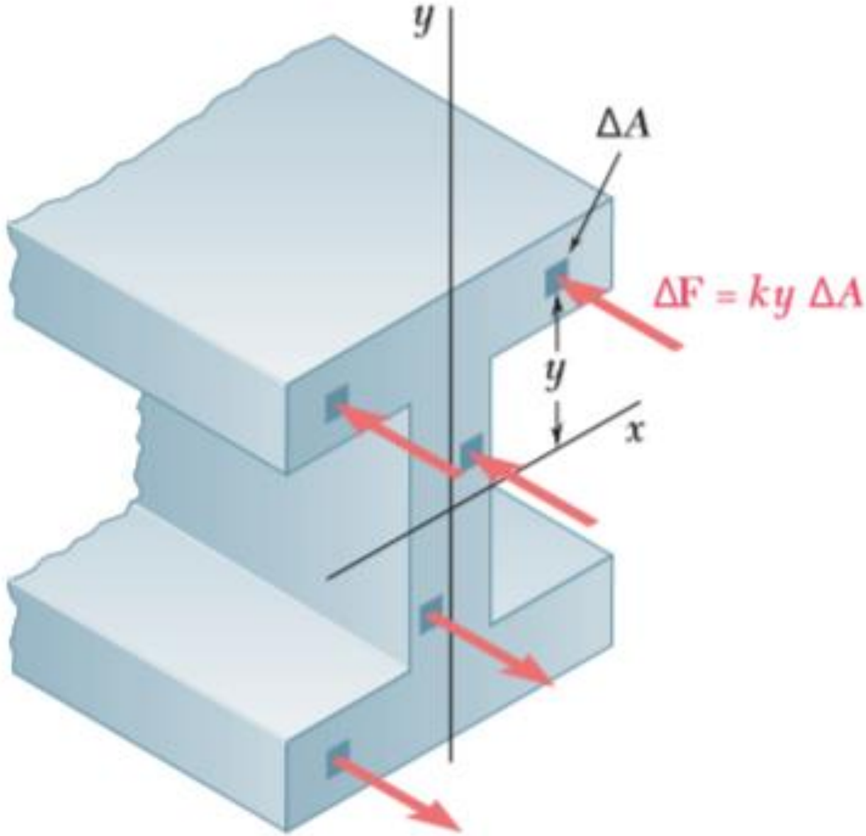
Prof. Dr. Alverlando Ricardo

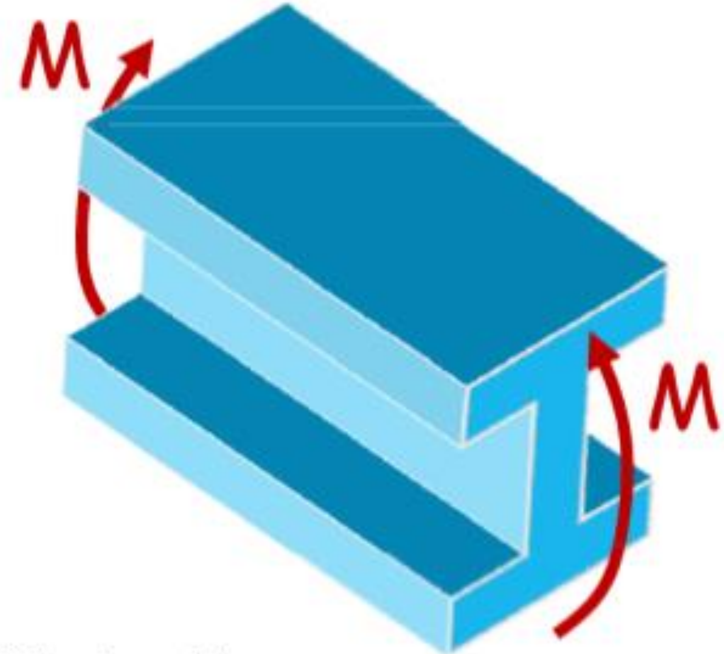
Aula 6: Forças Distribuídas: Momento de Inércia

MOTIVAÇÃO

VIGA SUBMETIDA À FLEXÃO

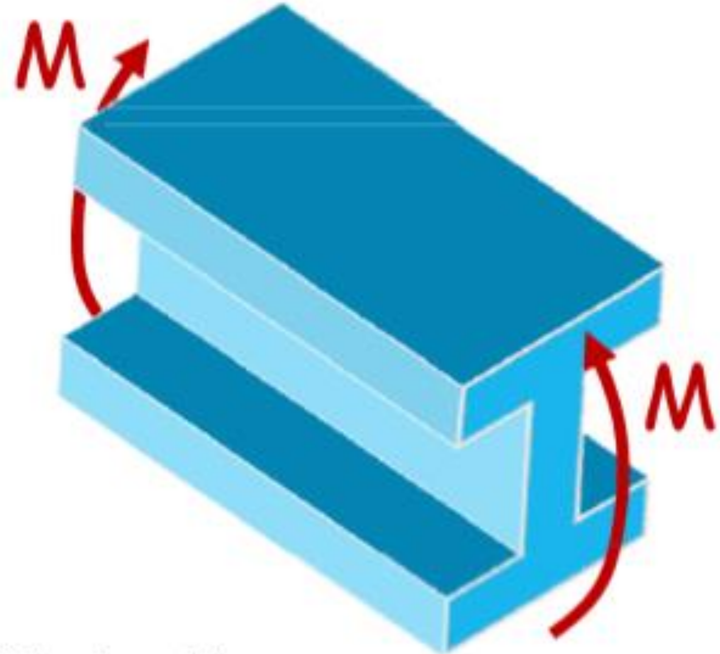
- Flexão em vigas

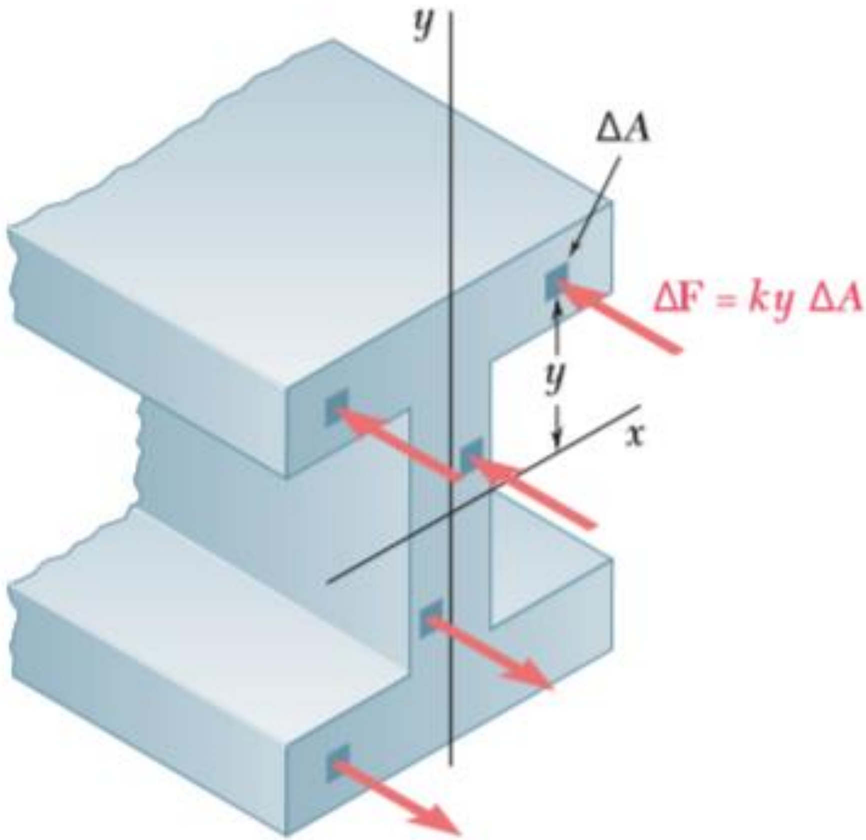




VIGA SUBMETIDA À FLEXÃO

- Flexão em vigas





$$dF = k\,y\,dA$$

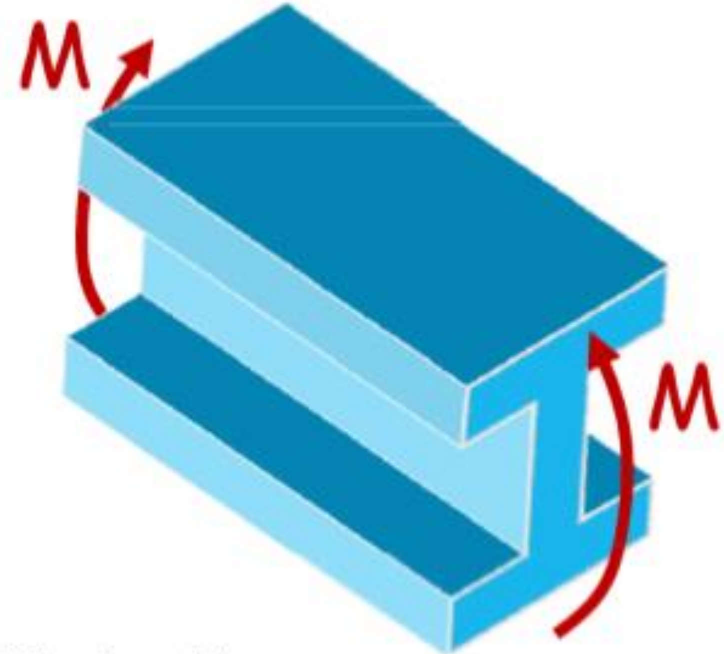
- $R = \int dF = \int_A kydA = k\int_A ydA$

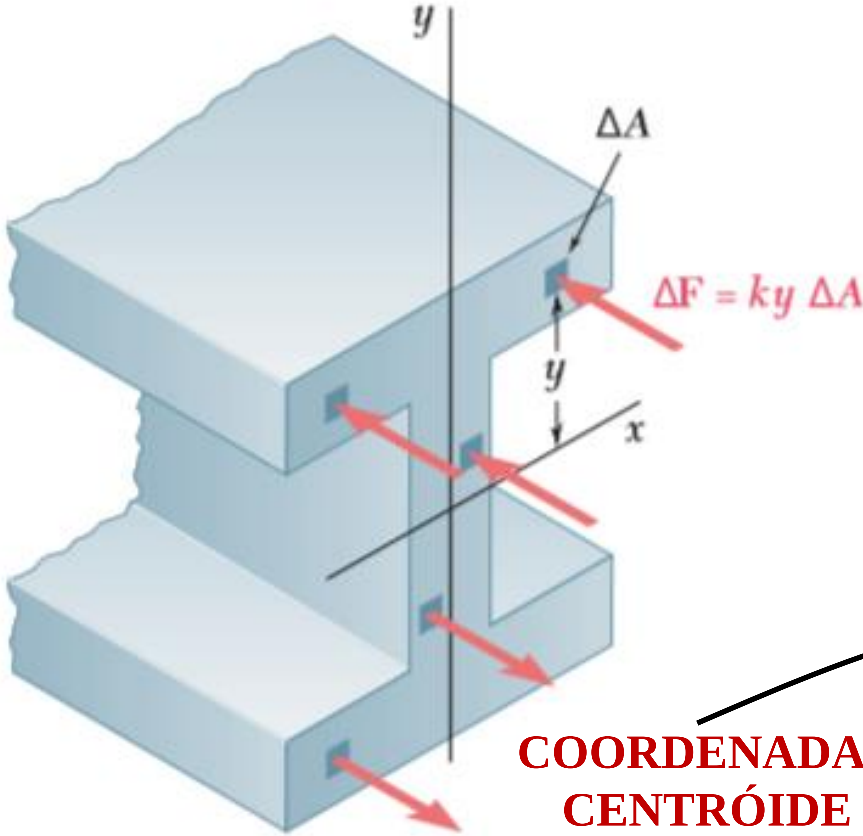
$$= kQ_x = k\bar{y}A = 0 \Rightarrow \bar{y} = 0$$

- $M = \int ydF = \int_A ky^2dA = k \boxed{\int_A y^2dA}$

VIGA SUBMETIDA À FLEXÃO

- Flexão em vigas





$$dF = k\,y\,dA$$

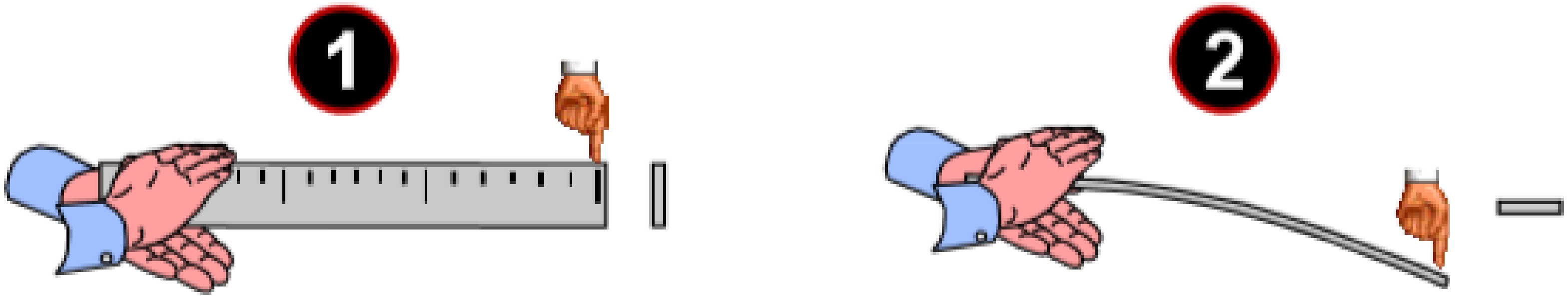
- $R = \int dF = \int_A kydA = k\int_A ydA$

$$= kQ_x = k\bar{y}A = 0 \Rightarrow \bar{y} = 0$$

- $M = \int ydF = \int_A ky^2dA = k\boxed{\int_A y^2dA}$

COORDENADA *y*
CENTRÓIDE

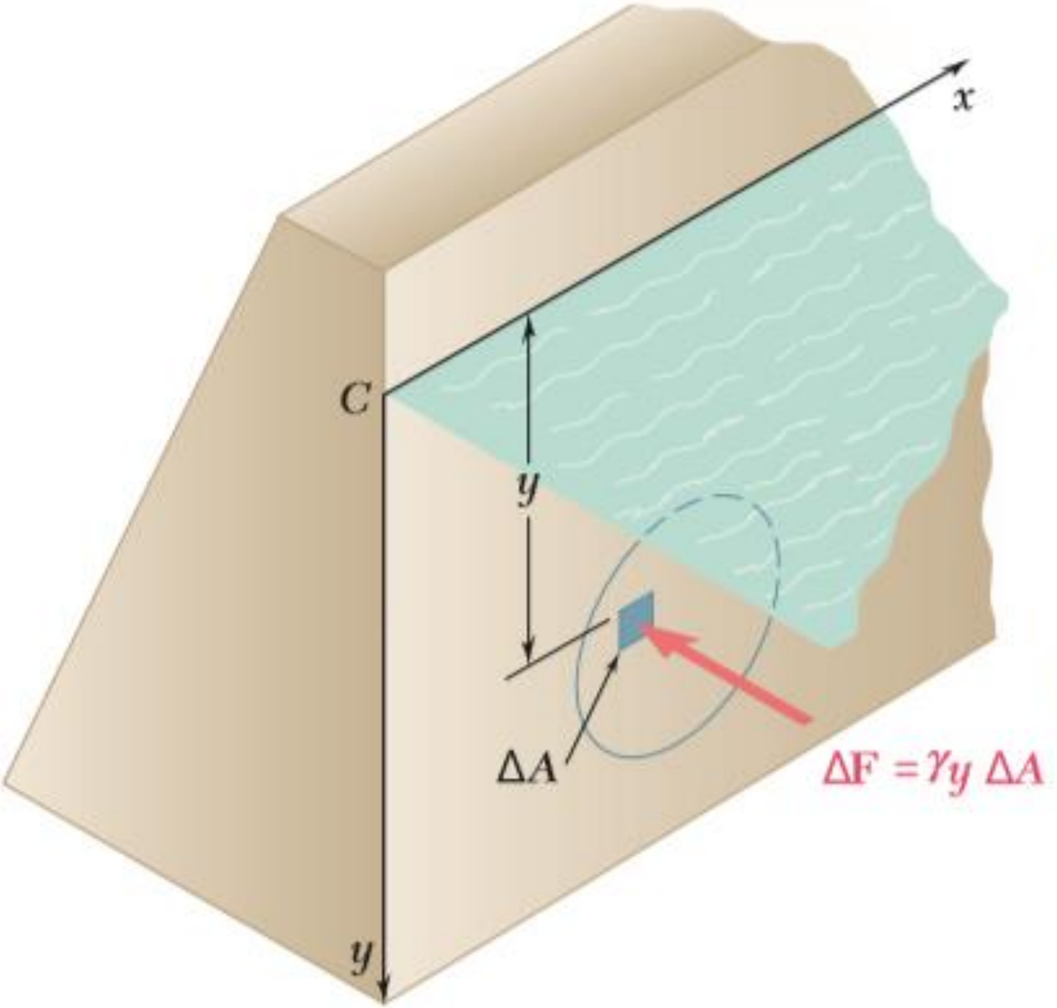
VIGA SUBMETIDA À FLEXÃO



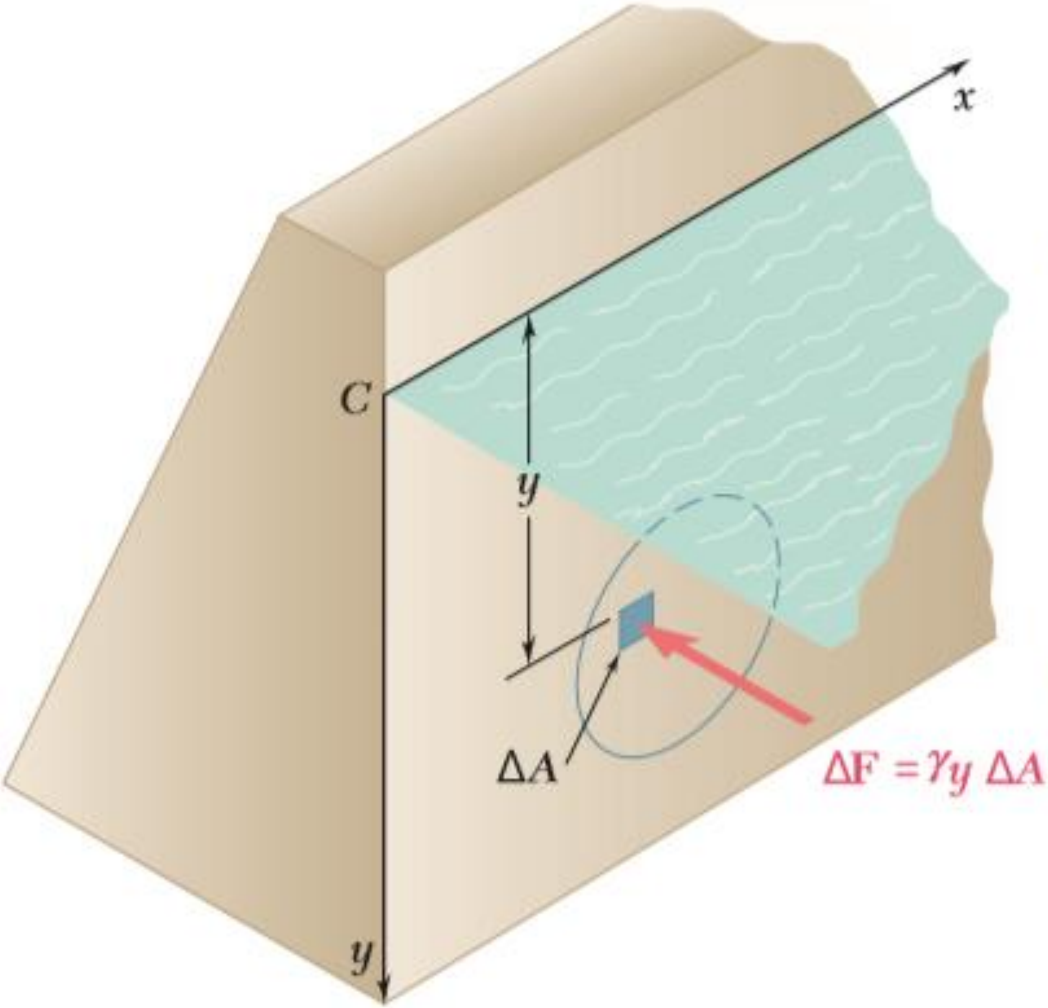
Consumindo-se um mesmo volume de material, é possível modificar a rigidez à flexão da estrutura.

Exemplo: Para uma seção de 2 mm x 36 mm (seção retangular), o arranjo 1 é 324 vezes mais rígido que o arranjo 2.

PRESSÃO SOBRE COMPORTAS



PRESSÃO SOBRE COMPORTAS



- $R = \int dF = \int_A \gamma y dA = \gamma \int_A y dA$

  $= \gamma Q_x = \gamma \boxed{\bar{y}A}$

- $M = \int y dF = \int_A \gamma y^2 dA = \gamma \boxed{\int_A y^2 dA}$

INÉRCIA DE UMA ÁREA

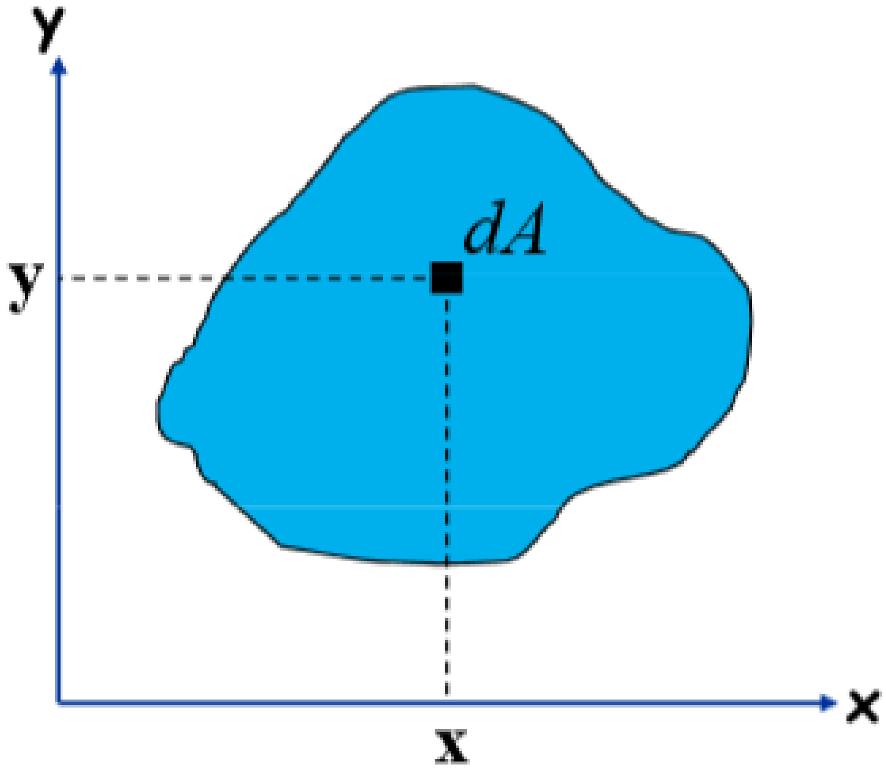
- Quando determinamos o centróide de uma área consideramos $\int xdA$ (chamado de *PRIMEIRO MOMENTO DA ÁREA*).

- Uma integral do *SEGUNDO MOMENTO* ($\int x^2 dA$) é chamada de ***MOMENTO DE INÉRCIA*** *DE ÁREA!*

- O momento de inércia, expressa o **grau de dificuldade** em se alterar o estado de **movimento de um corpo em rotação**.

SEGUNDO MOMENTO OU MOMENTO DA INÉRCIA DE UMA ÁREA

2º MOMENTO OU INÉRCIA DE UMA ÁREA



Momento de inércia ou de 2ª ordem em relação ao eixo x

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

Momento de inércia ou de 2ª ordem em relação ao eixo y

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

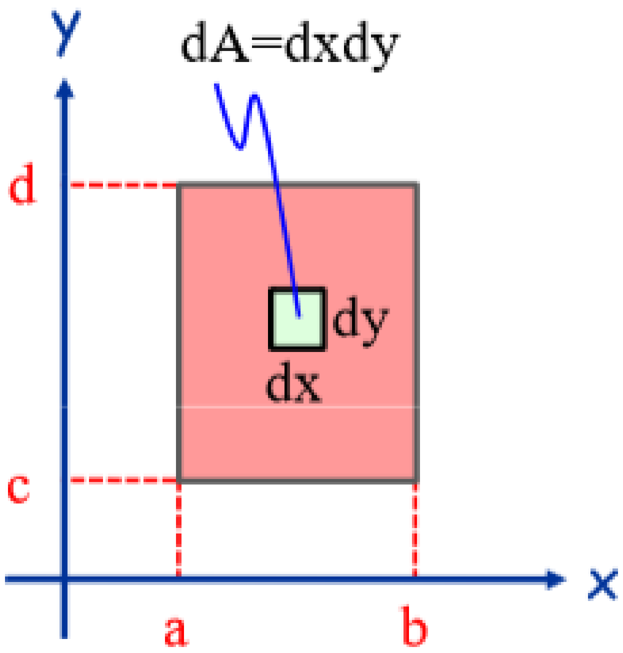
2º MOMENTO OU INÉRCIA DE UMA ÁREA

$$I_x = \int y^2\, dA \qquad I_y = \int x^2\, dA$$

Em princípio, esses momentos são calculados a partir de **INTEGRAIS DUPLAS** (no domínio representativo da região estudada)

2º MOMENTO OU INÉRCIA DE UMA ÁREA

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$$



$$I_x = \int y^2 dA = \int_c^d \int_a^b y^2 dx dy$$

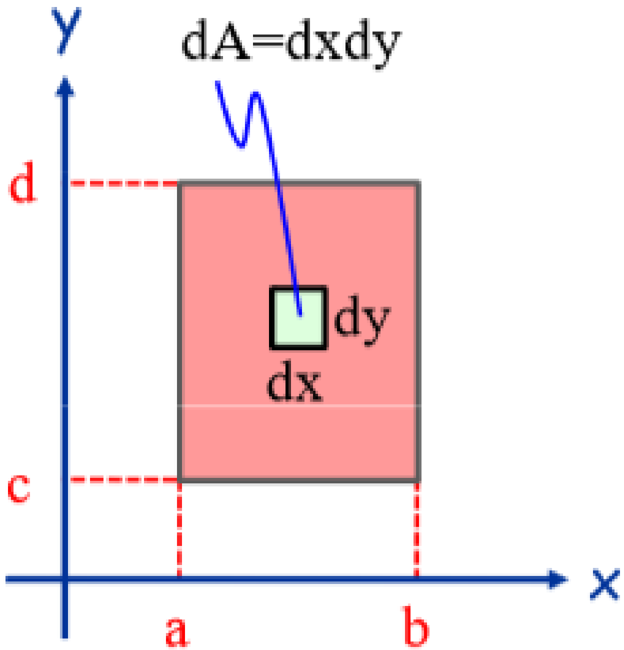
$$= \int_c^d \left[xy^2\right]_a^b dy = \int_c^d (b-a) y^2 dy$$

$$= \left[(b-a)\frac{y^3}{3}\right]_c^d$$

$$= \boxed{\frac{(b-a)(d^3 - c^3)}{3}}$$

2º MOMENTO OU INÉRCIA DE UMA ÁREA

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b \text{ e } c \le y \le d\}$$



$$I_y = \int x^2 dA = \int_c^d \int_a^b x^2 dx dy$$

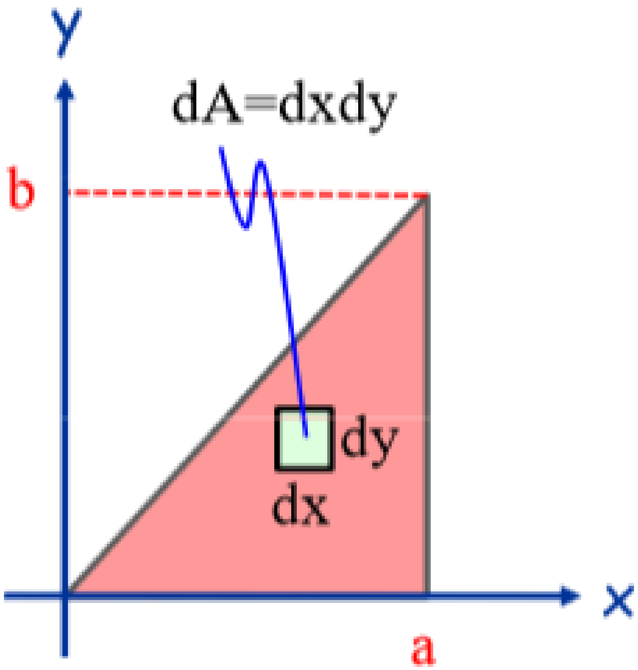
$$= \int_c^d \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b dy = \int_c^d \frac{b^3 - a^3}{3} dy$$

$$= \left[\frac{b^3 - a^3}{3} y\right]_c^d$$

$$= \boxed{\frac{(b^3 - a^3)(d - c)}{3}}$$

2º MOMENTO OU INÉRCIA DE UMA ÁREA

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \le x \le a \text{ e } 0 \le y \le \frac{b}{a}x \right\}$$



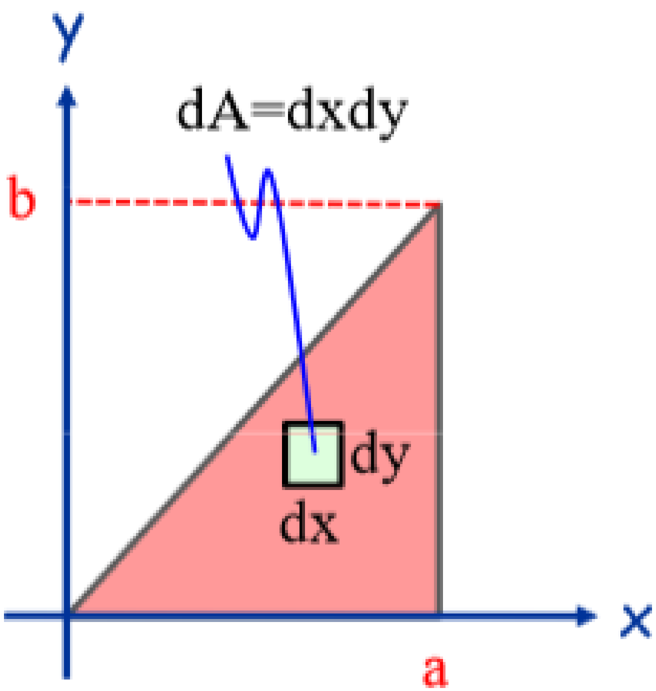
$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} y^2 dy dx$$

$$= \int_0^a \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{\frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \frac{b^3}{3a^3} x^3 dx$$

$$= \left[\frac{b^3}{3a^3} \frac{x^4}{4} \right]_0^a = \boxed{\frac{ab^3}{12}}$$

2º MOMENTO OU INÉRCIA DE UMA ÁREA

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \le x \le a \text{ e } 0 \le y \le \frac{b}{a}x \right\}$$



$$I_y = \int x^2 dA = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} x^2 dy dx$$

$$= \int_0^a \left[x^2 y\right]_0^{\frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \frac{b}{a} x^3 dx$$

$$= \left[\frac{b}{a}\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \boxed{\frac{a^3 b}{4}}$$

DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS DE INÉRCIA POR INTEGRAÇÃO DE FATIAS

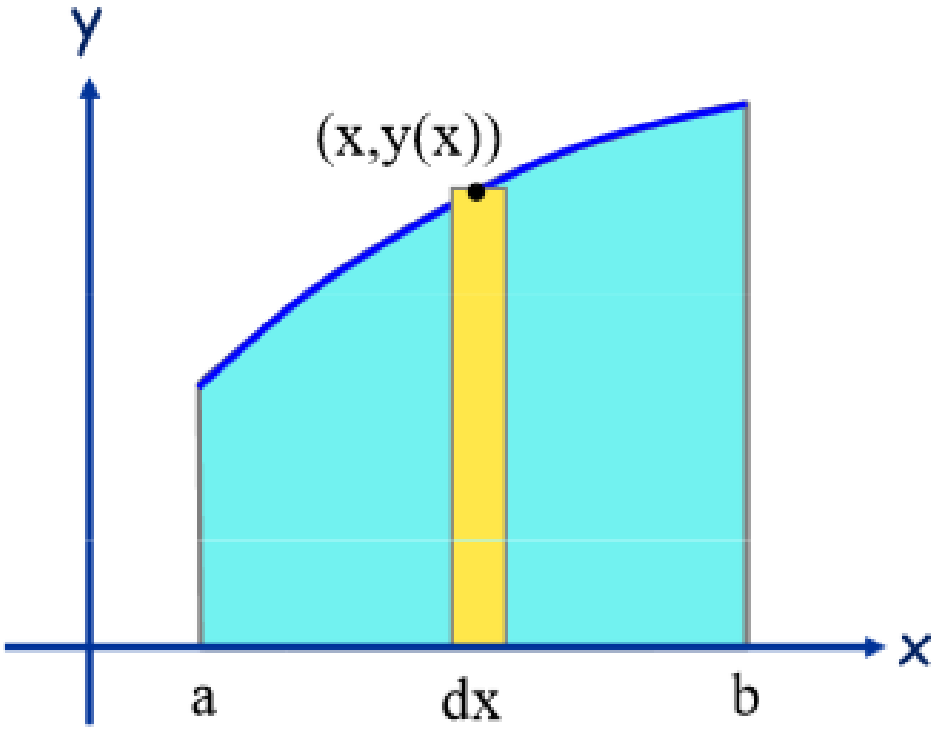
MOMENTOS POR INTEGRAÇÃO DE FATIAS

- $$I_x = \int y^2 dA = \int dI_x^{el}$$

  $$I_y = \int x^2 dA = \int dI_y^{el}$$

- A idéia desta sistemática é considerar que a região de interesse é formada pela composição de infinitas fatias infinitesimais cujas formas correspondem a regiões cujo momento de inércia já é conhecido.

MOMENTOS POR INTEGRAÇÃO DE FATIAS



$$dI_x^{el} = \frac{y(x)^3}{3}dx$$

$$dI_y^{el} = x^2 y(x)dx$$

$$I_x = \int y^2 dA = \int dI_x^{el}$$

$$= \int_a^b \frac{y(x)^3}{3}dx$$

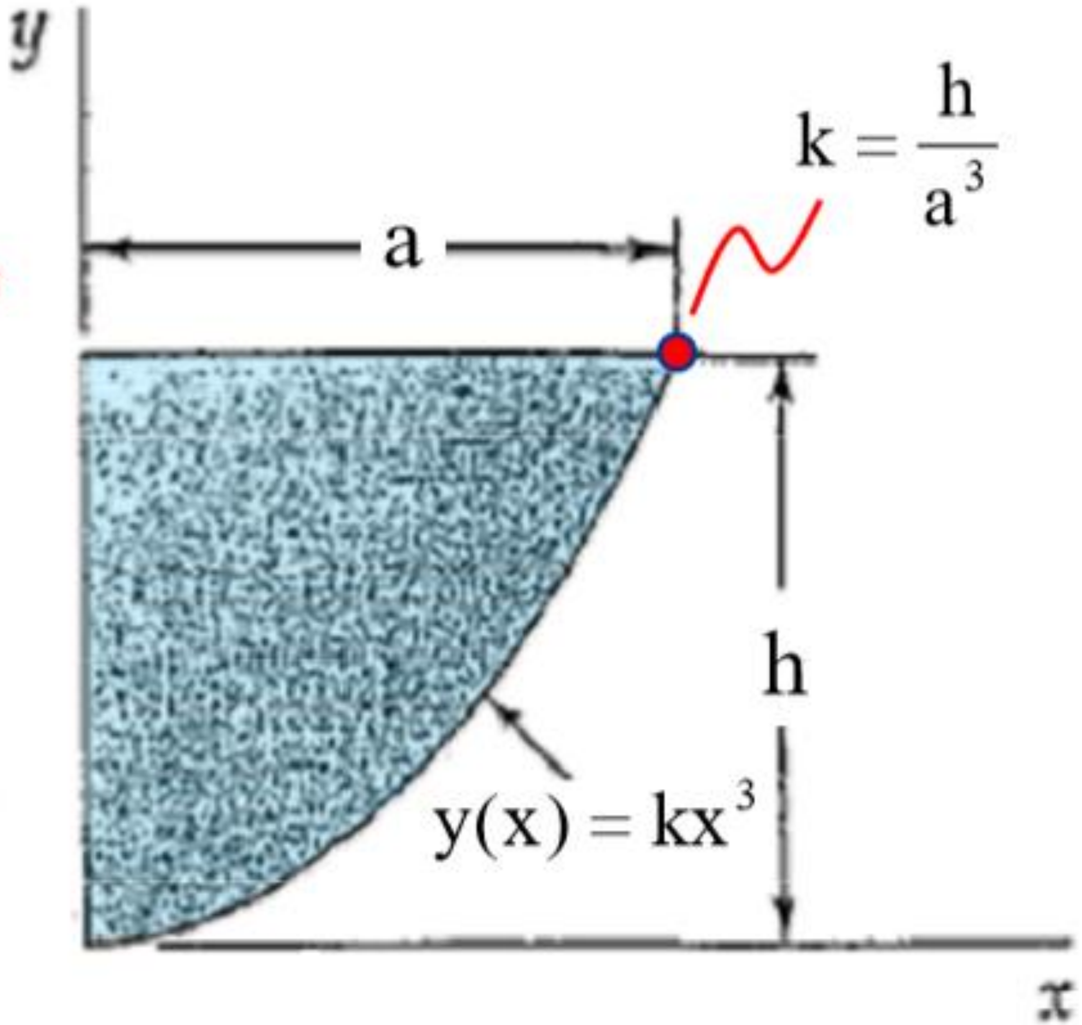
$$I_y = \int x^2 dA = \int dI_y^{el}$$

$$= \int_a^b x^2 y(x)dx$$

MOMENTOS POR INTEGRAÇÃO DE FATIAS

Exemplo:

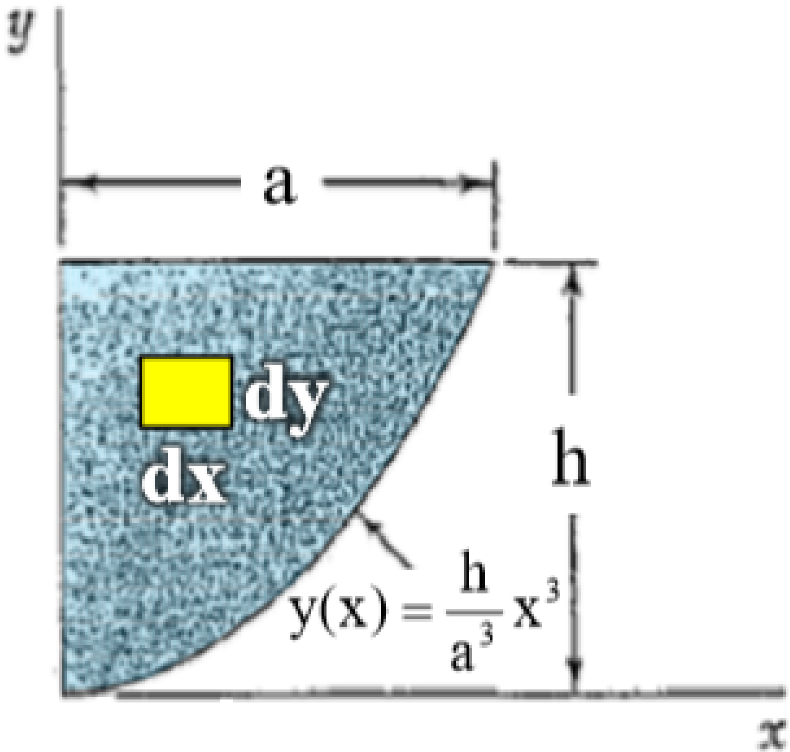
Determine por integração os momentos de inércia da superfície mostrada em relação aos eixos coordenados em termos de a e h.



MOMENTOS POR INTEGRAÇÃO DE FATIAS

Exemplo (continuação):

- Por integração dupla



$$D = \left\{ (x,y) \mid 0 \le x \le a \text{ e } \frac{h}{a^3}x^3 \le y \le h \right\}$$

$$I_x = \int_0^a \int_{\frac{h}{a^3}x^3}^{h} y^2 \, dy\, dx$$

$$= \int_0^a \left[\frac{y^3}{3} \right]_{\frac{h}{a^3}x^3}^{h} dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{3a^9} x^9 \right) dx$$

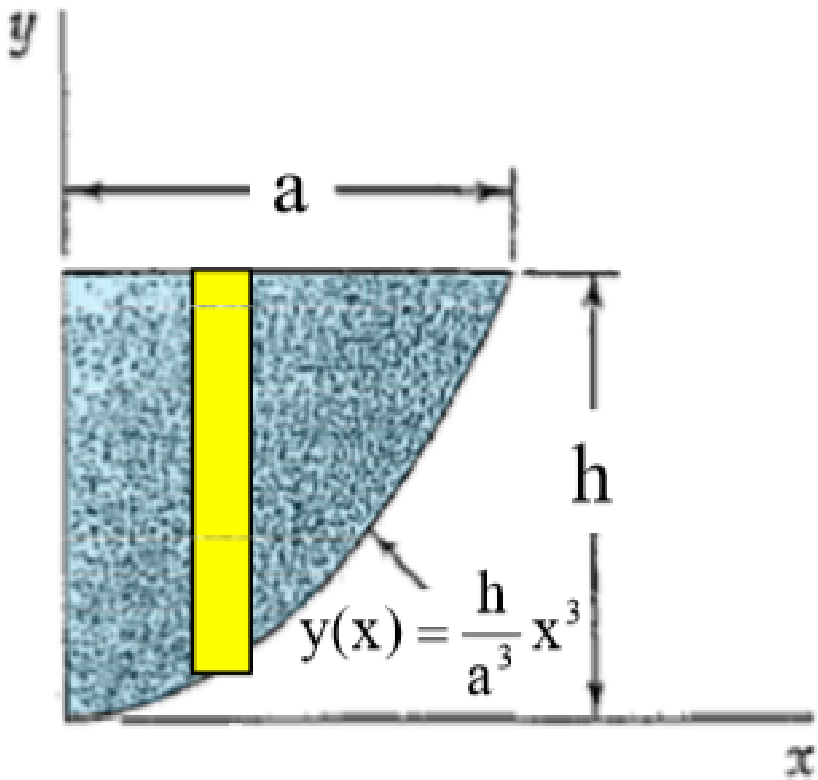
$$= \left[\frac{h^3}{3} x - \frac{h^3}{3a^9} \frac{x^{10}}{10} \right]_0^a$$

$$= \boxed{\frac{3ah^3}{10}}$$

MOMENTOS POR INTEGRAÇÃO DE FATIAS

Exemplo (continuação):

- Por integração de fatias



$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \le x \le a \text{ e } \frac{h}{a^3}x^3 \le y \le h \right\}$$

$$I_x = \int dI_x$$

$$= \int_0^a \left[\frac{h^3}{3} - \frac{y(x)^3}{3} \right] dx$$

$$= \int_0^a \left[\frac{h^3}{3} - \frac{h^3 x^9}{3a^9} \right] dx$$

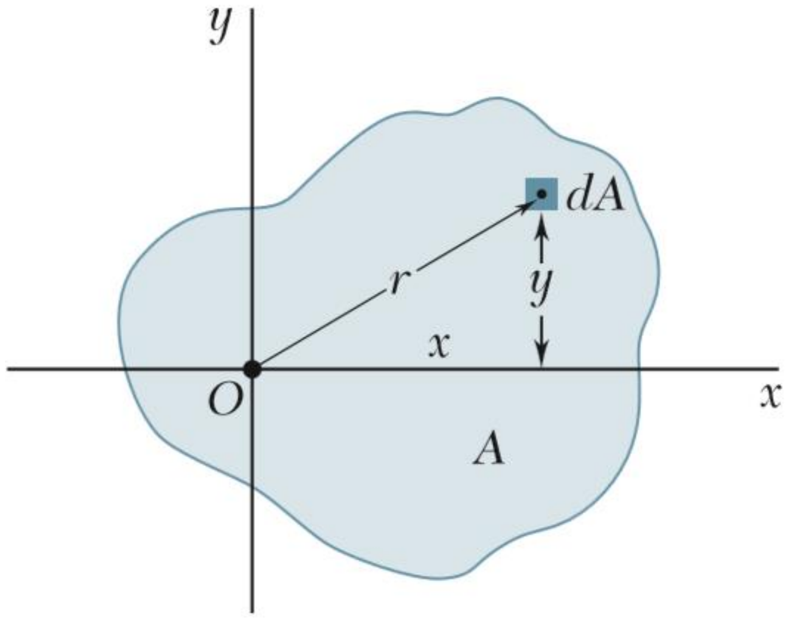
$$= \left[\frac{h^3 x}{3} - \frac{h^3 x^{10}}{30a^9} \right]_0^a$$

$$= \boxed{\frac{3ah^3}{10}}$$

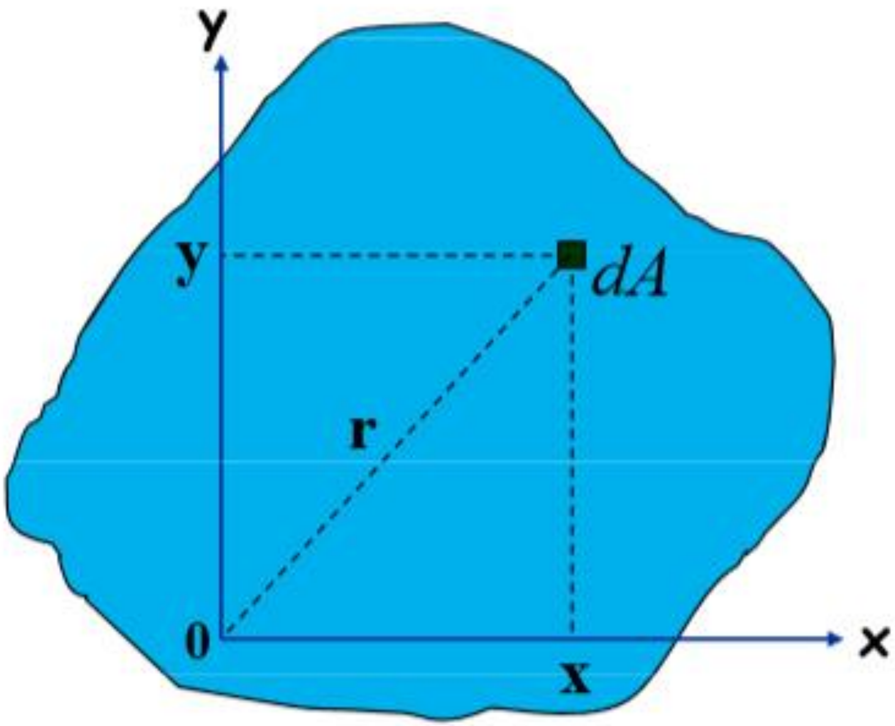
MOMENTO POLAR DE INÉRCIA
RAIO DE GIRAÇÃO &
TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

RAIO DE GIRAÇÃO

- Pode-se também formular o segundo momento em relação a ***ORIGEM (O)*** das coordenadas. Esse momento é denominado de ***MOMENTO POLAR DE INÉRCIA***.

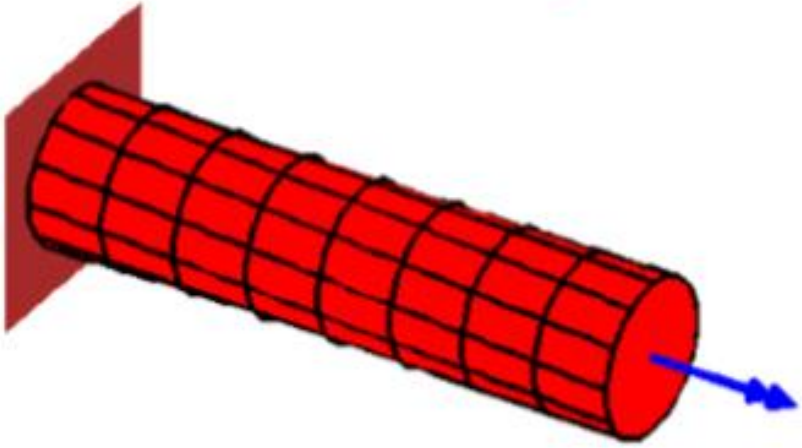


MOMENTO POLAR DE INÉRCIA

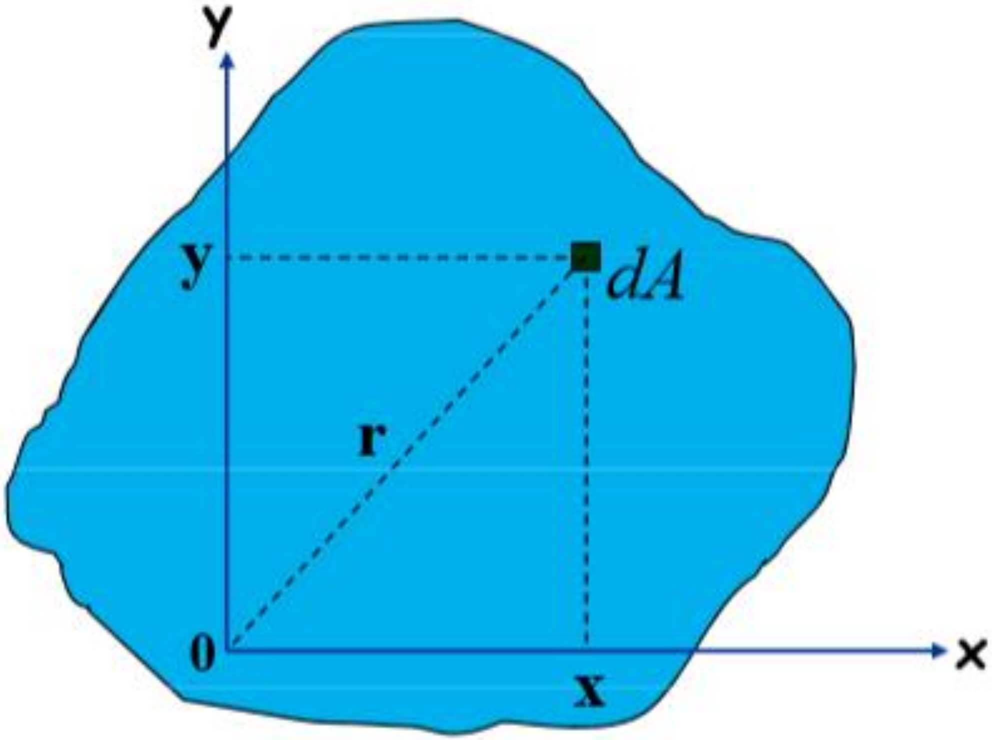


$$J_0 = \int_A r^2 dA$$

Presente no estudo de barras sob torção



MOMENTO POLAR DE INÉRCIA



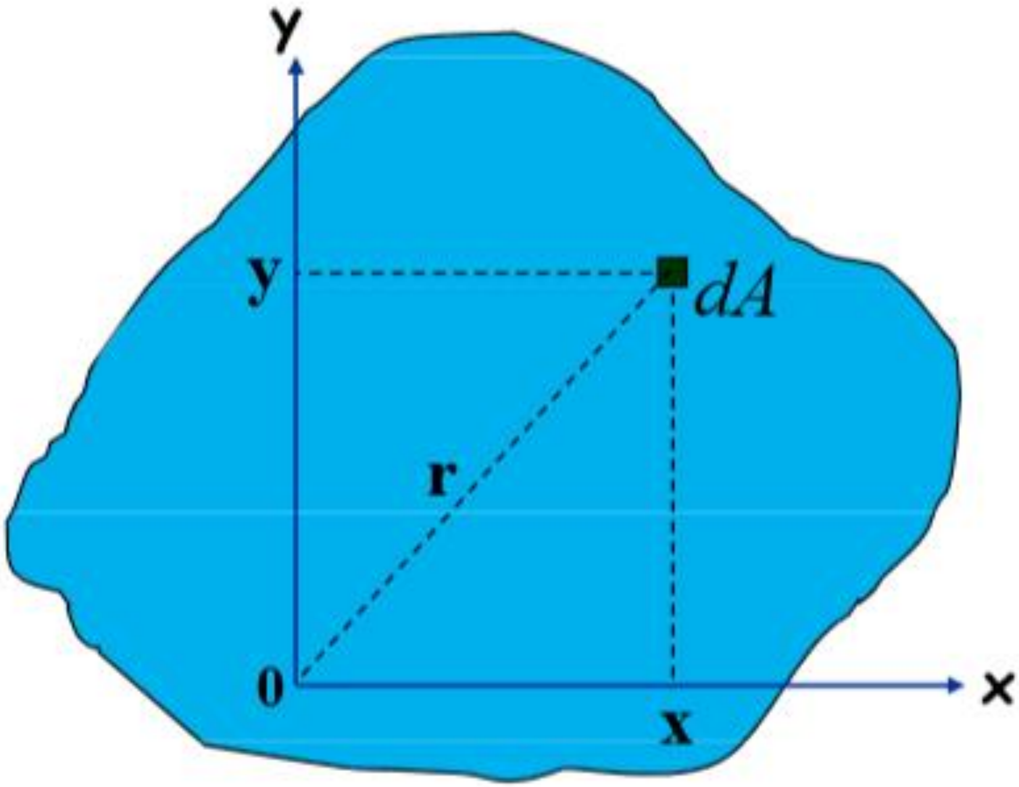
$$r^2 = y^2 + x^2$$

$$J_0 = \int_A \left(y^2 + x^2\right) dA$$

$$J_0 = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA$$

$$\boxed{J_0 = I_x + I_y}$$

RAIO DE GIRAÇÃO



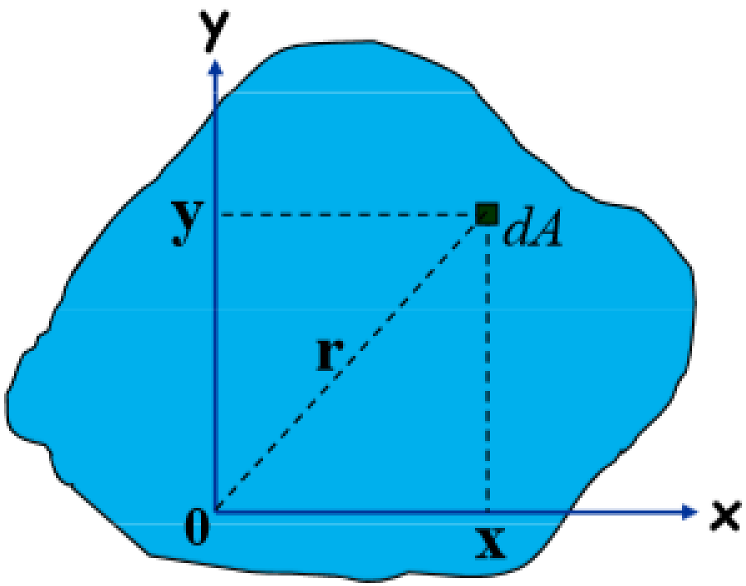
$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

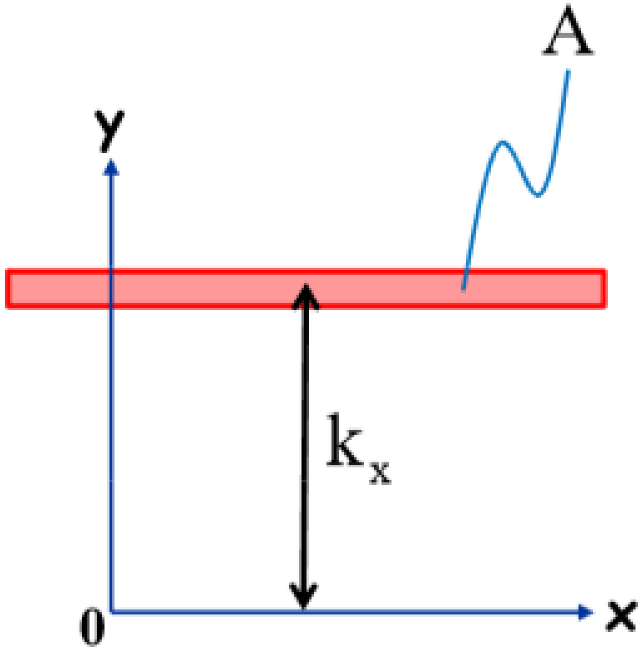
$$J_0 = \int_A r^2 dA$$

Cada <u>raio de giração</u> representa a distância ao eixo ou ponto correspondente na qual se pode concentrar toda a área da superfície estudada de modo que se tenha o mesmo momento de inércia.

RAIO DE GIRAÇÃO - kx



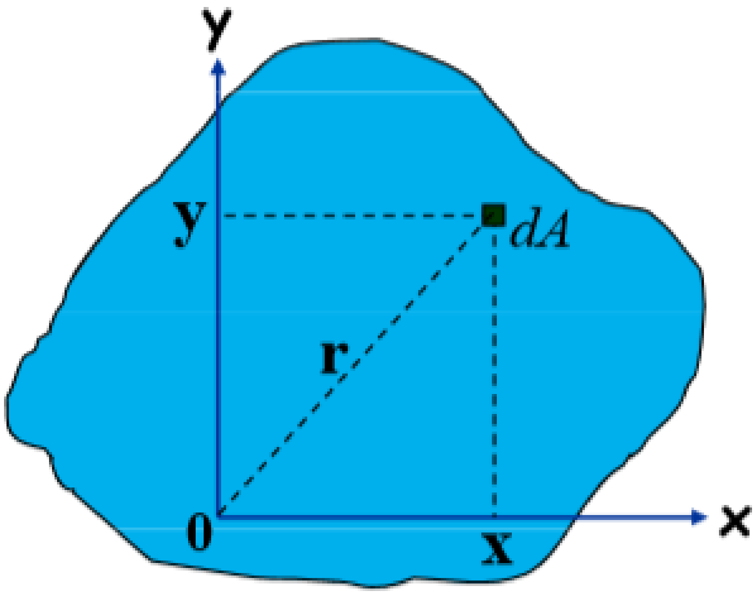
$$I_x = \int_A y^2 dA$$



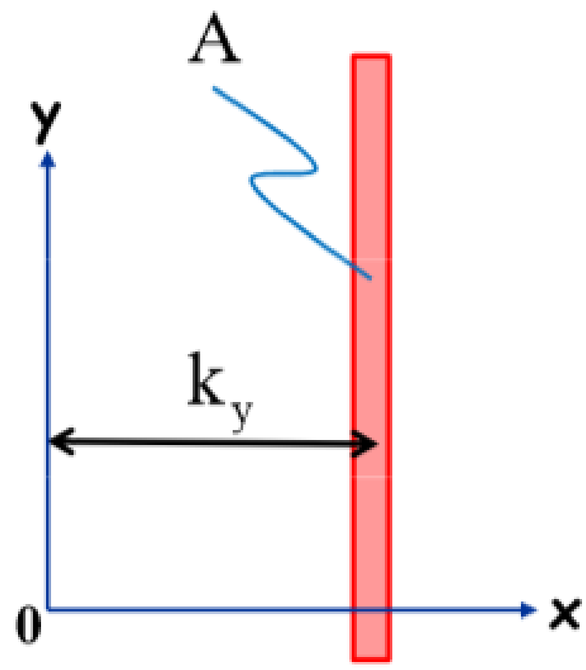
$$I_x = k_x^2 A$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

RAIO DE GIRAÇÃO - ky



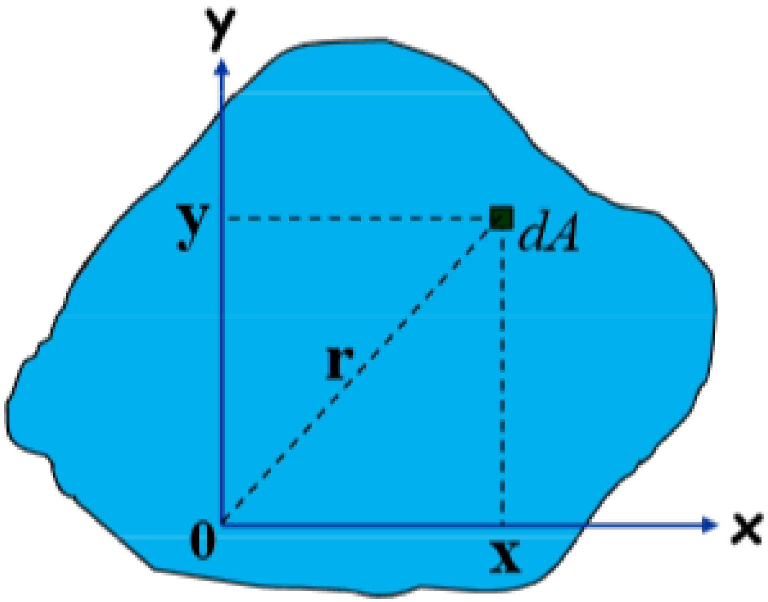
$$I_y = \int_A x^2 dA$$



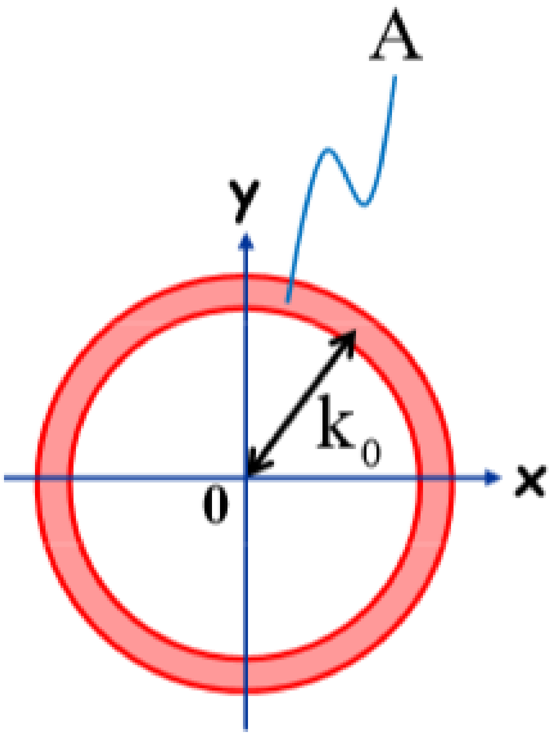
$$I_y = k_y^2 A$$

$$\boxed{k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}}$$

RAIO DE GIRAÇÃO – k0



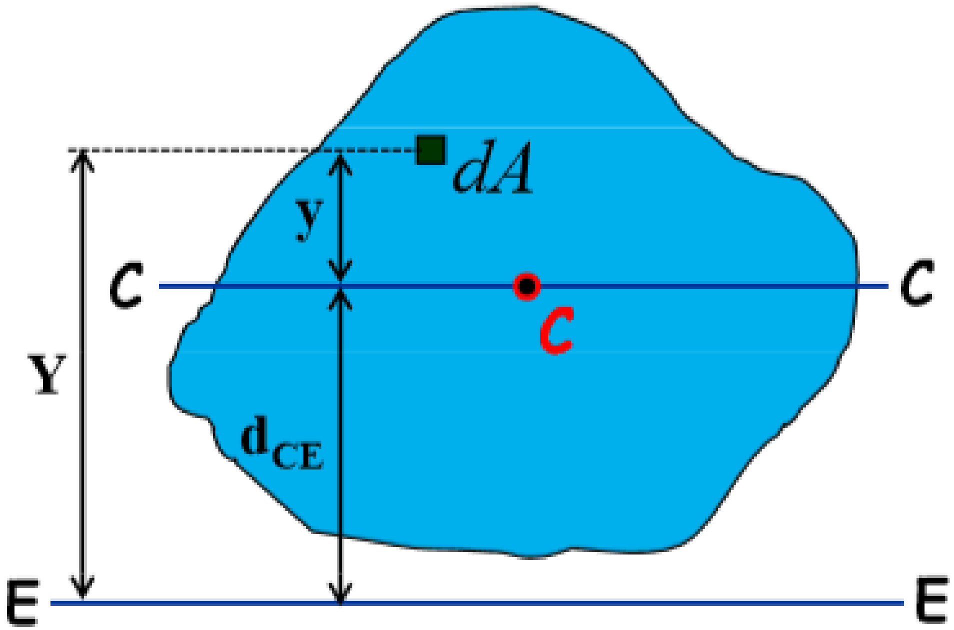
$$J_0 = \int_A r^2 dA$$



$$J_0 = k_0^2 A$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}}$$

Teorema dos Eixos Paralelos



$$I_{CC} = \int_A y^2 dA$$

$$I_{EE} = \int_A Y^2 dA$$

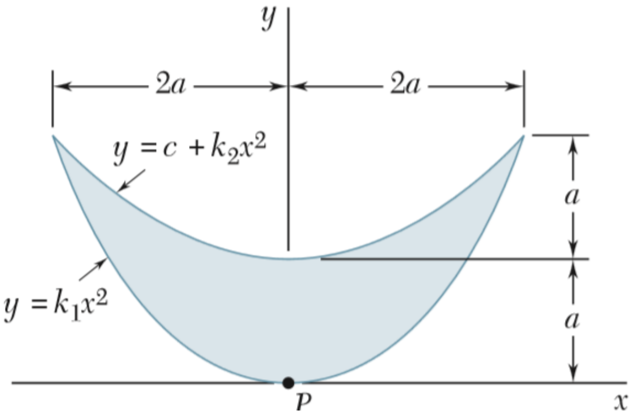
$$Y = y + d_{CE}$$

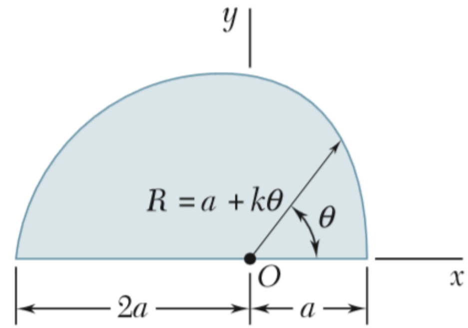
$$I_{EE} = \int_A (y + d_{CE})^2 dA = \int_A (y^2 + 2yd_{CE} + d_{CE}^2) dA$$

$$= \int_A y^2 dA + 2d_{CE} \int_A y dA + d_{CE}^2 \int_A dA$$

$$= I_{CC} + 2d_{CE} \underbrace{Q_{CC}}_{0} + d_{CE}^2 A \Rightarrow \boxed{I_{EE} = I_{CC} + d_{CE}^2 A}$$

2º MOMENTO OU INÉRCIA DE UMA ÁREA





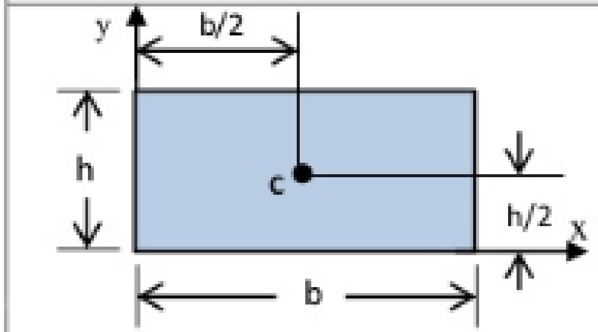
Em princípio, essas momentos são TODOS calculados a partir de **INTEGRAÇÃO!**

2º MOMENTO OU INÉRCIA DE UMA ÁREA

Quando se estiver interessado nos **MOMENTOS DE INÉRCIA** de regiões que são identificadas como composições de **regiões elementares**, aplicam-se essas composições por meio de valores previamente calculados!!! (**TABELADOS**)

2º MOMENTO OU INÉRCIA DE UMA ÁREA

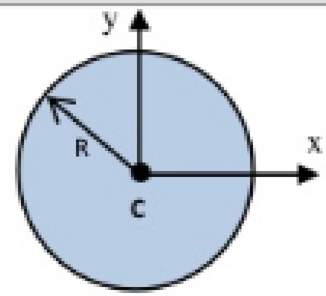
Rectángulo



$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_y = \frac{b^3h}{12}$ $\bar{I}_{xy} = 0$

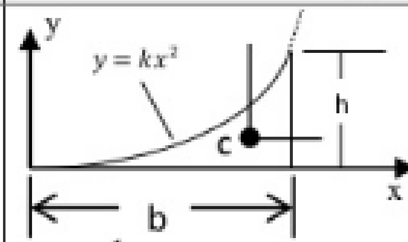
$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $I_y = \frac{b^3h}{3}$ $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$

Círculo



$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$ $I_{xy} = 0$

Media Parabólica complementaria



$\bar{x} = \frac{3b}{4}$

$\bar{y} = \frac{3h}{10}$

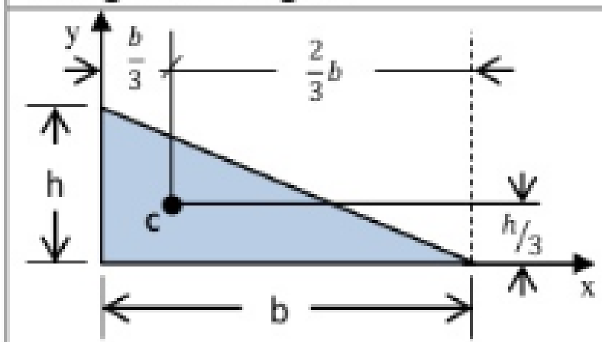
$A = \frac{1}{3}bh$

$\bar{I}_x = \frac{37bh^3}{2100}$ $I_x = \frac{bh^3}{21}$

$\bar{I}_y = \frac{b^3h}{80}$ $I_y = \frac{b^3h}{5}$

$\bar{I}_{xy} = \frac{b^2h^2}{120}$ $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$

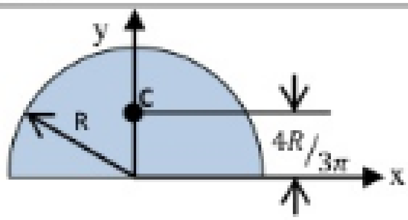
Triángulo Rectángulo



$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $\bar{I}_y = \frac{b^3h}{36}$ $\bar{I}_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$

$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{b^3h}{12}$ $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$

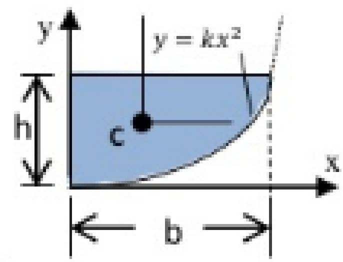
Semicírculo



$\bar{I}_x = 0{,}1098R^4$ $\bar{I}_{xy} = 0$

$I_x = I_y = \bar{I}_y = \frac{\pi R^4}{8}$ $I_{xy} = 0$

Media Parábola



$\bar{x} = \frac{3b}{8}$

$\bar{y} = \frac{3h}{5}$

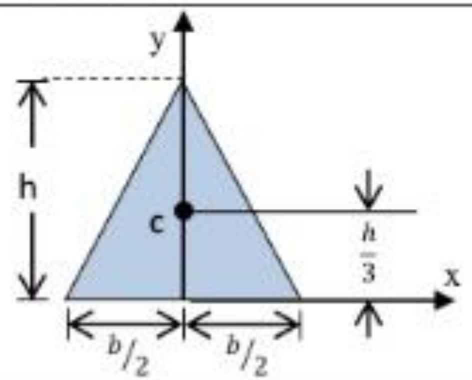
$A = \frac{2}{3}bh$

$\bar{I}_x = \frac{8bh^3}{175}$ $\bar{I}_y = \frac{19b^3h}{480}$ $\bar{I}_{xy} = \frac{b^2h^2}{60}$

$I_x = \frac{2bh^3}{7}$ $I_y = \frac{2b^3h}{15}$ $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{6}$

2º MOMENTO OU INÉRCIA DE UMA ÁREA

Triángulo Isósceles



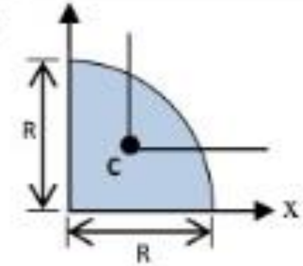
$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36} \qquad \bar{I}_y = \frac{b^3h}{48} \qquad \bar{I}_{xy} = 0$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_{xy} = 0$$

Cuarto de círculo

$$\bar{x} = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$$

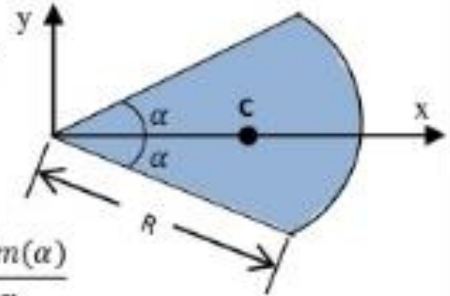


$$\bar{I}_x = \bar{I}_y = 0{,}05488R^4 \qquad I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$\bar{I}_{xy} = -0{,}01647R^4 \qquad I_{xy} = \frac{R^4}{8}$$

Sector Circular

$$A = \alpha R^2$$



$$\bar{x} = \frac{2RSen(\alpha)}{3\alpha}$$

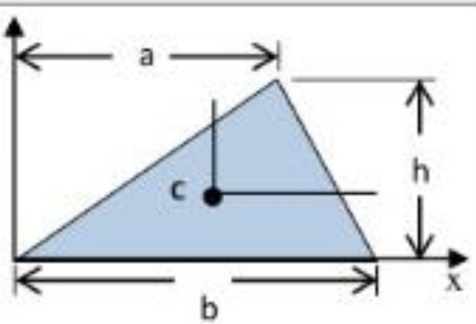
$$I_x = \bar{I}_x = \frac{R^4}{8}(2\alpha - sen2\alpha)$$

$$I_y = \frac{R^4}{8}(2\alpha + sen2\alpha) \qquad I_{xy} = 0$$

Triángulo

$$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{h}{3}$$



$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_x = \frac{bh^3}{12}$$

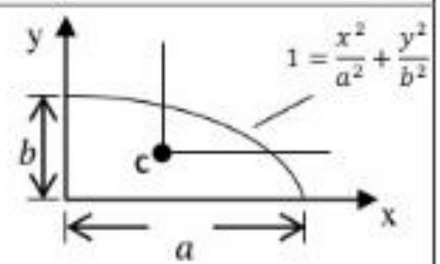
$$\bar{I}_y = \frac{bh}{36}(a^2 - ab + b^2) \qquad I_y = \frac{bh}{12}(a^2 + ab + b^2)$$

$$\bar{I}_{xy} = \frac{bh^2}{72}(2a - b) \qquad I_{xy} = \frac{bh^2}{24}(2a + b)$$

Cuarto de elipse

$$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$$

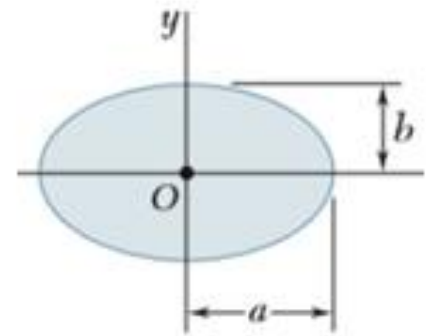
$$\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$$



$$\bar{I}_x = 0{,}05488ab^3 \qquad I_x = \frac{\pi ab^3}{16}$$

$$\bar{I}_y = 0{,}05488a^3b \qquad I_y = \frac{\pi a^3 b}{16}$$

$$\bar{I}_{xy} = -0{,}01647a^2b^2 \qquad I_{xy} = \frac{a^2b^2}{8}$$

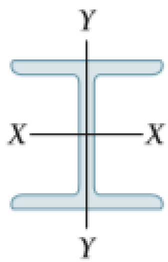
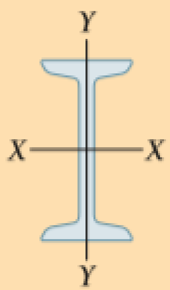
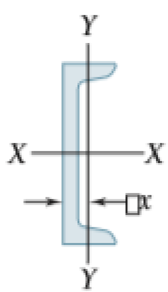


$$□I_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$$

$$□I_y = \frac{1}{4}\pi a^3 b$$

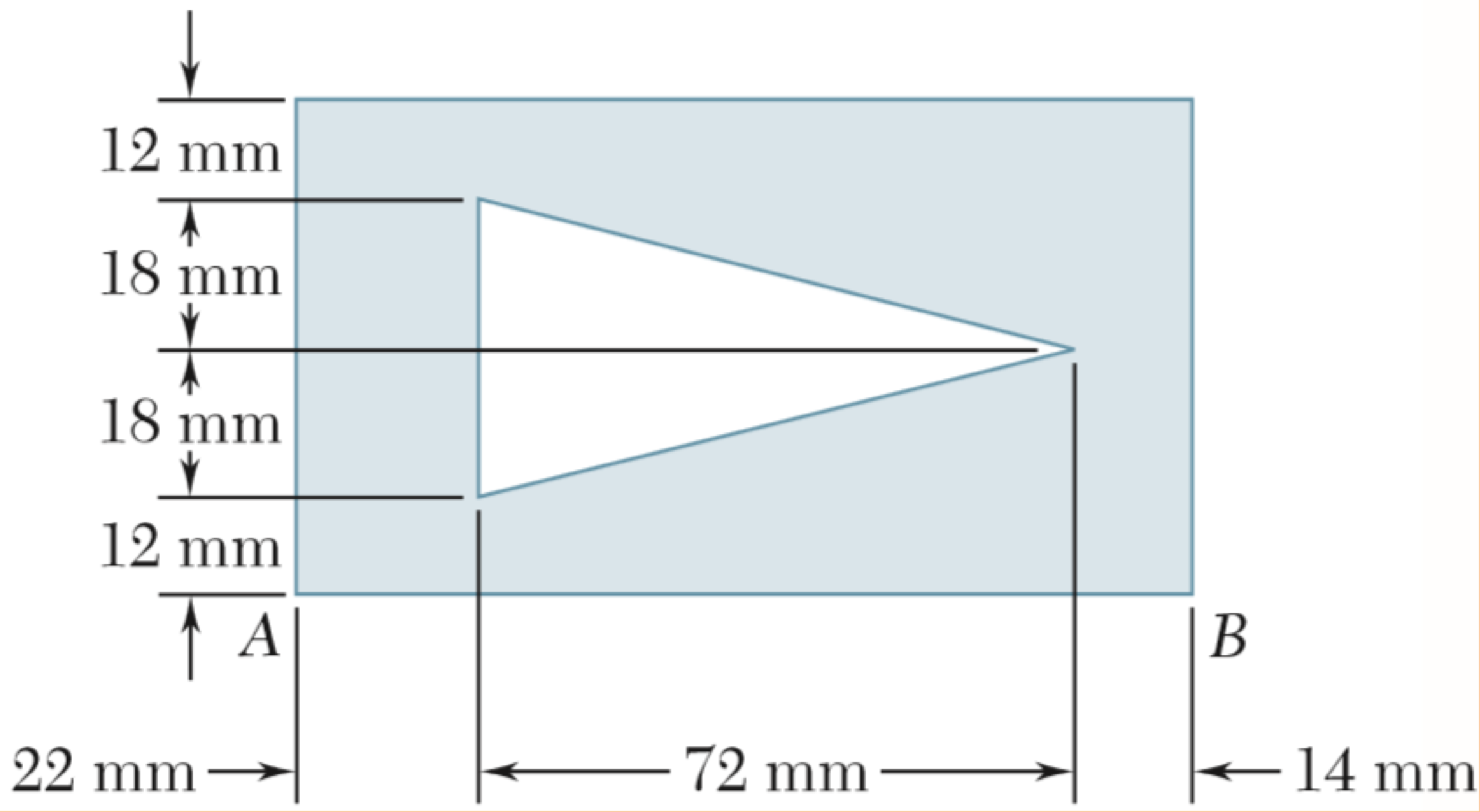
$$J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$$

2º MOMENTO OU INÉRCIA DE UMA ÁREA

		Designation	Area in^2	Depth in.	Width in.	Axis X-X □I_x, in^4	Axis X-X □k_x, in.	Axis X-X □y, in.	Axis Y-Y □I_y, in^4	Axis Y-Y □k_y, in.	Axis Y-Y □x, in.
W Shapes (Wide-Flange Shapes)		W18 × 76†	22.3	18.2	11.0	1330	7.73		152	2.61	
		W16 × 57	16.8	16.4	7.12	758	6.72		43.1	1.60	
		W14 × 38	11.2	14.1	6.77	385	5.87		26.7	1.55	
		W8 × 31	9.12	8.00	8.00	110	3.47		37.1	2.02	
S Shapes (American Standard Shapes)		S18 × 54.7†	16.0	18.0	6.00	801	7.07		20.7	1.14	
		S12 × 31.8	9.31	12.0	5.00	217	4.83		9.33	1.00	
		S10 × 25.4	7.45	10.0	4.66	123	4.07		6.73	0.950	
		S6 × 12.5	3.66	6.00	3.33	22.0	2.45		1.80	0.702	
C Shapes (American Standard Channels)		C12 × 20.7†	6.08	12.0	2.94	129	4.61		3.86	0.797	0.698
		C10 × 15.3	4.48	10.0	2.60	67.3	3.87		2.27	0.711	0.634
		C8 × 11.5	3.37	8.00	2.26	32.5	3.11		1.31	0.623	0.572
		C6 × 8.2	2.39	6.00	1.92	13.1	2.34		0.687	0.536	0.512

EXERCÍCIO

- **Determine os momentos de inércia da superfície mostrada em relação aos eixos centroidais paralelo e perpendicular ao lado AB.**



EXERCÍCIO

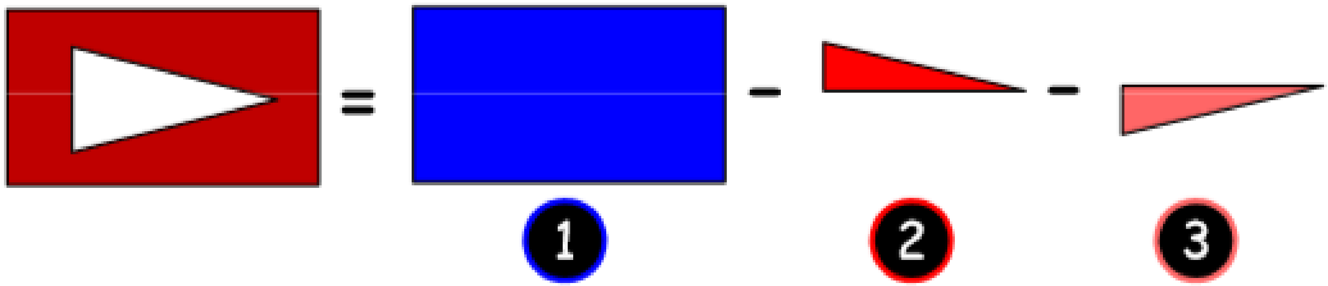
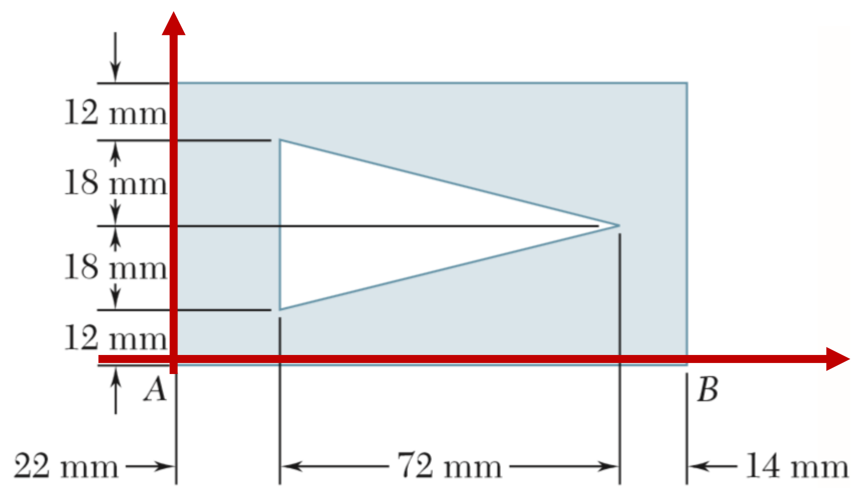


Fig	Geometria	A	x	y	xA	yA		Ixc	Iyc	$(dx)^2$	$(dy)^2$	Ix	Iy
1	retângulo	6480	54	30	349920	194400		1944000	6298560	4	0	1944000	6324480
2	triângulo	-648	46	36	-29808	-23328		-11664	-186624	100	36	-34992	-251424
3	triângulo	-648	46	24	-29808	-15552		-11664	-186624	100	36	-34992	-251424
	TOTAL	**5184**			**290304**	**155520**						**1874016**	**5821632**

Centroide	X =	56
	Y =	30

Eixo de Ref.	X =	56
	Y =	30



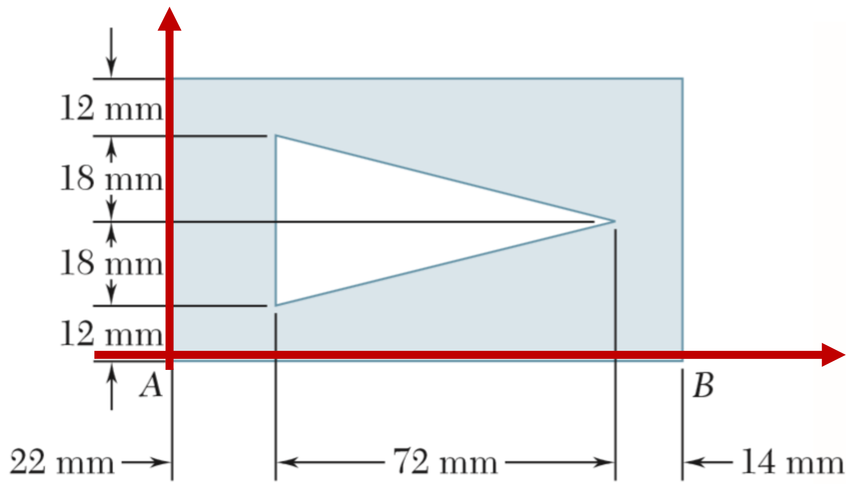
EXERCÍCIO

x e y = Coordenadas do centroide da figura analisada

Fig	Geometria	A	x	y	xA	yA		Ixc	Iyc	(dx)²	(dy)²	Ix	Iy
1	retângulo	6480	54	30	349920	194400		1944000	6298560	4	0	1944000	6324480
2	triângulo	-648	46	36	-29808	-23328		-11664	-186624	100	36	-34992	-251424
3	triângulo	-648	46	24	-29808	-15552		-11664	-186624	100	36	-34992	-251424
	TOTAL	**5184**			**290304**	**155520**						**1874016**	**5821632**

Centroide	X =	56
	Y =	30

Eixo de Ref.	X =	56
	Y =	30



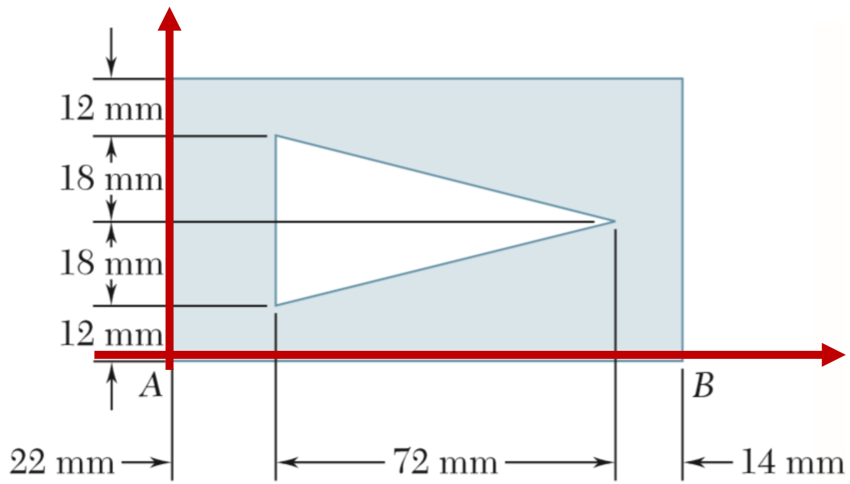
EXERCÍCIO

Ix e Iy = Inércia em relação ao centroide da geometria analisada

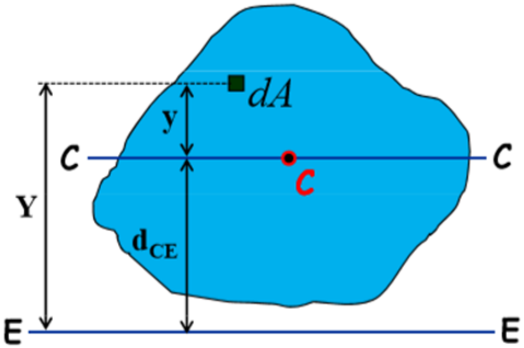
Fig	Geometria	A	x	y	xA	yA		Ixc	Iyc	(dx)²	(dy)²	Ix	Iy
1	retângulo	6480	54	30	349920	194400		1944000	6298560	4	0	1944000	6324480
2	triângulo	-648	46	36	-29808	-23328		-11664	-186624	100	36	-34992	-251424
3	triângulo	-648	46	24	-29808	-15552		-11664	-186624	100	36	-34992	-251424
	TOTAL	**5184**			**290304**	**155520**						**1874016**	**5821632**

Centroide	X =	56
	Y =	30

Eixo de Ref.	X =	56
	Y =	30



EXERCÍCIO



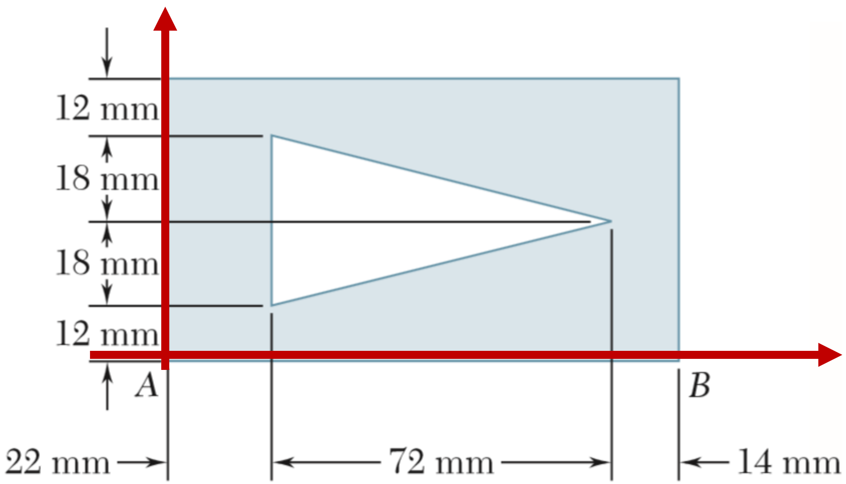
$$dx^2 = (X - x)^2$$

$$dy^2 = (Y - y)^2$$

Fig	Geometria	A	x	y	xA	yA		Ixc	Iyc	(dx)²	(dy)²	Ix	Iy
1	retângulo	6480	54	30	349920	194400		1944000	6298560	4	0	1944000	6324480
2	triângulo	-648	46	36	-29808	-23328		-11664	-186624	100	36	-34992	-251424
3	triângulo	-648	46	24	-29808	-15552		-11664	-186624	100	36	-34992	-251424
	TOTAL	**5184**			**290304**	**155520**						**1874016**	**5821632**

Centroide	X =	56
	Y =	30

Eixo de Ref.	X =	56
	Y =	30



EXERCÍCIO

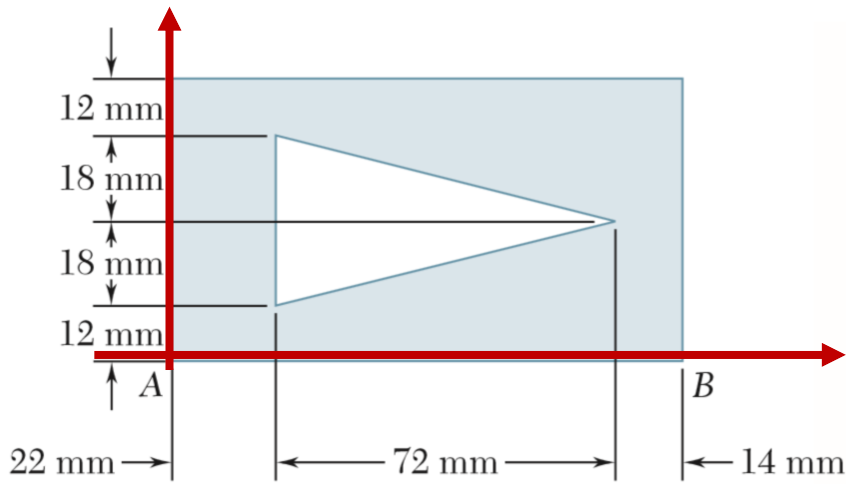
$$Ix = Ixc + dy^2.A$$

$$Iy = Iyc + dx^2.A$$

Fig	Geometria	A	x	y	xA	yA		Ixc	Iyc	$(dx)^2$	$(dy)^2$	Ix	Iy
1	retângulo	6480	54	30	349920	194400		1944000	6298560	4	0	1944000	6324480
2	triângulo	-648	46	36	-29808	-23328		-11664	-186624	100	36	-34992	-251424
3	triângulo	-648	46	24	-29808	-15552		-11664	-186624	100	36	-34992	-251424
	TOTAL	**5184**			**290304**	**155520**						**1874016**	**5821632**

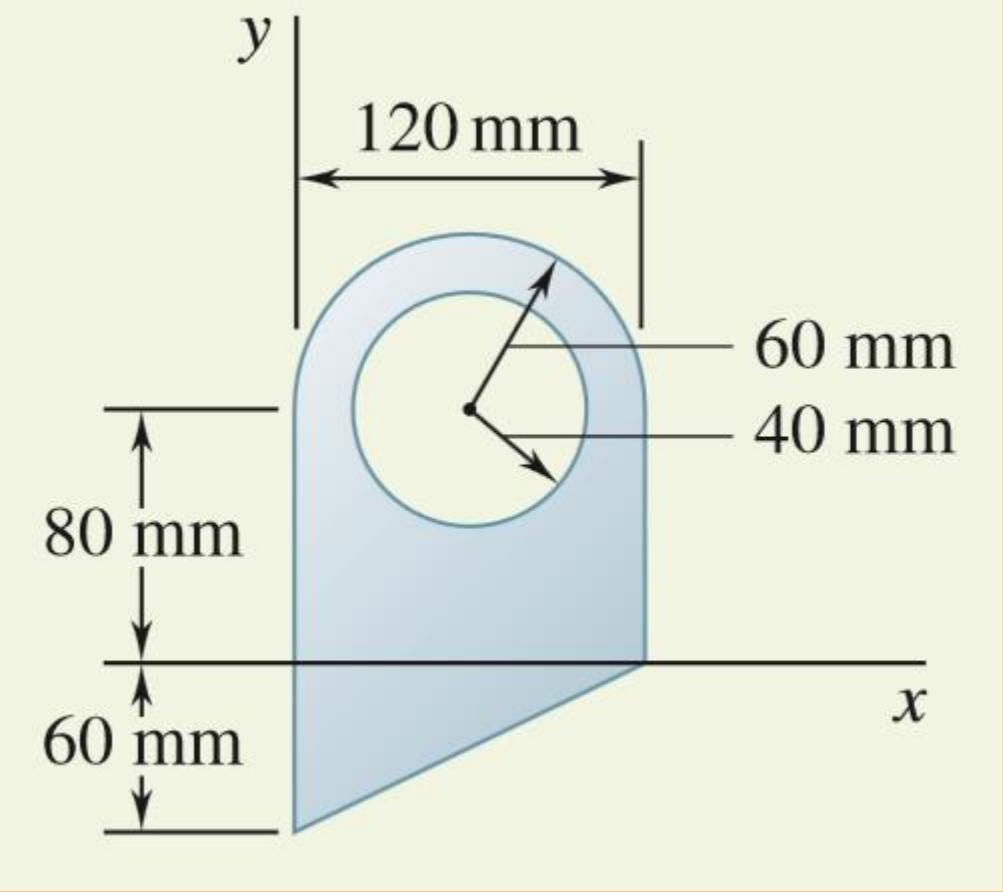
Centroide	X =	56
	Y =	30

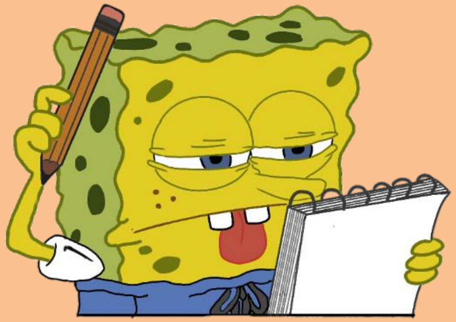
Eixo de Ref.	X =	56
	Y =	30



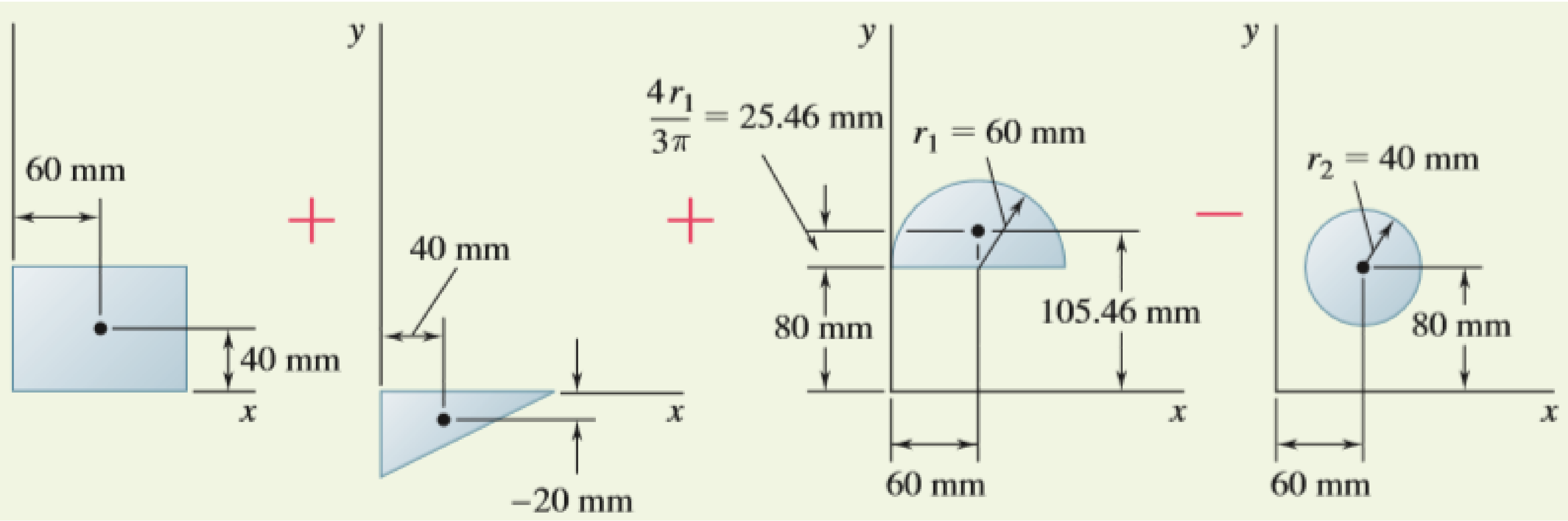
EXERCÍCIO

- Determine os momentos de inércia da superfície mostrada em relação aos eixos centroidais paralelos AOS EIXOS x e y.





EXERCÍCIO



Component	A, mm^2	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm^3	$\bar{y}A$, mm^3
Rectangle	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triangle	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	−20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicircle	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Circle	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma\bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma\bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

EXERCÍCIO

Component	A, mm^2	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm^3	$\bar{y}A$, mm^3
Rectangle	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triangle	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	-20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicircle	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Circle	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma\bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma\bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma\bar{x}A: \qquad \bar{X}(13.828 \times 10^3\ \text{mm}^2) = 757.7 \times 10^3\ \text{mm}^3$$

$$\bar{X} = 54.8\ \text{mm}$$

$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma\bar{y}A: \qquad \bar{Y}(13.828 \times 10^3\ \text{mm}^2) = 506.2 \times 10^3\ \text{mm}^3$$

$$\bar{Y} = 36.6\ \text{mm}$$

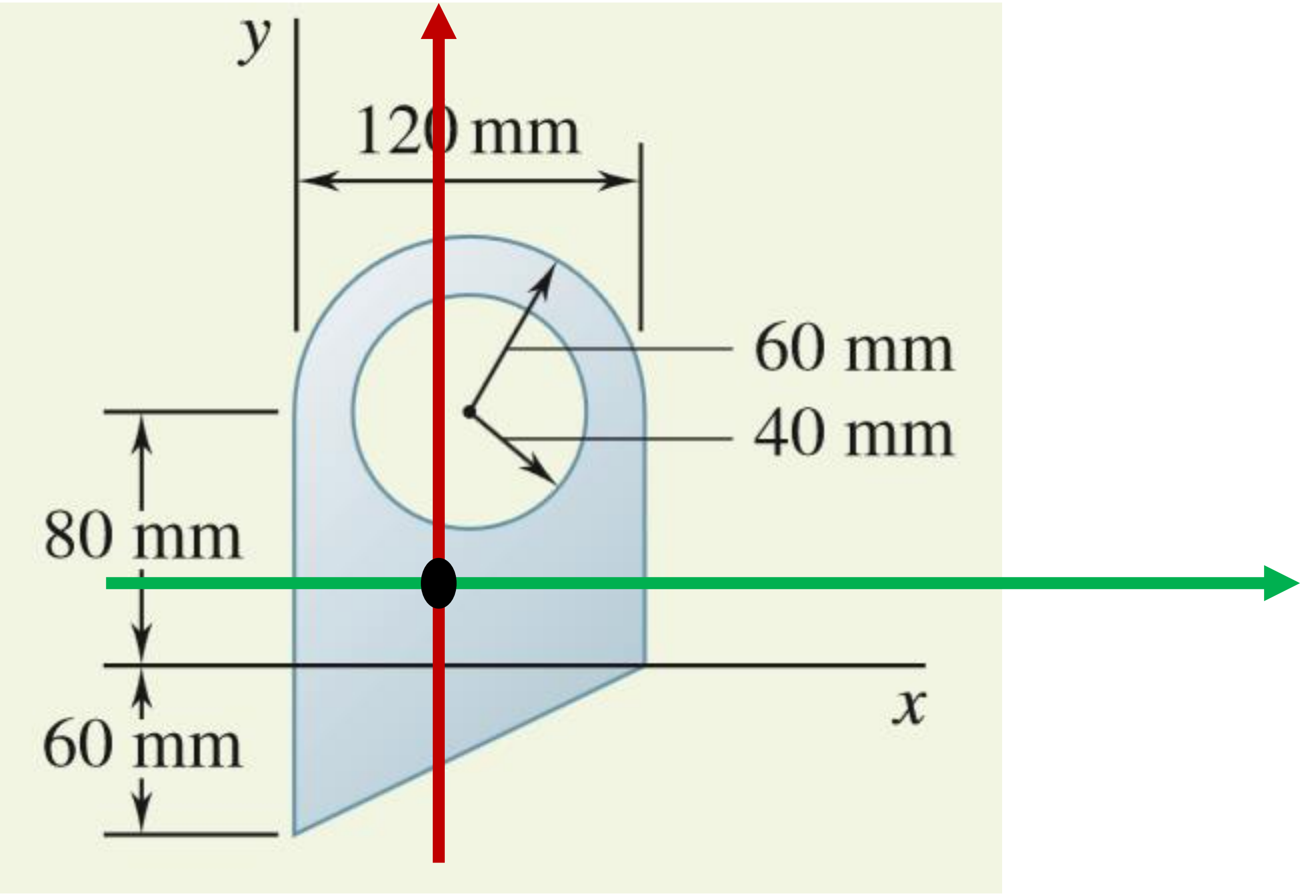
EXERCÍCIO

$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma\bar{x}A: \qquad \bar{X}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\bar{X} = 54.8 \text{ mm}$$

$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma\bar{y}A: \qquad \bar{Y}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\bar{Y} = 36.6 \text{ mm}$$



EXERCÍCIO

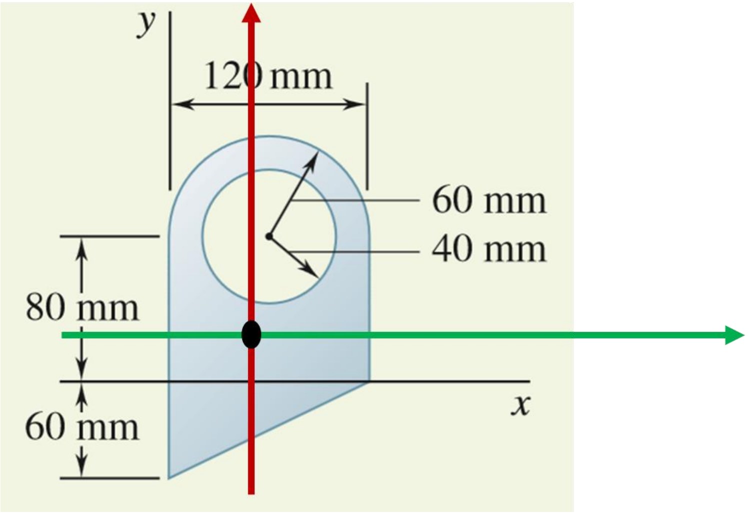


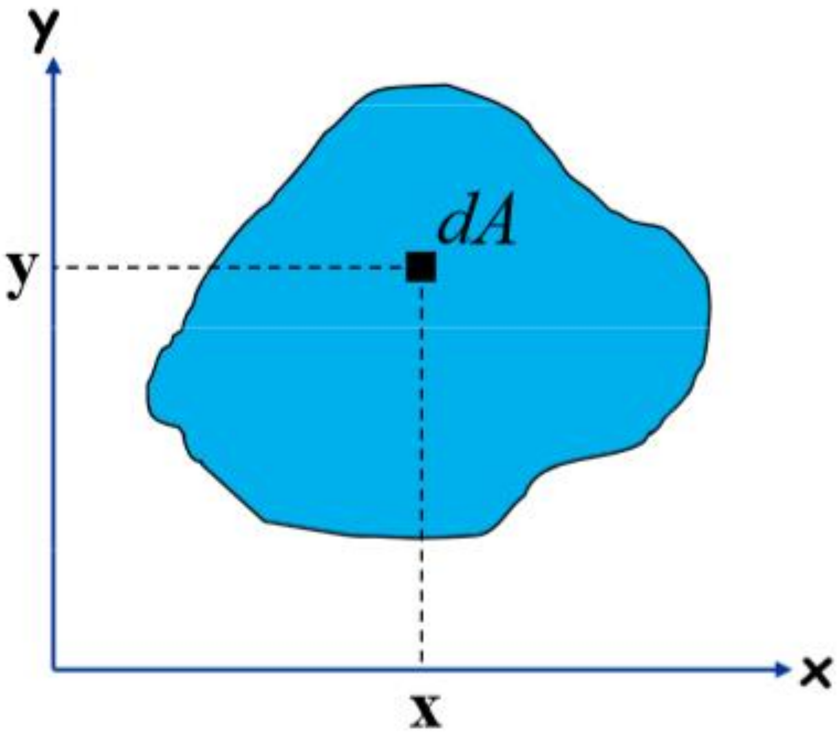
Fig	Geometria	A	x	y	xA	yA		Ixc	Iyc	(dx)²	(dy)²	Ix	Iy
1	retangulo	9600	60	40	576000	384000		5120000	11520000	27,1098	11,50012	5230401	11780254
2	triangulo	3600	40	-20	144000	-72000		7200000	2880000	218,8415	3204,558	18736410	3667829
3	semi-circulo	5654,867	60	105,46	339292	596362,3		1423008	5089380	27,1098	4740,485	28229821	5242682
4	circulo	-5026,55	60	80	-301593	-402124		-2010619	-2010619	27,1098	1882,795	-1,1E+07	-2146888
	TOTAL =	**13828,32**			**757699,1**	**506238,4**						**40722054**	**18543878**

Centroide	X	54,79329
	Y	36,60882

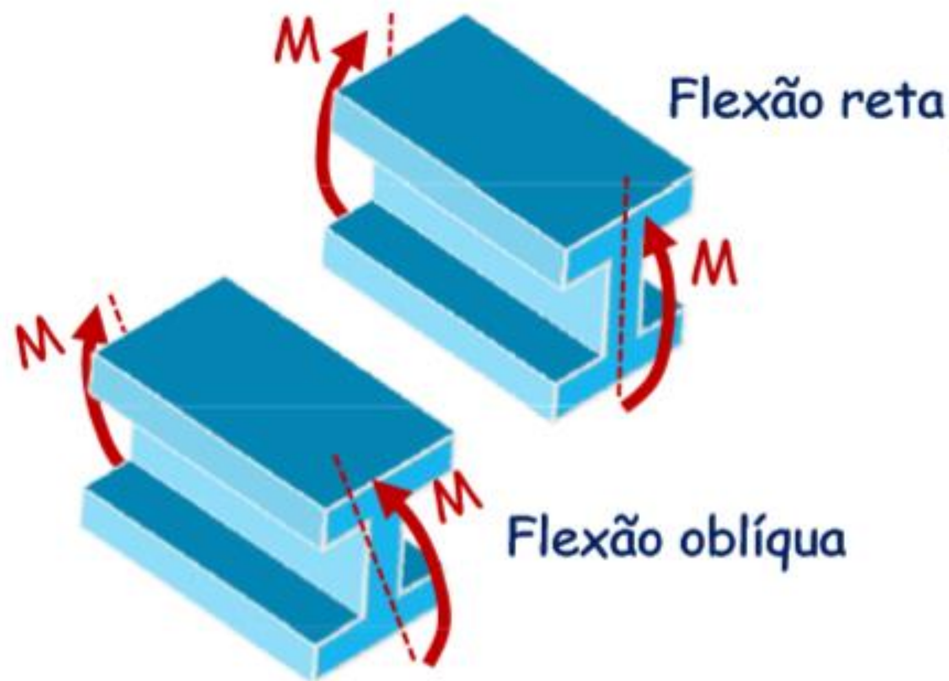
Eixo de Ref.	X =	54,8
	Y =	36,6

PRODUTO DE INÉRCIA

PRODUTO DE INÉRCIA



$$I_{xy} = \int_A xy\,dA$$



Quando pelo menos um dos eixos cartesianos é de simetria, o produto de inércia é <u>nulo</u>.

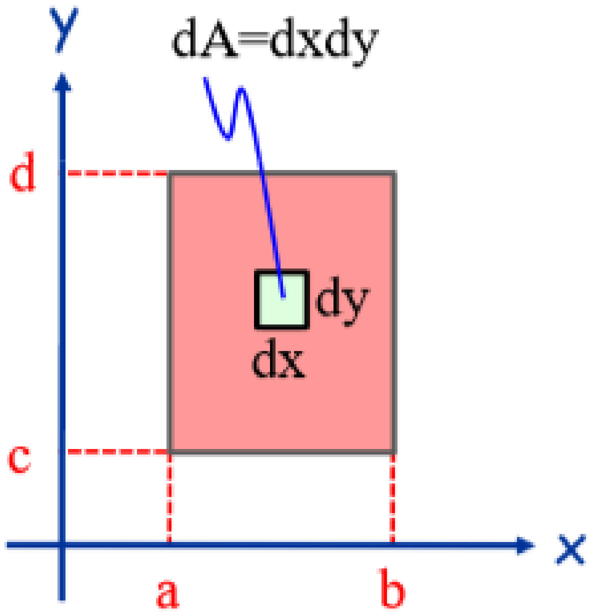
PRODUTO DE INÉRCIA

$$I_{xy} = \int xydA$$

- Em princípio, para quantificação do produto de inércia, esse é calculado a partir de integral dupla no domínio representativo da região estudada, onde se deve escrever o elemento infinitesimal de área dA de acordo com a conveniência das coordenadas de descrição da região tratada.

PRODUTO DE INÉRCIA

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b \text{ e } c \le y \le d\}$$



$$I_{xy} = \int xy\,dA = \int_c^d \int_a^b xy\,dx\,dy$$

$$= \int_c^d \left[\frac{x^2}{2} y\right]_a^b dy = \int_c^d \frac{b^2 - a^2}{2} y\,dy$$

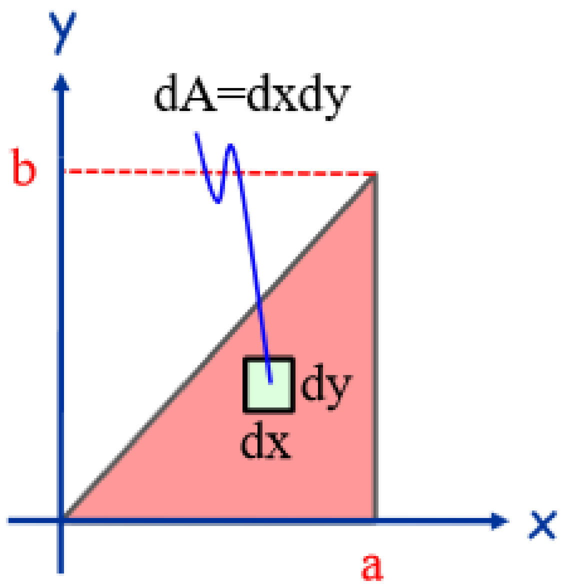
$$= \left[\frac{(b^2 - a^2) y^2}{4}\right]_c^d$$

$$= \boxed{\frac{(b^2 - a^2)(d^2 - c^2)}{4}}$$

Neste caso, igual ao produto da área do retângulo pelas coordenadas do centróide do mesmo.

PRODUTO DE INÉRCIA

$$D = \left\{ (x, y) \,|\, 0 \le x \le a \text{ e } 0 \le y \le \frac{b}{a}x \right\}$$



$$I_{xy} = \int xy\,dA = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} xy\,dy\,dx$$

$$= \int_0^a \left[\frac{xy^2}{2} \right]_0^{\frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \frac{b^2}{2a^2} x^3 dx$$

$$= \left[\frac{b^2}{8a^2} x^4 \right]_0^a = \boxed{\frac{a^2b^2}{8}}$$

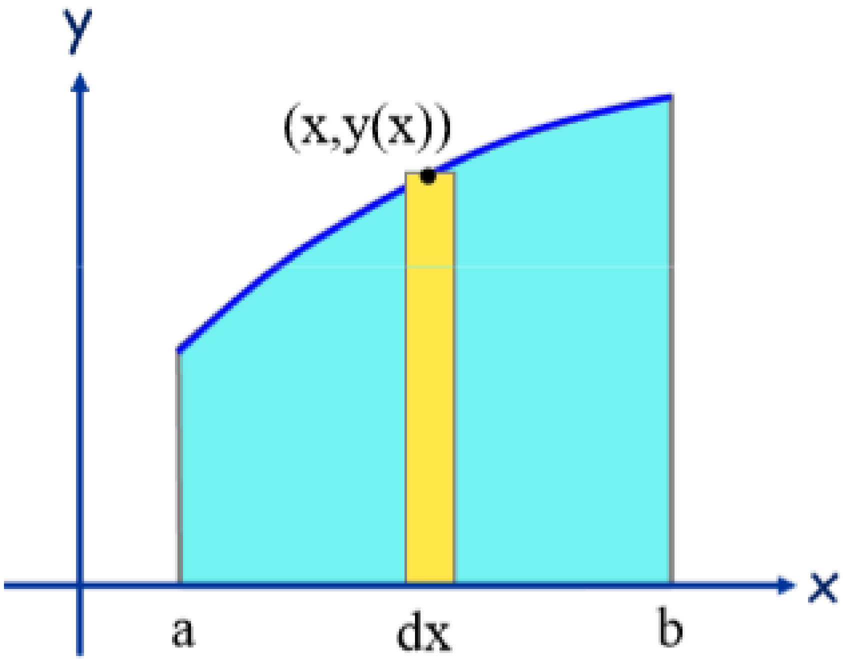
Em geral, não é igual ao produto da área pelas coordenadas do centróide da mesma.

PRODUTO POR INTEGRAÇÃO DE FATIAS

- $$I_{xy} = \int xy\,dA = \int dI_{xy}^{el}$$

- A idéia desta sistemática é considerar que a região de interesse é formada pela composição de infinitas fatias infinitesimais cujas formas correspondem a regiões cujo produto de inércia já é conhecido.

PRODUTO POR INTEGRAÇÃO DE FATIAS



$$dI_{xy}^{el} = x\frac{y(x)^2}{2}dx$$

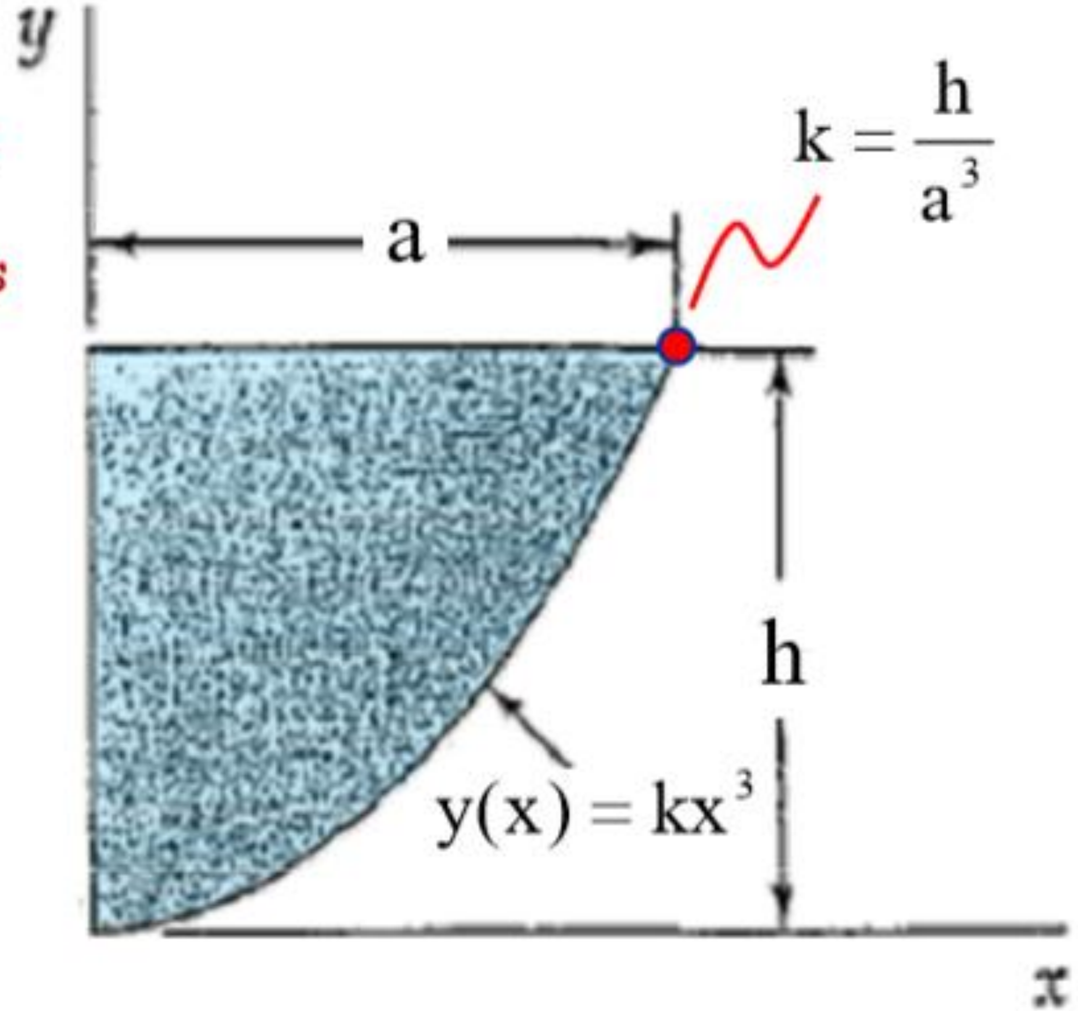
$$I_{xy} = \int xydA = \int dI_{xy}^{el}$$

$$= \int_a^b x\frac{y(x)^2}{2}dx$$

PRODUTO POR INTEGRAÇÃO DE FATIAS

Exemplo:

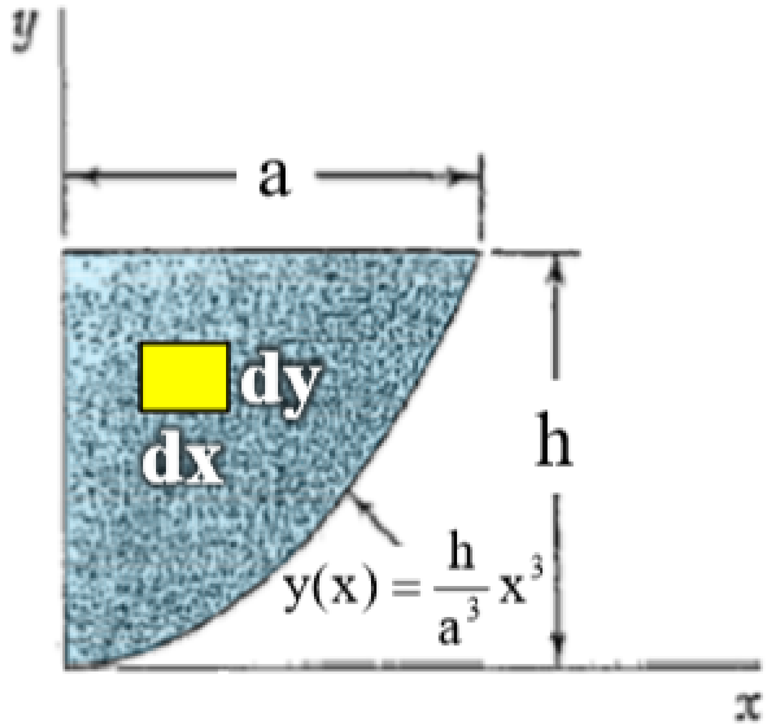
Determine por integração o produto de inércia da superfície mostrada em relação aos eixos coordenados em termos de a e h.



PRODUTO POR INTEGRAÇÃO DE FATIAS

Exemplo (continuação):

- Por integração dupla



$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \le x \le a \text{ e } \frac{h}{a^3}x^3 \le y \le h \right\}$$

$$I_{xy} = \int_0^a \int_{\frac{h}{a^3}x^3}^{h} xy\,dy\,dx$$

$$= \int_0^a \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{h}{a^3}x^3}^{h} dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{h^2 x}{2} - \frac{h^2 x^7}{2a^6} \right) dx$$

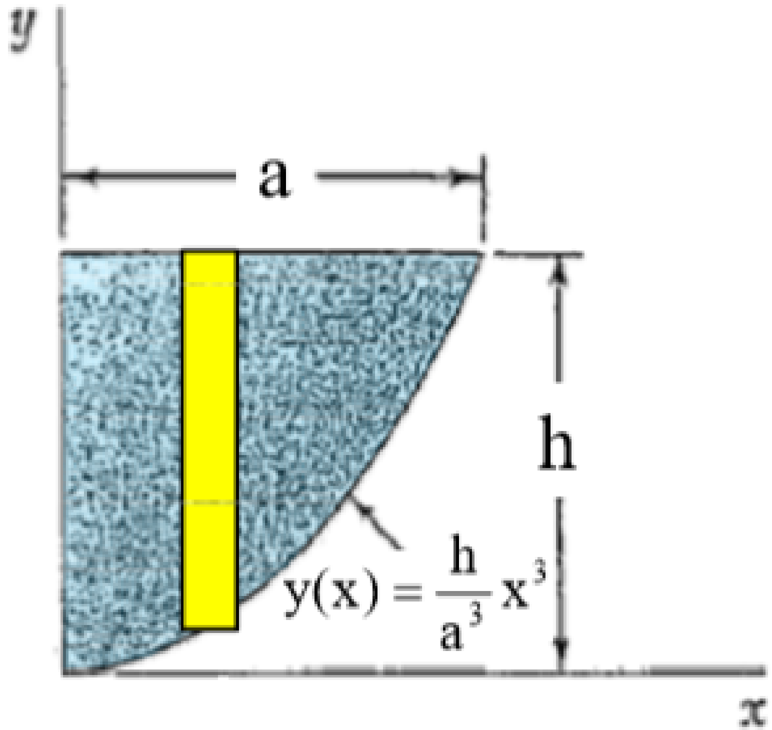
$$= \left[\frac{h^2 x^2}{4} - \frac{h^2 x^8}{16a^6} \right]_0^a$$

$$= \boxed{\frac{3a^2h^2}{16}}$$

PRODUTO POR INTEGRAÇÃO DE FATIAS

Exemplo (continuação):

- Por integração de fatias



$$y(x) = \frac{h}{a^3}x^3$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \le x \le a \text{ e } \frac{h}{a^3}x^3 \le y \le h \right\}$$

$$I_{xy} = \int dI_{xy}$$

$$= \int_0^a \left[h^2 - y(x)^2\right]\frac{x}{2}dx$$

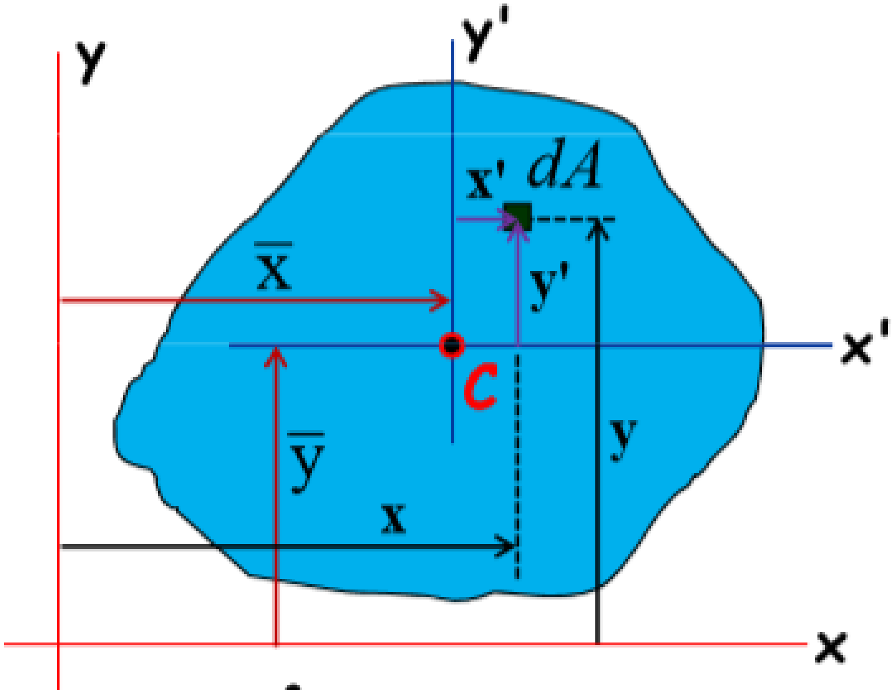
$$= \int_0^a \left[\frac{h^2x}{2} - \frac{h^2x^7}{2a^6}\right]dx$$

$$= \left[\frac{h^2x^2}{4} - \frac{h^2x^8}{16a^6}\right]_0^a$$

$$= \boxed{\frac{3a^2h^2}{16}}$$

Teorema dos Eixos Paralelos para o Produto de Inércia

Eixos Paralelos para o Produto de Inércia



$$I_{x'y'} = \int_A x'y'dA$$

$$I_{xy} = \int_A xydA$$

$$x = x' + \bar{x}$$

$$y = y' + \bar{y}$$

$$I_{xy} = \int_A (x' + \bar{x})(y' + \bar{y})dA = \int_A (x'y' + x'\bar{y} + \bar{x}y' + \overline{xy})dA$$

$$= \int_A x'y'dA + \bar{y}\int_A x'dA + \bar{x}\int_A y'dA + \overline{xy}\int_A dA$$

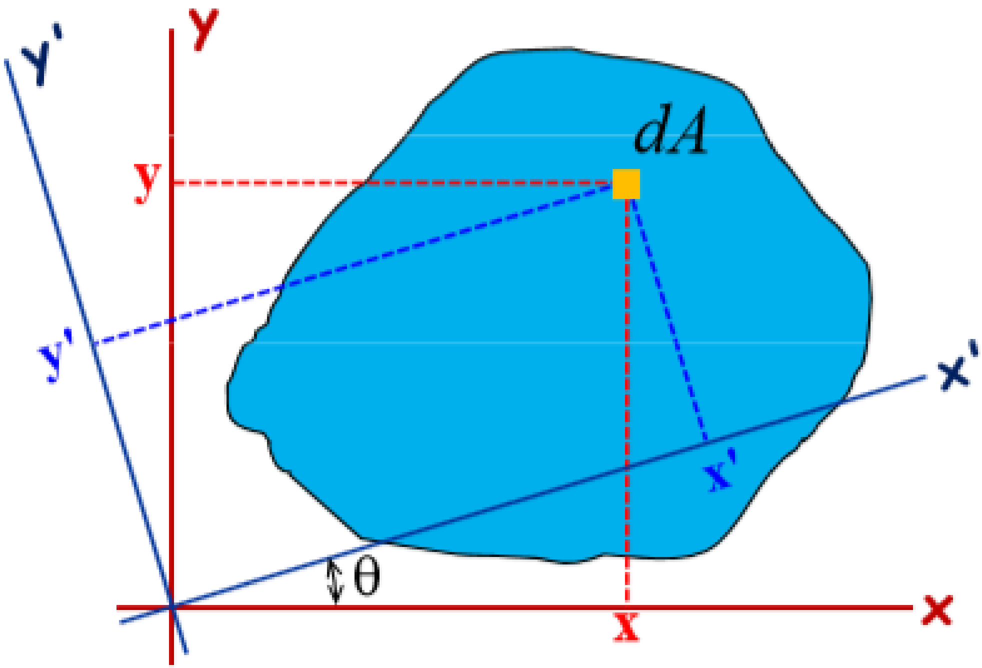
$$= I_{x'y'} + \bar{y}\underbrace{Q_{y'}}_{0} + \bar{x}\underbrace{Q_{x'}}_{0} + \overline{xy}A \Rightarrow \boxed{I_{xy} = I_{x'y'} + \overline{xy}A}$$

Eixos Paralelos para o Produto de Inércia

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I_{xy} = \int_A xy\,dA$$



$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA$$

$$I_{y'} = \int_A x'^2 dA$$

$$I_{x'y'} = \int_A x'y' dA$$

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta \quad \text{e} \quad y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$I_{x'} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

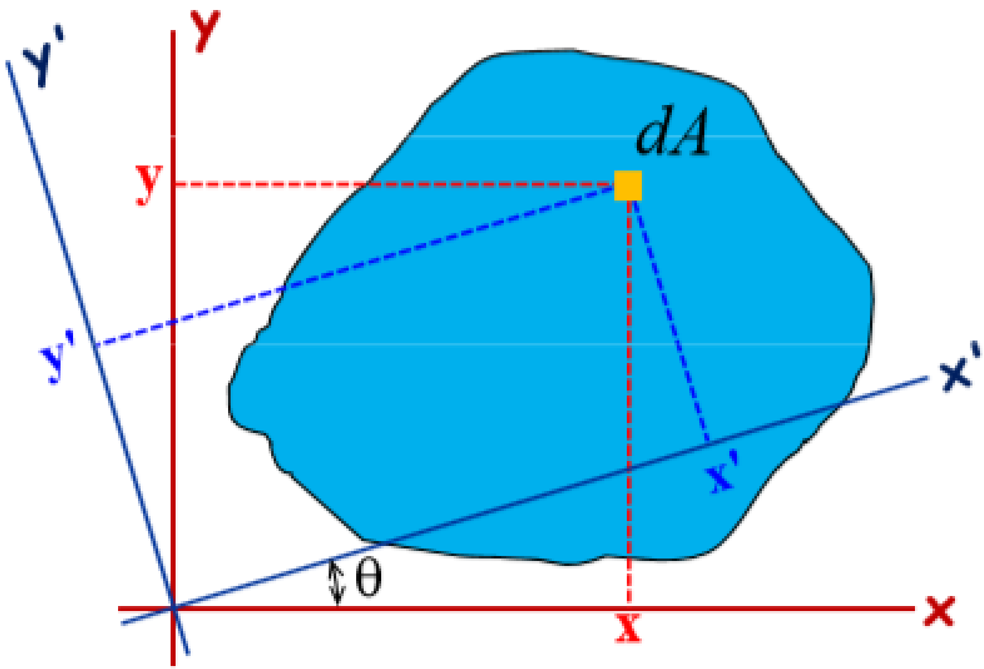
$$I_{y'} = I_x \sin^2\theta + I_y \cos^2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

Eixos e Momentos de Inércia Principais

Eixos e Momentos de Inércia Principais

$$I_x = \int_A y^2 dA \qquad I_y = \int_A x^2 dA \qquad I_{xy} = \int_A xy\, dA$$



$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA \qquad I_{y'} = \int_A x'^2 dA \qquad I_{x'y'} = \int_A x'y' dA$$

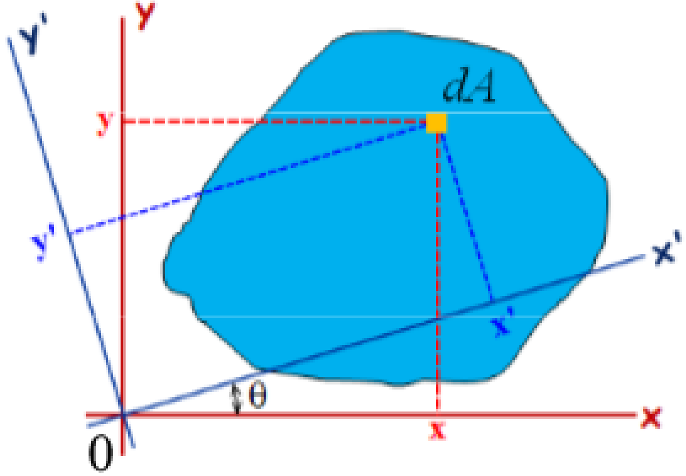
$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta \quad \text{e} \quad y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$I_{x'} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'} = I_x \sin^2\theta + I_y \cos^2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

Eixos e Momentos de Inércia Principais



$$I_{x'} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'} = I_x \sin^2\theta + I_y \cos^2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

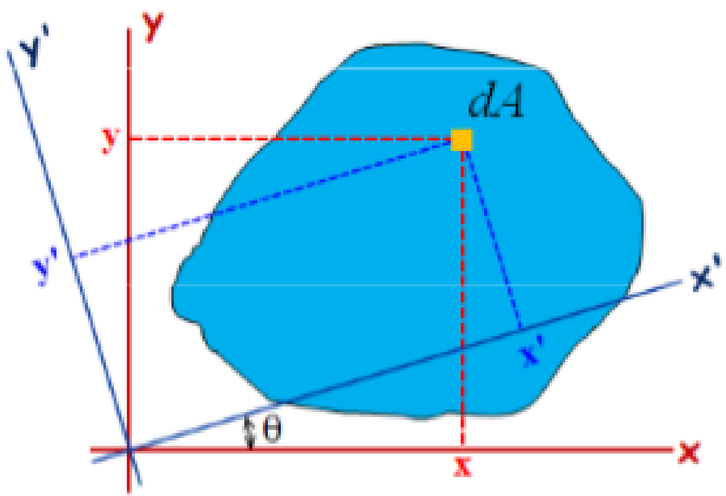
A soma dos momentos de inércia independe do ângulo de giro do sistema de referência, ou seja,

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y = J_0$$

Isso é fato pois a soma dos momentos de inércia leva ao momento polar de inércia, que depende apenas do ponto referente à origem do sistema de referência, que não foi modificado.

Vamos fazer uso dessa identidade para estabelecer $I_{y'}$ sem fazer uso da expressão que depende do ângulo θ.

Eixos e Momentos de Inércia Principais

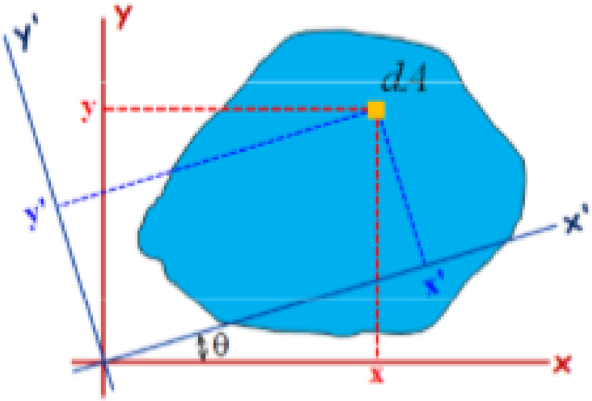


$$I_{x'} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

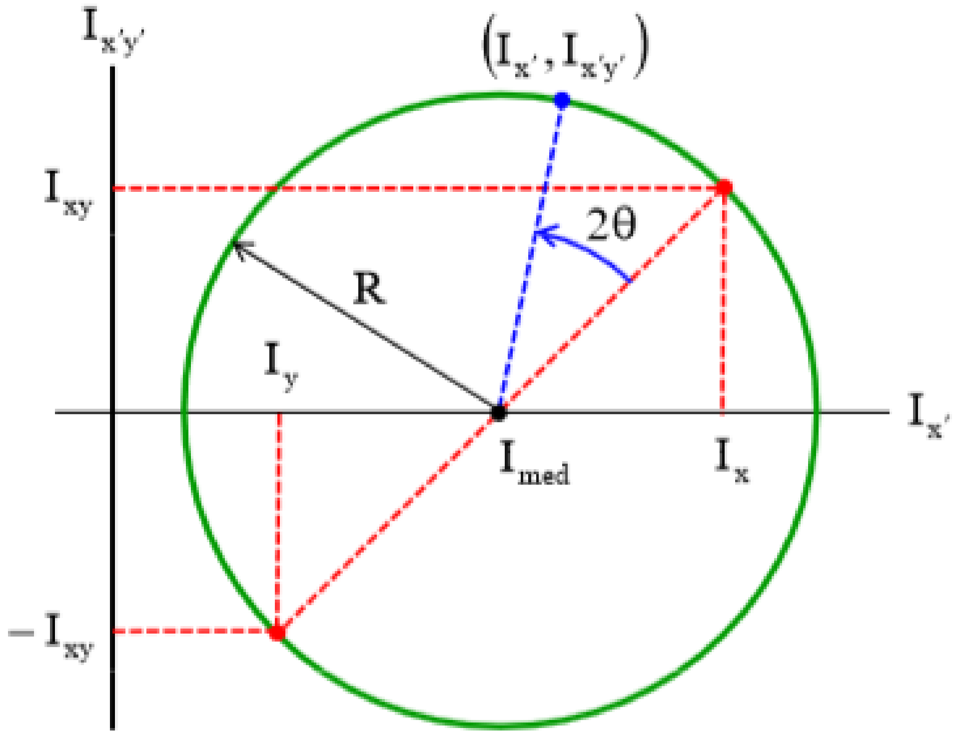
As equações de $I_{x'}$ e $I_{x'y'}$ definem parametricamente uma circunferência para um sistema de coordenadas retangulares com $I_{x'}$ de abscissa e $I_{x'y'}$ de ordenada, para um valor dado de θ.

Eixos e Momentos de Inércia Principais



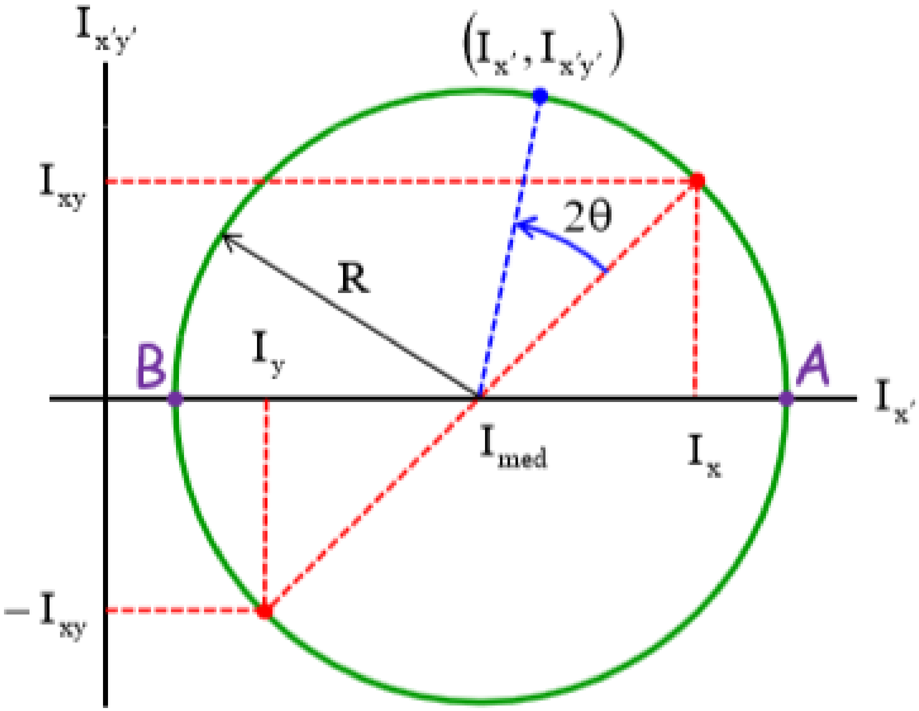
$$I_{x'} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$



$$I_{med} = \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{J_0}{2} \quad e \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Eixos e Momentos de Inércia Principais



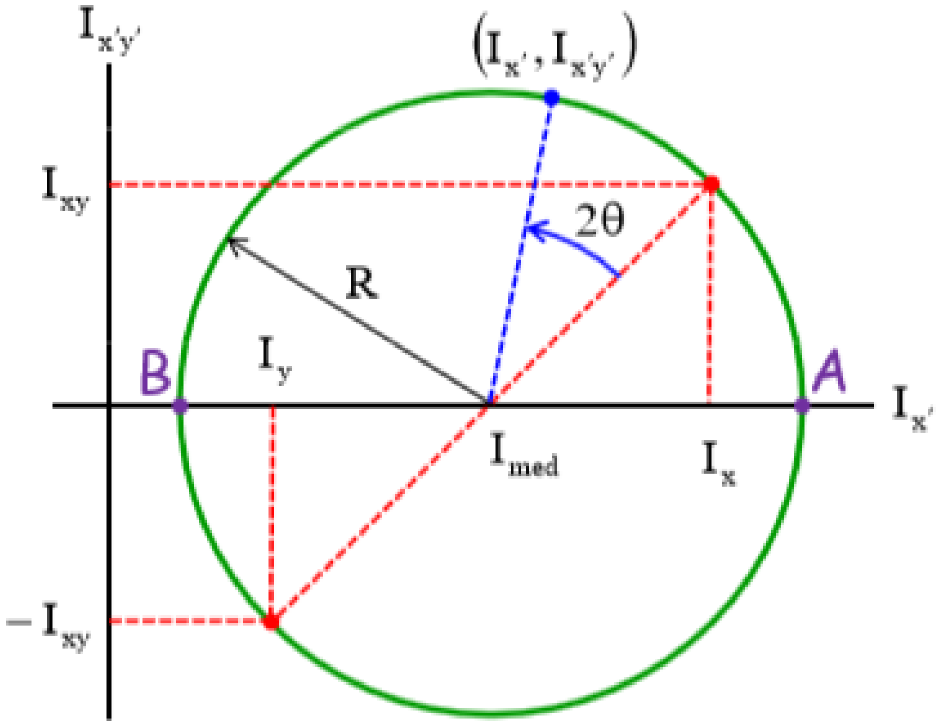
$$I_{med} = \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{J_0}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Os pontos A e B são os que apresentam, respectivamente, o maior e o menor valor do momento de inércia, também denominados <u>momentos principais de inércia</u>, dados por

$$I_{max} = I_{med} + R \quad e \quad I_{min} = I_{med} - R$$

Eixos e Momentos de Inércia Principais



$$I_{med} = \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{J_0}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

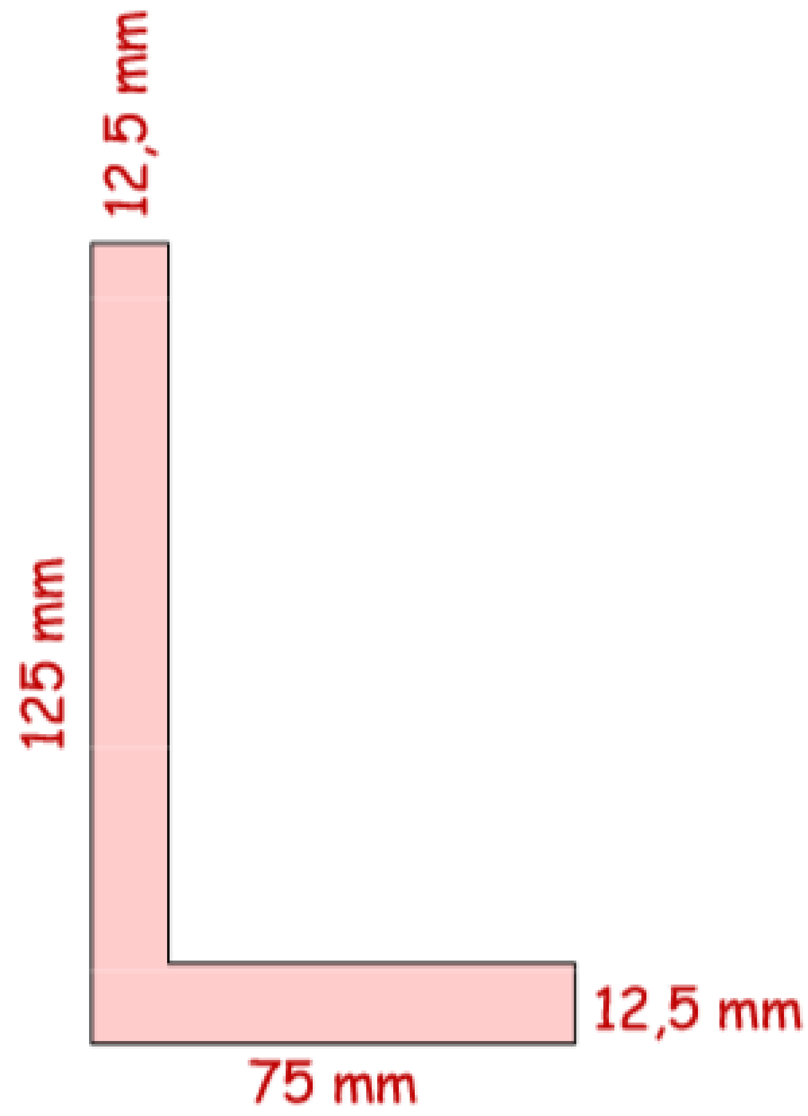
Ainda em relação aos pontos A e B, o produto de inércia é nulo, o que permite determinar as orientações dos eixos principais de inércia

$$I_{x'y'} = 0 \quad \therefore \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta_m + I_{xy}\cos 2\theta_m = 0 \Rightarrow \tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Eixos e Momentos de Inércia Principais

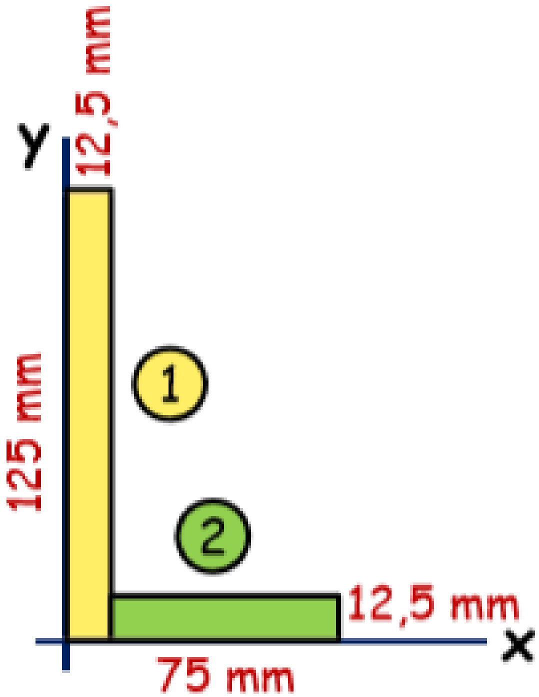
Exemplo:

Para a cantoneira em L mostrada, determine a orientação dos eixos centroidais e principais de inércia, bem como os respectivos valores do momento de inércia.



Eixos e Momentos de Inércia Principais

Exemplo (continuação):



- $(1562{,}5 + 781{,}25)\bar{x} = 9765{,}63 + 34179{,}69$

  $\bar{x} = 18{,}75 \text{ mm}$
- $(1562{,}5 + 781{,}25)\bar{y} = 97656{,}25 + 4882{,}81$

  $\bar{y} = 43{,}75 \text{ mm}$
- $I_{\bar{x}} = 2583821{,}61 + 1108805{,}34$

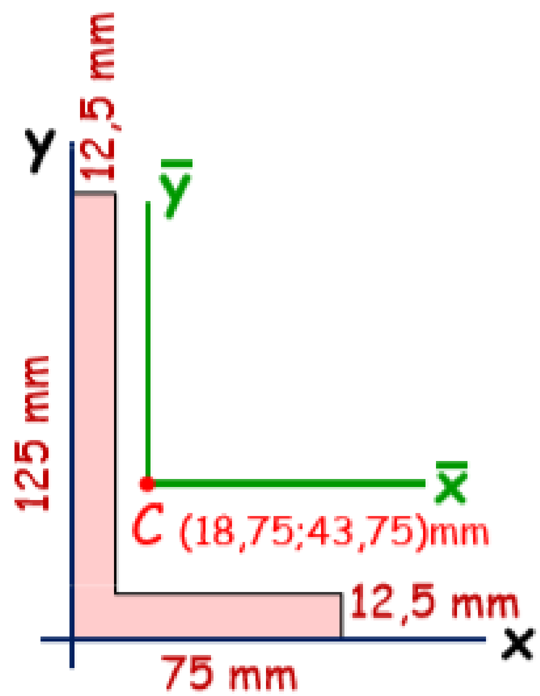
  $I_{\bar{x}} = 3692626{,}95 \text{ mm}^4$
- $I_{\bar{y}} = 264485{,}68 + 742594{,}40$

  $I_{\bar{y}} = 1007080{,}08 \text{ mm}^4$
- $I_{\overline{xy}} = -366210{,}94 - 732421{,}88$

  $I_{\overline{xy}} = -1098632{,}81 \text{ mm}^4$

Eixos e Momentos de Inércia Principais

Exemplo (continuação):



- $I_{\bar{x}} = 3692626{,}95\ \text{mm}^4$

  $I_{\bar{y}} = 1007080{,}08\ \text{mm}^4$

  $I_{\bar{x}\bar{y}} = -1098632{,}81\ \text{mm}^4$

- $I_{med} = 2349853{,}52\ \text{mm}^4$

  $R = 1734945{,}12\ \text{mm}^4$

- $I_{max} = 4084798{,}63\ \text{mm}^4$

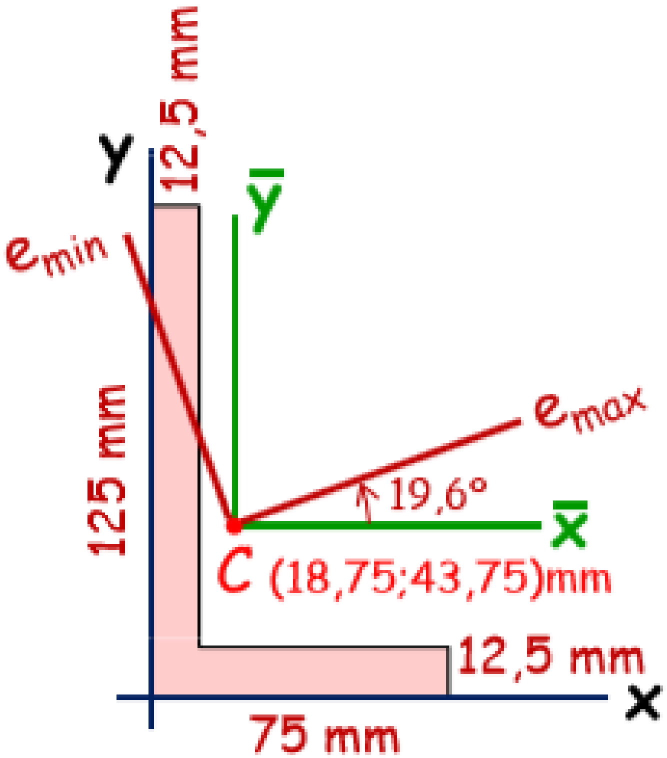
  $I_{min} = 614908{,}40\ \text{mm}^4$

- $\theta_{max} = 19{,}6^\circ$

  $\theta_{min} = 109{,}6^\circ$

Eixos e Momentos de Inércia Principais

Exemplo (continuação):



- $I_{\bar{x}} = 3692626{,}95\ \text{mm}^4$

  $I_{\bar{y}} = 1007080{,}08\ \text{mm}^4$

  $I_{\bar{x}\bar{y}} = -1098632{,}81\ \text{mm}^4$

- $I_{max} = 4084798{,}63\ \text{mm}^4$

  $I_{min} = 614908{,}40\ \text{mm}^4$

- $\theta_{max} = 19{,}6°$

  $\theta_{min} = 109{,}6°$

...

CONTINUA em Teoria das Estruturas 1