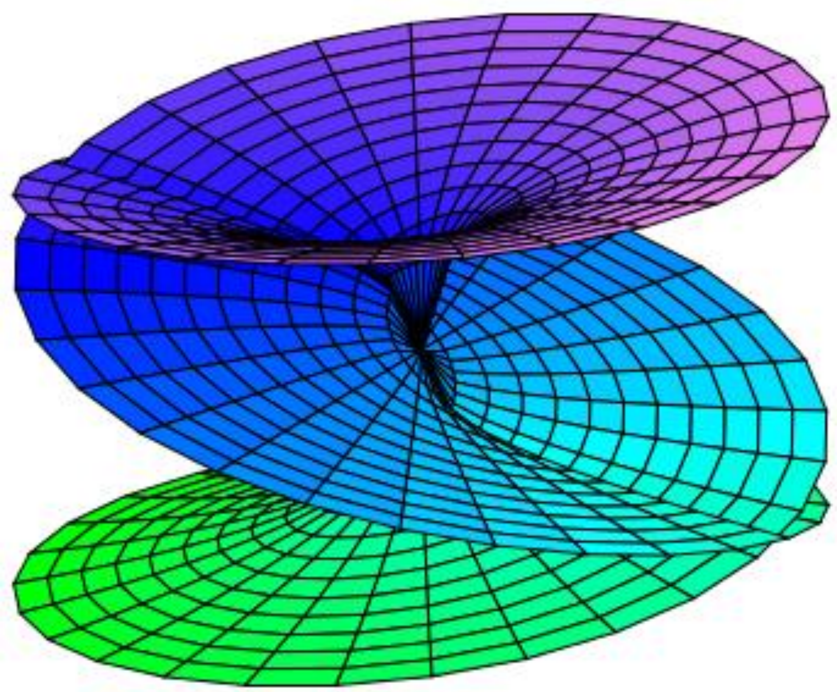
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS SERTÃO
EIXO TECNOLOGIA



Cálculo Numérico

Prof. Dr. Alverlando Ricardo

Aula 6: Parte II: SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

NAS AULAS ANTERIORES:

INTRODUÇÃO

- Até o presente momento aprendemos como resolver: EQUAÇÕES NÃO LINEARES.

$$f(x) = 0 \left\{ \text{\textbf{\textit{Função de um única variável}}} \right.$$

INTRODUÇÃO

- Até o presente momento aprendemos como resolver: EQUAÇÕES NÃO LINEARES.

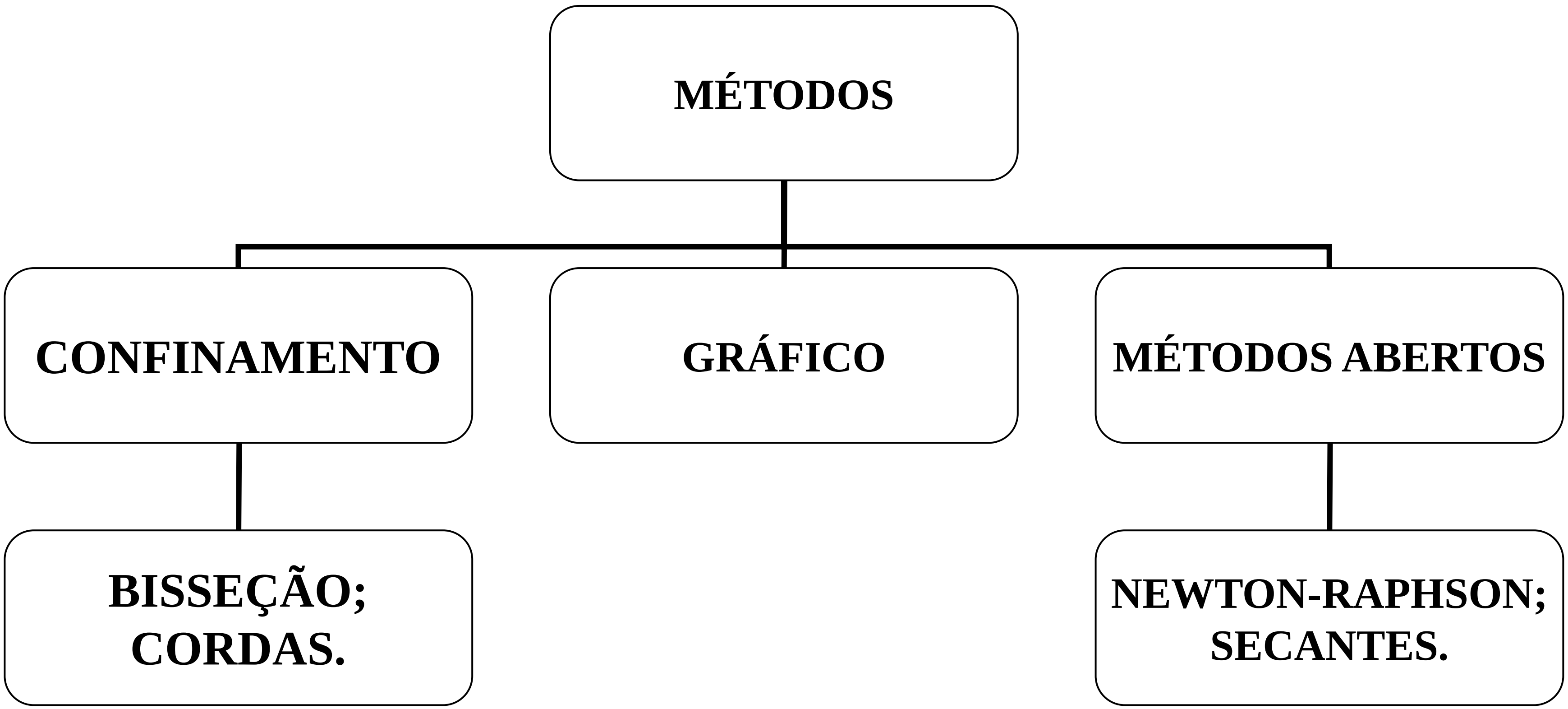
$$A_S = \frac{1}{2} r^2 (\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = x \operatorname{tg}(\theta) - \frac{1}{2} \frac{x^2 g}{v_o^2} \frac{1}{\cos^2(\theta)} + h$$

$$y = \frac{w_0 L}{3\pi^4 EI}\left(48L^3 \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right) - 48L^3 + 3\pi^3 L x^2 - \pi^3 x^3\right)$$

INTRODUÇÃO

- Até o presente momento aprendemos como resolver: EQUAÇÕES NÃO LINEARES.

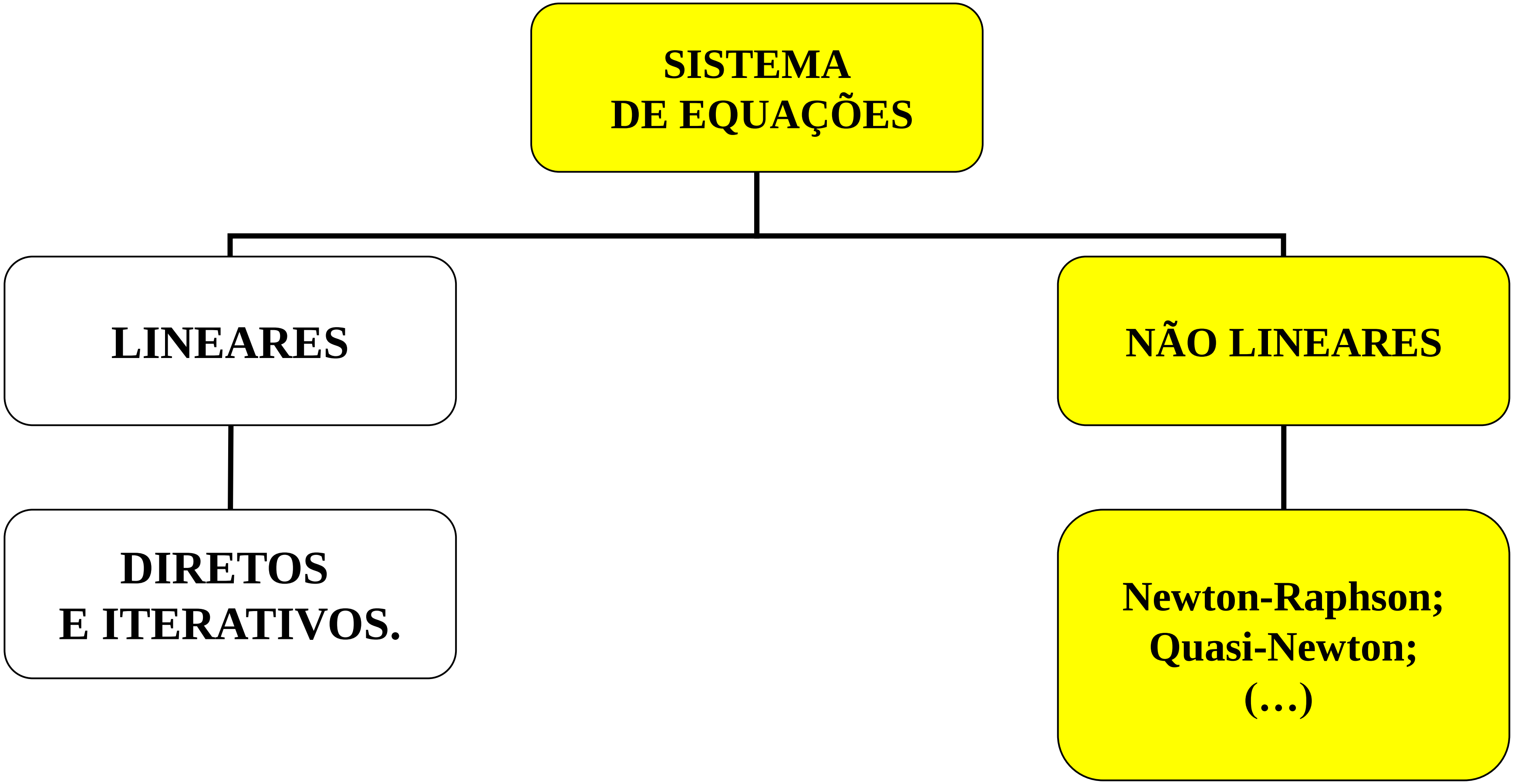


INTRODUÇÃO

- Entretanto, equações com **duas, ou mais**, ***equações lineares*** ou ***não lineares*** são bem comuns nos problemas de Engenharia, ciência, economia, negócios, estatística, *etc*!

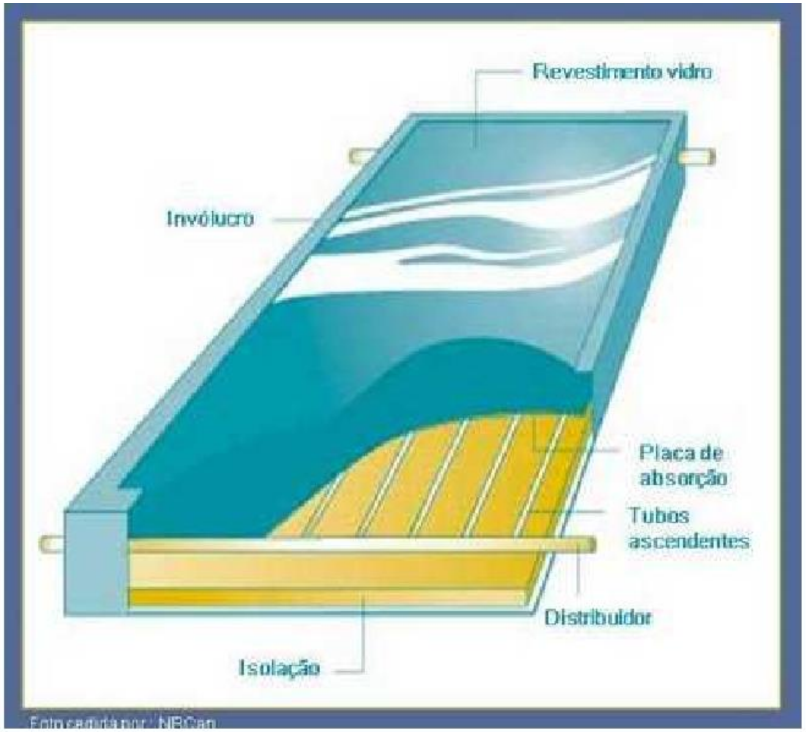
INTRODUÇÃO

- Problemas com **duas, ou mais**, ***equações*** são denominados de sistemas de equações:



SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

EXEMPLOS DE APLICAÇÕES



- **Aquecedor Solar:**

Num coletor solar, um balanço de energia na placa absorvente e na placa de vidro produz o seguinte sistema de equações não lineares nas temperaturas absolutas da placa absorvente (T1) e da placa de vidro (T2):

$$\begin{cases} (T_1^4 + 0.06823T_1) - (T_2^4 + 0.05848T_2) & = & 0.01509 \\ (T_1^4 + 0.05848T_1) - (2T_2^4 + 0.11696T_2) & = & 0 \end{cases}$$

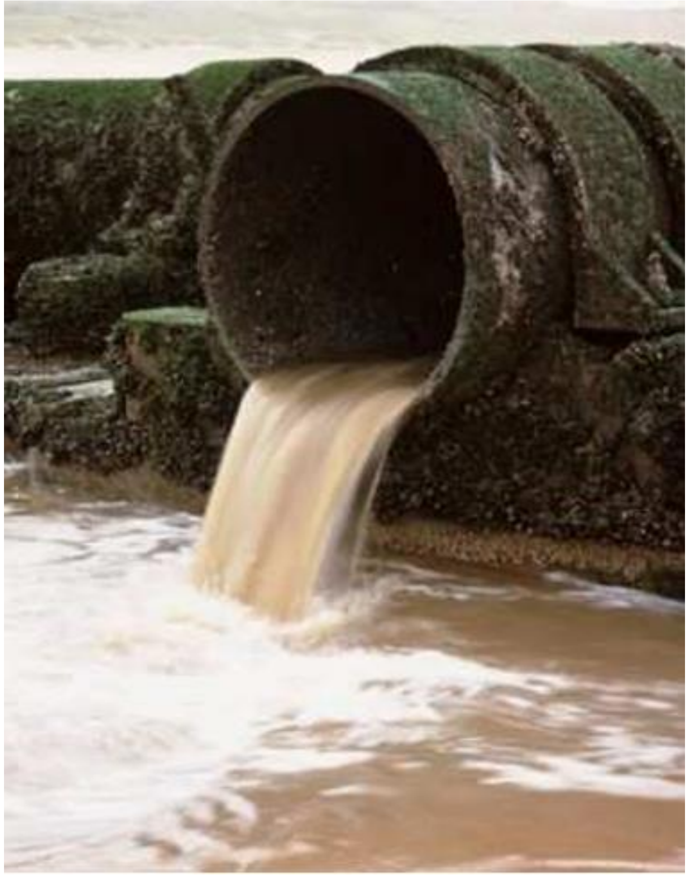
EXEMPLOS DE APLICAÇÕES

- **Jogos:**

Numa máquina de casino, as quantias em posse de dois jogadores são designadas por x_1 e x_2, e a quantia com que o casino fica é x_3. Num determinado momento, essas quantias obedecem às equações $f_i = 0$, $i = 1,2,3$, em que as f_i

$$
\begin{cases}
f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - 15 \\
f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1^2} + x_2^2 - x_3 \\
f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 500
\end{cases}
$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÕES



- **Saneamento:**

A concentração de um poluente num lago depende do tempo t, e é dada por:

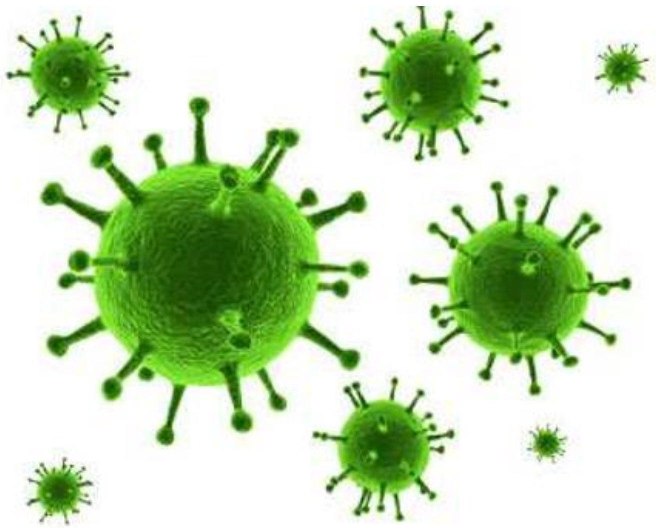
$$C(t) = 70e^{\beta t} + 20e^{\omega t}$$

Efetuaram-se algumas medidas que foram registadas na tabela:

t	1	2
$C(t)$	27.5702	17.6567

$$\begin{cases} 70e^{x_1} + 20e^{x_2} - 27.5702 = 0 \\ 70e^{2x_1} + 20e^{2x_2} - 17.6567 = 0 \end{cases}$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÕES



$$\begin{cases} 16x_1 - \cos(\alpha(x_2 - 2x_1)) = 0 \\ 16x_2 + 0.75\,\mathrm{sen}(\alpha(-x_2 - 3x_1)) = 0 \end{cases}$$

Para combater um vírus que infectou um grupo de indivíduos vai ser administrado um composto químico sintetizado com base em duas substâncias elementares x_1 e x_2. Sabe-se que se forem administrados α miligramas de composto a cada indivíduo, a concentração (mg/litro) de cada uma das substâncias elementares na circulação sanguínea é dada implicitamente (para $\alpha \in [0,5]$) pelo sistema de equações dado acima.

EXEMPLOS DE APLICAÇÕES

➢ **Transmissão elétrica:**

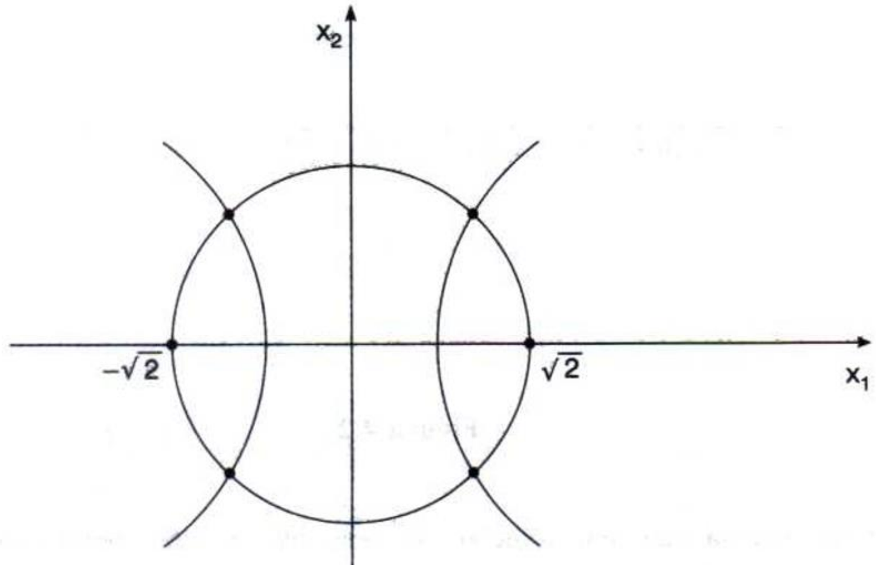
Duas estações elétricas vão fornecer energia a uma certa região da forma mais econômica possível. O custo total de operação das duas estações é dado por:

$$f(x_1, x_2) = 0.1 + 0.01x_1x_2 + 0.15x_2^4 + 0.01x_1^4 - 0.25(x_1 + x_2 - 100)$$

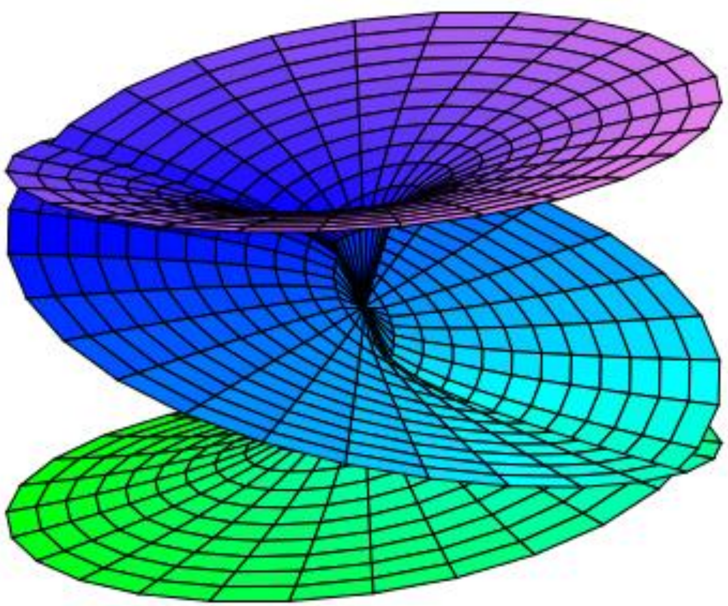
em que x_1 é a energia fornecida pela primeira estação e x_2 é a energia fornecida pela segunda estação.

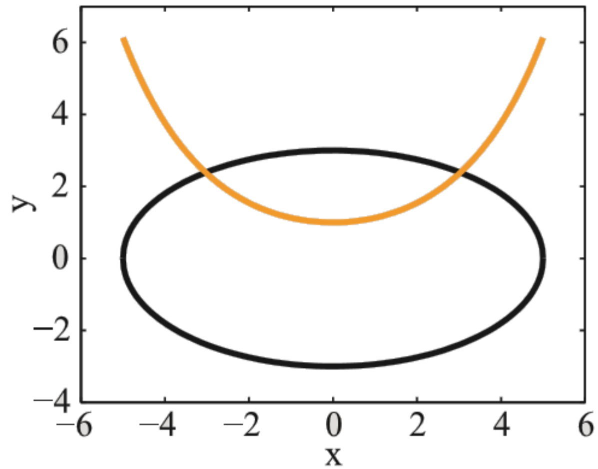
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.01x_2 + 0.04x_1^3 - 0.25 & = & 0 \\ 0.01x_1 + 0.60x_2^3 - 0.25 & = & 0 \end{cases}$$

GEOMETRICAMENTE



$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - \dfrac{x_2^2}{9} - 1 = 0 \end{cases}$$





$$f_1(x, y) = y - \frac{1}{2}(e^{x/2} + e^{(-x)/2}) = 0$$

$$f_2(x, y) = 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES NL LINEARES

- Dessa forma métodos numéricos são aplicados, tais como:

SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES (SOLUÇÃO)

- **Método de Newton**
- **Método de Quase-Newton**
  - **Newton-Raphson modificado;**
  - **Método da Secante;**

Outros Métodos: BFGS, DFT, Gradiente Conjudado, Máximo Declive (…)

Método de Newton para a solução de sistemas de equações não-lineares

Método de Newton: Duas Equações NL

Um sistema com duas equações e duas incógnitas x e y pode ser escrito como:

$$f_1(x, y) = 0$$

$$f_2(x, y) = 0$$

Método de Newton: Duas Equações NL

Um sistema com duas equações e duas incógnitas x e y pode ser escrito como:

$$f_1(x, y) = 0$$

$$f_2(x, y) = 0$$

Adotando: uma solução estimada x_1 e y_1.

E se $\boldsymbol{x_2}$ **e** $\boldsymbol{y_2}$ são a **solução exata** do sistema e estão suficientemente **próximos de** $\boldsymbol{x_1}$ **e** $\boldsymbol{y_1}$, então o valores de f_1 e f_2 nos pontos x_2 e y_2 podem ser expressos usando a expansão em **série de Taylor**:

Método de Newton: Duas Equações NL

Adotando: uma solução estimada x_1 e y_1.

E se x_2 e y_2 são a **solução exata** do sistema e estão suficientemente **próximos de x_1 e y_1**, então o valores de f_1 e f_2 nos pontos x_2 e y_2 podem ser expressos usando a expansão em **série de Taylor**:

$$f_1(x_2, y_2) = f_1(x_1, y_1) + (x_2 - x_1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_1, y_1} + (y_2 - y_1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_1, y_1} + \ldots$$

$$f_2(x_2, y_2) = f_2(x_1, y_1) + (x_2 - x_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_1, y_1} + (y_2 - y_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_1, y_1} + \ldots$$

Método de Newton: Duas Equações NL

- Como x_2 e y_2 estão próximos de x_1 e y_1, valores aproximados para $f_1(x_2, y_2)$ e $f_2(x_2, y_2)$ podem ser calculados sem que sejam considerados termos de ordem mais elevada.

$$f_1(x_2, y_2) = f_1(x_1, y_1) + (x_2 - x_1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_1, y_1} + (y_2 - y_1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_1, y_1} \cancel{+ \ldots}$$

$$f_2(x_2, y_2) = f_2(x_1, y_1) + (x_2 - x_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_1, y_1} + (y_2 - y_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_1, y_1} \cancel{+ \ldots}$$

Método de Newton: Duas Equações NL

- Como x_2 e y_2 estão próximos de x_1 e y_1, valores aproximados para $f_1(x_2, y_2)$ e $f_2(x_2, y_2)$ podem ser calculados sem que sejam considerados termos de ordem mais elevada.

- Como $f_1(x_2, y_2) = 0$ e $f_2(x_2, y_2) = 0$:

$$\cancelto{0}{f_1(x_2, y_2)} = f_1(x_1, y_1) + (x_2 - x_1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_1, y_1} + (y_2 - y_1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_1, y_1} \cancel{+\cdots}$$

$$\cancelto{0}{f_2(x_2, y_2)} = f_2(x_1, y_1) + (x_2 - x_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_1, y_1} + (y_2 - y_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_1, y_1} \cancel{+\cdots}$$

Método de Newton: Duas Equações

- Como x_2 e y_2 estão próximos de x_1 e y_1, valores aproximados para $f_1(x_2, y_2)$ e $f_2(x_2, y_2)$ podem ser calculados sem que sejam considerados termos de ordem mais elevada.

- Como $f_1(x_2, y_2) = 0$ e $f_2(x_2, y_2) = 0$:

$$0 = f_1(x_1, y_1) + (x_2 - x_1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_1, y_1} + (y_2 - y_1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_1, y_1}$$

$$0 = f_2(x_1, y_1) + (x_2 - x_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_1, y_1} + (y_2 - y_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_1, y_1}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 \text{ e } \Delta y = y_2 - y_1$$

Método de Newton: Duas Equações NL

- Como x_2 e y_2 estão próximos de x_1 e y_1, valores aproximados para $f_1(x_2, y_2)$ e $f_2(x_2, y_2)$ podem ser calculados sem que sejam considerados termos de ordem mais elevada.
- Como $f_1(x_2, y_2) = 0$ e $f_2(x_2, y_2) = 0$:

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{x_1, y_1} \Delta x + \left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_1, y_1} \Delta y = -f_1(x_1, y_1)$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_1, y_1} \Delta x + \left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_1, y_1} \Delta y = -f_2(x_1, y_1)$$

Método de Newton: Duas Equações NL

- Essas equações formam um sistema de duas equações não-lineares. O sistema pode ser solucionado com o emprego da regra de Cramer:

$$\Delta x = \frac{-f_1(x_1, y_1)\left.\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_1, y_1} + f_2(x_1, y_1)\left.\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_1, y_1}}{J(f_1(x_1, y_1), f_2(x_1, y_1))}$$

$$\Delta y = \frac{-f_2(x_1, y_1)\left.\dfrac{\partial f_1(x_1, y_1)}{\partial x}\right|_{x_1, y_1} + f_1(x_1, y_1)\left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_1, y_1}}{J(f_1(x_1, y_1), f_2(x_1, y_1))}$$

$$J(f_1, f_2) = det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

MATRIZ JACOBIANA

Método de Newton: Duas Equações NL

- Uma vez obtidos os valores de Δx e Δy, os valores de x_2 e y_2 são calculados com:

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y$$

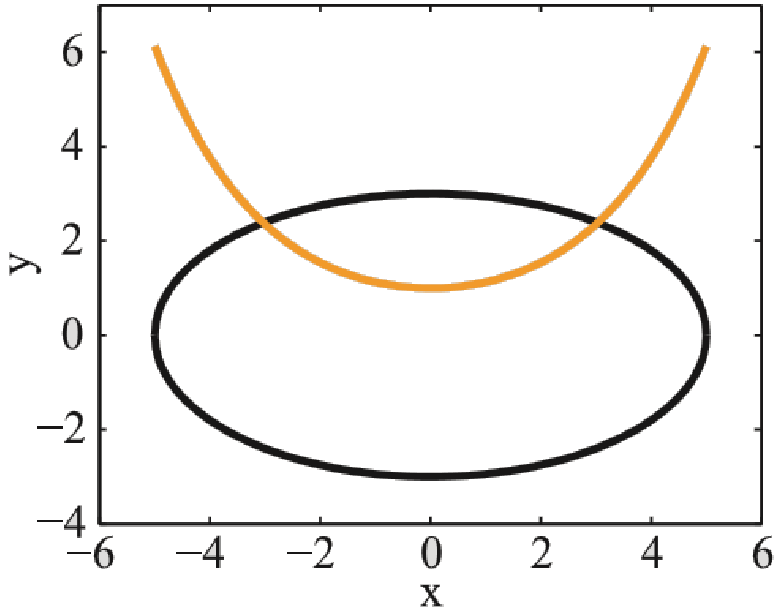
- O processo de solução continua com o uso de x_2 e y_2 como a nova estimativa da solução.
- As iterações continuam até que duas respostas sucessivas ***difiram*** de uma ***quantidade menor que um valor desejado***.

EXEMPLO 1

- As equações da curva catenária e da elipse, que são mostradas na figura: (x_1 = 2,5, y_1 = 2,0)

$$f_1(x, y) = y - \frac{1}{2}(e^{x/2} + e^{(-x)/2}) = 0$$

$$f_2(x, y) = 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$



EXEMPLO 1

- PASSO 1: CÁLCULO DO JACOBIANO

$$f_1(x, y) = y - \frac{1}{2}(e^{x/2} + e^{(-x)/2}) = 0$$

$$f_2(x, y) = 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$

$$J(f_1, f_2) = det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{1}{4}(e^{x/2} - e^{(-x)/2}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 18x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 50y$$

EXEMPLO 1

➢ PASSO 2: CÁLCULO DE Δx e Δy: (x_1 = 2,5, y_1 = 2,0)

$$\Delta x = \frac{-f_1(x_1,y_1)\left.\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_1,y_1} + f_2(x_1,y_1)\left.\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_1,y_1}}{J(f_1(x_1,y_1),f_2(x_1,y_1))} = \frac{-(0{,}1116).100-(68{,}75).1}{-125{,}096}$$

$$\Delta y = \frac{-f_2(x_1,y_1)\left.\dfrac{\partial f_1(x_1,y_1)}{\partial x}\right|_{x_1,y_1} + f_1(x_1,y_1)\left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_1,y_1}}{J(f_1(x_1,y_1),f_2(x_1,y_1))} = \frac{(68{,}75).(-0.8010)+(0{,}1116).45}{-125{,}096}$$

$$f_1(x,y) = y - \frac{1}{2}(e^{x/2} + e^{(-x)/2})$$

$$f_2(x,y) = 9x^2 + 25y^2 - 225$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{1}{4}(e^{x/2} - e^{(-x)/2}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 18x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 50y$$

EXEMPLO 1

- PASSO 2: CÁLCULO DE Δx e Δy:

$$\Delta x = \frac{-f_1(x_1,y_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_1,y_1} + f_2(x_1,y_1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_1,y_1}}{J(f_1(x_1,y_1),f_2(x_1,y_1))} = 0{,}6388$$

$$\Delta y = \frac{-f_2(x_1,y_1)\left.\frac{\partial f_1(x_1,y_1)}{\partial x}\right|_{x_1,y_1} + f_1(x_1,y_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_1,y_1}}{J(f_1(x_1,y_1),f_2(x_1,y_1))} = 0{,}4001$$

- PASSO 3: CÁLCULO DE x_2 e y_2:

$$x_2 = x_1 + \Delta x = 2{,}5 + 0{,}6388 = 3{,}1388$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y = 2 + 0{,}4001 = 2{,}4001$$

EXEMPLO 1

- PASSO 4: CÁLCULO DO ERRO:

$$Erro(x) = \frac{x_2 - x_1}{x_1} = \frac{3{,}1388 - 2{,}5}{2{,}5} = 0{,}2555 > tol$$

$$Erro(y) = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{2{,}4001 - 2}{2} = 0{,}200 > tol$$

- PASSO 4: VOLTA AO PASSO 2

REPETE-SE O PROCESSO ATÉ Erro < tol

**Programa Matlab*

Método de Newton: *n* Equações NL

- **GERAL**

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\
&\ldots \\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

- **MATRICIAL**

$$
\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\
\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \cdots \\ \Delta x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-f_1 \\ -f_2 \\ \cdots \\ -f_n
\end{bmatrix}
$$

Método de Newton: *n* Equações NL

- Uma vez obtidos os valores de Δxi, os valores de x_2 e y_2 são calculados com:

$$x_{1,\,i+1} = x_{1,\,i} + \Delta x_1$$

$$x_{2,\,i+1} = x_{2,\,i} + \Delta x_2$$

$$\cdots$$

$$x_{n,\,i+1} = x_{n,\,i} + \Delta x_n$$

Método de Newton: *n* Equações NL

➢ **Algoritmo para o método de Newton usado na solução de sistemas com n equações não-lineares:**

Dado um sistema com n equações não-lineares,

1. Estime (chute) uma solução inicial, $x_{1,i}, x_{2,i}, \ldots, x_{n,i}$.
2. Calcule o Jacobiano e o valor das funções no lado direito da Eq.
3. Resolva a Eq. para $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \cdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ \cdots \\ -f_n \end{bmatrix}$$

Método de Newton: *n* Equações NL

➢ **Algoritmo para o método de Newton usado na solução de sistemas com n equações não-lineares:**

Dado um sistema com *n* equações não-lineares,

1. Estime (chute) uma solução inicial, $x_{1,i}, x_{2,i}, \ldots, x_{n,i}$.
2. Calcule o Jacobiano e o valor das funções no lado direito da Eq.
3. Resolva a Eq. para $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.
4. Calcule a nova solução estimada, $x_{1,i+1}, x_{2,i+1}, \ldots, x_{n,i+1}$

$$
\begin{aligned}
x_{1,\,i+1} &= x_{1,\,i} + \Delta x_1 \\
x_{2,\,i+1} &= x_{2,\,i} + \Delta x_2 \\
&\ldots \\
x_{n,\,i+1} &= x_{n,\,i} + \Delta x_n
\end{aligned}
$$

Método de Newton: *n* Equações NL

➢ **Algoritmo para o método de Newton usado na solução de sistemas com n equações não-lineares:**

Dado um sistema com n equações não-lineares,

1. Estime (chute) uma solução inicial, $x_{1,\,i}, x_{2,\,i}, \ldots, x_{n,\,i}$.
2. Calcule o Jacobiano e o valor das funções no lado direito da Eq.
3. Resolva a Eq. para $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.
4. Calcule a nova solução estimada, $x_{1,\,i+1}, x_{2,\,i+1}, \ldots, x_{n,\,i+1}$
5. Calcule o erro. Se a nova solução não for suficientemente precisa, atribua os valores de $x_{1,\,i+1}, x_{2,\,i+1}, \ldots, x_{n,\,i+1}$ a $x_{1,\,i}, x_{2,\,i}, \ldots, x_{n,\,i}$ e inicie uma nova iteração começando do passo 2.

Método de Newton: *n* Equações NL

- **Comentários adicionais :**
- O método, quando bem-sucedido, **converge rapidamente**.
- A **não convergência** ocorre porque a tentativa inicial não está suficientemente **próxima da solução**.
- Para um grande sistema de equações, a determinação do Jacobiano pode ser **difícil**. (analiticamente ou numericamente)
- Quando o sistema de equações consiste em **mais de três equações**, a solução deve ser **feita numericamente**.

MÉTODOS DE QUASE-NEWTON

MÉTODOS DE QUASE-NEWTON

- Dessa forma métodos numéricos são aplicados, tais como:

SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES (SOLUÇÃO)

- **Método de Newton**
- **Método de Quase-Newton**
  - **Newton-Raphson modificado;**
    Método da Secante;

Newton-Raphson Modificado

Método de Newton-Raphson Modificado

- A motivação central dos **métodos quase-Newton** é gerar uma sequencia com boas propriedades de convergência, **sem** no entanto **avaliar a matriz JACOBIANA a cada iteração**, como é necessário no método de newton.

- O método de **Newton Modificado** requer o **cálculo da matriz JACOBIANA apenas na iteração inicial**!

- Porém a taxa de convergência quadrática e perdida (converge mais lentamente a uma taxa linear).

EXEMPLO 2

- Aplicar o método de Newton Modificado à resolução do sistema não linear F(X) = 0, onde:

$$F(X) = \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

- considerando tolerância ε=0,001 , número máximo de iterações k_{max} = 2 e chute inicial X=[1; 5].

EXEMPLO 2

- PASSO 1: CÁLCULO DO JACOBIANO: X=[1; 5]

$$F(X) = \begin{cases} f_1(x,y) = x + y - 3 \\ f_2(x,y) = x^2 + y^2 - 9 \end{cases}$$

$$J(f_1, f_2) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{J(x1, x2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} = 10 - 2 = 8}$$

EXEMPLO 2

- PASSO 2: CÁLCULO DE Δx e Δy: X_1=[1; 5]

$$F(X_1) = \begin{cases} f_1(x,y) = 1+5-3 = 3 \\ f_2(x,y) = 1^2+5^2-9 = 17 \end{cases}$$

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\Delta x = \frac{-f_1(x_1,y_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_1,y_1} + f_2(x_1,y_1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_1,y_1}}{J(f_1(x_1,y_1), f_2(x_1,y_1))} = \frac{-(3).(10)+(17).(1)}{8} = -1{,}625$$

$$\Delta y = \frac{-f_2(x_1,y_1)\left.\frac{\partial f_1(x_1,y_1)}{\partial x}\right|_{x_1,y_1} + f_1(x_1,y_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_1,y_1}}{J(f_1(x_1,y_1), f_2(x_1,y_1))} = \frac{-(17).(1)+(3).(2)}{8} = -1{,}375$$

EXEMPLO 2

- PASSO 2: CÁLCULO DE Δx e Δy:

$$\Delta x = \frac{-f_1(x_1,y_1)\left.\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_1,y_1} + f_2(x_1,y_1)\left.\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_1,y_1}}{J(f_1(x_1,y_1),f_2(x_1,y_1))} = -1{,}625$$

$$\Delta y = \frac{-f_2(x_1,y_1)\left.\dfrac{\partial f_1(x_1,y_1)}{\partial x}\right|_{x_1,y_1} + f_1(x_1,y_1)\left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_1,y_1}}{J(f_1(x_1,y_1),f_2(x_1,y_1))} = -1{,}375$$

- PASSO 3: CÁLCULO DE x_2 e y_2:

$$x_2 = x_1 + \Delta x = 1 - 1{,}625 = -0{,}625$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y = 5 - 1{,}375 = 3{,}625$$

EXEMPLO 2

- PASSO 4: CÁLCULO DO ERRO:

$$Erro(x) = \frac{x_2 - x_1}{x_1} = \frac{-0,625 - 1}{1} = -1,625 > tol$$

$$Erro(y) = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{3,625 - 5}{5} = -0,275 > tol$$

- PASSO 4: VOLTA AO PASSO 2

REPETE-SE O PROCESSO ATÉ Erro < tol

EXEMPLO 2

- PASSO 2: CÁLCULO DE Δx e Δy: X_2=[-0,625; 3,625]

$$F(X_1) = \begin{cases} f_1(x,y) = -0{,}625 + 3{,}625 - 3 = 0 \\ f_2(x,y) = (-0{,}625)^2 + 3{,}625^2 - 9 = 4{,}53125 \end{cases}$$

$$\boxed{J(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}}$$

$$\Delta x = \frac{-f_1(x_1,y_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_1,y_1} + f_2(x_1,y_1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_1,y_1}}{J(f_1(x_1,y_1),f_2(x_1,y_1))} = \frac{-(0).(7{,}25)+(4{,}53125).(1)}{8} = 0{,}5664$$

$$\Delta y = \frac{-f_2(x_1,y_1)\left.\frac{\partial f_1(x_1,y_1)}{\partial x}\right|_{x_1,y_1} + f_1(x_1,y_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_1,y_1}}{J(f_1(x_1,y_1),f_2(x_1,y_1))} = \frac{-(4{,}53125).(1)+(0).(-1{,}25)}{8} = -0{,}566$$

EXEMPLO 2

- PASSO 2: CÁLCULO DE Δx e Δy: X_2=[-0,625; 3,625]

$$\Delta x = \frac{-f_1(x_1,y_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{x_1,y_1} + f_2(x_1,y_1)\left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{x_1,y_1}}{J(f_1(x_1,y_1),f_2(x_1,y_1))} = 0{,}5664$$

$$\Delta y = \frac{-f_2(x_1,y_1)\left.\frac{\partial f_1(x_1,y_1)}{\partial x}\right|_{x_1,y_1} + f_1(x_1,y_1)\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{x_1,y_1}}{J(f_1(x_1,y_1),f_2(x_1,y_1))} = -0{,}5664$$

- PASSO 3: CÁLCULO DE x_3 e y_3:

$$x_3 = x_2 + \Delta x = -0{,}625 + 0{,}5664 = -0{,}05859$$

$$y_3 = y_2 + \Delta y = 3{,}625 - 0{,}5664 = 3{,}0586$$

EXEMPLO 2

- PASSO 4: CÁLCULO DO ERRO: X_2=[-0,625; 3,625]

$$Erro(x) = \frac{x3 - x2}{x2} = \frac{-0{,}05859 - (-0{,}625)}{-0{,}625} = -0{,}907 > tol$$

$$Erro(y) = \frac{y3 - y2}{y2} = \frac{3{,}0586 - 3{,}625}{3{,}625} = -0{,}156 > tol$$

- PASSO 4: VOLTA AO PASSO 2

REPETE-SE O PROCESSO ATÉ Erro < tol

EXEMPLO 2: HP, MATLAB...

- Para k = 1 (Primeira iteração)

$$F(X^1) = \begin{bmatrix} 3 & 17 \end{bmatrix}^T \quad \rightarrow \quad \|F(X^1)\| = 17.2627 > \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \Delta X^1 = -\begin{bmatrix} 3 \\ 17 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \Delta X^1 = \begin{bmatrix} -1,625 \\ -1,375 \end{bmatrix}$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} -0,625 \\ 3,625 \end{bmatrix} \longleftarrow \quad X^2 = X^1 + \Delta X^1$$

EXEMPLO 2: HP, MATLAB...

- Para k = 2 (Segunda iteração)

$$F(X^2) = [0 \quad 4{,}5313]^T \quad \rightarrow \quad \|F(X^2)\| = 4{,}5313 > \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \Delta X^2 = -\begin{bmatrix} 0 \\ 4{,}5313 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \Delta X^1 = \begin{bmatrix} 0{,}5664 \\ -0{,}5664 \end{bmatrix}$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} -0{,}0586 \\ 3{,}0586 \end{bmatrix} \longleftarrow \quad X^2 = X^1 + \Delta X^1$$

MÉTODO DA SECANTE

MÉTODO DA SECANTE

- Este método consiste em calcular as derivadas da matriz Jacobiana de forma aproximada, com base em 2 Pontos.

$$J_{(k+1)} = \frac{F(x_{(k+1)}) - F(x_{(k)})}{x_{(k+1)} - x_{(k)}}$$

- Nesse método as matrizes JACOBIANAS são atualizadas a cada iteração:

MÉTODO DA SECANTE

- Fórmula Para o Cálculo do JACOBIANO proposta por BROYDEN (1965):

$$J_{(k+1)} = J_{(k)} + U_{(k)}.[x_{(k+1)} - x_{(k)}]^T$$

$$U_{(k)} = \frac{F(x_{(k+1)}) - F(x_{(k)}) - J_{(k)}.[x_{(k+1)} - x_{(k)}]}{[x_{(k+1)} - x_{(k)}]^T.[x_{(k+1)} - x_{(k)}]}$$

...CONTINUA