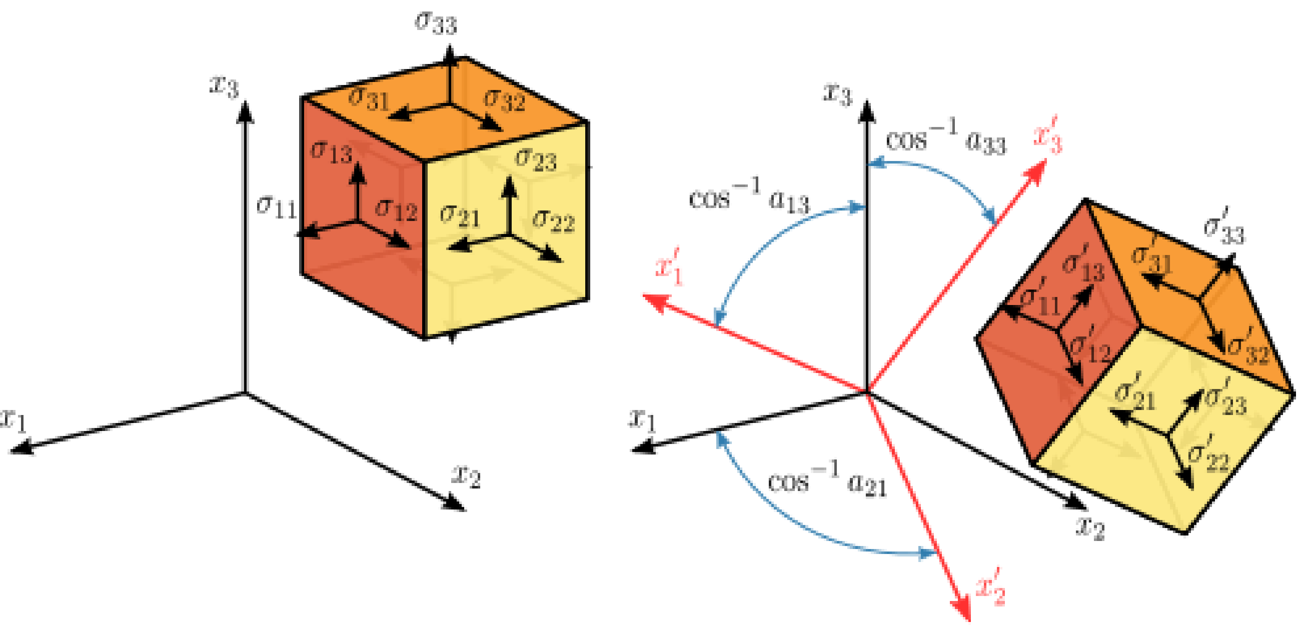
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS SERTÃO
EIXO TECNOLOGIA



Cálculo Numérico

Prof. Dr. Alverlando Ricardo

Aula 5: PARTE I: AUTOVALORES & AUTOVETORES

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

- Para uma dada matriz [a] ($n \times n$), o número λ é um ***AUTOVALOR*** da matriz se:

$$\boxed{[a][u] = \lambda[u]}$$

AUTOVALOR **AUTOVETOR**

INTRODUÇÃO

- Para uma dada matriz [***a***] (***n*** × ***n***), o número ***λ*** é um ***AUTOVALOR*** da matriz se:

$$[a][u] = \lambda[u]$$

- O vetor [***u***] é um vetor coluna (***não nulo***) com ***n*** elementos chamado de **AUTOVETOR** associado ao autovalor λ.

INTRODUÇÃO

- A Eq. pode ser vista de uma forma mais geral:

$$[a][u] = \lambda[u]$$

$$\Downarrow$$

$$Lu = \lambda u$$

- O operador matemático ***L*** (*multiplicação, diferenciação, integração, etc*) aplicado em [***u***] (*vetor, matriz, função, etc*) resulta em ***λ*** vezes [***u***].

INTRODUÇÃO

$$Lu = \lambda u$$

- O operador matemático $\boldsymbol{L}$ (*multiplicação, diferenciação, integração, etc*) aplicado em [$\boldsymbol{u}$] (*vetor, matriz, função, etc*) resulta em $\boldsymbol{\lambda}$ vezes [$\boldsymbol{u}$].
- Por exemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k^2 y$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO NA ENGENHARIA

EXEMPLOS

- AUTOVALORES e AUTOVETORES aparecem em métodos numéricos e têm importância especial na **CIÊNCIA E NA ENGENHARIA**.

EXEMPLOS

- Genética: Determinação da Quantidade de Genótipos em gerações ao passar do tempo:

Tabela 1. Probabilidades dos Possíveis Genótipos dos Descendentes

Genótipo do Descendente	Genótipo dos Pais					
	AA x *AA*	*AA* x *Aa*	*AA* x *aa*	*Aa* x *Aa*	*Aa* x *aa*	*aa* x *aa*
(AA)	1	½	0	¼	0	0
(Aa)	0	½	1	½	½	0
(aa)	0	0	0	¼	½	1

$$[a][u] = \lambda[u]$$

EXEMPLOS

➢ Resolução de um Sistema Linear de EDO:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes do sistema é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico é

$$\lambda^2 - \left(0 - \frac{b}{a}\right)\lambda + \frac{c}{a} = 0,$$

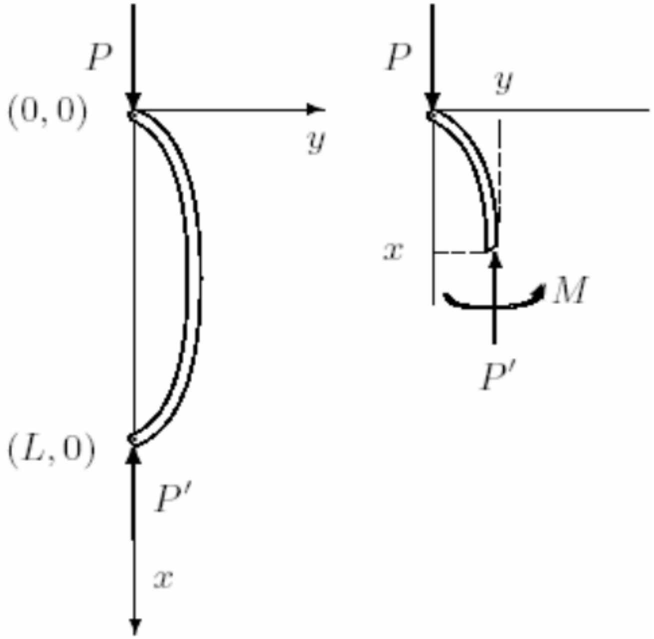
Que é equivalente a equação algébrica

$$a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0.$$

EXEMPLOS

- A curvatura de uma coluna delgada sujeita a uma carga ***P*** pode ser modelada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$



Onde:

$\frac{d^2y}{dx^2}$ é a curvatura

M é o momento de curvatura

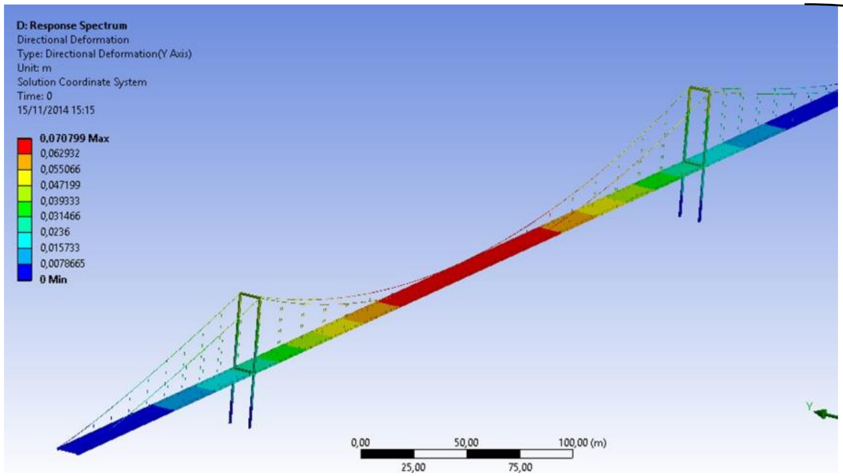
E é o módulo de elasticidade

I é o momento de inércia da seção transversal sobre o eixo neutro

$$p_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

EXEMPLOS

- Por exemplo, no estudo de VIBRAÇÕES:

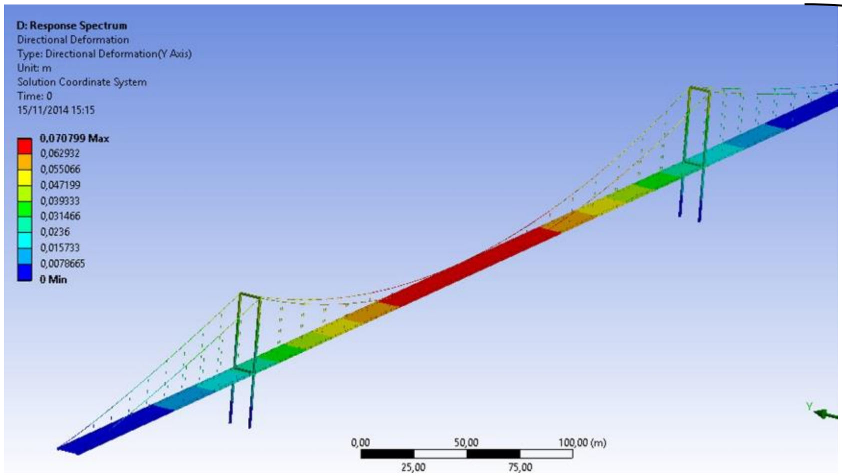


- **AUTOVALORES = representam as frequências naturais**

- **AUTOVETORES = modos dessas vibrações.**

EXEMPLOS

- Por exemplo, no estudo de VIBRAÇÕES:



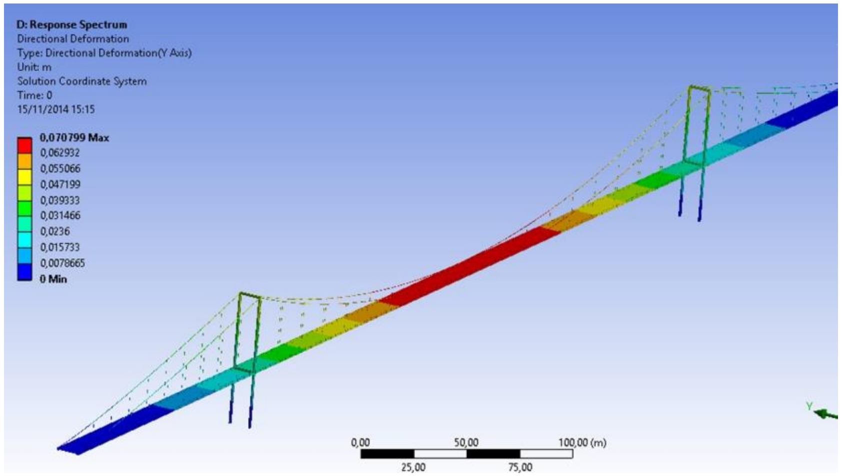
- **AUTOVALORES = representam as frequências naturais**

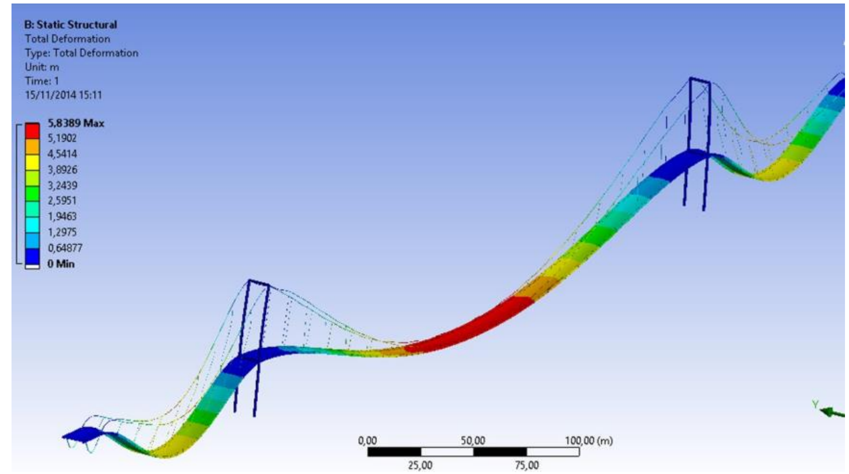
- **AUTOVETORES = modos dessas vibrações.**

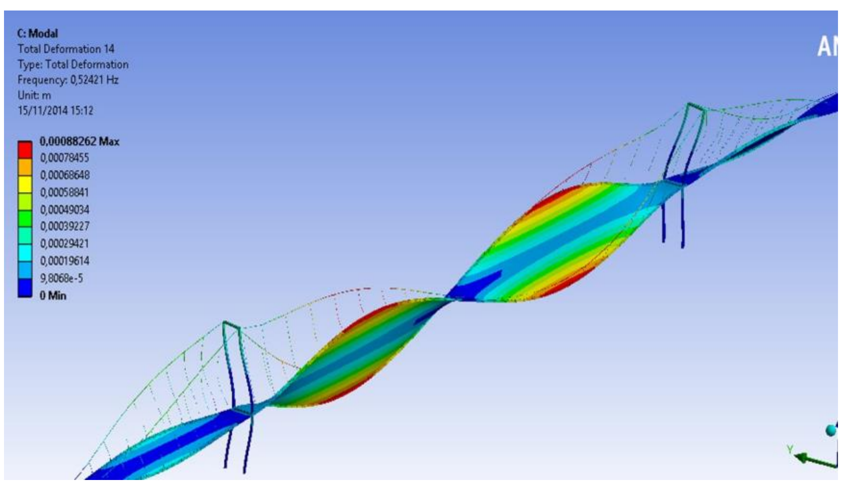
- ***Frequências naturais:*** Taxa de vibração dos Materiais. Todos materiais (átomos) vibram!

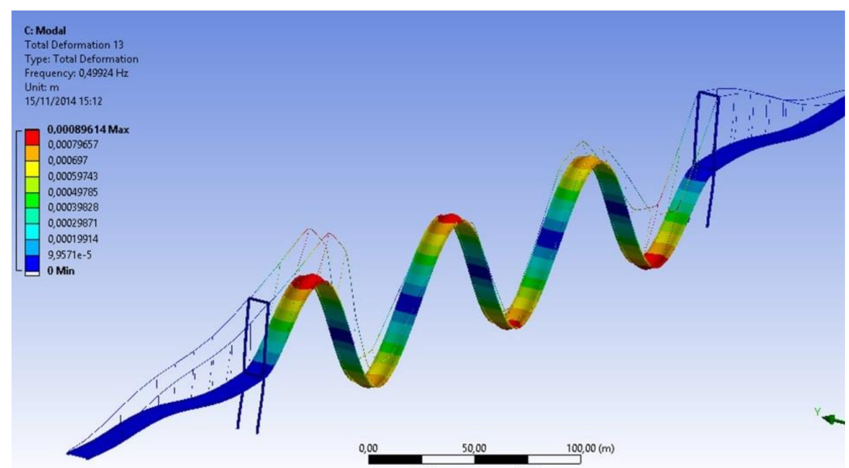
EXEMPLOS

➢ Por exemplo, no estudo de VIBRAÇÕES:



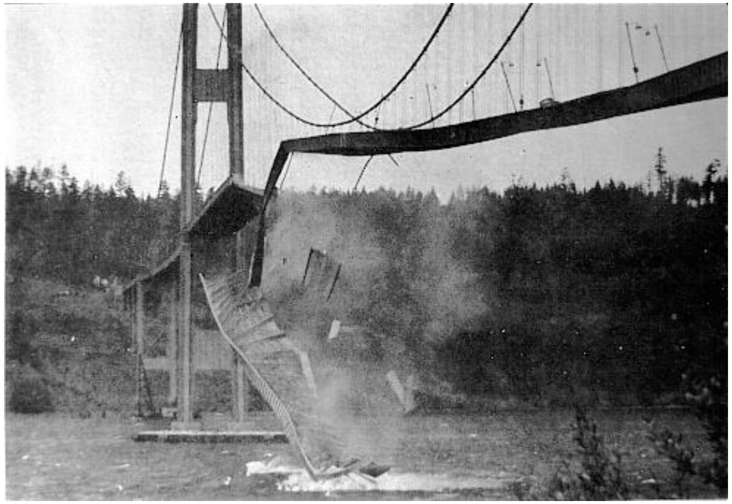






EXEMPLOS

- Quando a Frequência natural é atingida = RESSONÂNCIA. Aumentando a amplitude!

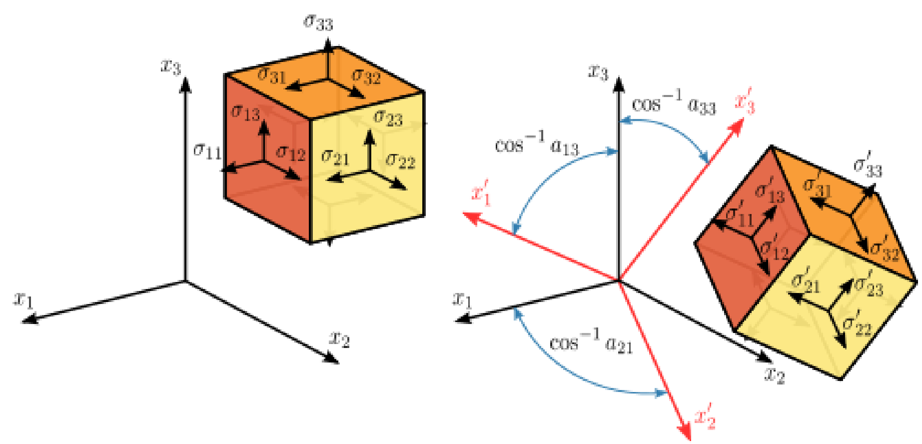


- **Ponte de Tacoma (Washington, Estados Unidos), 1940.**

https://www.youtube.com/watch?v=mfQk6ac4res

EXEMPLOS

- Na mecânica dos materiais, os esforços principais são os autovalores da matriz de tensões, e as direções principais são as direções dos autovetores associados.

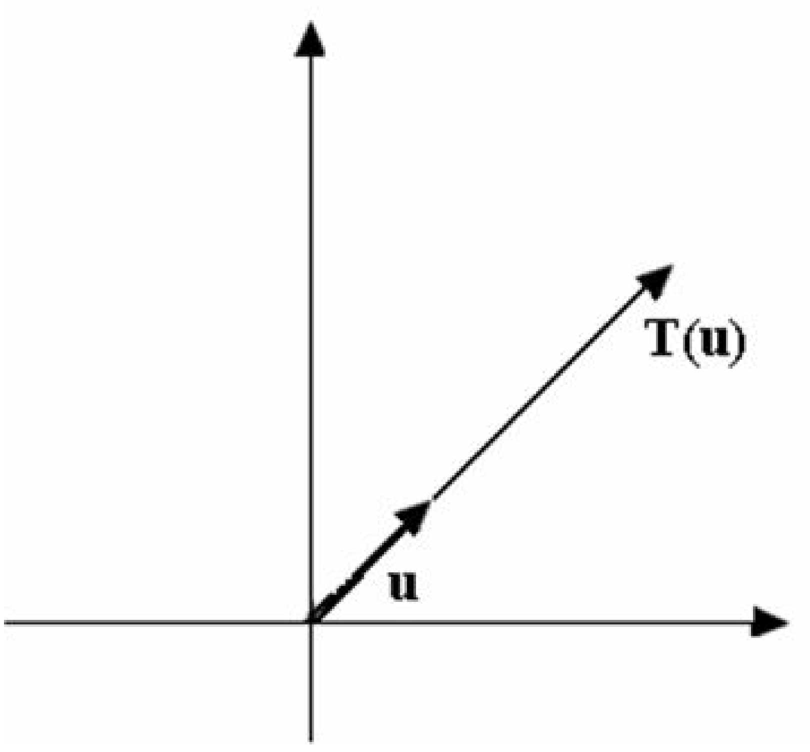


EXEMPLOS

- Como o Google lista quais são os sites mais importantes? (Algoritmo próprio: Autovalor e Autovetor)

Determinação: autovalores e autovetores

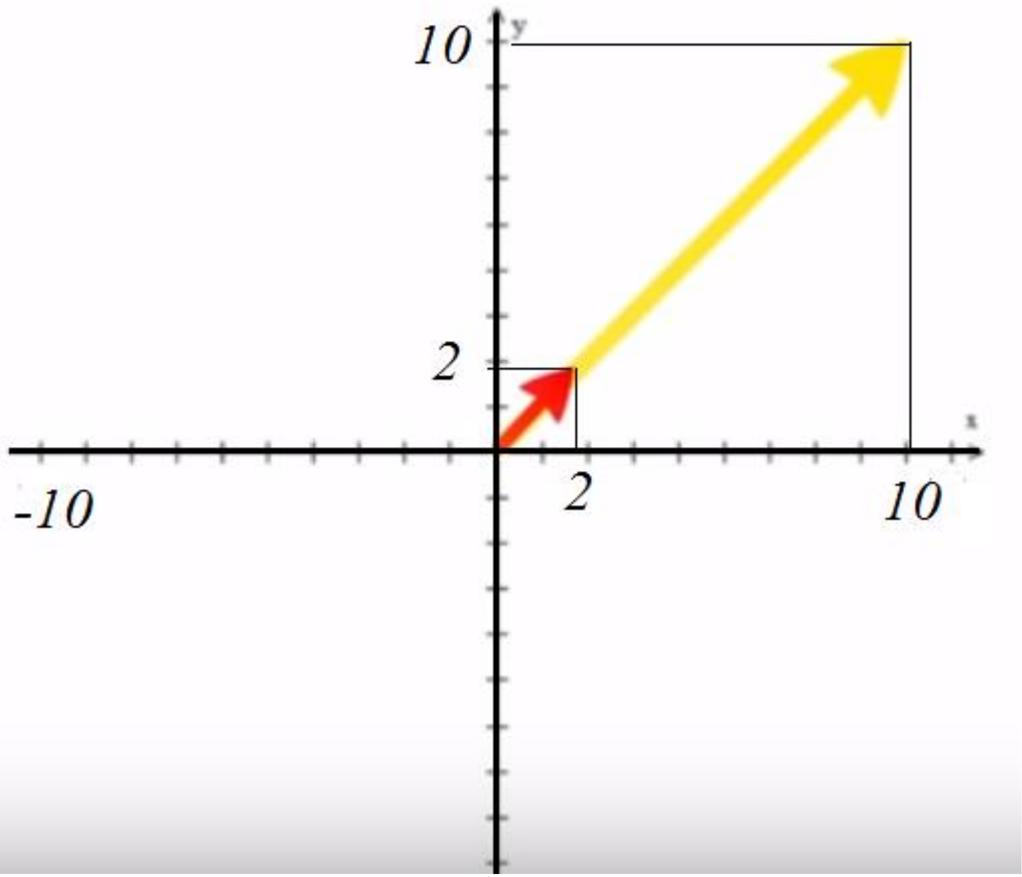
- Além da importância física, os autovalores e autovetores de uma matriz podem representar uma matriz em forma vetorial, simplificando o problema.



$$T(u) = \lambda . u$$

Determinação: autovalores e autovetores

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+8 \\ 4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Determinação de autovalores e autovetores

Determinação: autovalores e autovetores

- **[*I*]=matriz identidade com as mesmas dimensões de [*A*]:**

$$5\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}$$

$$\lambda I=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$\lambda\vec{v}=\lambda I\vec{v}$$

$$A\vec{v}=\lambda\vec{v}$$

$$A\vec{v}=\lambda I\vec{v}$$

$$A\vec{v}-\lambda I\vec{v}=\vec{0}$$

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$$

Determinação: autovalores e autovetores

- **Observações:**

$$[a - \lambda I][u] = 0$$

- Se a matriz [a − λI] desse sistema homogêneo não possuir inversa, à solução será trivial [u] = 0.

Determinação: autovalores e autovetores

- **Observações:**

$$[a - \lambda I][u] = 0$$

- Se a matriz [*a* − λI] desse sistema homogêneo possuir inversa, à solução será trivial [u] = 0.

- Por outro lado, se [*a* − λI] não possuir inversa (***Determinante de [a − λI] NULO***), então é possível encontrar uma solução não-trivial para [u].

$$\det[a - \lambda I] = 0$$

Determinação: autovalores e autovetores

OBSERVAÇÕES:

- Os autovalores de uma matriz quadrada [A] são as raízes da correspondente equação característica.

- A matriz [A] tem pelo menos um autovalor e no máximo ***n*** autovalores numericamente diferentes.

- Os autovalores devem ser determinados primeiro. Com os autovalores determinados, os correspondentes autovetores são obtidos resolvendo o sistema de equações lineares.

EXEMPLOS 1

- Determinar os autovalores e autovetores da seguinte Matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

EXEMPLOS 1

- a) Determinação dos autovalores:

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -6$$

EXEMPLOS 1

- b) Determinação dos autovetores:

$$\lambda = \lambda_1 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solução: Para x_1 qualquer, $x_2 = 2x_1$. Por exemplo, $x_1 = 1$, então $x_2 = 2$. Um autovetor de A correspondente a $\lambda_1 = -1$ é:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

EXEMPLOS 1

- b) Determinação dos autovetores:

$$\lambda = \lambda_1 = -6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solução: Para x_1 qualquer, x_2 = -0.5 * x_1. Por exemplo, x_1 = 2, então x_2 = -1. Um autovetor de A correspondente a λ_1 = -6 é:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

EXEMPLOS 2

- Mostre que 2 é autovalor de:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

EXEMPLOS 2

- Mostre que 2 é autovalor de:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - 2I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-2 & -1 & 1 \\ -1 & 5-2 & 1 \\ 1 & -1 & 3-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Determinação: autovalores e autovetores

OBSERVAÇÕES:

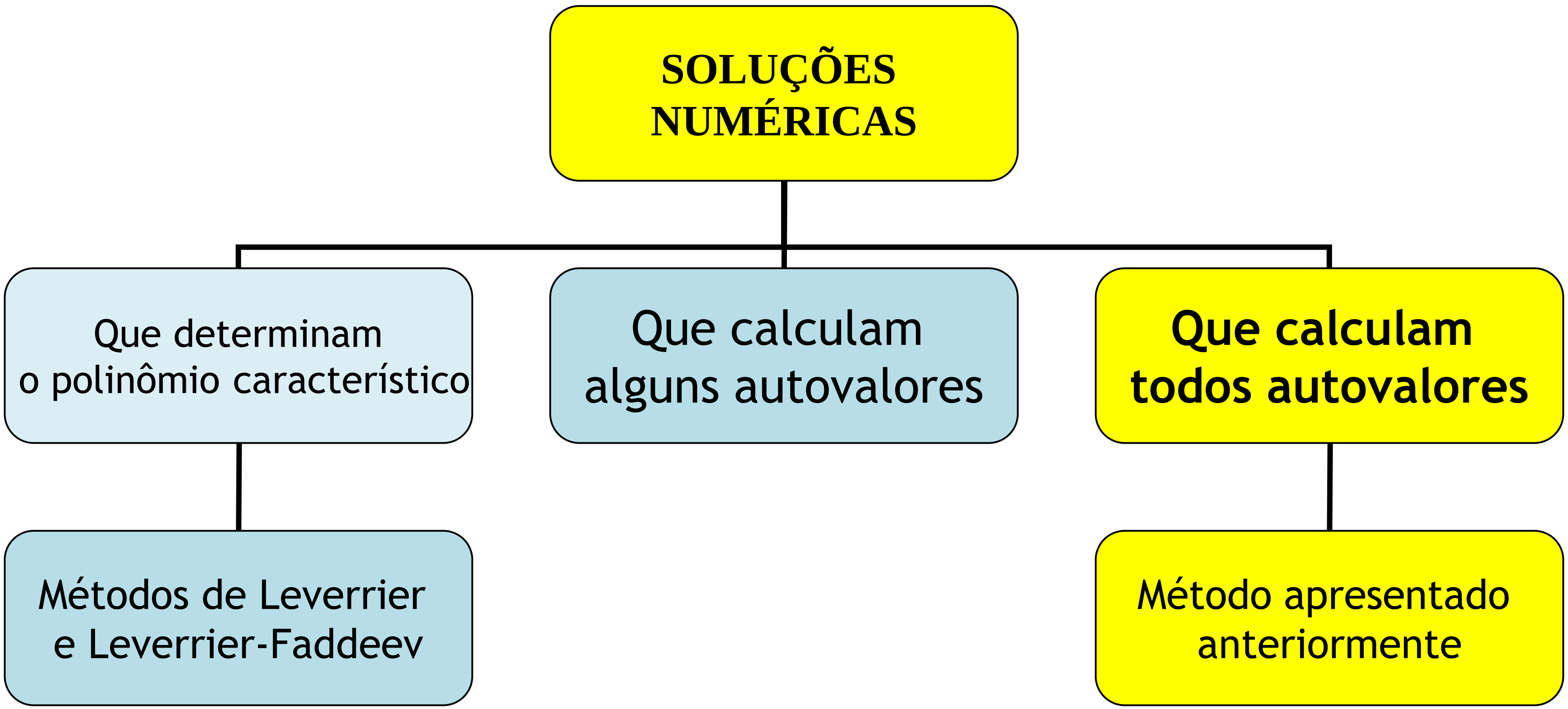
- A menos que a matriz **[*A*]** seja de ordem baixa ou que tenha muitos elementos iguais a zero, a expansão direta do determinante para a determinação do polinômio característico é ineficiente.

- Assim, ***SOLUÇÕES NUMÉRICAS*** devem ser utilizadas no cálculo do determinante.

Autovalores e Autovetores: Soluções Numéricas

Soluções Numéricas

- ***Soluções numéricas:*** *Tais métodos podem ser divididos em três grupos*



Método de Leverrier

Método de Leverrier

Esse método fornece o polinômio característico de uma matriz [A] de ordem n.

$$P(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_{n-1}\lambda - p_n\right]$$

Método de Leverrier

- O método considera o teorema de Newton que relaciona:

os coeficientes de um polinômio e as somas das potências das suas raízes!!!

COEFICIENTES DO POLINÔMIO

$$P(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \ldots - p_{n-1} \lambda - p_n \right]$$

RAÍZES = AUTOVALORES

Método de Leverrier

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se λ_1, λ_2, ..., λ_n são os autovalores da matriz A, isto é, se λ_1, λ_2, ... λ_n são os zeros do polinômio e se

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k, \qquad 1 \leq k \leq n,$$

então, pelo Teorema de Newton, temos que:

$$kp_k = s_k - p_1 s_{k-1} - \ldots - p_{k-1} s_1, \qquad 1 \leq k \leq n$$

$$\boxed{s_k = tr(A^k)}$$

EXEMPLOS 1

- Seja a matriz A dada. Determinar seus autovalores usando o Método de Leverrier:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

EXEMPLOS 1

- Seja a matriz A dada. Determinar seus autovalores usando o Método de Leverrier:

$$s_1 = tr(A) = 1$$

$$s_2 = tr(A^2), \quad A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \; s_2 = 5$$

$$s_3 = tr(A^3), \quad A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; s_3 = 1$$

EXEMPLOS 1

$$p_1 = s_1 \Rightarrow p_1 = 1$$

$$2p_2 = s_2 - p_1 s_1 \Rightarrow p_2 = 2$$

$$3p_3 = s_3 - p_1 s_2 - p_2 s_1 \Rightarrow p_3 = -2$$

Assim:

$$P(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - p_1\lambda^2 - p_2\lambda - p_3)$$

$$P(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 2)$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 2$$

Calcular o Zero

Métodos que determinam alguns autovalores

Métodos: calculam alguns autovalores

- Consiste em determinar o autovalor de maior valor absoluto de uma matriz [A], e seu correspondente autovetor.
- O método é útil na prática, desde que se tenha interesse em determinar apenas alguns autovalores, de módulo grande, e, que estes estejam bem separados, em módulo, dos demais.
- Por questões práticas, vamos apresentar a aplicação direta do método. Maiores detalhes sobre o método podem ser encontrados nos livros texto.

EXEMPLOS 2: Método da Potência

Usando o método das potências determinar o autovalor de maior valor absoluto da seguinte matriz com precisão de 10^{-2}:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução:

Tomemos o seguinte valor para y_0:

$$y_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

EXEMPLOS 2: Método da Potência

$$z_1 = Ay_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \max\left|(z_1)_r\right| = \max(|4|,|6|,|11|) = 11$$

$$y_1 = \frac{1}{\alpha_1} z_1 = \begin{pmatrix} 0.3636 \\ 0.5455 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_2 = Ay_1 = \begin{pmatrix} 2.0908 \\ 3.8182 \\ 7.5454 \end{pmatrix}$$

EXEMPLOS 2: Método da Potência

Podemos, então, calcular a primeira aproximação para λ_1.

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{(z_2)_r}{(y_1)_r} = \begin{pmatrix} 5.7503 \\ 6.9995 \\ 7.5454 \end{pmatrix}$$

Calculando-se o valor de α_2, temos:

$$\alpha_2 = \max\left|(z_2)_r\right| = \max\left(|2.0908|, |3.8182|, |7.5454|\right) = 7.5454$$

EXEMPLOS 2: Método da Potência

$$y_2 = \frac{1}{\alpha_2} z_2 = \begin{pmatrix} 0.2771 \\ 0.5060 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_3 = A y_2 = \begin{pmatrix} 1.8313 \\ 3.5662 \\ 7.1204 \end{pmatrix}$$

Novamente obtemos uma aproximação para λ_1.

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{(z_3)_r}{(y_2)_r} = \begin{pmatrix} 6.6088 \\ 7.0478 \\ 7.1204 \end{pmatrix}$$

EXEMPLOS 2: Método da Potência

Calculando-se o erro relativo, temos:

$$\frac{\left|\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)}\right|_r}{\left|\lambda_1^{(2)}\right|_r} \approx \begin{pmatrix} 0.13 \\ 0.07 \\ 0.13 \end{pmatrix}$$

O qual possui todas as componentes maiores que 10^{-2}. Assim, devemos fazer uma nova iteração.

EXEMPLOS 3: Potência Inversa

Usando o Método da Potência Inversa, determinar o menor autovalor, em módulo, da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Solução:

Tomemos o seguinte valor para y_0:

$$y_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

EXEMPLOS 3: Potência Inversa

Assim:

$$Az_1 = y_0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} z_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow z_1 = \begin{Bmatrix} 0.5715 \\ -0.1429 \\ 0.1905 \end{Bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \max\left|(z_1)_r\right| = 0.5715$$

$$y_1 = \frac{1}{\alpha_1} z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2500 \\ 0.3333 \end{pmatrix}$$

$$Az_2 = y_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} z_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.2500 \\ 0.3333 \end{Bmatrix} \Rightarrow z_2 = \begin{Bmatrix} 0.7024 \\ -0.4048 \\ 0.1230 \end{Bmatrix}$$

EXEMPLOS 3: Potência Inversa

Podemos, então, calcular a primeira aproximação para a inversa de λ.

$$\lambda^{-1} = \frac{(z_2)_r}{(y_1)_r} = \begin{pmatrix} 0.7024 \\ 1.6192 \\ 0.3690 \end{pmatrix}$$

Calculando-se o valor de α_2, temos:

$$\alpha_2 = \max\left|(z_2)_r\right| = 0.7024$$

EXEMPLOS 3: Potência Inversa

$$y_2 = \frac{1}{\alpha_2} z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5763 \\ 0.1751 \end{pmatrix}$$

$$Az_3 = y_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} z_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5763 \\ 0.1751 \end{Bmatrix} \Rightarrow z_3 = \begin{Bmatrix} 0.7377 \\ -0.4754 \\ 0.1084 \end{Bmatrix}$$

Novamente obtemos uma aproximação para a inversa de λ.

$$\lambda^{-1} = \frac{(z_3)_r}{(y_2)_r} = \begin{pmatrix} 0.7377 \\ 0.8249 \\ 0.6192 \end{pmatrix}$$

Prosseguindo, encontra-se que a $\lambda^{-1} = 0.7471$. Logo, o valor $\lambda = 1.3385$ é o autovalor de menor valor absoluto de A.

USO DE FUNÇÕES RESIDENTES DO MATLAB PARA DETERMINAR AUTOVALORES E AUTOVETORES

O COMANDO FZERO

Para determinar os autovalores e os autovetores, a função residente tem a seguinte forma:

```
[V,D] = eig(A)
```

V é uma matriz cujas colunas são os autovetores de A. D é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são os autovalores

A é a matriz cujos autovalores devem ser determinados

...CONTINUA