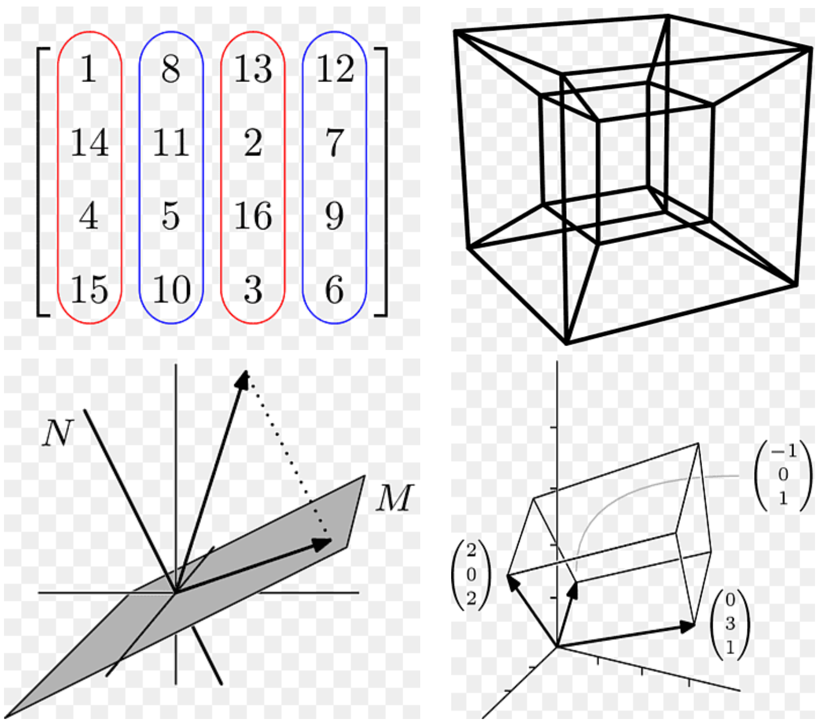
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS DE ENGENHARIAS E CIÊNCIAS AGRÁRIAS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

CECA



https://www.pngwing.com/pt/free-png-xxiky

Introdução à Álgebra Linear

e suas aplicações

Prof. Dr. Alverlando Silva Ricardo

Parte 2: Espaços Vetoriais: Euclidianos e Arbitrários

Espaços Vetoriais Arbitrários X Euclidianos:

Um espaço vetorial arbitrário permite apenas soma de vetores e multiplicação por escalares.

Um espaço vetorial EUCLIDIANO tem, além disso, um produto interno que permite medir comprimento, ângulo, distância e ortogonalidade.

Espaços vetoriais com Produto Interno

- *Mas, os axiomas seguintes, sendo satisfeitos, permitem a extensão das noções de comprimento, distância, ângulo e perpendicularidade a espaços vetoriais arbitrários.*

DEFINIÇÃO 1 Um ***produto interno*** num espaço vetorial real V é uma função que associa um número real $\langle u, v \rangle$ a cada par de vetores em V de tal maneira que os seguintes axiomas são satisfeitos por quaisquer vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ de V e qualquer escalar a.

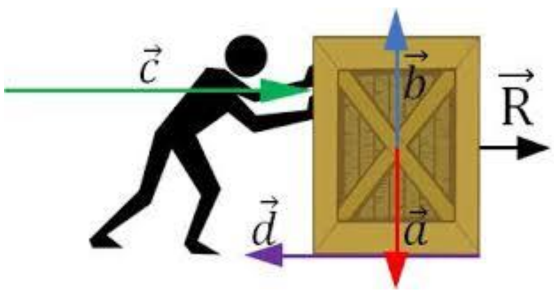
1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ **[Axioma de simetria]**
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ **[Axioma de aditividade]**
3. $\langle a\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ **[Axioma de homogeneidade]**
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ *se, e só se,* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ **[Axioma de positividade]**

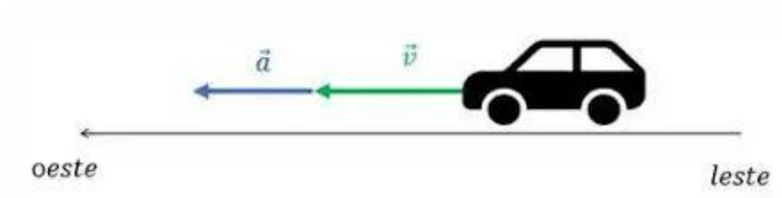
Um espaço vetorial real com um produto interno é chamado ***espaço com produto interno real***.

Vetores Euclidianos: bi e tri–dimensionais
(REVISÃO)

Vetores bi, tri e *n*–dimensionais

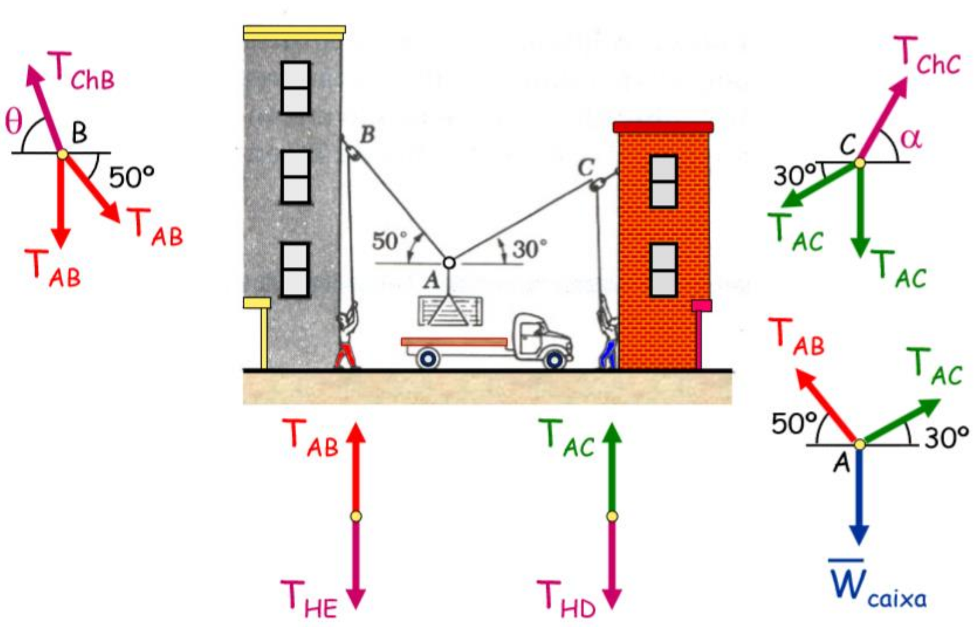
- Algumas grandezas físicas são escalares (valor numérico) como temperatura e comprimento. Outras, como força e velocidade, são vetores, pois também possuem direção e sentido. Embora esses conceitos venham da Física e da Engenharia, aqui os usaremos para construir estruturas matemáticas aplicáveis a diversas áreas, como **Computação, Economia e Ecologia**.

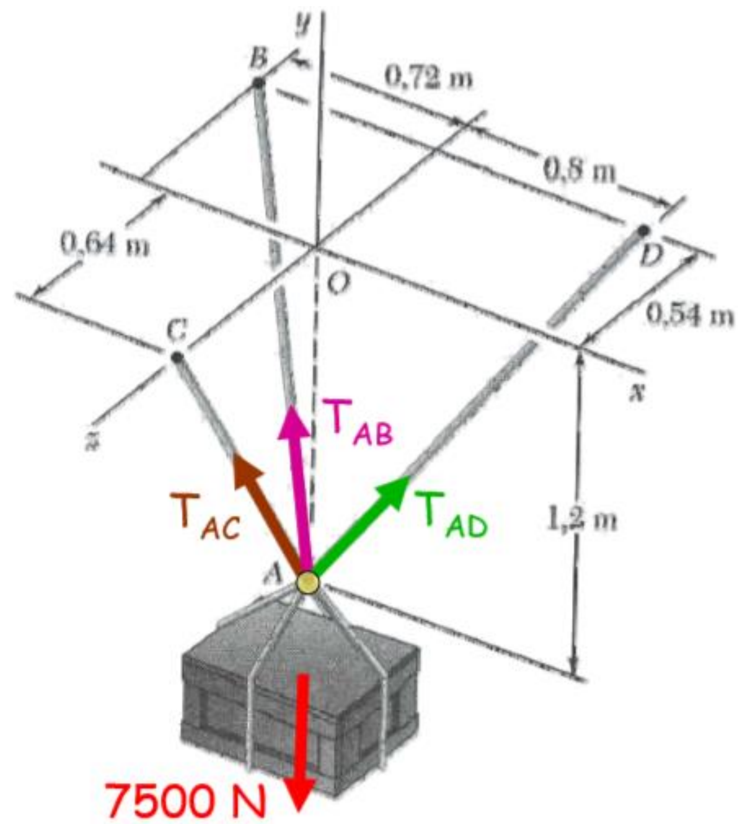




Vetores bi, tri e *n*–dimensionais

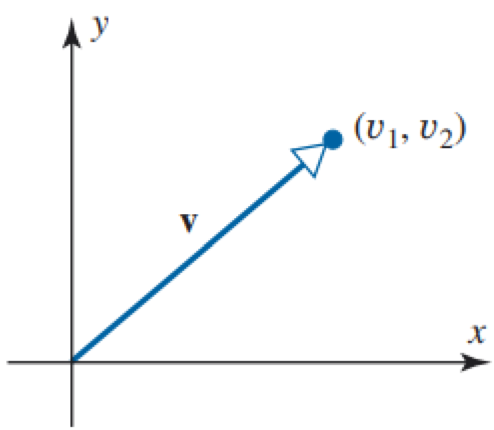
➢ Os engenheiros e os físicos representam vetores em 2 dimensões (no espaço bidimensional) ou em 3 dimensões (no espaço tridimensional) por setas.

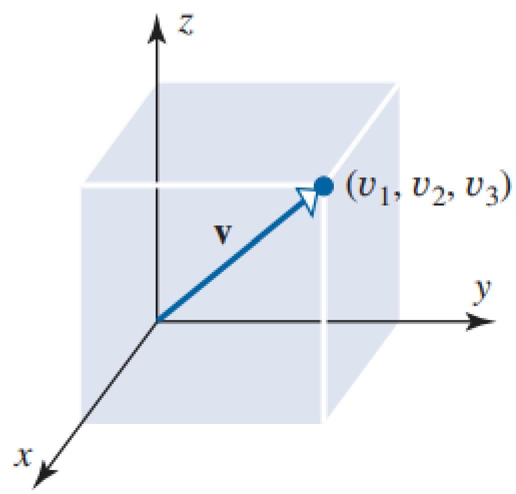


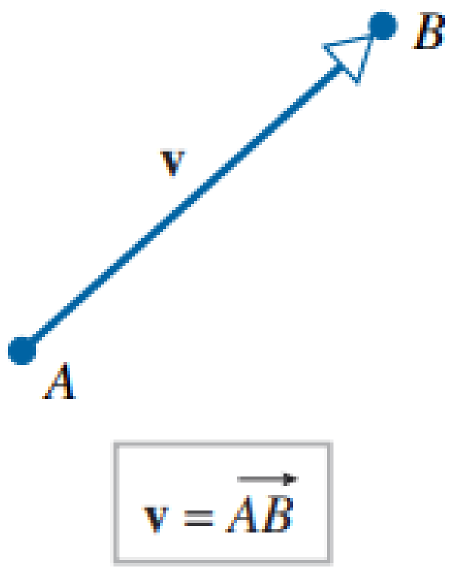


Vetores bi, tri e *n*–dimensionais

- Os engenheiros e os físicos representam vetores em 2 dimensões (no espaço bidimensional) ou em 3 dimensões (no espaço tridimensional) por setas.
- A direção e o sentido da flecha especificam a direção e o sentido do vetor, e o comprimento da flecha descreve seu comprimento, ou magnitude.

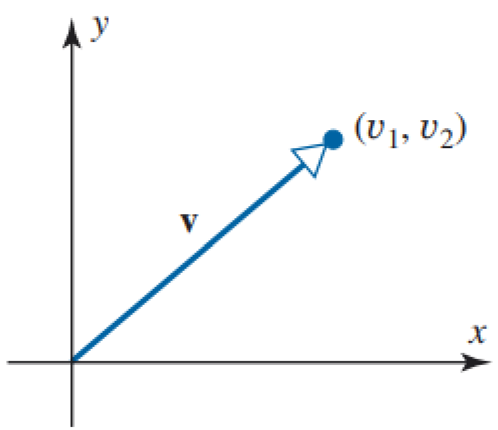


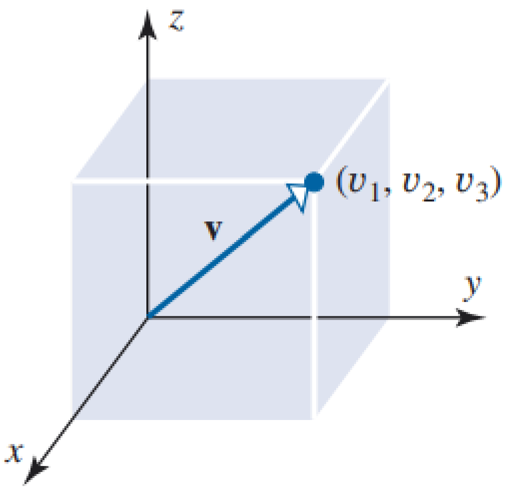


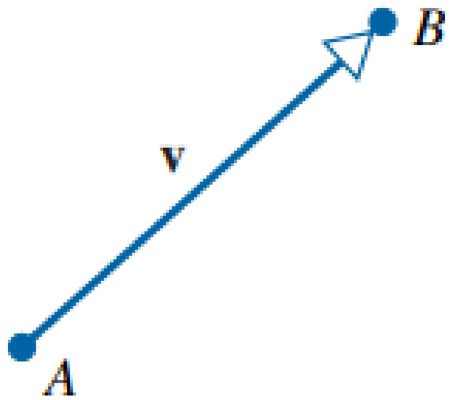


Vetores bi, tri e *n*–dimensionais

- Geralmente, denotamos vetores com letras minúsculas em negrito, como **a, b, v, w e x**, e escalares com minúsculas em itálico, como *a*, *k*, *v*, *w e x*. Quando quisermos indicar que um vetor v tem ponto inicial *A* e ponto final *B*, então, escrevemos:







$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$

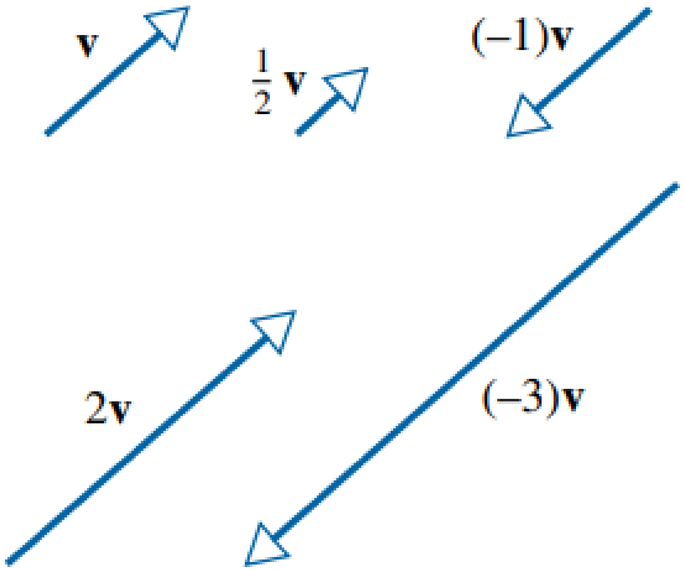
Vetores bi, tri e *n*–dimensionais

- Existem várias operações algébricas importantes efetuadas com vetores, todas originando das leis da Física:

Vetores bi, tri e n–dimensionais

Multiplicação por escalar Se $\mathbf{v}$ for um vetor não nulo do espaço bi ou tridimensional e k, um escalar não nulo, então o ***múltiplo escalar*** de $\mathbf{v}$ por k, denotado por $k\mathbf{v}$, é o vetor de mesma direção do que $\mathbf{v}$, mas cujo comprimento é $|k|$ vezes o comprimento de $\mathbf{v}$ e cujo sentido é o mesmo que o de $\mathbf{v}$ se k for positivo e o oposto do de $\mathbf{v}$ se k for negativo. Se $k = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então definimos $k\mathbf{v}$ como sendo $\mathbf{0}$.

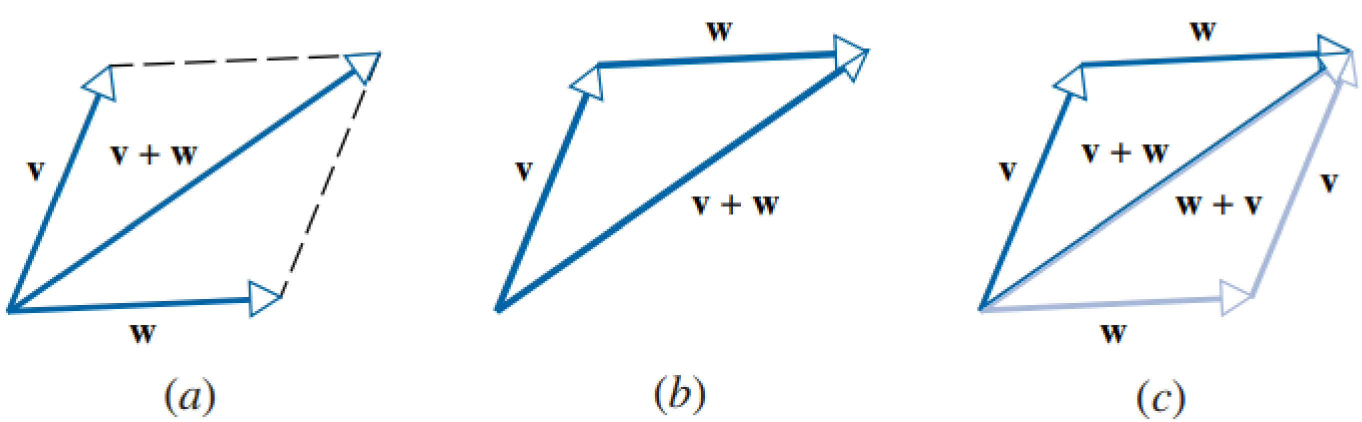
$$(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$



Vetores bi, tri e *n*–dimensionais

Regra do paralelogramo para a adição vetorial Se **v** e **w** forem vetores no espaço bi ou tridimensional posicionados de tal modo que seus pontos iniciais coincidam, então os dois vetores formam lados adjacentes de um paralelogramo, e a ***soma*** **v** + **w** é o vetor representado pela flecha desde o ponto inicial comum de **v** e **w** até o vértice oposto do paralelogramo (Figura 3.1.4*a*).

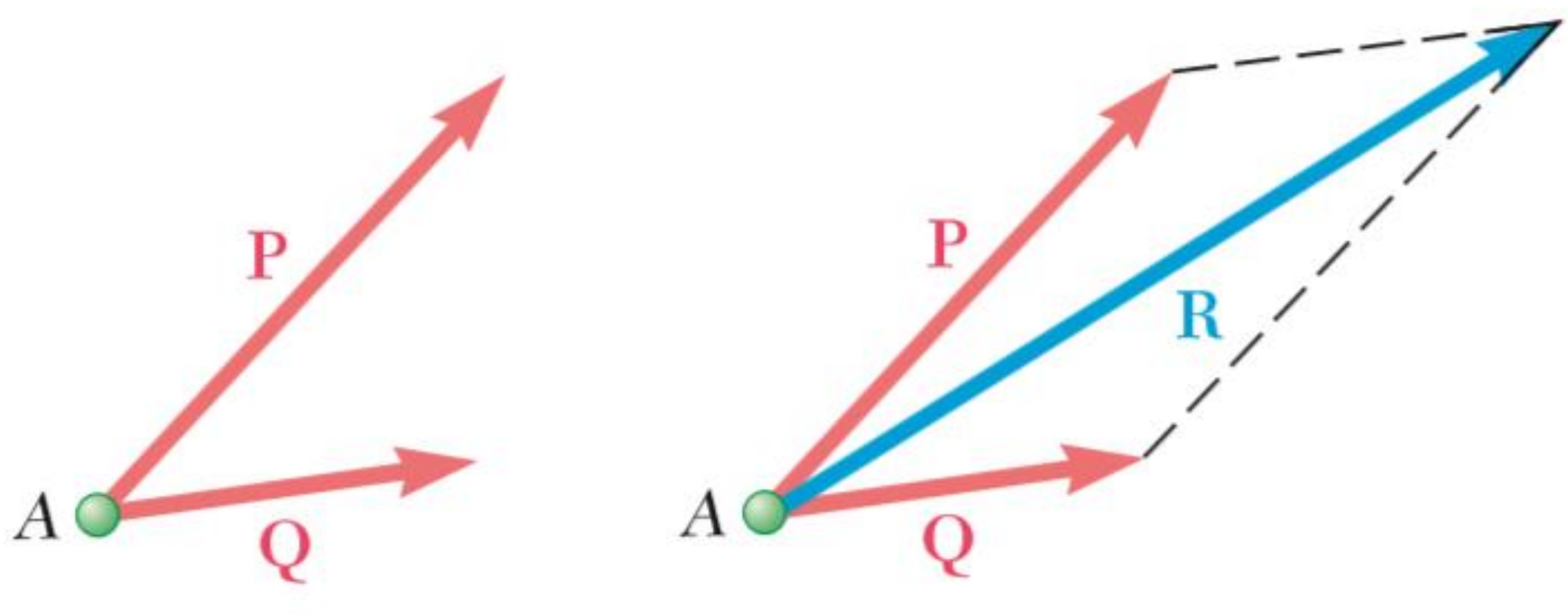
Regra do triângulo para a adição vetorial Se **v** e **w** forem vetores no espaço bi ou tridimensional posicionados de tal modo que o ponto inicial de **w** é o ponto terminal de **v**, então a ***soma*** **v** + **w** é o vetor representado pela flecha desde o ponto inicial de **v** até o ponto terminal de **w** (Figura 3.1.4*b*).



▶ **Figura 3.1.4**

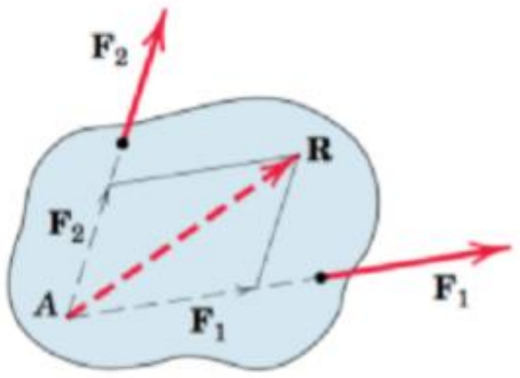
RESULTANTE DE VÁRIOS VETORES

Dois ou mais vetores agindo sobre um ponto podem ser substituídas por um único vetor ***R*** ***(RESULTANTE)*** que tem o mesmo efeito sobre o ponto.

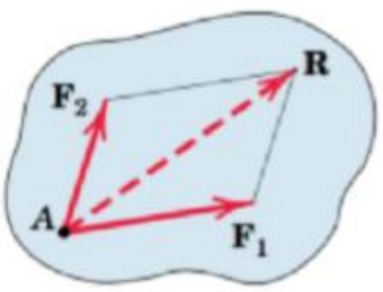


RESULTANTE DE VÁRIOS VETORES

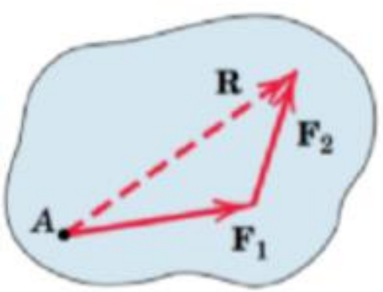
A **RESULTANTE** pode ser determinada por soluções:



- **GRÁFICAS/Trigonométricas:**
  - regra do paralelogramo;
  - triângulo de forças;
  - Polígono de forças.

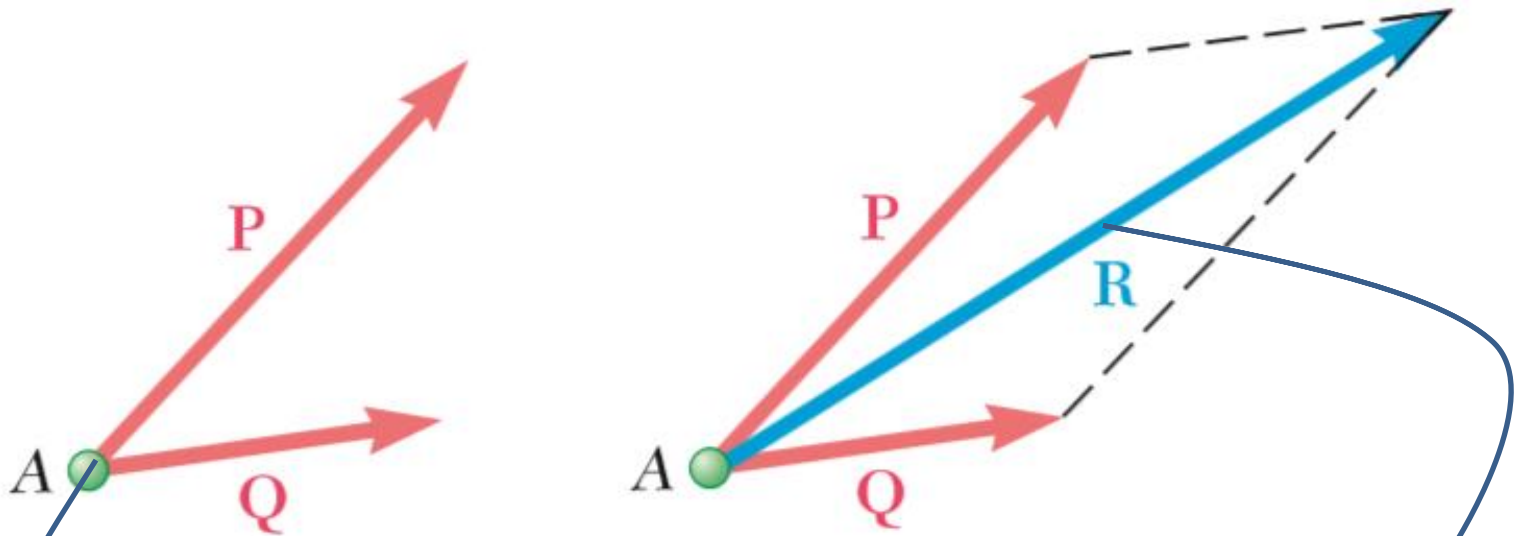


- **ANALÍTICAS:**
  - Componentes retangulares.



RESULTANTE DE VÁRIOS VETORES

- **GRÁFICAS:**
  - **regra do paralelogramo:**
  - **triângulo de forças;**
  - **Polígono de forças.**

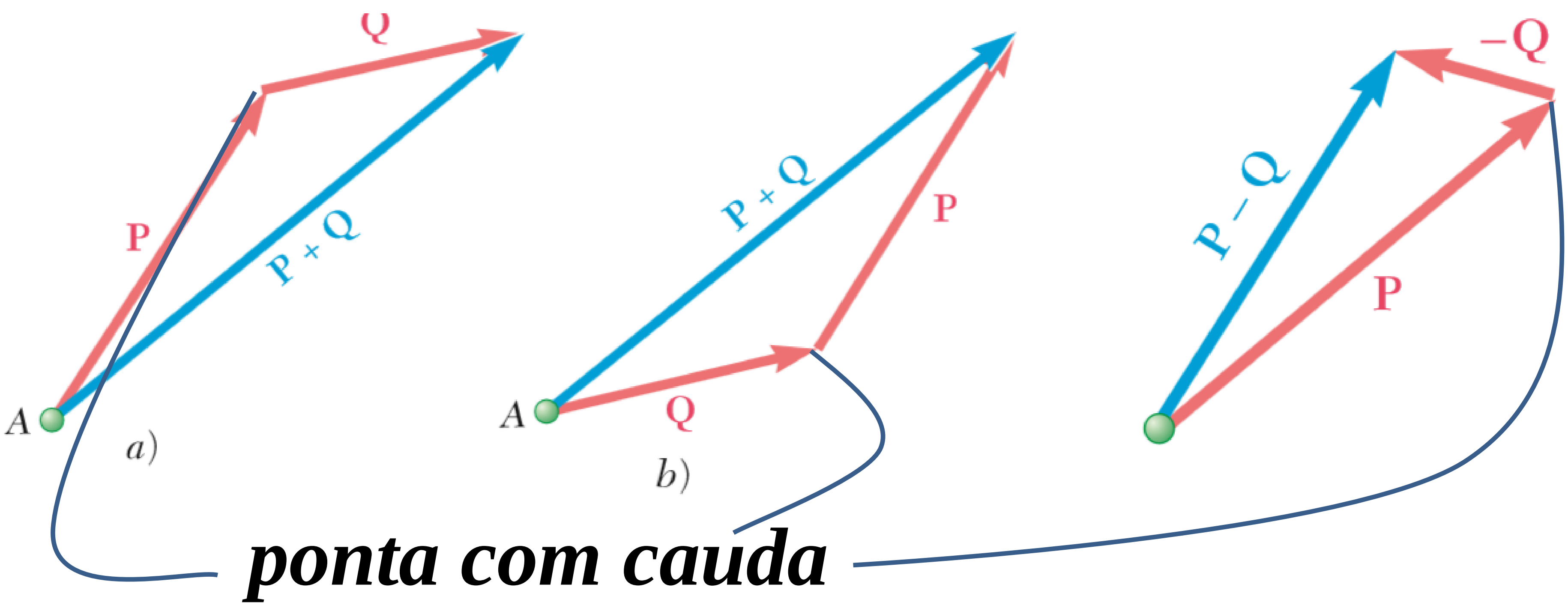


Cauda com cauda

Se o desenho estiver em escala, é só medir o tamanho de R.
Caso contrário, aplica-se relações trigonométricas (Exemplo: 2.1)

RESULTANTE DE VÁRIOS VETORES

- **GRÁFICAS:**
  - regra do paralelogramo;
  - **triângulo de forças:** derivado a partir da regra do paralelogramo.



RESULTANTE DE VÁRIOS VETORES

- **GRÁFICAS:**
- **Polígono de forças:** regra do triângulo repetida.

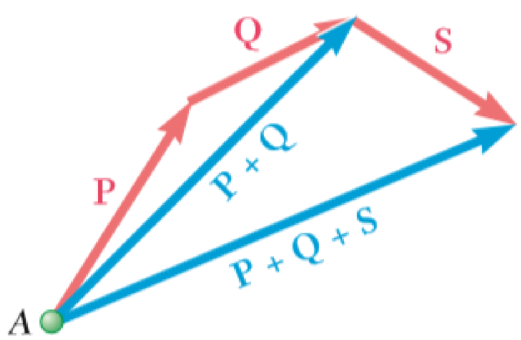


Fig. 2.9

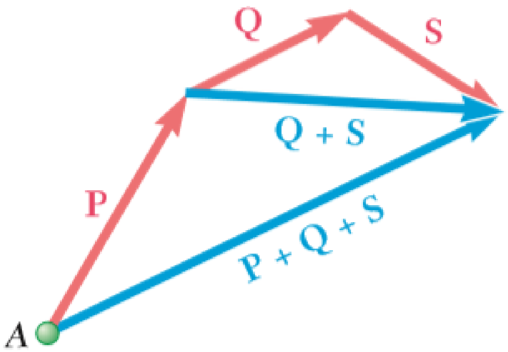


Fig. 2.11

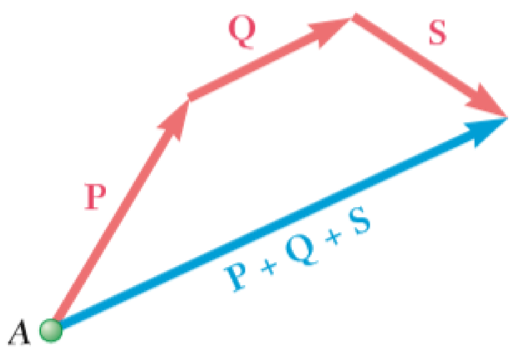


Fig. 2.10

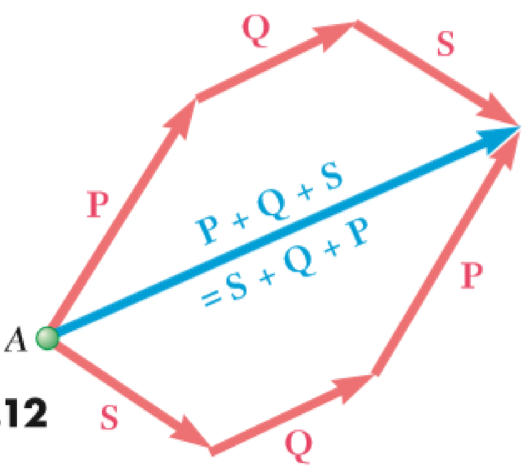


Fig. 2.12

RESULTANTE DE VÁRIOS VETORES

Mas como calcular a intensidade do vetor **RESULTANTE?**

LEI DOS SENOS E COSSENOS

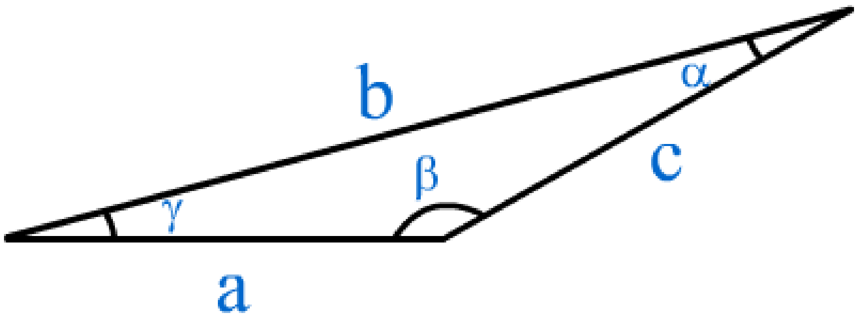
Mas como calcular a intensidade do vetor **RESULTANTE?**

LEI DOS SENOS ***LEI DOS COSSENOS***

LEI DOS SENOS E COSSENOS

Mas como calcular a intensidade do vetor **RESULTANTE?**

LEI DOS SENOS ***LEI DOS COSSENOS***

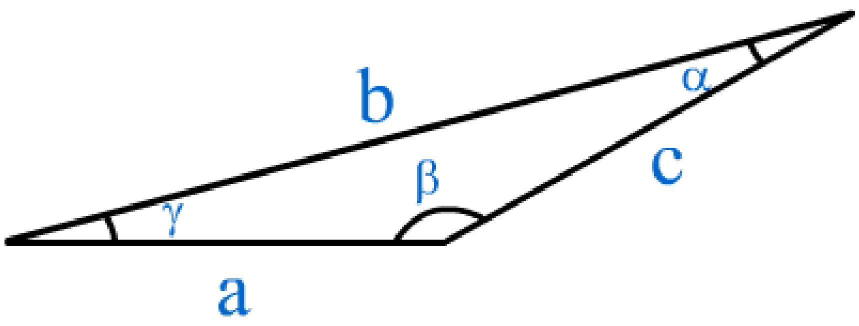


$$\frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)}$$

LEI DOS SENOS E COSSENOS

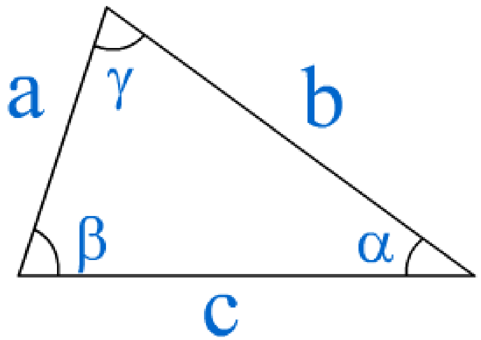
Mas como calcular a intensidade da força **RESULTANTE?**

LEI DOS SENOS



$$\frac{b}{\mathrm{sen}(\beta)} = \frac{a}{\mathrm{sen}(\alpha)} = \frac{c}{\mathrm{sen}(\gamma)}$$

LEI DOS COSSENOS



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos(\beta)$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab.\cos(\gamma)$$

LEI DOS SENOS E COSSENOS

DEMONSTRAÇÃO: *LEI DOS SENOS*

Sabemos que:

$b = a + c$

Do produto vetorial:

$b \times a = (a + c) \times a$

$b \times a = a \times a + c \times a$

Pela definição de produto vetorial:

$|a \times a| = 0$

$|b \times a| = ba\,sen(\gamma)$

$|c \times a| = ca\,sen(180-\beta)$

Logo, teremos que:

$ba\,sen(\gamma) = ca\,sen(180-\beta)$

$b\,sen(\gamma) = c\,sen(\beta)$

Sabemos que:

$b = a + c$

Do produto vetorial:

$b \times c = (a + c) \times c$

$b \times c = c \times c + a \times c$

Pela definição de produto vetorial:

$|c \times c| = 0$

$|b \times c| = bc\,sen(\alpha)$

$|a \times c| = ac\,sen(180-\beta)$

Logo, teremos que:

$bc\,sen(\alpha) = ac\,sen(180-\beta)$

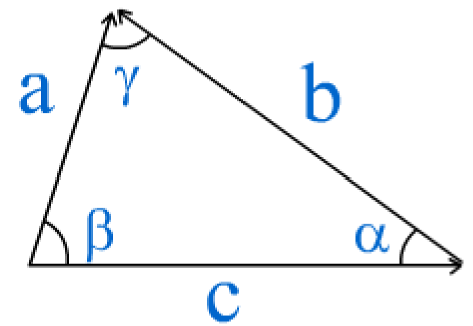
$b\,sen(\alpha) = a\,sen(\beta)$

$$\frac{b}{sen(\beta)} = \frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$

Demonstração das leis: http://www.ctec.ufal.br/professor/enl/mecsol/Mec.html

LEI DOS SENOS E COSSENOS

DEMONSTRAÇÃO: ***LEI DOS COSSENOS***



Sabemos que:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

Do produto escalar, temos:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$$

$$a^2 = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

Pela definição de produto escalar:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = bc.\cos(180° - \alpha)$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = bc.[-\cos(\alpha)]$$

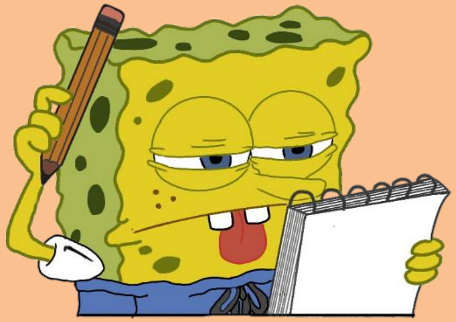
Teremos que:

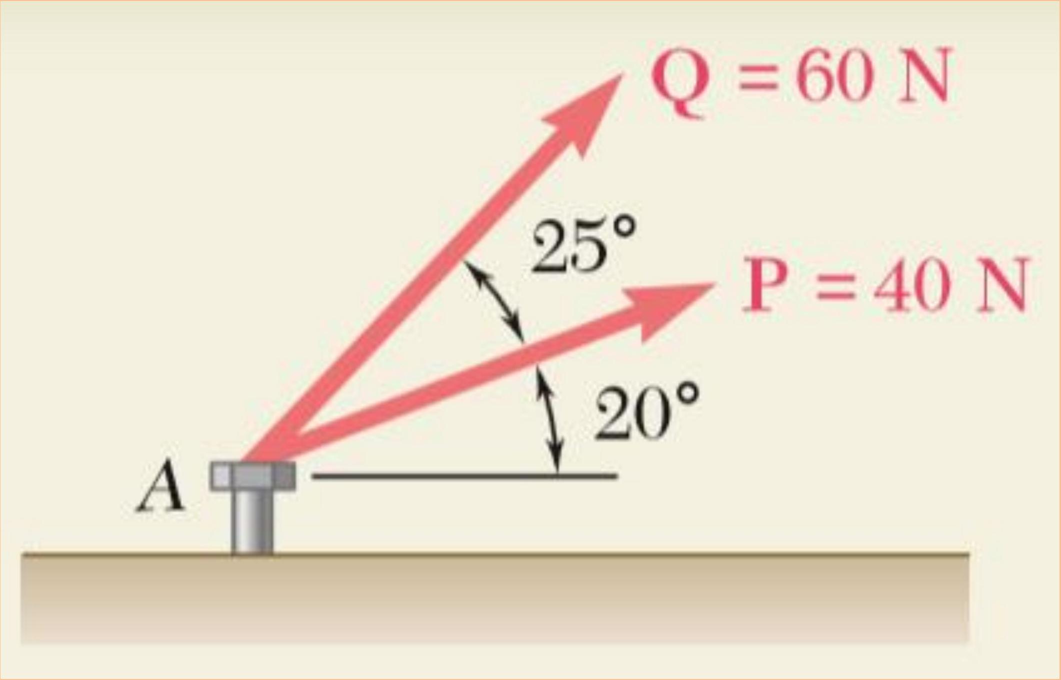
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\alpha)$$

Demonstração das leis: http://www.ctec.ufal.br/professor/enl/mecsol/Mec.html

Exemplo 2.1 - BEER

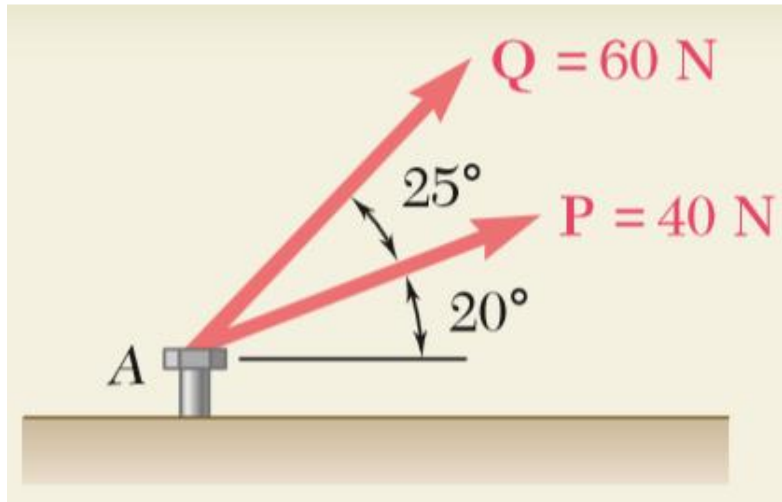
- **Duas forças P e Q agem em um parafuso. Determine sua resultante.**

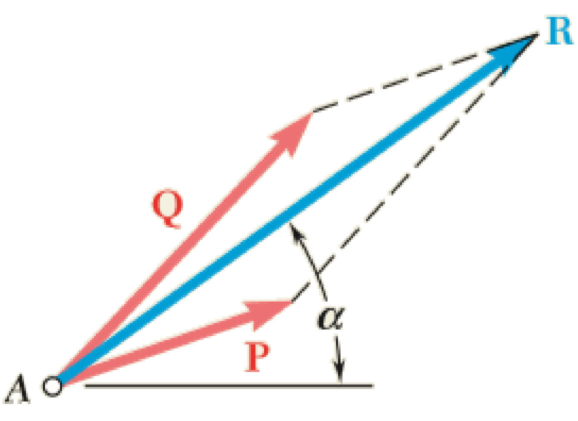


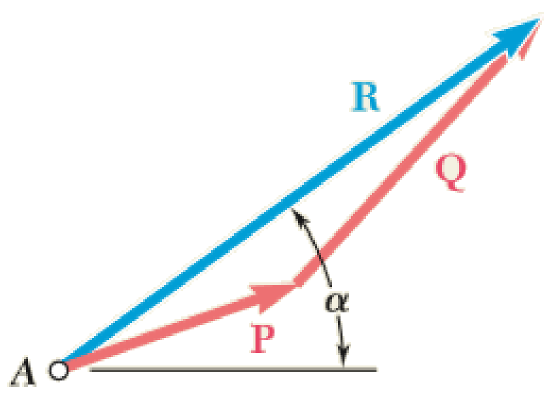


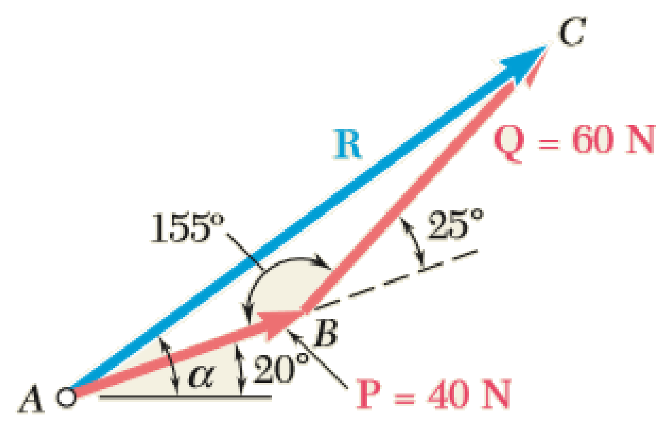
Exemplo 2.1 - BEER

➤ **RESOLUÇÃO:**



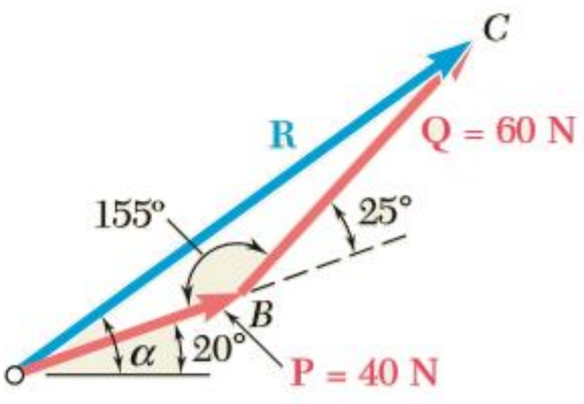






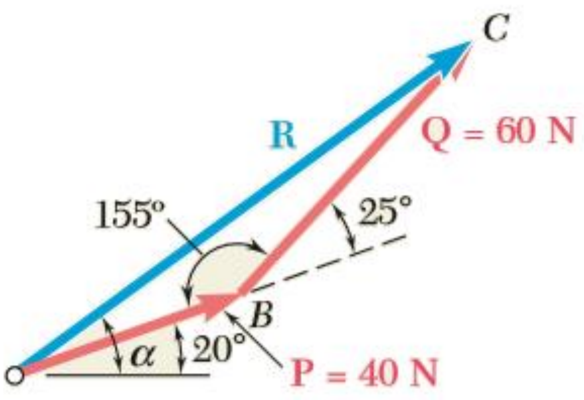
Exemplo 2.1 - BEER

- **Aplicando a Lei dos Cossenos:**



$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$$
$$R^2 = (40\text{ N})^2 + (60\text{ N})^2 - 2(40\text{ N})(60\text{ N}) \cos 155°$$
$$R = 97.73\text{ N}$$

Exemplo 2.1 - BEER



➢ Aplicando a Lei dos Cossenos:

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos B$$
$$R^2 = (40\text{ N})^2 + (60\text{ N})^2 - 2(40\text{ N})(60\text{ N})\cos 155°$$
$$R = 97.73\text{ N}$$

➢ Aplicando a Lei dos Senos:

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} \qquad \frac{\sin A}{60\text{ N}} = \frac{\sin 155°}{97.73\text{ N}}$$

$$\mathbf{R} = 97.7\text{ N} \measuredangle 35.0°$$

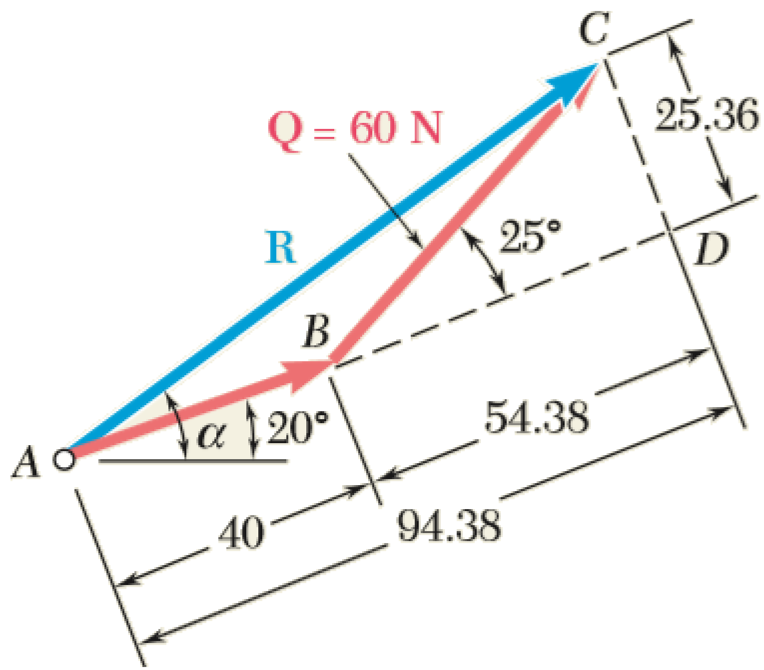
$$\sin A = \frac{(60\text{ N})\sin 155°}{97.73\text{ N}}$$

$$A = 15.04° \qquad \alpha = 20° + A = 35.04°$$

Exemplo 2.1 - BEER

➢ Solução Trigonométrica Alternativa:

$$CD = (60\ \text{N})\sin 25° = 25.36\ \text{N}$$
$$BD = (60\ \text{N})\cos 25° = 54.38\ \text{N}$$



$$\tan A = \frac{25.36\ \text{N}}{94.38\ \text{N}} \qquad A = 15.04°$$

$$R = \frac{25.36}{\sin A} \qquad R = 97.73\ \text{N}$$

$$\alpha = 20° + A = 35.04° \qquad \mathbf{R} = 97.7\ \text{N} \measuredangle 35.0°$$

RESULTANTE DE VÁRIOS VETORES

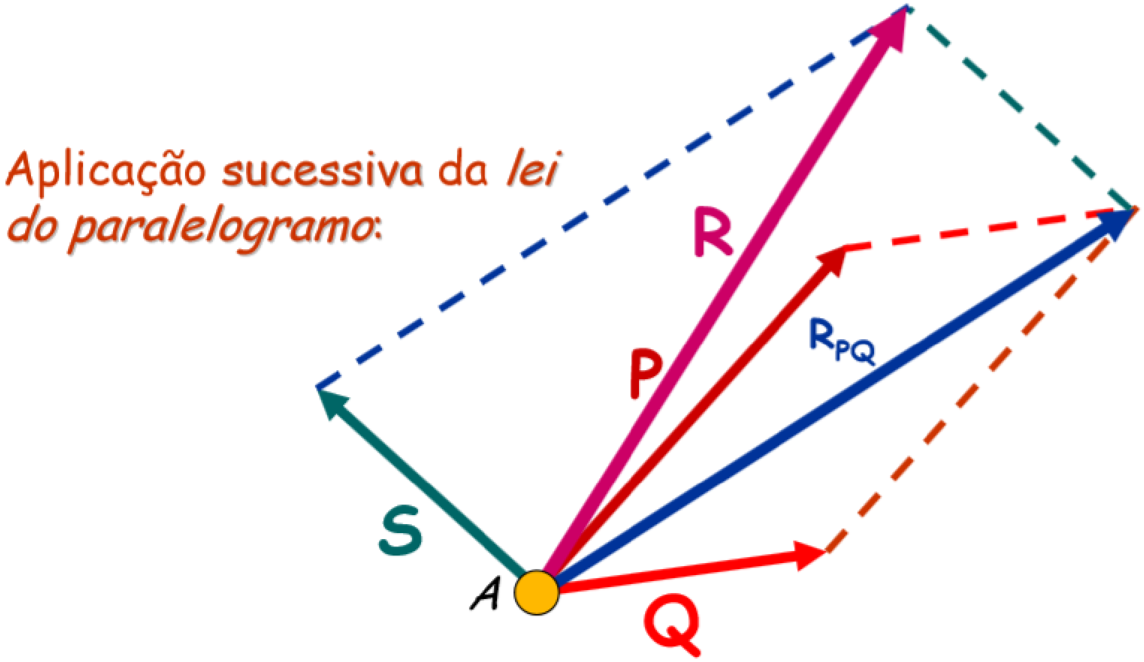
A **RESULTANTE** pode ser determinada por soluções:

- **GRÁFICAS:**
  - regra do paralelogramo;
  - triângulo de forças;
  - Polígono de forças.

- **ANALÍTICAS:**
  - Componentes retangulares.

RESULTANTE DE VÁRIOS VETORES

- A princípio é possível encontrar o vetor resultante aplicando-se sucessivamente a lei do paralelogramo ou a regra do triângulo.

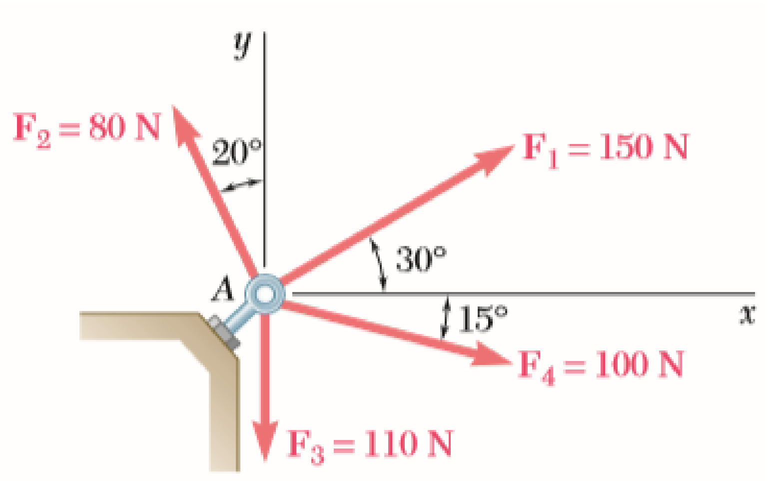


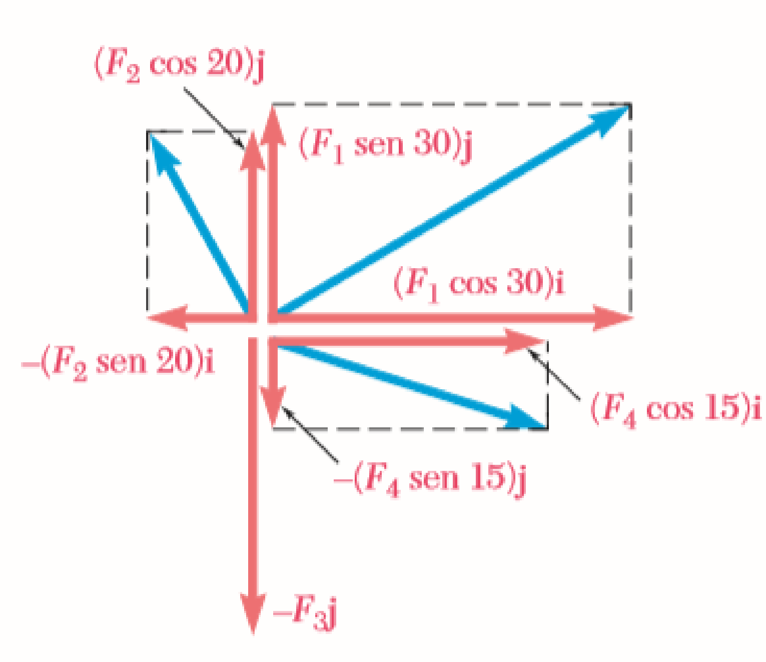
- A ordem da combinação dos vetores originais não altera a força resultante (a soma de vetores é comutativa).

RESULTANTE DE VÁRIOS VETORES

- Porém, quando 3 ou mais vetores atuam no ponto, a aplicação dos métodos Gráficos podem se tornar onerosas!

- Nesse Caso, uma solução ANALÍTICA pode ser obtida com a chamada DECOMPOSIÇÃO RETANGULAR!

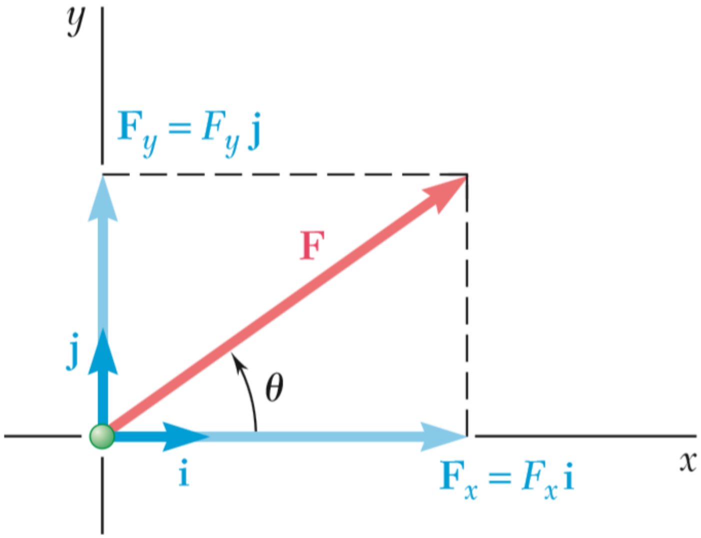




RESULTANTE DE VÁRIOS VETORES

- **ANALÍTICAS:** Componentes retangulares.

- Estabelecendo direções de decomposição perpendiculares, o paralelogramo se transforma num retângulo, o que leva a expressões analíticas simples para os componentes do vetor.



$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{y}}$$

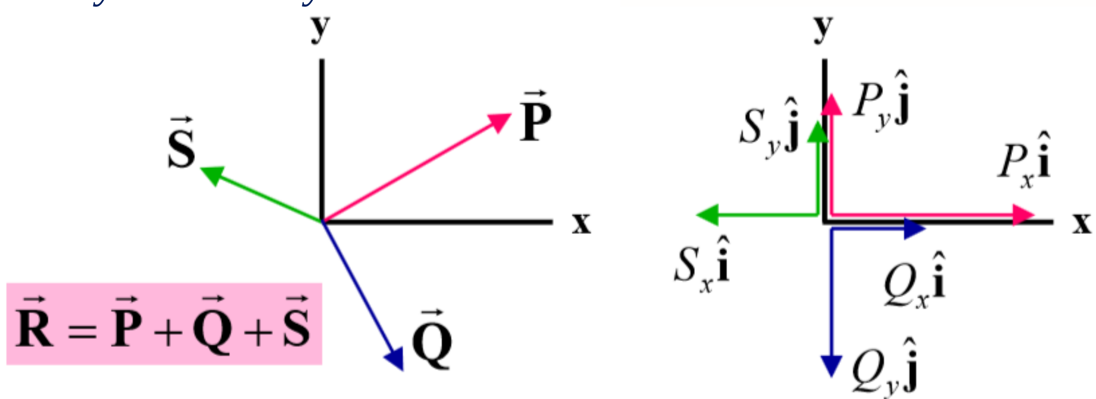
$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{x}} = F_x\,\hat{\mathbf{i}} \qquad \boxed{F_x = F\cos\theta}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{y}} = F_y\,\hat{\mathbf{j}} \qquad \boxed{F_y = F\sin\theta}$$

RESULTANTE DE VÁRIOS VETORES

- **ANALÍTICAS:** Componentes retangulares.

- Os componentes do vetor ***RESULTANTE (R)*** de um conjunto de vetores (***P, Q, S,*** *etc*) concorrentes podem ser determinados através das somas dos componentes dos vetores envolvidos (P_x, P_y), (Q_x, Q_y), (S_x, S_y) *etc*.

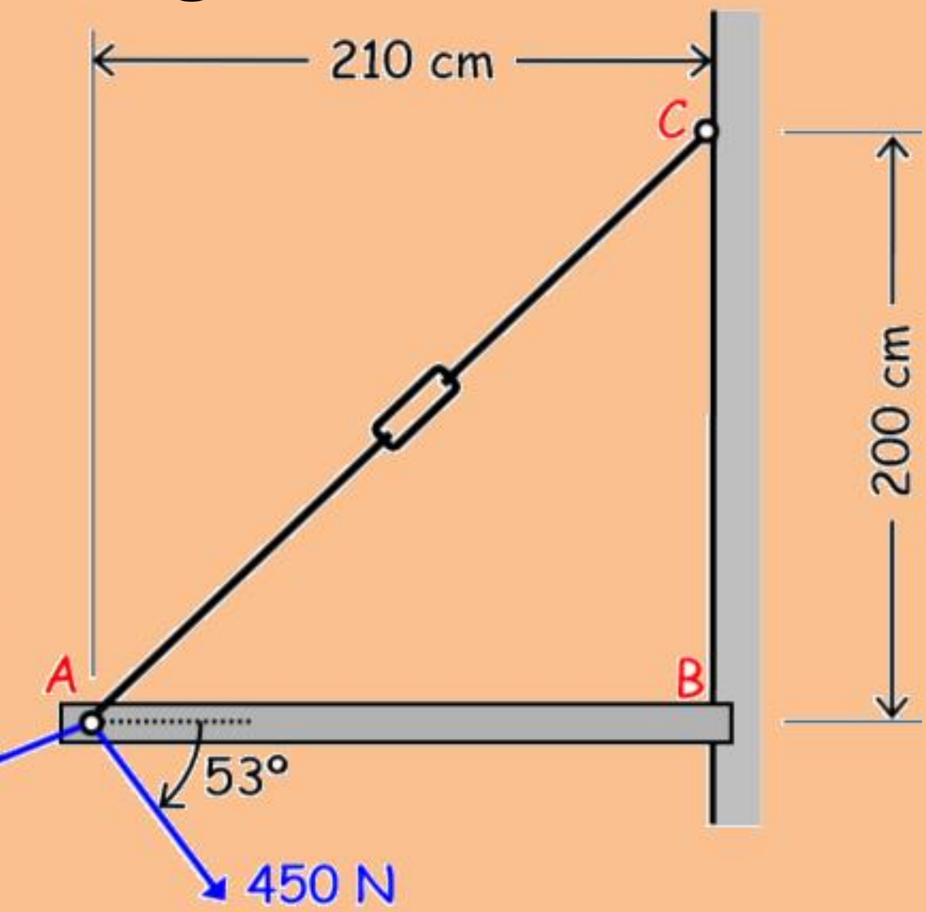


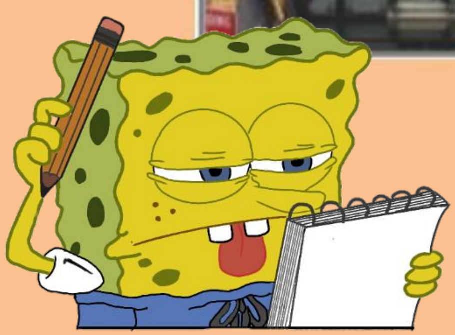
$$\vec{\mathbf{R}} = \left(P_x\hat{\mathbf{i}} + P_y\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(Q_x\hat{\mathbf{i}} + Q_y\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(S_x\hat{\mathbf{i}} + S_y\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \underbrace{\left(P_x + Q_x + S_x\right)}_{R_x}\hat{\mathbf{i}} + \underbrace{\left(P_y + Q_y + S_y\right)}_{R_y}\hat{\mathbf{j}}$$

Exemplo Notas de Aula Prof. Nobre

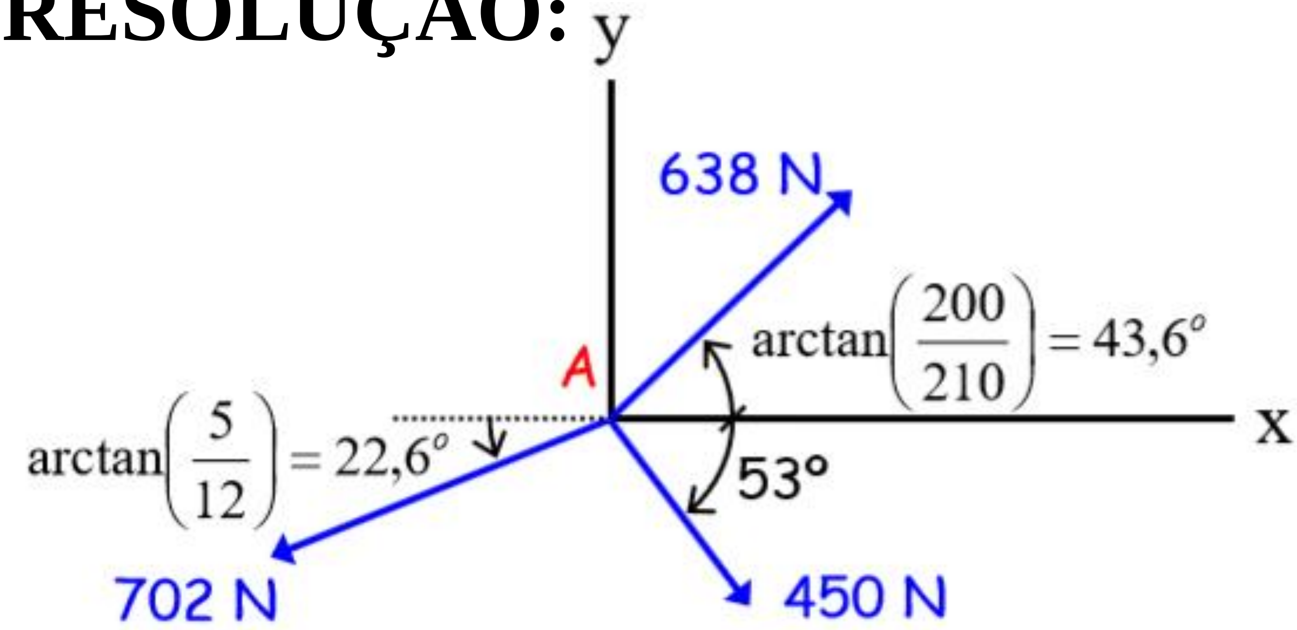
- **Sabendo que a tração na haste *AC* vale *638 N*, determine a resultante das três forças exercidas no ponto *A* da viga AB.**





Exemplo Notas de Aula Prof. Nobre

- **RESOLUÇÃO:**



$$R_x = 638 \cdot \cos 43{,}6^o + 702 \cdot \cos 202{,}6^o + 450 \cdot \cos 307^o$$

$$R_x = 84{,}7 \text{ N}$$

$$R_y = 638 \cdot \sin 43{,}6^o + 702 \cdot \sin 202{,}6^o + 450 \cdot \sin 307^o$$

$$R_y = -189{,}2 \text{ N}$$

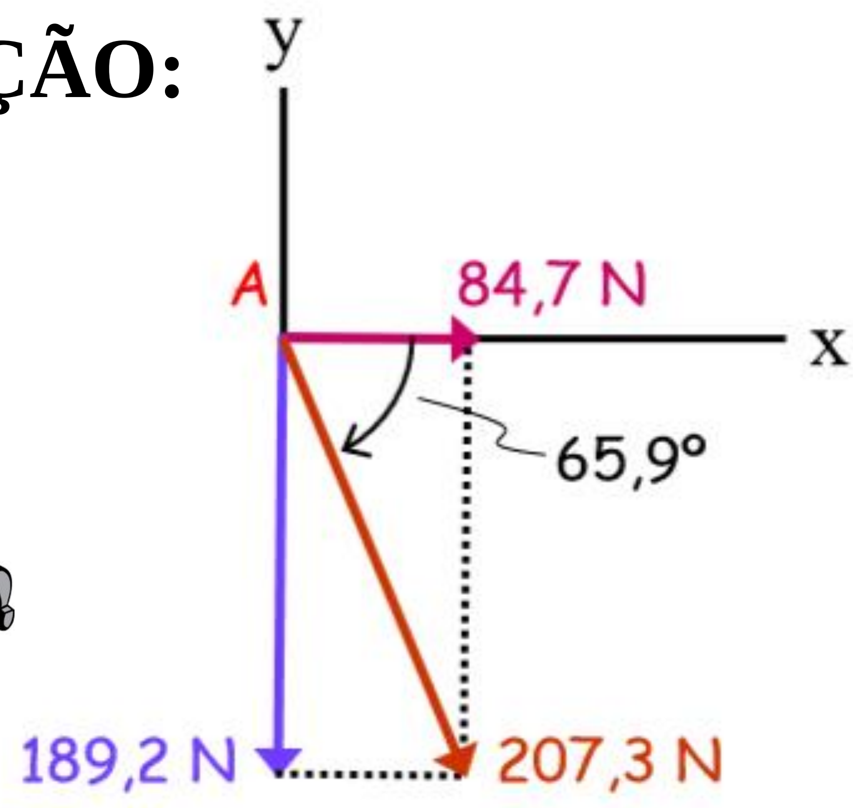
Exemplo Notas de Aula Prof. Nobre

- **RESOLUÇÃO:**

FORÇA	INTENSIDADE (N)	COMPONENTE, x (N)	COMPONENTE, y (N)
F_1	638	+ 462,02	+ 439,98
F_2	702	- 648,09	- 269,77
F_3	450	+ 270,82	- 359,39
	Total	Rx = + 84,75	Ry = - 189,17

Exemplo Notas de Aula Prof. Nobre

- **RESOLUÇÃO:**



$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \Rightarrow \quad R = 207{,}3\ \mathrm{N}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \quad \Rightarrow \quad \theta = -65{,}9^o$$

Vetores bi, tri e *n*–dimensionais

Às vezes, precisamos considerar vetores cujos pontos iniciais não estão na origem. Se $\overrightarrow{P_1P_2}$ denota o vetor de ponto inicial $P_1(x_1, y_1)$ e ponto final $P_2(x_2, y_2)$, então os componentes desse vetor são dados pela fórmula

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \tag{4}$$

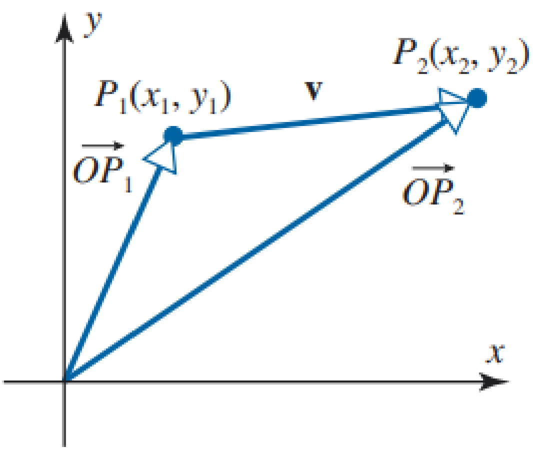
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Vetores bi, tri e *n*–dimensionais

EXEMPLO 1 Encontrando os componentes de um vetor

Os componentes do vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ de ponto inicial $P_1(2, -1, 4)$ e ponto terminal $P_2(7, 5, -8)$ são

$$\mathbf{v} = (7 - 2, 5 - (-1), (-8) - 4) = (5, 6, -12)$$



$$\boxed{\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}}$$

Vetores *n*–dimensionais:

Vetores *n*–dimensionais

- No século XX, matemáticos e físicos começaram a explorar espaços de múltiplas dimensões. A ideia de uma quarta dimensão (tempo), usada por Einstein na relatividade geral, já é familiar. Hoje, a teoria das cordas trabalha com 11 dimensões para tentar unificar as forças da natureza. Aqui, vamos expandir esse conceito para n dimensões.

Vetores *n*–dimensionais

- No século XX, matemáticos e físicos começaram a explorar espaços de múltiplas dimensões. A ideia de uma quarta dimensão (tempo), usada por Einstein na relatividade geral, já é familiar. Hoje, a teoria das cordas trabalha com 11 dimensões para tentar unificar as forças da natureza. Aqui, vamos expandir esse conceito para n dimensões.

DEFINIÇÃO 1 Se n for um inteiro positivo, então uma ***ênupla ordenada*** é uma sequência de n números reais $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. O conjunto de todas as ênuplas ordenadas é denominado o ***espaço de dimensão n*** e é denotado por R^n.

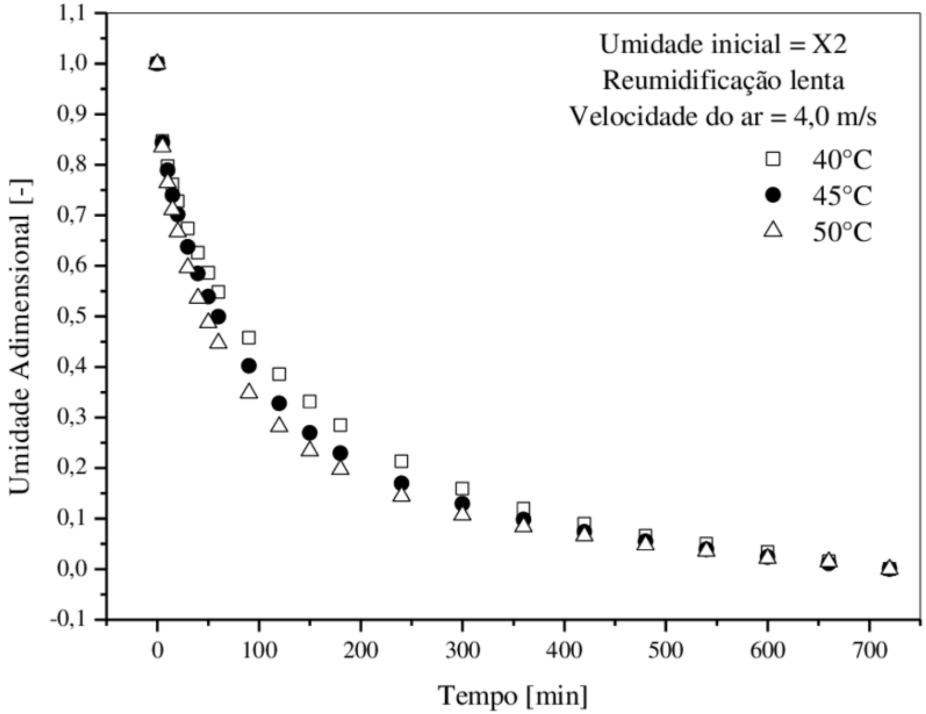
Vetores *n*–dimensionais

- Vejamos algumas aplicações típicas que levam a ênuplas.

Vetores *n*–dimensionais

- Vejamos algumas aplicações típicas que levam a ênuplas.

- **Dados Experimentais** – Um cientista realiza uma série de experimentos e toma n medições numéricas a cada realização do experimento. O resultado de cada experimento pode ser pensado como um vetor $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ em R^n, no qual $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são os valores medidos.



Vetores *n*–dimensionais

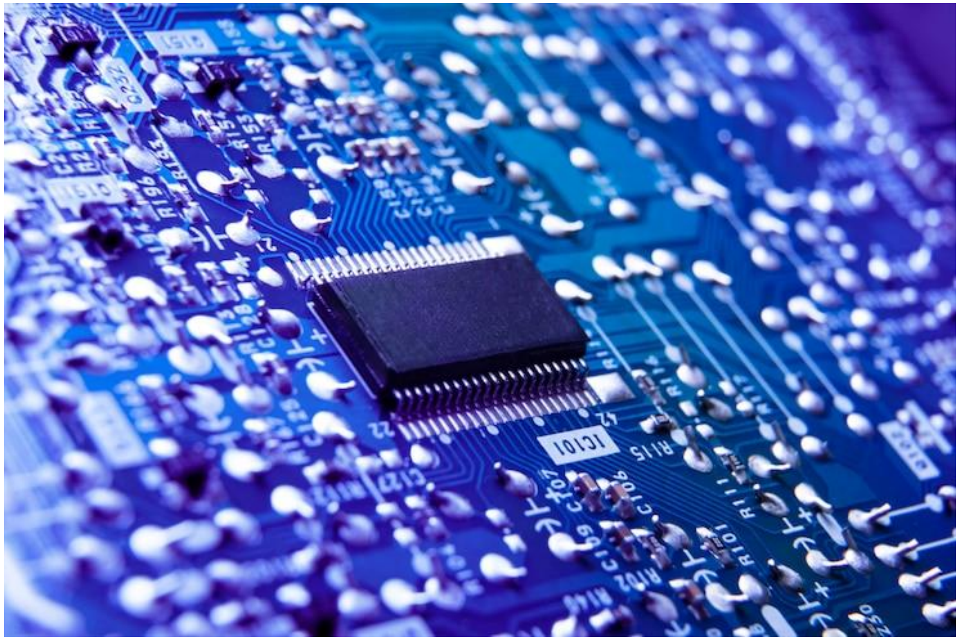
- Vejamos algumas aplicações típicas que levam a ênuplas.

- **Transporte e Armazenamento** – Uma companhia nacional de transporte de cargas tem 15 terminais com depósitos de armazenamento de carga e oficinas de manutenção de seus caminhões. Em cada instante de tempo, a distribuição dos caminhões nos terminais pode ser descrita por uma 15-upla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{15})$ na qual x_1 é o número de caminhões no primeiro terminal, x_2 é o número de caminhões no segundo terminal e assim por diante.

Vetores n–dimensionais

- Vejamos algumas aplicações típicas que levam a ênuplas.

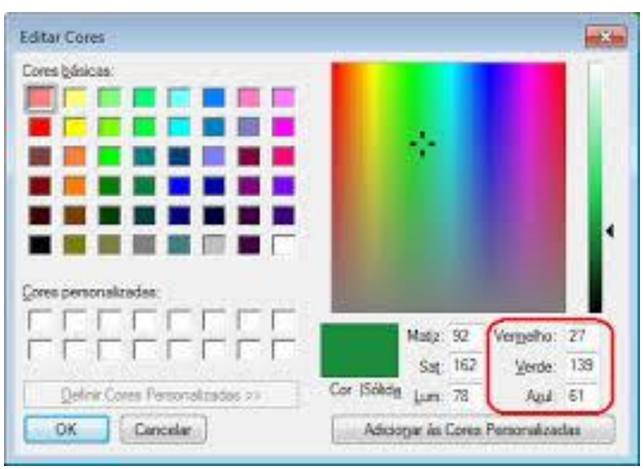
- **Circuitos Elétricos** – Um certo tipo de microprocessador eletrônico é projetado para receber quatro voltagens de entrada e produzir três voltagens em resposta. As voltagens de entrada podem ser consideradas como vetores de R^4 e as de resposta, como vetores de R^3. Assim, o microprocessador pode ser visto como um aparelho que transforma cada vetor de entrada $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ de R^4 num vetor de resposta $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ de R^3.

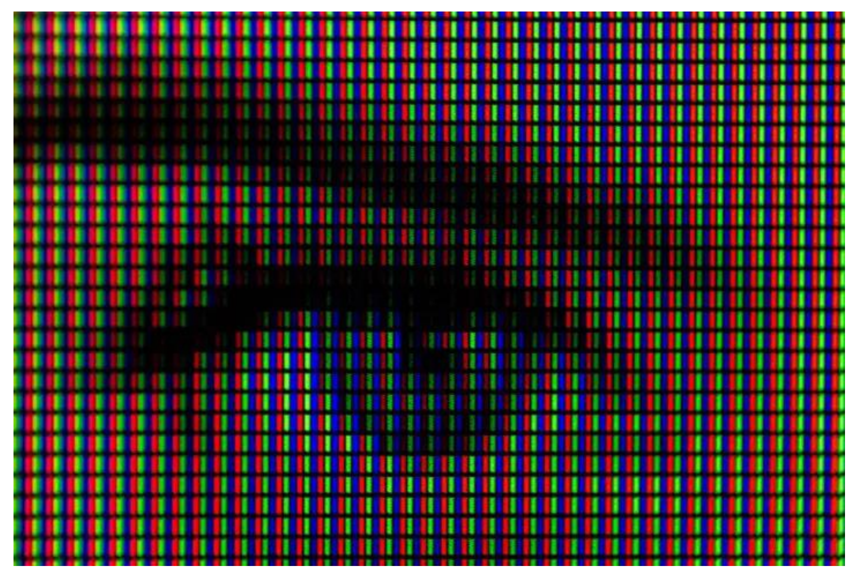


Vetores *n*–dimensionais

➢ Vejamos algumas aplicações típicas que levam a ênuplas.

- **Imagens Digitalizadas** – Uma maneira pela qual são criadas as imagens coloridas nas telas dos monitores de computadores é associar a cada pixel (que é um ponto endereçável da tela) três números, que descrevem o ***matiz***, a ***saturação*** e o ***brilho*** do pixel. Assim, uma imagem colorida completa pode ser vista como um conjunto de 5-uplas da forma $\mathbf{v} = (x, y, h, s, b)$ na qual x e y são as coordenadas do pixel na tela e h, s e b são o matiz (com a inicial do termo em inglês *hue*), a saturação e o brilho.





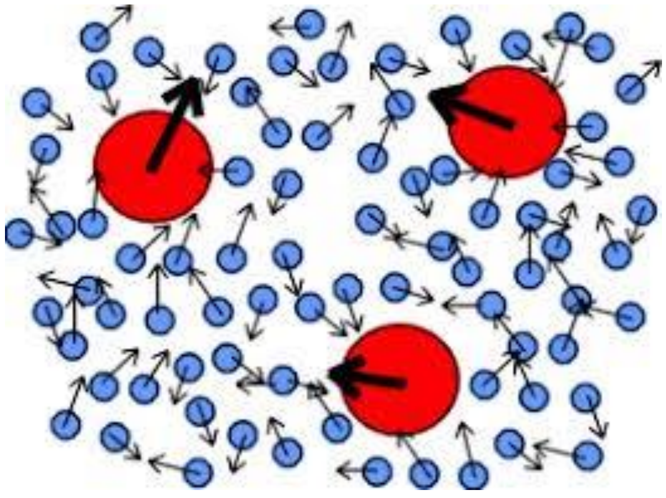
Vetores *n*–dimensionais

- Vejamos algumas aplicações típicas que levam a ênuplas.

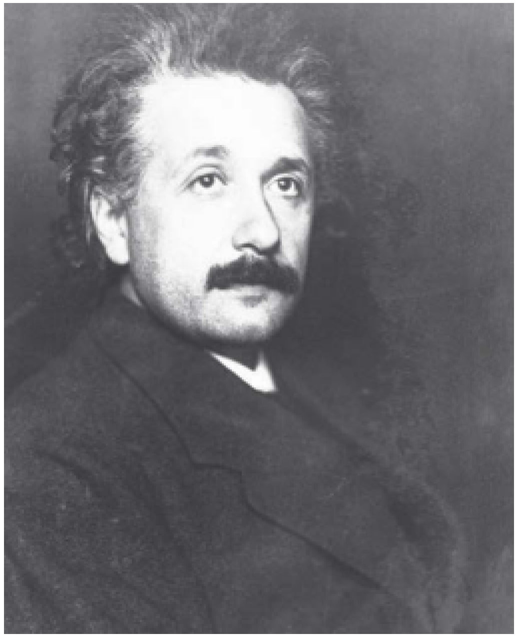
- **Sistemas Mecânicos** – Suponha que seis partículas se movam ao longo da mesma reta coordenada de tal modo que, no instante t, suas coordenadas sejam $x_1, x_2, \ldots, x_6$ e suas velocidades, $v_1, v_2, \ldots, v_6$, respectivamente. Essa informação pode ser representada pelo vetor

$$\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, t)$$

de R^{13}. Esse vetor é denominado o ***estado*** do sistema de partículas no instante t.



Vetores *n*–dimensionais



Albert Einstein (1879–1955)

Nota histórica O físico Albert Einstein, nascido na Alemanha, emigrou aos Estados Unidos da América em 1935, onde se estabeleceu na Princeton University. Einstein trabalhou sem êxito durante as três últimas décadas de sua vida na tentativa de produzir uma *teoria do campo unificado*, que estabeleceria uma relação subjacente entre as forças da gravidade e do eletromagnetismo. Recentemente, os físicos progrediram no problema utilizando uma nova abordagem, conhecida como a *teoria das cordas*. Nessa teoria, os componentes menores e indivisíveis do universo não são partículas, mas laços que se comportam como cordas vibrantes. Enquanto o universo espaço-tempo de Einstein era de dimensão 4, as cordas vivem num mundo de dimensão 11, que é o foco de muita pesquisa atual.

[Imagem: ©Betmann/©Corbis]

Vetores *n*–dimensionais

- Operações algébricas usando componentes:

Se $\mathbf{v} = (1, -3, 2)$ e $\mathbf{w} = (4, 2, 1)$, então

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (5, -1, 3), \qquad 2\mathbf{v} = (2, -6, 4)$$

$$-\mathbf{w} = (-4, -2, -1), \qquad \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = (-3, -5, 1) \blacktriangleleft$$

Vetores n–dimensionais

- Operações algébricas usando componentes:

O próximo teorema resume as propriedades mais importantes das operações vetoriais.

TEOREMA 3.1.1 *Se* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *são vetores em* R^n *e se* k *e* m *são escalares, então:*

(*a*) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(*b*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(*c*) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} + \mathbf{u}$

(*d*) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(*e*) $k(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k\mathbf{v} + k\mathbf{w}$

(*f*) $(k + m)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + m\mathbf{v}$

(*g*) $k(m\mathbf{u}) = (km)\mathbf{u}$

(*h*) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

TEOREMA 3.1.2 *Se* $\mathbf{v}$ *é um vetor em* R^n *e se* k *é um escalar, então:*

(*a*) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$

(*b*) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

(*c*) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$

Vetores *n*–dimensionais

- **Combinação Linear:** Operações de adição, subtração e multiplicação por escalar são usadas, com frequência, em combinação para formar novos vetores:

DEFINIÇÃO 4 Dizemos que um vetor $\mathbf{w}$ em R^n é uma ***combinação linear*** dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ em R^n se $\mathbf{w}$ puder ser expresso na forma

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r \tag{14}$$

em que $k_1, k_2, \ldots, k_r$ são escalares. Esses escalares são denominados ***coeficientes*** da combinação linear. No caso em que $r = 1$, a Fórmula (14) se torna $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1$, de modo uma combinação linear de um vetor só é simplesmente um múltiplo escalar desse vetor.

Conceitos Importantes

Conceitos Importantes

- **Norma:** denotamos o comprimento de um vetor **v** pelo símbolo ||**v**|| e dizemos que este é a norma, o comprimento ou a magnitude de **v** (sendo que o termo "norma" é um sinônimo matemático comum para comprimento).

DEFINIÇÃO 1 Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ for um vetor em R^n, então a ***norma*** de **v** (também denominada ***comprimento*** ou ***magnitude*** de **v**) é denotada por $\|\mathbf{v}\|$ e definida pela fórmula

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2} \tag{3}$$

Conceitos Importantes

- **Vetor unitário:** Um vetor de norma 1 é denominado vetor unitário. Esses vetores são úteis para especificar uma direção quando o comprimento não for relevante para o problema em consideração.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$$

Conceitos Importantes

▶ **EXEMPLO 2** **Normalizando um vetor**

Encontre o vetor unitário **u** que tem a mesma direção e sentido de $\mathbf{v} = (2, 2, -1)$.

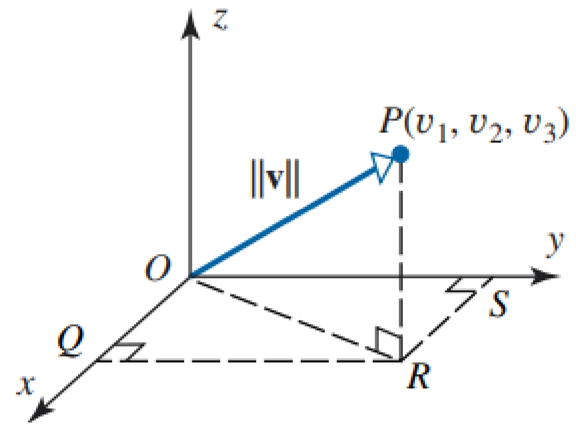
Solução O vetor **v** tem comprimento

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

Assim, por (4), temos

$$\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2, 2, -1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

O leitor pode querer confirmar que $\|\mathbf{u}\| = 1$. ◀



Conceitos Importantes

Os vetores unitários canônicos

Quando introduzimos um sistema de coordenadas retangulares em R^2 ou R^3, dizemos que os vetores unitários nas direções positivas dos eixos coordenados são os ***vetores unitários canônicos***. Em R^2, esses vetores são denotados por

$$\mathbf{i} = (1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{j} = (0, 1)$$

e, em R^3, são denotados por

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

(Figura 3.2.2). Cada vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ em R^2 e cada vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ em R^3 pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores unitários canônicos, escrevendo

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = v_1(1, 0) + v_2(0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} \tag{5}$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} \tag{6}$$

Além disso, podemos generalizar essas fórmulas para R^n definindo os ***vetores unitários canônicos em R^n***

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1) \tag{7}$$

caso em que cada vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ em R^n pode ser expresso como

$$\boxed{\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n} \tag{8}$$

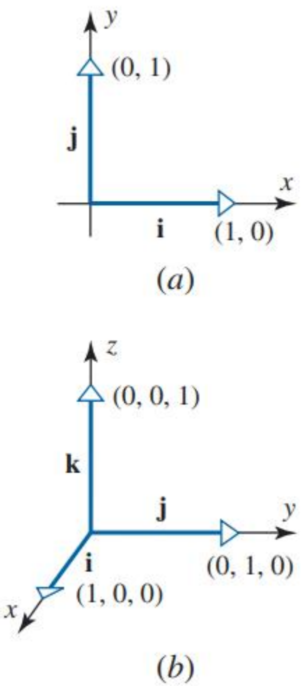


Figura 3.2.2

Conceitos Importantes

➢ Distância entre dois vetores (**u** e **v**) em R^n:

DEFINIÇÃO 2 Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ forem pontos em R^n, então denotamos a ***distância*** entre **u** e **v** por $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, que definimos por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2} \tag{11}$$

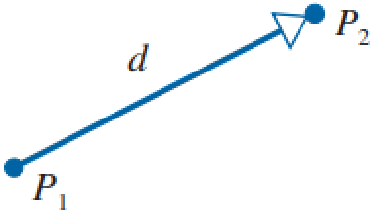
► **EXEMPLO 4** **Calculando distância em R^n**

Se

$$\mathbf{u} = (1, 3, -2, 7) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (0, 7, 2, 2)$$

então a distância entre **u** e **v** é

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2 + (-2-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{58}$$ ◄



$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\|$

Conceitos Importantes

➢ Ângulo entre **u** e **v**:

DEFINIÇÃO 3 Se **u** e **v** forem vetores não nulos em R^2 ou R^3 e se θ for o ângulo entre **u** e **v**, então o ***produto escalar*** (também denominado ***produto interno euclidiano***) de **u** e **v** é denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e definido por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta \tag{12}$$

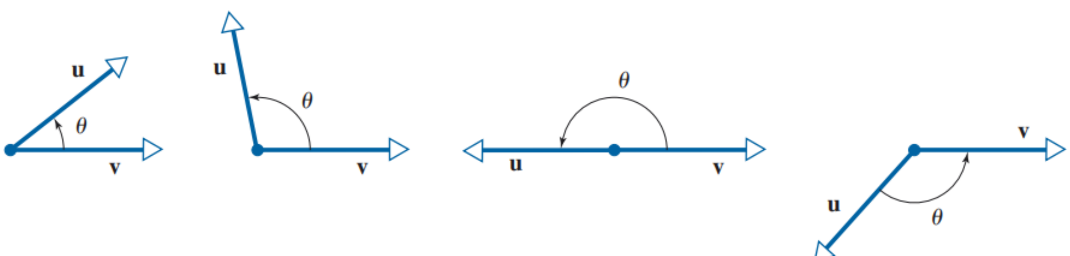
Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, definimos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ como sendo 0.

O sinal do produto escalar revela uma informação sobre o ângulo θ que pode ser obtida reescrevendo a Fórmula (12) como

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \tag{13}$$

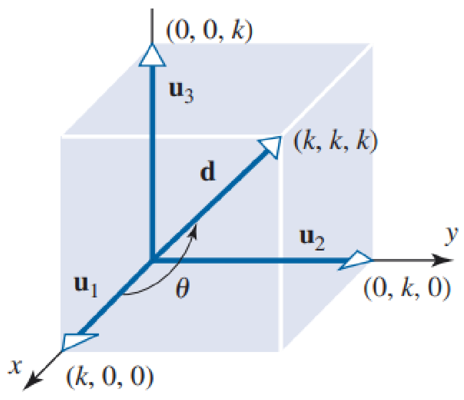
Como $0 \leq \theta \leq \pi$, segue da Fórmula (13) e das propriedades da função cosseno estudadas na Trigonometria que

- θ é agudo se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$.
- θ é obtuso se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$.
- $\theta = \pi/2$ se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.



O ângulo θ entre **u** e **v** satisfaz $0 \leq \theta \leq \pi$.

Conceitos Importantes



▲ **Figura 3.2.6**

Observe que o ângulo θ obtido no Exemplo 6 não envolve k. Por que isso é o esperado?

▶ **EXEMPLO 6 Um problema de geometria resolvido com produto escalar**

Encontre o ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas.

Solução Seja k o comprimento de uma aresta e introduza um sistema de coordenadas retangulares conforme indicado na Figura 3.2.6. Denotando $\mathbf{u}_1 = (k, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, k, 0)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 0, k)$, então o vetor

$$\mathbf{d} = (k, k, k) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

é a diagonal do cubo. Segue da Fórmula (13) que o ângulo θ entre $\mathbf{d}$ e a aresta $\mathbf{u}_1$ satisfaz

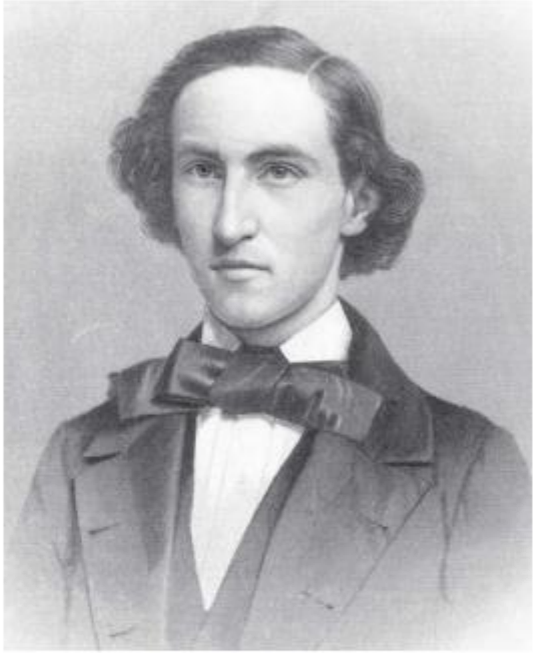
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{u}_1\|\|\mathbf{d}\|} = \frac{k^2}{(k)(\sqrt{3k^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Com a ajuda de uma calculadora, obtemos

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54{,}74^\circ$$ ◀

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right)$$

Conceitos Importantes



Josiah Willard Gibbs (1839–1903)

Nota histórica A notação de produto escalar foi introduzida pelo matemático e físico norte-americano J. Willard Gibbs num panfleto distribuído entre seus alunos da Universidade de Yale nos anos 1880. Originalmente, o produto era escrito como um ponto final na altura da linha, não centrado verticalmente como hoje em dia, sendo denominado *produto direto*. O panfleto de Gibbs acabou sendo incorporado num livro intitulado *Vector Analysis*, que foi publicado em 1901 por Gibbs com coautoria de um de seus alunos. Gibbs fez contribuições importantes na teoria dos campos de Termodinâmica e Eletromagnetismo e é geralmente considerado o maior físico norte-americano do século XIX.

[Imagem: The Granger Collection, New York]

Conceitos Importantes

DEFINIÇÃO 4 Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ forem vetores em R^n, então o ***produto escalar*** (também denominado ***produto interno euclidiano***) de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e definido por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 \cdots + u_nv_n \tag{17}$$

Em palavras, *para calcular o produto escalar (produto interno euclidiano), multiplicamos componentes correspondentes dos vetores e somamos os produtos resultantes.*

▶ EXEMPLO 7 Calculando produtos escalares usando componentes

(a) Use a Fórmula (15) para calcular o produto escalar dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ do Exemplo 5.

(b) Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ com os vetores em R^4

$$\mathbf{u} = (-1, 3, 5, 7), \quad \mathbf{v} = (-3, -4, 1, 0)$$

Solução (a) Em termo de componentes, temos $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 2, 2)$. Assim,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (0)(0) + (0)(2) + (1)(2) = 2$$

que confere com o resultado obtido no Exemplo 5.

Solução (b)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(-3) + (3)(-4) + (5)(1) + (7)(0) = -4 \quad ◀$$

Propriedades algébricas do produto escalar

No caso especial em que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ na Definição 4, obtemos a relação

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \tag{18}$$

Isso fornece a fórmula seguinte para expressar o comprimento de um vetor em termos do produto escalar.

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \tag{19}$$

Conceitos Importantes

TEOREMA 3.2.3 *Se* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *forem vetores em* R^n *e se* a *for um escalar, então*

(*a*) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = 0$

(*b*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

(*c*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

(*d*) $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

(*e*) $a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v})$

Mostremos como o Teorema 3.2.2 pode ser usado para provar a parte (*b*) sem passar para os componentes dos vetores. As outras provas são deixadas como exercícios.

Prova (b)

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) && \text{[Por simetria]} \\
&= \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} && \text{[Por distributividade]} \\
&= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} && \text{[Por simetria]} \quad \blacktriangleleft
\end{aligned}
$$

Conceitos Importantes

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right)$$

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

TEOREMA 3.2.4 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *e* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *forem vetores em* R^n, *então*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \tag{22}$$

ou, em termos de componentes,

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n| \leq (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)^{1/2}(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)^{1/2} \tag{23}$$

Conceitos Importantes

Hermann Amandus Schwarz (1843–1921)

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804–1889)

Nota histórica A desigualdade de Cauchy-Schwarz homenageia o matemático francês Augustin Cauchy (ver página 109) e o matemático alemão Hermann Schwarz. Variações dessa desigualdade aparecem em muitas situações distintas e sob vários nomes. Dependendo do contexto em que a desigualdade ocorre, pode ser chamada de desigualdade de Cauchy, desigualdade de Schwarz ou, às vezes, até desigualdade de Bunyakovsky, em reconhecimento ao matemático russo que publicou sua versão da desigualdade em 1859, cerca de 25 anos antes de Schwarz.

[Imagens: Wikipedia]

Conceitos Importantes

Uma aplicação do produto escalar ao números do ISBN

Embora o sistema tenha sido alterado recentemente, a maioria dos livros publicados nos últimos 25 anos possui um indicativo numérico utilizado internacionalmente para a identificação de livros, que consiste em dez dígitos, denominado ISBN (das iniciais em inglês, ***International Standard Book Number***). Os nove primeiros dígitos desse número estão divididos em três grupos: o primeiro grupo representa o país ou grupo de países no qual se originou o livro, o segundo identifica a editora que o publicou, e o terceiro identifica o título do próprio livro. O décimo e último dígito, denominado ***dígito de verificação***, é calculado a partir dos nove primeiros e é utilizado para garantir que não haja erro numa transmissão eletrônica do ISBN, digamos, pela Internet.

Para explicar como isso é feito, considere os nove primeiros dígitos do ISBN como um vetor **b** de R^9 e seja **a** o vetor

$$\mathbf{a} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$$

Então o dígito de verificação c é calculado pelo procedimento seguinte.

1. Calcule o produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
2. Divida $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ por 11, produzindo um resto c, que é um inteiro entre 0 e 10, inclusive. O dígito de verificação é tomado como sendo c, com a ressalva de trocar 10 por X para evitar mais de um dígito.

Por exemplo, o ISBN do Novo Aurélio Século XXI é

85-209-1010-6

com um dígito de verificação igual a 6. Isso é consistente com os nove primeiros dígitos do ISBN, pois

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \cdot (8, 5, 2, 0, 9, 1, 0, 1, 0) = 83$$

Dividindo 83 por 11, obtemos um quociente de 7 e um resto de 6, de modo que o dígito de verificação é $c = 6$. Se uma loja de uma rede de livrarias encomendar o Aurélio por meio de um pedido transmitido eletronicamente ao depósito, então o depósito pode usar esse procedimento para verificar se o dígito de verificação é consistente com os nove primeiros dígitos transmitidos e, assim, reduzir a possibilidade de erro na remessa.

Conceitos Importantes

➢ Ortogonalidade:

DEFINIÇÃO 1 Dizemos que dois vetores não nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em R^n são ***ortogonais*** (ou ***perpendiculares***) se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Também convencionamos que o vetor nulo em R^n é ortogonal a *cada* vetor em R^n. Um conjunto não vazio de vetores em R^n é denominado ***ortogonal*** se dois quaisquer de seus vetores forem ortogonais. Um conjunto ortogonal de vetores unitários é dito ***ortonormal***.

▶ EXEMPLO 1 Vetores ortogonais

(a) Mostre que $\mathbf{u} = (-2, 3, 1, 4)$ e $\mathbf{v} = (1, 2, 0, -1)$ são vetores ortogonais em R^4.

(b) Mostre que o conjunto $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ dos vetores unitários canônicos é um conjunto ortogonal em R^3.

Solução (a) Os vetores são ortogonais pois

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(-1) = 0$$

Conceitos Importantes

- Aprende-se na Geometria Analítica que tanto a reta quanto o plano são representados pela equação vetorial:

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \qquad (1)$$

em que P é um ponto arbitrário (x, y) da reta ou (x, y, z) do plano. O vetor $\overrightarrow{P_0P}$ pode ser dado em termos de componentes como

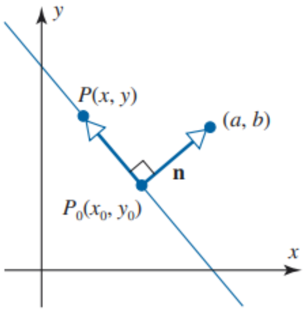
$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0,\ y - y_0) \quad \textbf{[reta]}$$

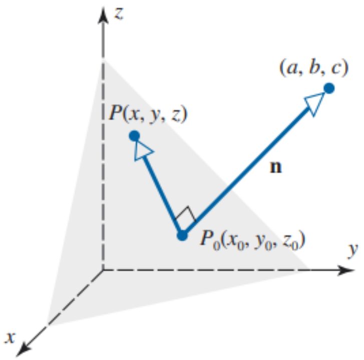
$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) \quad \textbf{[plano]}$$

Assim, a Equação (1) pode ser escrita como

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad \textbf{[reta]}} \qquad (2)$$

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad \textbf{[plano]}} \qquad (3)$$





Conceitos Importantes

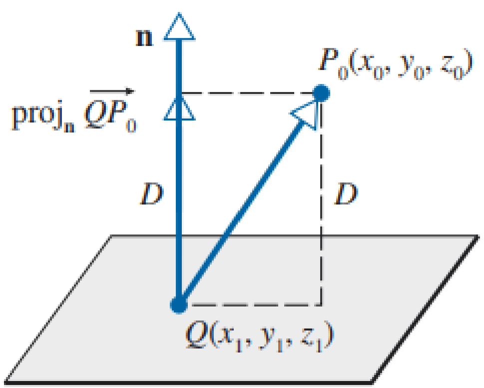
TEOREMA 3.3.4

(*a*) *Em R^2, a distância D entre o ponto $P_0(x_0, y_0)$ e a reta $ax + by + c = 0$ é*

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{15}$$

(*b*) *Em R^3, a distância D entre o ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e o plano $ax + by + cz + d = 0$ é*

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{16}$$



Distância de P_0 até o plano.

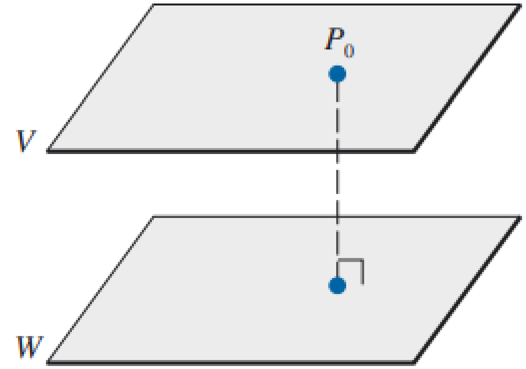


Figura 3.3.7 A distância entre os planos paralelos *V* e *W* é igual à distância entre P_0 e *W*.

Conceitos Importantes

➢ Produto vetorial:

DEFINIÇÃO 1 Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ forem vetores no espaço tridimensional, então o ***produto vetorial*** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é o vetor definido por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$

ou, em notação de determinante,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \tag{1}$$

Observação Em vez de memorizar (1), o leitor pode obter os componentes de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ como segue.

- Forme a matriz $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ de tamanho 2×3 cuja primeira linha contenha os componentes de $\mathbf{u}$ e cuja segunda linha contenha os componentes de $\mathbf{v}$.
- Para obter o primeiro componente de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, omita a primeira coluna e tome o determinante; para obter o segundo componente, omita a segunda coluna e tome o negativo do determinante e, para obter o terceiro componente, omita a terceira coluna e tome o determinante.

Conceitos Importantes

➢ Produto vetorial:

TEOREMA 3.5.1 Relações entre os produtos escalar e vetorial

Se **u**, **v** *e* **w** *forem vetores do espaço tridimensional, então*

(*a*)	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$	($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ortogonal a $\mathbf{u}$)
(*b*)	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$	($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$)
(*c*)	$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$	(Identidade de Lagrange)
(*d*)	$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$	(relação entre os produtos vetorial e escalar)
(*e*)	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$	(relação entre os produtos vetorial e escalar)

Prova (a) Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Então

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2 v_3 - v_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= u_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2 (u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3 (u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0\end{aligned}$$

Prova (b) Análoga a (*a*).

Prova (c) Como

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \tag{2}$$

e

$$\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \tag{3}$$

a prova pode ser concluída desenvolvendo os lados direitos de (2) e (3) e verificando sua igualdade.

Conceitos Importantes

- Produto vetorial:

TEOREMA 3.5.1 Relações entre os produtos escalar e vetorial

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *forem vetores do espaço tridimensional, então*

(*a*) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$ ($\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ é ortogonal a $\mathbf{u}$)

(*b*) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$ ($\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$)

(*c*) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$ (Identidade de Lagrange)

(*d*) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$ (relação entre os produtos vetorial e escalar)

(*e*) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}$ (relação entre os produtos vetorial e escalar)

TEOREMA 3.5.2 Propriedades do produto vetorial

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *forem quaisquer vetores do espaço tridimensional e a um escalar, então*

(*a*) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-(\mathbf{v}\times\mathbf{u})$

(*b*) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})+(\mathbf{u}\times\mathbf{w})$

(*c*) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w}=(\mathbf{u}\times\mathbf{w})+(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$

(*d*) $a(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=(a\mathbf{u})\times\mathbf{v}=\mathbf{u}\times(a\mathbf{v})$

(*e*) $\mathbf{u}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$

(*f*) $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$

Conceitos Importantes

➢ Produto vetorial:

▶ **EXEMPLO 1 Calculando um produto vetorial**

Encontre $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, sendo $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ e $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$.

Solução Usando (1) ou o mnemônico da observação precedente, temos

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (2, -7, -6) \quad ◀$$

O teorema a seguir dá algumas relações importantes entre os produtos escalar e vetorial, e também mostra que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ortogonal a ambos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Nota histórica A notação $A \times B$ do produto vetorial foi introduzida pelo físico e matemático norte-americano J. Willard Gibbs (ver página 134) numa série de notas de aula para seus alunos na Universidade de Yale. Essas notas apareceram publicadas pela primeira vez na segunda edição do livro *Vector Analysis*, de Edwin Wilson (1879-1964), um dos alunos de Gibbs. Originalmente, Gibbs se referia ao produto vetorial com "produto torcido."

Conceitos Importantes

➢ O produto vetorial em formato de determinante:

Também vale a pena notar que um produto vetorial pode ser representado simbolicamente no formato

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \tag{4}$$

Por exemplo, se $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$ e $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$, então

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

o que confere com o resultado obtido no Exemplo 1.

Conceitos Importantes

➢ O produto Misto:

DEFINIÇÃO 2 Se **u**, **v** e **w** forem vetores do espaço tridimensional, dizemos que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

é o ***produto misto*** de **u**, **v** e **w**.

O produto misto de $\mathbf{u} \times (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ pode ser calculado a partir da fórmula

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{7}$$

Isso segue da Fórmula (4), pois

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\ &= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_3 \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Conceiltos Importantes

➢ O produto Misto:

▶ **EXEMPLO 5** **Calculando um produto misto**

Calcule o produto misto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ dos vetores

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Solução Por (7),

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 60 + 4 - 15 = 49$$ ◀

Conceitos Importantes

➢ Interpretação geométrica de determinantes (2x2 e 3x3):

TEOREMA 3.5.4

(*a*) *O valor absoluto do determinante*

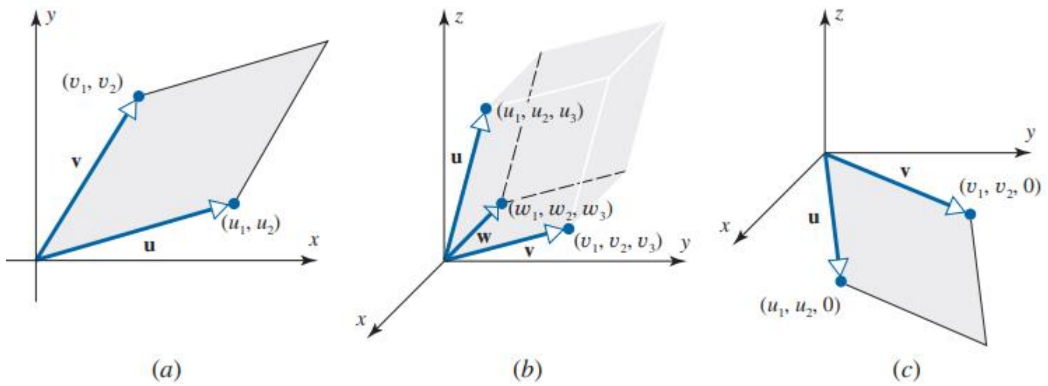
$$\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

é igual à área do paralelogramo no espaço bidimensional determinado pelos vetores $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *e* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. *(Ver Figura 3.5.7a.)*

(*b*) *O valor absoluto do determinante*

$$\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

é igual ao volume do paralelepípedo no espaço tridimensional determinado pelos vetores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *e* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. *(Ver Figura 3.5.7b.)*



Conceitos Importantes

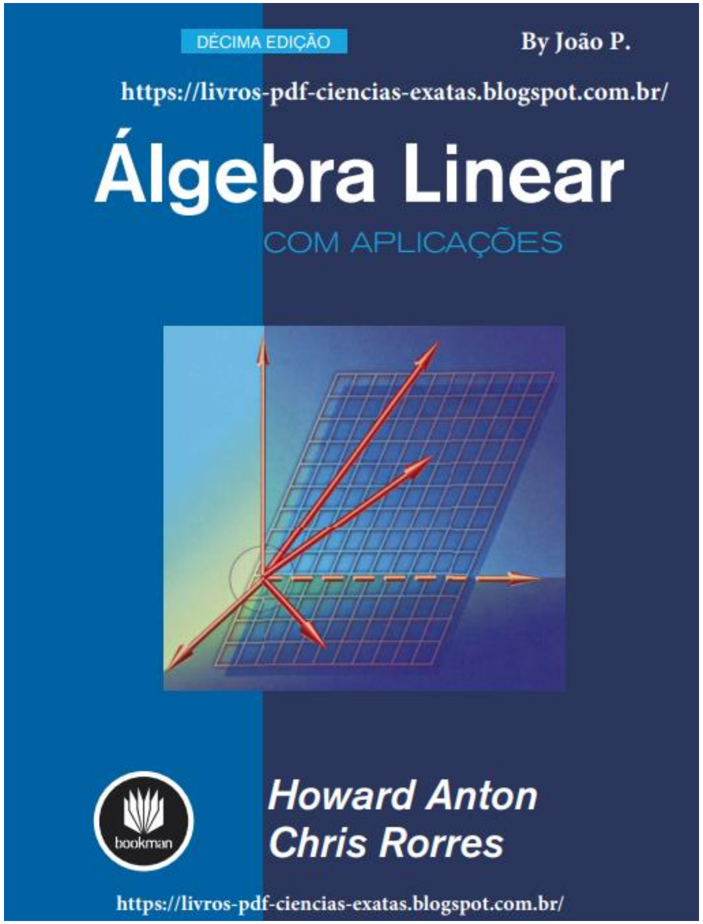
- Os vetores são coplanares:

TEOREMA 3.5.5 *Se os vetores* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *e* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ *tiverem o mesmo ponto inicial, então esses vetores são coplanares se, e só se,*

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Conceitos Importantes

Maiores informações podem ser encontradas:



Espaços Vetoriais Arbitrários

Espaços Vetoriais Reais

Espaços Vetoriais Reais

- Nesta seção, vamos usar as propriedades dos vetores em R^n **como axiomas**. Isso significa que, se um conjunto de "objetos" obedecer a essas propriedades (como adição e multiplicação por escalar), podemos tratá-los como vetores.

- "Objetos" são elementos que seguem as mesmas operações dos vetores. Se obedecerem aos axiomas dos vetores, podem ser tratados como vetores em R^n.

Espaços Vetoriais Reais

- Dos 10 axiomas apresentados, 8 são propriedades de vetores em R^n.
- É importante lembrar que não se demonstra axiomas; os axiomas são hipóteses que servem como ponto de partida para provar teoremas.

Espaços Vetoriais Reais

- Axiomas de espaço vetorial:

DEFINIÇÃO 1 Seja V um conjunto não vazio qualquer de objetos no qual estejam definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalares. Por ***adição*** entendemos uma regra que associa a cada par de objetos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V um objeto $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, denominado ***soma*** de $\mathbf{u}$ com $\mathbf{v}$; por ***multiplicação por escalar*** entendemos uma regra que associa a cada escalar a e cada objeto $\mathbf{u}$ em V um objeto $a\mathbf{u}$, denominado ***múltiplo escalar*** de $\mathbf{u}$ por a. Se os axiomas seguintes forem satisfeitos por todos os objetos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ em V e quaisquer escalares a e b, diremos que V é um ***espaço vetorial*** e que os objetos de V são ***vetores***.

Espaços Vetoriais Reais

Definição Simplificada de Espaço Vetorial:

Imagine um conjunto de "ferramentas matemáticas" (objetos), como: números, vetores, matrizes, funções, polinômios, setas, etc. Esse **conjunto é chamado de espaço vetorial** se duas operações básicas funcionarem nele:

- **Adição:** Se você pegar dois elementos do conjunto e somá-los, o resultado também está no conjunto.

Exemplo: Somar 3 e 5 (números reais) dá 8, que é um número real. Ou, se você somar duas setas (com direção e comprimento), o resultado é outra seta.

- **Multiplicação por Escalares:** Se você multiplicar qualquer elemento do conjunto por um número (chamado de escalar), o resultado também pertence ao conjunto.

Escalar: *Em termos simples, é o "número" que "escalona" o vetor, aumentando ou diminuindo o seu tamanho (ou invertendo sua direção, se for negativo), mas sem alterar a "natureza" do vetor em si.*

Espaços Vetoriais Reais

Definição Simplificada de Espaço Vetorial:

Imagine um conjunto de "ferramentas matemáticas" (objetos), como: números, vetores, matrizes, funções, polinômios, setas, etc. Esse **conjunto é chamado de espaço vetorial** se duas operações básicas funcionarem nele:

- **Adição:** Se você pegar dois elementos do conjunto e somá-los, o resultado também está no conjunto.

Exemplo: Somar 3 e 5 (números reais) dá 8, que é um número real. Ou, se você somar duas setas (com direção e comprimento), o resultado é outra seta.

- **Multiplicação por Escalares:** Se você multiplicar qualquer elemento do conjunto por um número (chamado de escalar), o resultado também pertence ao conjunto.

Exemplo: Multiplicar 4 por 2 resulta em 8, que é um número real. Multiplicar uma seta por 3 a deixa três vezes maior, mas ainda é uma seta.

Quando essas operações seguem certas regras (como comutatividade, associatividade, etc.), podemos tratar os elementos desse conjunto como vetores. Essa ideia ajuda a organizar e resolver problemas usando as mesmas propriedades dos vetores que já conhecemos.

Espaços Vetoriais Reais

- Axiomas de espaço vetorial:

1. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são objetos em V, então $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é um objeto em V.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
4. Existe um objeto $\mathbf{0}$ em V, denominado ***vetor nulo*** de V, ou ***vetor zero***, tal que $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$, com qualquer $\mathbf{u}$ em V.
5. Dado qualquer $\mathbf{u}$ em V, existe algum objeto $-\mathbf{u}$, denominado ***negativo*** de $\mathbf{u}$, tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
6. Se a for qualquer escalar e $\mathbf{u}$ um objeto em V, então $a\mathbf{u}$ é um objeto em V.
7. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
8. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$
9. $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Espaços Vetoriais Reais

- Nos exemplos seguintes, utilizamos quatro passos básicos para mostrar que um conjunto com duas operações é um espaço vetorial.

Passo 1. Identifique o conjunto V de objetos que serão os vetores.

Passo 2. Identifique as operações de adição e multiplicação por escalar.

Passo 3. Verifique a validade dos Axiomas 1 e 6; ou seja, que a soma de dois vetores em V produz um vetor em V, e que a multiplicação de um vetor em V por um escalar também produz um vetor em V. O Axioma 1 é denominado ***fechamento na adição*** e o Axioma 6, ***fechamento no produto escalar***.

Passo 4. Confirme que valem os Axiomas 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 e 10.

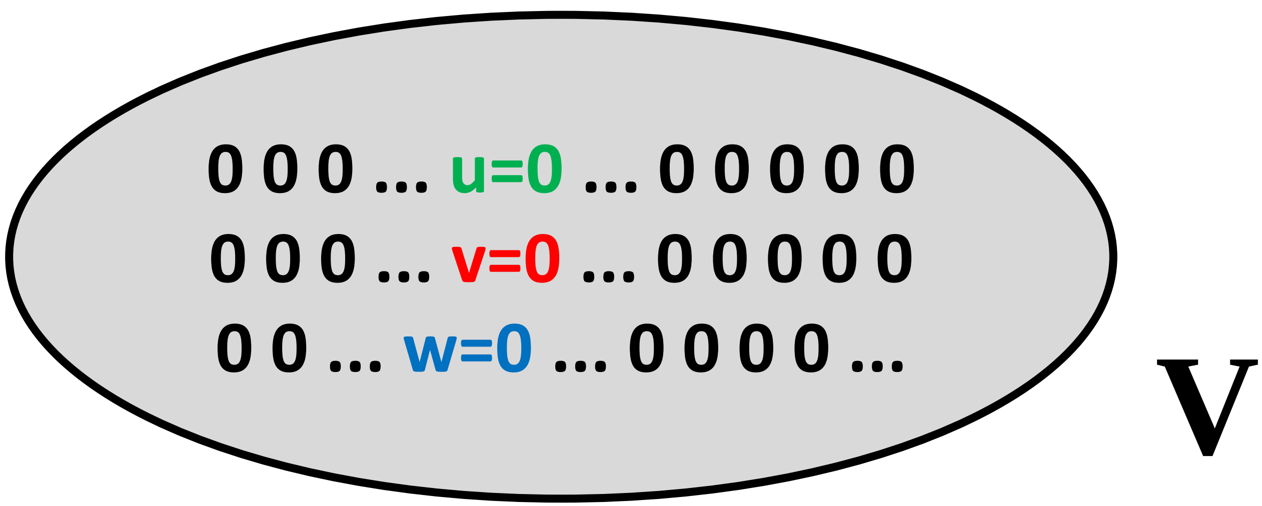
EXEMPLO 1

- EXEMPLO 1: O espaço vetorial nulo

- Seja V um conjunto que consiste num único objeto, que denotamos 0, e definamos que no conjunto V:

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad a\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

com escalares a quaisquer. É fácil verificar que todos os axiomas de espaço vetorial estão satisfeitos. Dizemos que esse é o ***espaço vetorial nulo***. ◀



EXEMPLO 1

- EXEMPLO 1: O espaço vetorial nulo

- **Passo 1:** *Identifique o conjunto V de objetos.*

Seja V um conjunto que consiste num único objeto, que denotamos $V = \{0\}$.

EXEMPLO 1

- EXEMPLO 1: O espaço vetorial nulo

- **Passo 2:** *Identifique as operações de adição e multiplicação por escalar.*

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad a\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

EXEMPLO 1

- EXEMPLO 1: O espaço vetorial nulo

- **Passo 3:** *Verifique a validade dos Axiomas 1 e 6;*

  - ✓ Axioma 1: Se **u** e **v** são objetos em **V**, então **u** + **v** é um objeto que pertence a V.

Pegando dois elementos de V = {**u**; **v**}. Como em V todo elemento é 0, logo **u** + **v** **=** 0 + 0 = 0, pertence a V.

  - ✓ Axioma 6: Se "a" for qualquer escalar e **u** um objeto em V, então a.**u** deve ser um objeto em V.

Logo a.**u** **=** a.0 = 0, que pertence a V.

EXEMPLO 1

- EXEMPLO 1: O espaço vetorial nulo

- **Passo 4:** *Confirmar os Axiomas 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 e 10.*

  - ✓ Axioma 2: **u** + **v** = **v** + **u**.

u + **v** = 0 + 0 = 0 e **v** + **u** = 0 + 0 = 0, logo **u** + **v** = **v** + **u**, **ou seja** 0 = 0; assim, a soma é comutativa.

EXEMPLO 1

- EXEMPLO 1: O espaço vetorial nulo

- **Passo 4:** *Confirmar os Axiomas 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 e 10.*

  - ✓ Axioma 3: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.

$$0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0$$
$$0 + (0) = (0) + 0$$
$$0 + 0 = 0 + 0$$
$$0 = 0$$

(Portanto a adição é associativa)

EXEMPLO 1

- ✓ Axioma 4: Existe um objeto **0** em V, denominado ***vetor nulo*** de V, ou ***vetor zero***, tal que **0** + **u** = **u** + **0** = **u**, com qualquer **u** em V.

$$0 + \mathbf{u} = \mathbf{u} + 0$$

$$0 + 0 = 0 + 0$$

$$0 = 0 = \mathbf{u}$$

EXEMPLO 1

- ✓ Axioma 5: Dado qualquer **u** em V, existe algum objeto **-u**, denominado negativo de **u**, tal que **u** + (- **u**) = (- **u**) + **u** = 0.

$$\mathbf{u} + (\mathbf{-u}) = (\mathbf{-u}) + \mathbf{0}$$

$$0 + 0 = 0 + 0$$

$$0 = 0 = \mathbf{u}$$

Obs.: No espaço vetorial nulo V={0}, o único elemento é 0!
Ou seja, -**u**=0

EXEMPLO 1

✓ Axioma 7: $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$.

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$$

$$a(0 + 0) = a0 + a0$$

$$a0 = 0 + 0$$

$$0 = 0$$

EXEMPLO 1

- ✓ Axioma 8: $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$.

$$(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$$

$$\alpha\mathbf{u} = 0 + 0$$

$$0 = 0$$

Obs.: Por definição, a soma entre escalares (a + b) resulta em um escalar α, e por definição, no problema, todo escalar $\alpha \cdot 0 = 0$.

EXEMPLO 1

- ✓ Axioma 9: $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$.

$$a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$$

$$a(b0) = \alpha 0$$

$$a0 = \alpha 0$$

$$0 = 0$$

Obs.: Por definição, a multiplicação entre escalares (*ab)* resulta em um escalar α, e por definição, no problema, todo escalar a.0 = α·0 = 0.

EXEMPLO 1

- ✓ Axioma 10: $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$a\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$0 = 0$$

Obs.: Por definição, 1 é escalar.
Logo por definição, no problema,
todo escalar a.0 = 0.

EXEMPLO INCOMUM

► EXEMPLO 8 Um espaço vetorial incomum

Seja V o conjunto dos números reais positivos e defina as operações de V por

$$u + v = uv \quad \text{[A adição vetorial é a multiplicação numérica]}$$

$$au = u^a \quad \text{[A multiplicação por escalar é a exponenciação numérica]}$$

Assim, por exemplo, $1 + 1 = 1$ e $(2)(1) = 1^2 = 1$. Muito estranho, mas mesmo assim o conjunto V com essas operações satisfaz os 10 axiomas de espaço vetorial e é, portanto, um espaço vetorial. Confirmamos os Axiomas 4, 5 e 7, deixando os demais como exercício.

- Axioma 4 – O vetor zero nesse espaço é o número 1 (ou seja, $\mathbf{0} = 1$), pois

$$u + 1 = u \cdot 1 = u$$

- Axioma 5 – O negativo de um vetor u é seu recíproco (ou seja, $-u = 1/u$), pois

$$u + \frac{1}{u} = u\left(\frac{1}{u}\right) = 1\ (= \mathbf{0})$$

- Axioma 7 – Temos $a(u + v) = (uv)^a = u^a v^a = (au) + (av)$. ◄

EXEMPLO 2

- EXEMPLO 2: *Para o item a seguir considere:*

- Seja $V = \{(x, y, z)$, onde $x = 1, y \in \mathbb{R}, z > 0\}$

e suponha que as operações de adição e multiplicação por escalar desse espaço vetorial são, respectivamente:

- $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (1, y_1, z_1) + (1, y_2, z_2) = (1, y_1 + y_2, z_1 . z_2)$
- $\mathrm{a}(1, y, z) = (1, ay_1, z_1{}^a)$

EXEMPLO 2

- EXEMPLO 2:

- **Passo 1:** *Identifique o conjunto V de objetos.*

Seja V = $\{(x, y, z)$, onde $x = 1, y \in \mathbb{R}, z > 0\}$

EXEMPLO 2

❖ EXEMPLO 2:

➢ **Passo 2:** *Identifique as operações de adição e multiplicação por escalar.*

- $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (1, y_1, z_1) + (1, y_2, z_2) = (1, y_1 + y_2, z_1 . z_2)$
- $\mathrm{a}(1, y, z) = (1, ay_1, z_1^{\,a})$

EXEMPLO 2

❖ EXEMPLO 2: **Passo 3:** *Verifique a validade dos Axiomas 1 e 6;*

✓ Axioma 1: Se **u** e **v** são objetos em **V**, então **u** + **v** é um objeto que pertence a V.

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (1, y_1, z_1) + (1, y_2, z_2) = (1, y_1 + y_2, z_1 . z_2)$$

1 pertence a V

A soma de dois números reais (y_1 + y_2) resulta em um número real, logo (y_1 + y_2) pertence a V

A multiplicação de dois números reais positivos ($z_1 . z_2$) resulta em um número real positivo, logo (z_1 + z_2) = $z_1 . z_2$ pertence a V

Seja V = {(x, y, z), onde $x = 1$, $y \in \mathbb{R}$, $z > 0$}

EXEMPLO 2

- EXEMPLO 2: **Passo 3:** *Verifique a validade dos Axiomas 1 e 6;*

  - ✓ Axioma 6: Se "a" for qualquer escalar e **u** um objeto em V, então a.**u** deve ser um objeto em V.

$$a(1, y, z) = (1, ay_1, z_1^a)$$

x=1 pertence a V

A multiplicação de um escalar por um numero real gera um numero real, logo $a(y_1)$ pertence a V

A número real positivo (z_1) elevado a um escalar resulta em um número real positivo, logo (z_1^a) pertence a V

Seja V = {(x, y, z), onde $x = 1$, $y \in \mathbb{R}$, $z > 0$}

EXEMPLO 2

- EXEMPLO 2:

- **Passo 4:** *Confirmar os Axiomas 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 e 10.*

  - ✓ Axioma 2: **u** + **v** = **v** + **u**.

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u})$$

$$(1, y_1, z_1) + (1, y_2, z_2) = (1, y_2, z_2) + (1, y_1, z_1)$$

$$(1, y_1 + y_2, z_1 . z_2) = (1, y_2 + y_1, z_2 . z_1)$$

A ordem das somas e do produto não altera resultado, logo:

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u})$$

Seja V = $\{(x, y, z)$, onde $x = 1, y \in \mathbb{R}, z > 0\}$

EXEMPLO 2

- EXEMPLO 2:

- **Passo 4:** *Confirmar os Axiomas 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 e 10.*

  - ✓ Axioma 3: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

$$(1, y_1, z_1) + ((1, y_2, z_2) + (1, y_3, z_3)) = ((1, y_1, z_1) + (1, y_2, z_2)) + (1, y_3, z_3)$$

$$(1, y_1, z_1) + (1, y_2 + y_3, z_2 . z_3) = (1, y_1 + y_2, z_1 . z_2) + (1, y_3, z_3)$$

$$(1, y_1 + y_2 + y_3, z_1 . z_2 . z_3) = (1, y_1 + y_2 + y_3, z_1 . z_2 . z_3)$$

Logo:

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

EXEMPLO 2

- ✓ Axioma 4: Existe um objeto **0** em V, denominado ***vetor nulo*** de V, ou ***vetor zero***, tal que **0** + **u** = **u** + **0** = **u**, com qualquer **u** em V.

$$\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0}$$

$$(1, 0, 1) + (1, y_1, z_1) = (1, y_1, z_1) + (1, 0, 1)$$

$$(1, 0+y_1, 1.z_1) = (1, y_1 + 0, z_1.1)$$

$$(1, y_1, z_1) = (1, y_1 , z_1) = u$$

Elemento NULO: O vetor zero nesse espaço

- ✓ Axioma 5: Dado qualquer **u** em V, existe algum objeto **-u**, denominado negativo de **u**, tal que **u** + (**- u**) = (**- u**) + **u** = 0.

Elemento Oposto

$$\mathbf{u} + (\mathbf{-u}) = (\mathbf{-u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$(1, y_1, z_1) + (1, -y_1, 1/z_1) = (1, -y_1, 1/z_1) + (1, y_1, z_1)$$

$$(1, y_1 + (-y_1), z_1/z_1) = (1, (-y_{1)} + y_1 , z_1/z_1)$$

$$(1, 0, 1) = (1, 0 , 1) = \mathbf{0}$$

EXEMPLO 2

- ✓ Axioma 7: a(**u** + **v**) = a**u** + a**v**.

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$$
$$a((1, y_1, z_1) + (1, y_2, z_2)) = a(1, y_1, z_1) + a\,(1, y_2, z_2))$$
$$a\,(1, y_1 + y_2, z_1.\, z_2) = (1, ay_1, z_1^a) + (1, ay_2, z_2^a)$$
$$(1, a(y_1 + y_2), (z_1\, z_2)^a) = (1, ay_1 + ay_2, z_1^a\, z_2^a)$$
$$(1, ay_1 + ay_2, z_1^a\, z_2^a) = (1, ay_1 + ay_2, z_1^a\, z_2^a)$$

- ✓ Axioma 8: (a + b)**u** = a**u** + b**u**.

$$(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$$
$$(a + b)\,(1, y_1, z_1) = a(1, y_1, z_1) + b(1, y_1, z_1)$$
$$(1, (a+b)y_1, z_1^{(a+b)}) = (1, ay_1, z_1^a) + (1, by_1, z_1^b)$$
$$(1, (a+b)y_1, z_1^{(a+b)}) = (1, ay_1 + by_1, z_1^a\, z_1^b)$$
$$(1, (a+b)y_1, z_1^{(a+b)}) = (1, (a+b)y_1, z_1^{a+b})$$

EXEMPLO 2

- ✓ Axioma 9: $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$.

$$a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$$

$$a(b\,(1, y_1, z_1)\,) = (ab)\,(1, y_1, z_1)$$

$$a(1, by_1, z_1^{b}) = (1, (ab)y_1, z_1^{(ab)})$$

$$(1, aby_1, z_1^{ab}) = (1, aby_1, z_1^{ab})$$

- ✓ Axioma 10: $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$1\,(1, y_1, z_1) = (1, y_1, z_1)$$

$$(1, 1y_1, z_1^{1}) = (1, y_1, z_1)$$

Elemento unitário

Outros Exemplos

EXEMPLO 7 Um conjunto que não é um espaço vetorial

Seja $V = R^2$ e defina as operações de adição e multiplicação por escalar como segue: se $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, defina

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

e se a for um número real qualquer, defina

$$a\mathbf{u} = (au_1, 0)$$

Por exemplo, se $\mathbf{u} = (2, 4)$, $\mathbf{v} = (-3, 5)$ e $a = 7$, então

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2 + (-3), 4 + 5) = (-1, 9)$$
$$a\mathbf{u} = 7\mathbf{u} = (7 \cdot 2, 0) = (14, 0)$$

A adição é a operação de adição padrão em R^2, mas a operação de multiplicação por escalar não é. Nos exercícios, pedimos para o leitor mostrar que os nove primeiros axiomas de espaço vetorial estão satisfeitos. No entanto, existem certos vetores com os quais o Axioma 10 falha. Por exemplo, se $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ for tal que $u_2 \neq 0$, então

$$1\mathbf{u} = 1(u_1, u_2) = (1 \cdot u_1, 0) = (u_1, 0) \neq \mathbf{u}$$

Assim, V não é um espaço vetorial com as operações fornecidas. ◄

Outros Exemplos

EXEMPLO 2 **R^n é um espaço vetorial**

Seja $V = R^n$ e defina as operações de espaço vetorial em V como as operações conhecidas de adição e multiplicação por escalar de ênuplas, ou seja,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$
$$a\mathbf{u} = (au_1, au_2, \ldots, au_n)$$

O conjunto $V = R^n$ é fechado na adição e na multiplicação por escalar, porque as operações que acabamos de definir produzem ênuplas, e essas operações satisfazem os Axiomas 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 e 10 por virtude do Teorema 3.1.1. ◀

Outros Exemplos

▶ EXEMPLO 4 O espaço vetorial das matrizes 2 × 2

Seja V o conjunto de todas as matrizes 2×2 com entradas reais e tomemos as operações de espaço vetorial em V como sendo as operações usuais de adição matricial e a multiplicação matricial por escalar, ou seja,

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$a\mathbf{u}=a\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} au_{11} & au_{12} \\ au_{21} & au_{22} \end{bmatrix}$$

O conjunto V é fechado na adição e na multiplicação por escalar, porque as operações matriciais usadas nessa definição produzem matrizes 2×2 como resultado final. Assim, resta confirmar que valem os Axiomas 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 e 10. Algumas destas são propriedades conhecidas de matrizes. Por exemplo, o Axioma 2 segue do Teorema 1.4.1*a*, pois

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

Analogamente, os Axiomas 3, 7, 8 e 9 seguem das partes (*b*), (*h*) (*j*) e (*e*), respectivamente, daquele teorema (verifique). Para conferir, restam os Axiomas 4, 5 e 10.

Para confirmar que o Axioma 4 está satisfeito, devemos encontrar uma matriz $\mathbf{0}$ de tamanho 2×2 com a qual $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ com cada matriz 2×2 em V. Podemos fazer isso tomando

$$\mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Outros Exemplos

Com essa definição,

$$\mathbf{0} + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

e, analogamente, $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. Para verificar que o Axioma 5 vale, devemos mostrar que cada objeto $\mathbf{u}$ em V tem um negativo $-\mathbf{u}$ em V tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ e $(-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Isso pode ser feito definindo o negativo de $\mathbf{u}$ como

$$-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$$

Com essa definição,

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

e, analogamente, $(-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Finalmente, o Axioma 10 é válido porque

$$1\mathbf{u} = 1\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Outros Exemplos

► **EXEMPLO 6** **O espaço vetorial das funções reais**

Seja V o conjunto das funções reais que estão definidas em cada x do intervalo $(-\infty, \infty)$. Se $\mathbf{f} = f(x)$ e $\mathbf{g} = g(x)$ forem duas funções em V e se a for um escalar qualquer, definimos as operações de adição e multiplicação por escalar por

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = f(x) + g(x) \tag{2}$$

$$(a\mathbf{f})(x) = af(x) \tag{3}$$

Uma maneira de pensar nessas operações é interpretar os números $f(x)$ e $g(x)$ como "componentes" de $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ no ponto x, caso em que as Equações (2) e (3) afirmam que duas funções são somadas somando os componentes correspondentes, e que uma função é multiplicada por um escalar multiplicando cada componente por esse escalar, exatamente como em R^n e R^∞. Essa ideia está ilustrada nas partes (a) e (b) da Figura 4.1.1. O conjunto V com essas operações é denotado pelo símbolo $F(-\infty, \infty)$. Podemos provar que isso é um espaço vetorial como segue.

PROPRIEDADES DE VETORES

- *Teorema sobre espaços vetoriais arbitrários:*

TEOREMA 4.1.1 *Sejam V um espaço vetorial,* $\mathbf{u}$ *um vetor em V e a um escalar. Então*

(*a*) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$

(*b*) $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$

(*c*) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

(*d*) *Se* $a\mathbf{u} = \mathbf{0}$, *então* $a = 0$ *ou* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Subespaços

Subespaços

- Um subconjunto W de um espaço vetorial V é denominado **subespaço** de V se W for um espaço vetorial por si só com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V.

Subespaços

Em geral, devemos verificar os 10 axiomas de espaço vetorial para mostrar que um conjunto W com duas operações forma um espaço vetorial.

Subespaços

No entanto, se W for parte de um espaço vetorial V conhecido, então certos axiomas não precisam ser verificados

Subespaços

- Os axiomas que **NÃO** são herdados por W são:

Axioma 1 – Fechamento na adição

Axioma 4 – Existência de vetor zero em W

Axioma 5 – Existência de negativo em W para cada vetor em W

Axioma 6 – Fechamento na multiplicação por escalar

Subespaços

- Contudo, segue do teorema seguinte que se os Axiomas 1 e 6 valerem em W, então os ***Axiomas 4 e 5 valem em W como uma consequência*** e, portanto, não precisam ser verificados!

Axioma 1 – Fechamento na adição

~~Axioma 4 – Existência de vetor zero em *W*~~

~~Axioma 5 – Existência de negativo em *W* para cada vetor em *W*~~

Axioma 6 – Fechamento na multiplicação por escalar

TEOREMA 4.2.1 *Se W for um conjunto de um ou mais vetores num espaço vetorial V, então W é um subespaço de V se, e só se, as condições seguintes forem válidas.*

(*a*) *Se* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *forem vetores em W, então* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *está em W.*

(*b*) *Se a for um escalar qualquer e* $\mathbf{u}$ *algum vetor de W, então* $a\mathbf{u}$ *está em W.*

EXEMPLO 3

- Seja V um espaço vetorial $V = \{(x, y, z)$, onde $x = 1$, $y \in \mathbb{R}$, $z > 0\}$

e suponha que as operações de adição e multiplicação por escalar desse espaço vetorial são, respectivamente:

- $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (1, y_1, z_1) + (1, y_2, z_2) = (1, y_1 + y_2, z_1 . z_2)$
- $a(1, y, z) = (1, ay_1, z_1^{a})$

Verifique se o subconjunto $S = \{(x, y, z) \in V, z = 2^{y}\}$ é subespaço vetorial de V.

EXEMPLO 3

Verifique se o subconjunto S = $\{(x, y, z) \in V, z = 2^y\}$ é subespaço vetorial de V.

Seja V = $\{(x, y, z)$, onde $x = 1, y \in \mathbb{R}, z > 0\}$

✓ Axioma 1: Se **u** e **v** são objetos em **V**, então **u** + **v** é um objeto que pertence a V.

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (1, y_1, 2^{y1}) + (1, y_2, 2^{y2}) = (1, y_1 + y_2, 2^{y1} . 2^{y1})$$

1 pertence a V

A soma de dois números reais (y_1 + y_2) resulta em um número real, logo (y_1 + y_2) pertence a V

A multiplicação de dois números reais positivos (2^{y1}) resulta em um número real positivo, logo (2^{y1}. 2^{y1} pertence a V

EXEMPLO 3

Verifique se o subconjunto S = $\{(x, y, z) \in V, z = 2^y\}$ é subespaço vetorial de V.

Seja V = $\{(x, y, z)$, onde $x = 1, y \in \mathbb{R}, z > 0\}$

- ✓ Axioma 6: Se "a" for qualquer escalar e **u** um objeto em V, então a.**u** deve ser um objeto em V.

$$a(1, y, 2^y) = (1, ay_1, 2^{ya})$$

x=1 pertence a V

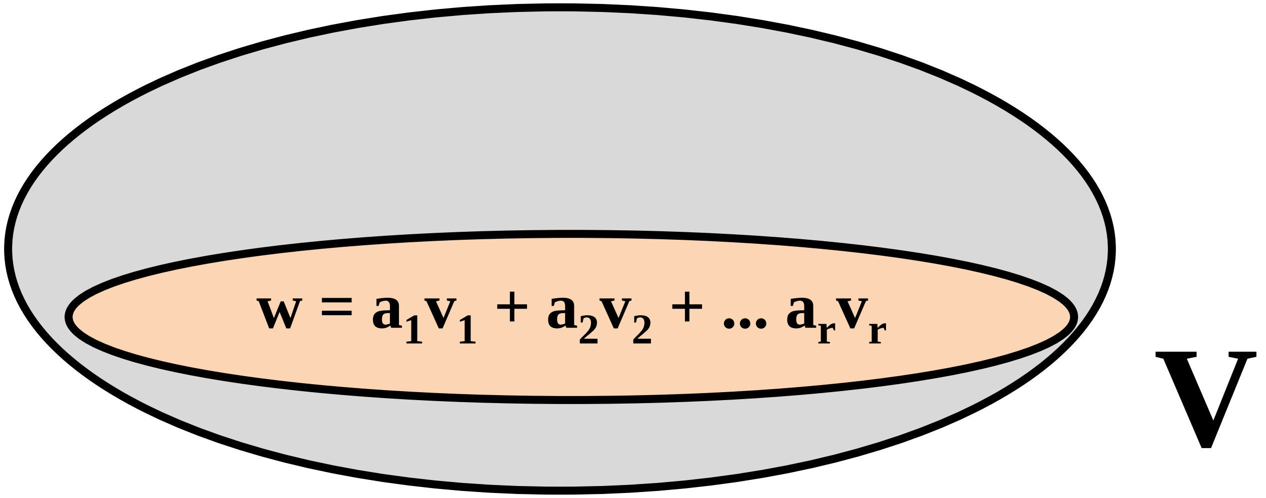
A multiplicação de um escalar por um numero real gera um numero real, logo $a(y_1)$ pertence a V

A número real positivo elevado a um escalar resulta em um número real positivo, logo $(z_1{}^a)$ pertence a V

COMBINAÇÃO LINEAR DOS VETORES

COMBINAÇÃO LINEAR DOS VETORES

- Às vezes, queremos encontrar o "menor" subespaço de um espaço vetorial V que contenha todos os vetores de algum conjunto que nos interesse.

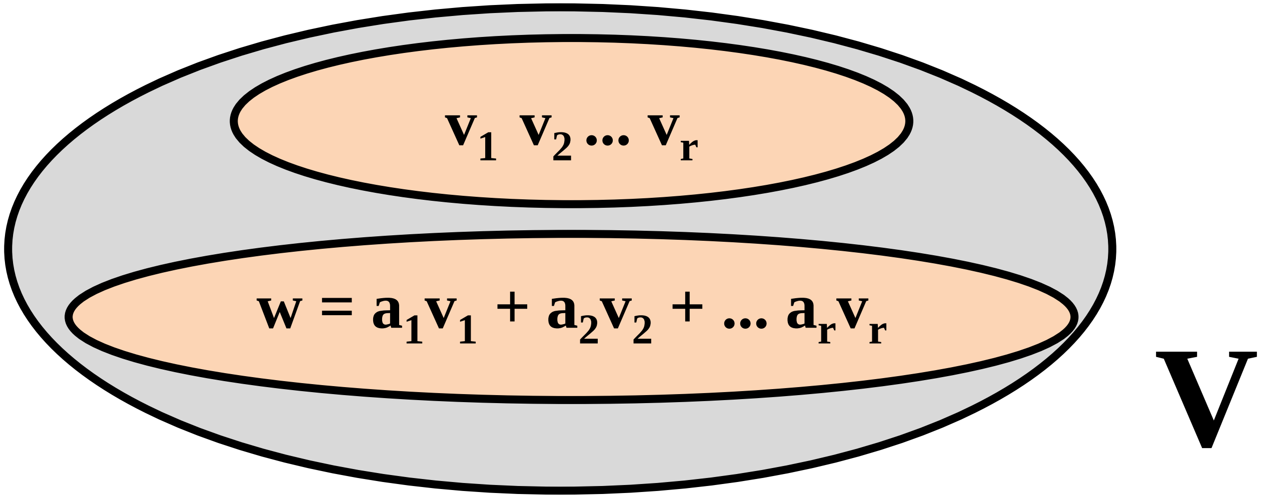


COMBINAÇÃO LINEAR DOS VETORES

DEFINIÇÃO 2 Dizemos que um vetor $\mathbf{w}$ num espaço vetorial V é uma ***combinação linear*** dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ em V se $\mathbf{w}$ puder ser expresso na forma

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_r\mathbf{v}_r \tag{2}$$

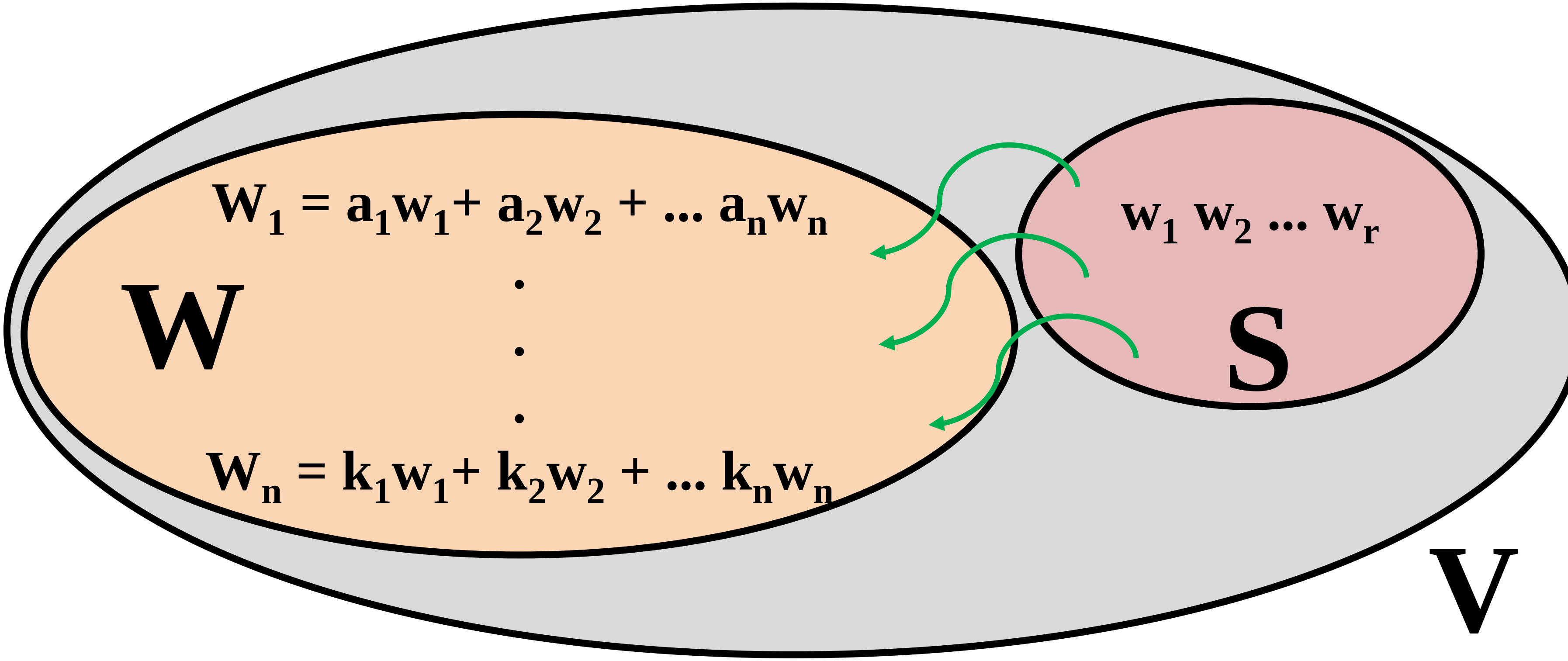
em que $a_1, a_2, \ldots, a_r$ são escalares. Esses escalares são denominados ***coeficientes*** da combinação linear.



Subespaço W Gerado por S (W=ger(S))

DEFINIÇÃO 3 Dizemos que o subespaço de um espaço vetorial V que é formado com todas as combinações lineares possíveis de vetores de um conjunto não vazio S é ***gerado* por** S, e dizemos que os vetores em S ***geram*** esse subespaço. Se $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\}$, denotamos o gerado de S por

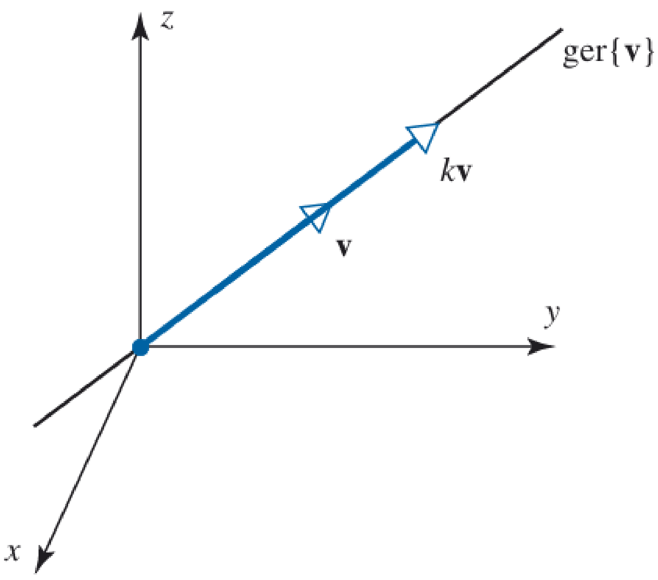
$$\text{ger}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\} \quad \text{ou} \quad \text{ger}(S)$$



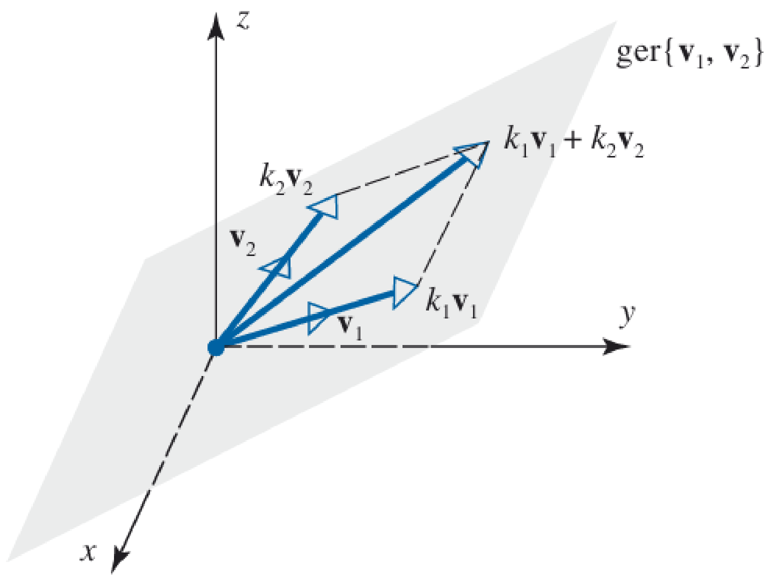
Subespaço W Gerado por S (W=ger(S))

DEFINIÇÃO 3 Dizemos que o subespaço de um espaço vetorial V que é formado com todas as combinações lineares possíveis de vetores de um conjunto não vazio S é ***gerado*** por S, e dizemos que os vetores em S ***geram*** esse subespaço. Se $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\}$, denotamos o gerado de S por

$$\text{ger}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\} \quad \text{ou} \quad \text{ger}(S)$$



(*a*) Ger{$\mathbf{v}$} é a reta pela origem determinada por $\mathbf{v}$.



(*b*) Ger{$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$} é o plano pela origem determinado por $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

EXEMPLO 4

Considere os vetores **u** = (1, 2, 1) e **v** = (6, 4, 2). Mostre que **w** = (9, 2, 7) é uma combinação linear de **u** e **v** e que **w'** = (4, -1, 8) não é uma combinação linear de **u** e **v**.

EXEMPLO 4

Considere os vetores **u** = (1, 2, 1) e **v** = (6, 4, 2). Mostre que **w** = (9, 2, 7) é uma combinação linear de **u** e **v** e que **w'** = (4, -1, 8) não é uma combinação linear de **u** e **v**.

Para que **w** seja uma combinação linear de **u** e **v**, devem existir escalares k_1 e k_2 tais que **w** = k_1**u** e k_2**v**, ou seja,

$$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

$$(9, 2, 7) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

EXEMPLO 4

Igualando componentes correspondentes, obtemos:

$$
\begin{aligned}
k_1 + 6k_2 &= 9 \\
2k_1 + 4k_2 &= 2 \\
-k_1 + 2k_2 &= 7
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

EXEMPLO 4

Analogamente, para que **w'** seja uma combinação linear de **u** e **v**, devem existir escalares k_1 e k_2 tais que **w' =** k_1**u** e k_2**v,** ou seja:

$$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

$$(4, -1, 8) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

EXEMPLO 4

Igualando componentes correspondentes, obtemos:

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 4 \\ 2k_1 + 4k_2 &= -1 \\ -k_1 + 2k_2 &= 8 \end{aligned}$$

Esse sistema de equações é inconsistente, de modo que não existem tais escalares k_1 e k_2. Consequentemente, **w**' não é uma combinação linear de **u** e **v**.

EXEMPLO 5

Determine se $\mathbf{v_1} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v_2} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v_3} = (2, 1, 3)$ geram o espaço vetorial R^3.

EXEMPLO 5

Determine se $\mathbf{v_1} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v_2} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v_3} = (2, 1, 3)$ geram o espaço vetorial R^3.

Devemos determinar se um vetor arbitrário $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ em R^3 pode ser expresso como uma combinação linear.

$$\mathbf{b} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

EXEMPLO 5

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1, 1, 2) + k_2(1, 0, 1) + k_3(2, 1, 3)$$

$$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + k_2 + 2k_3, k_1 + k_3, 2k_1 + k_2 + 3k_3)$$

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + 2k_3 &= b_1 \\ k_1 \qquad + \ \ k_3 &= b_2 \\ 2k_1 + k_2 + 3k_3 &= b_3 \end{aligned}$$

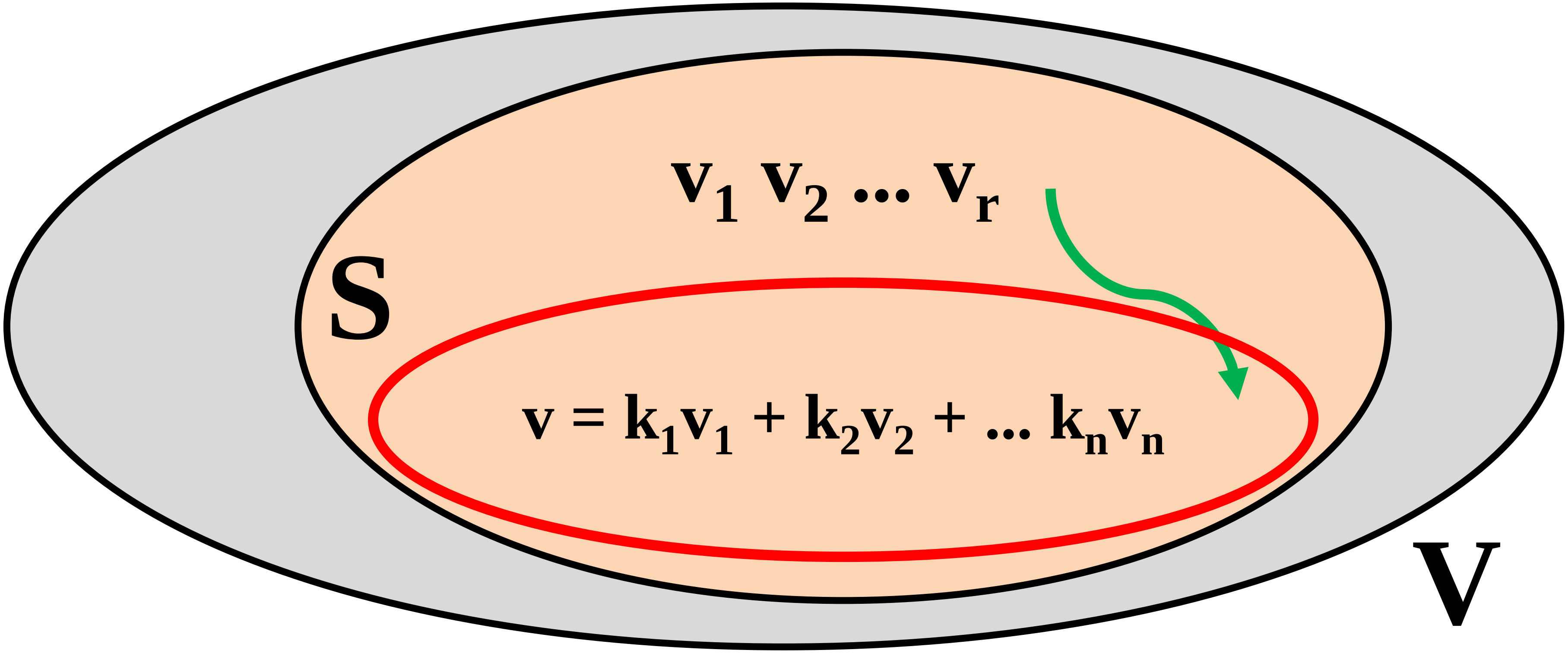
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Como o det(A) = 0, o *sistema NÃO é POSSIVEL e Determinado* (tem mais que uma solução), logo v_1, v_2 e v_3 não geram R^3!

Independência Linear (LI) e Dependência Linear (LD)

CONJUNTO LI E LD

Uma das nossas tarefas nesta seção é desenvolver maneiras de descobrir se um vetor ou mais de um conjunto S é uma combinação linear dos demais vetores em S.



CONJUNTO LI E LD

DEFINIÇÃO 1 Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ for um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V, então a equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

tem uma solução, pelo menos, a saber,

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \ldots, \quad k_r = 0$$

Dizemos que essa é a solução trivial. Se essa for a única solução, dizemos que S é um ***conjunto linearmente independente***. Se existem outras soluções além da trivial, dizemos que S é um ***conjunto linearmente dependente***.

Se o $\det(A) = 0$, o *sistema NÃO é POSSIVEL e Determinado* (tem mais que uma solução), logo *será* ***LD***.

Se o $\det(A) \neq 0$, o *sistema é POSSIVEL e Determinado* (tem uma só solução), e se for a trivial, logo *será* ***LI***.

CONJUNTO LI E LD

De forma bem simples:

- **Conjunto Linearmente Independentes (LI):** Nenhum elemento de S pode ser escrito como combinação de todos os outros. Ou seja, não existe uma forma de somar múltiplos de alguns deles para obter outro do grupo.

- **Vetores Linearmente Dependentes (LD):** Há pelo menos um elemento que pode ser escrito como combinação dos outros. Isso significa que há "repetição de informação", ou seja, um vetor não adiciona nada de novo ao conjunto.

EXEMPLO 1 – (LI / LD)

Determine se os vetores são linearmente independentes ou dependentes em R^3.

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

EXEMPLO 1 – (LI / LD)

Determine se os vetores são linearmente independentes ou dependentes em R^3.

Solução A dependência ou independência linear desses vetores é determinada pela existência ou não de soluções não triviais da equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \tag{3}$$

ou, equivalentemente, de

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

Igualando componentes correspondentes dos dois lados, obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

EXEMPLO 1 – (LI / LD)

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como o det(A) = 0, o *sistema NÃO é POSSIVEL e Determinado* (tem mais que uma solução), logo ***existem soluções não triviais e os vetores são LD***!

EXEMPLO 2 – (LI / LD)

Determine se os polinômios são linearmente independentes ou dependentes em P_2.

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \quad \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

EXEMPLO 2 – (LI / LD)

Determine se os polinômios são linearmente independentes ou dependentes em P_2.

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \quad \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

Essa equação pode ser rescrita como

$$k_1(1 - x) + k_2(5 + 3x - 2x^2) + k_3(1 + 3x - x^2) = 0$$

ou, equivalentemente, como

$$(k_1 + 5k_2 + k_3) + (-k_1 + 3k_2 + 3k_3)x + (-2k_2 - k_3)x^2 = 0$$

EXEMPLO 2 – (LI / LD)

Essa equação pode ser rescrita como

$$k_1(1 - x) + k_2(5 + 3x - 2x^2) + k_3(1 + 3x - x^2) = 0$$

ou, equivalentemente, como

$$(k_1 + 5k_2 + k_3) + (-k_1 + 3k_2 + 3k_3)x + (-2k_2 - k_3)x^2 = 0$$

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + k_3 &= 0 \\ -k_1 + 3k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_2 - k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Como o $\det(A) = 0$, o *sistema NÃO é POSSIVEL e Determinado* (tem mais que uma solução), Assim, o conjunto $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ é linearmente dependente!

EXEMPLO 3 – (LI / LD)

Determine se as funções são linearmente independentes ou dependentes em $F(-\infty, \infty)$.

As funções $\mathbf{f}_1 = x$ e $\mathbf{f}_2 = \text{sen}\, x$

$$k_1 x + k_2 \text{sen}(x) = 0$$

O sistema tem apenas a solução trivial ($k_1 = k_2 = 0$). Assim, o conjunto $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ é linearmente independente!

EXEMPLO 3 – (LI / LD)

Determine se as funções são linearmente independentes ou dependentes em $F(-\infty, \infty)$.

$$\mathbf{g}_1 = \operatorname{sen} 2x \qquad \mathbf{g}_2 = \operatorname{sen} x \cos x$$

$$k_1 sen(2x) + k_2 \operatorname{sen}(x) \cos(x) = 0$$

$$k_1 2sen(x)cos(x) + k_2 \operatorname{sen}(x) \cos(x) = 0$$

$$k_1 = -\, k_2/2$$

O sistema tem além da solução trivial ($k_1 = k_2 = 0$) tem outra solução ($k_1 = -k_2/2$). Assim, o conjunto $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ é linearmente dependente!

CONJUNTO LI E LD – Wronskiano

DEFINIÇÃO 2 Se $\mathbf{f}_1 = f_1(x), \mathbf{f}_2 = f_2(x), \ldots, \mathbf{f}_n = f_n(x)$ forem funções $n - 1$ vezes deriváveis no intervalo $(-\infty, \infty)$, então o determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

é denominado ***wronskiano*** de $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

O que isso significa?

- Se $W(x) \neq 0$ para pelo menos um valor de x, as funções são **linearmente independentes (LI)**.

CONJUNTO LI E LD – Wronskiano

DEFINIÇÃO 2 Se $\mathbf{f}_1 = f_1(x), \mathbf{f}_2 = f_2(x), \ldots, \mathbf{f}_n = f_n(x)$ forem funções $n-1$ vezes deriváveis no intervalo $(-\infty, \infty)$, então o determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

é denominado ***wronskiano*** de $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

O que isso significa?

- Se $W(x) \neq 0$ para pelo menos um valor de x, as funções são **linearmente independentes (LI)**.

ADVERTÊNCIA: A recíproca do Teorema é falsa.

Se o wronskiano for identicamente zero ($W(x)=0$), então nada pode ser concluído sobre a independência linear, podendo esse conjunto de vetores ser LI ou LD

CONJUNTO LI E LD – Para Funções

Use o wronskiano para mostrar que $\mathbf{f}_1 = x$ e $\mathbf{f}_2 = \operatorname{sen} x$ são linearmente independentes.

Solução O wronskiano é

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \operatorname{sen} x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x\cos x - \operatorname{sen} x$$

Essa função não é identicamente zero no intervalo $(-\infty, \infty)$, porque, por exemplo,

$$W\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Assim, as funções são linearmente independentes.

CONJUNTO LI E LD – Para Funções

Considere as funções $f_1(x) = e^x$ e $f_2(x) = xe^x$.

1. Montamos a matriz:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix}$$

2. Calculamos o determinante:

$$W = e^x(e^x + xe^x) - (xe^x \cdot e^x)$$

$$W = e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} = e^{2x}$$

3. Como $e^{2x} \neq 0$ para qualquer x, isso significa que $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são **LI**.

CONJUNTO LI E LD

▶ EXEMPLO 10 Independência linear usando o wronskiano

Use o wronskiano para mostrar que $\mathbf{f}_1 = 1$, $\mathbf{f}_2 = e^x$ e $\mathbf{f}_3 = e^{2x}$ são linearmente independentes.

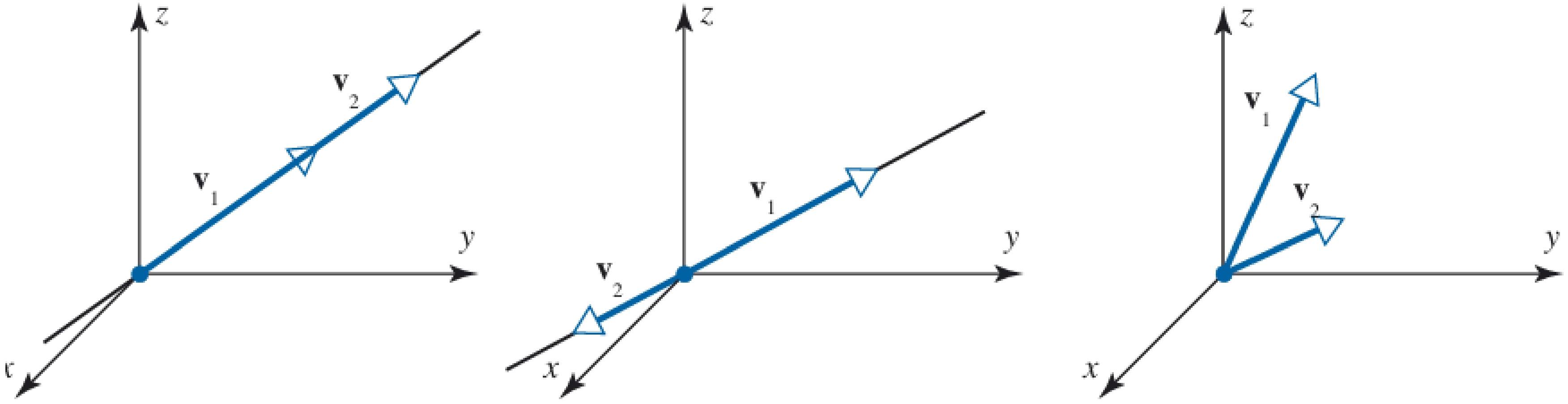
Solução O wronskiano é

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x}$$

Essa função obviamente não é identicamente zero em $(-\infty, \infty)$, portanto, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ e $\mathbf{f}_3$ formam um conjunto linearmente independente. ◀

CONJUNTO LI E LD

Dois vetores em R^2 ou R^3 são linearmente independentes se, e só se, os vetores não ficam numa mesma reta quando colocados com seus pontos iniciais na origem. Caso contrário, um deles seria um múltiplo escalar do outro (Figura 4.3.3).

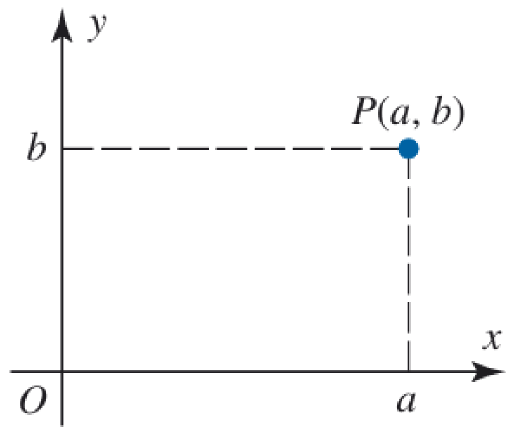


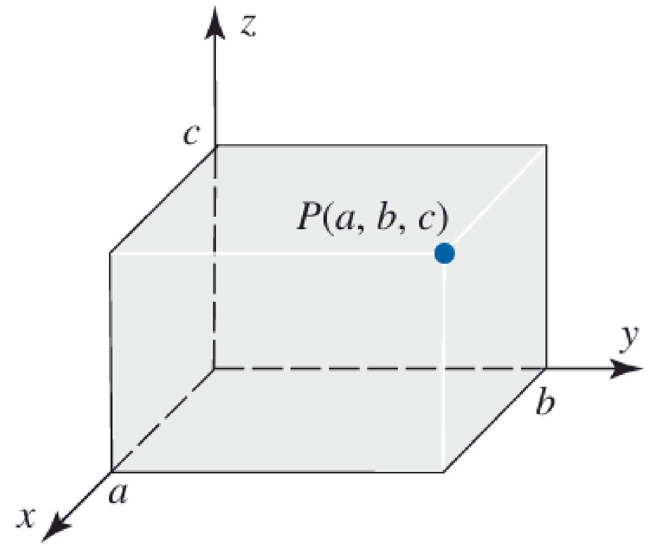
(*a*) Linearmente dependentes (*b*) Linearmente dependentes (*c*) Linearmente independentes

Bases e Dimensão

Bases e Dimensão

Na Geometria Analítica, usamos sistemas de coordenadas retangulares, onde os eixos são perpendiculares entre si. Isso facilita a localização de pontos e a representação de objetos no espaço.





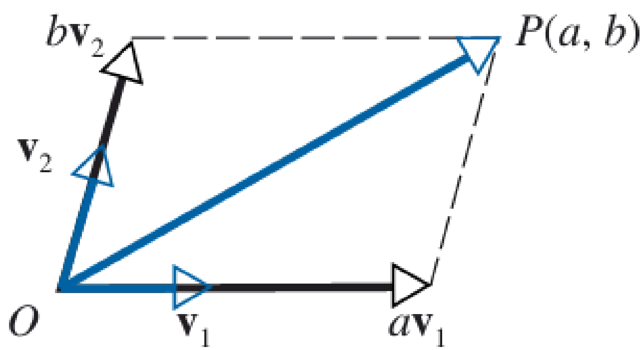
▶ **Figura 4.4.1**

As coordenadas de P num sistema de coordenadas retangulares no espaço bidimensional

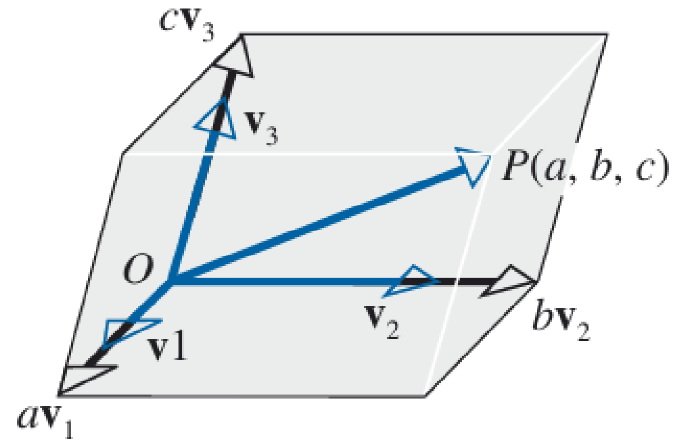
As coordenadas de P num sistema de coordenadas retangulares no espaço tridimensional

Bases e Dimensão

Já na Álgebra Linear, podemos definir sistemas de coordenadas de uma forma mais geral, utilizando vetores em vez de eixos fixos. Esses vetores não precisam ser perpendiculares, desde que possamos usá-los para descrever qualquer ponto no espaço..



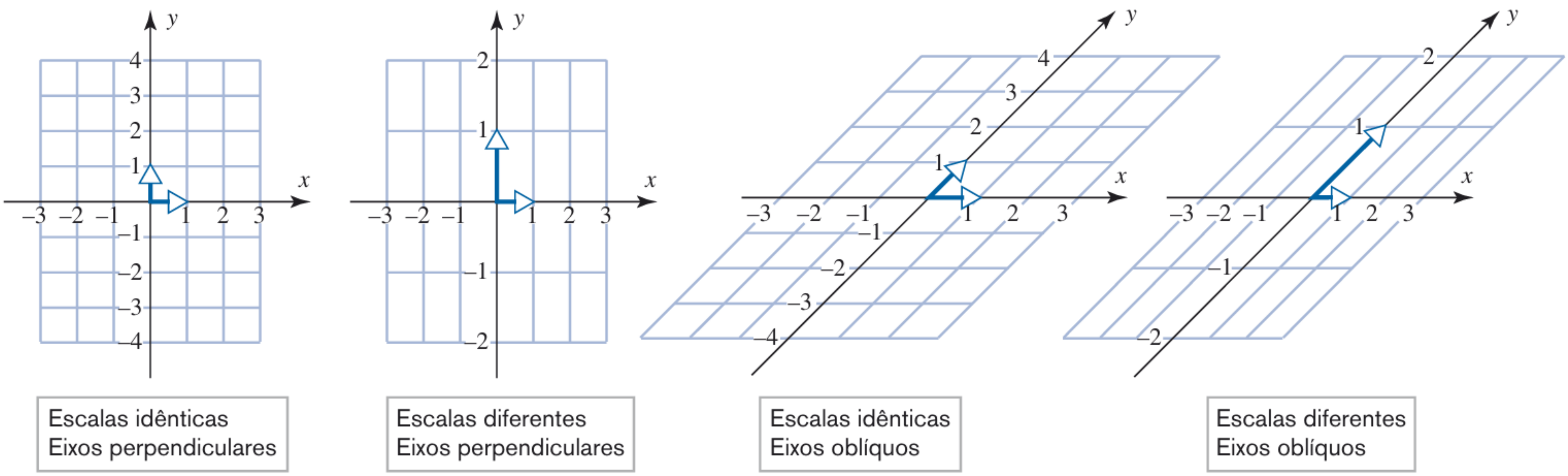
$$\overrightarrow{OP} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$$



$$\overrightarrow{OP} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3$$

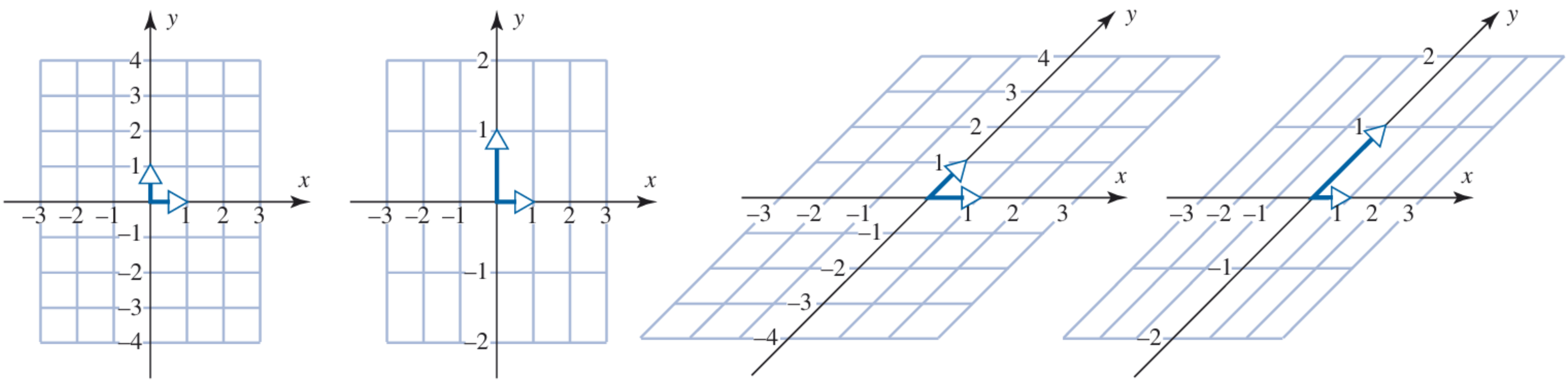
Bases e Dimensão

Além disso, ao trabalhar com coordenadas, costumamos usar a mesma unidade de medida em todos os eixos para evitar distorções.



Bases e Dimensão

No entanto, em algumas aplicações práticas, como gráficos de temperatura ao longo do tempo (onde um eixo representa segundos e outro graus Celsius), essa uniformidade não é necessária.



Escalas idênticas
Eixos perpendiculares

Escalas diferentes
Eixos perpendiculares

Escalas idênticas
Eixos oblíquos

Escalas diferentes
Eixos oblíquos

Bases e Dimensão

Para acomodar esse nível de generalidade, deixamos de exigir que os vetores sejam unitários, e utilizamos “vetores de base”. Eles são fundamentais porque:

- Definem a direção dos eixos e a escala do espaço.

- Permitem descrever qualquer vetor como uma combinação deles.

Bases e Dimensão

Para que um conjunto de vetores seja uma base, ele deve atender a dois critérios:

- Linearmente Independentes (LI): Nenhum vetor de base pode ser formado combinando os outros.

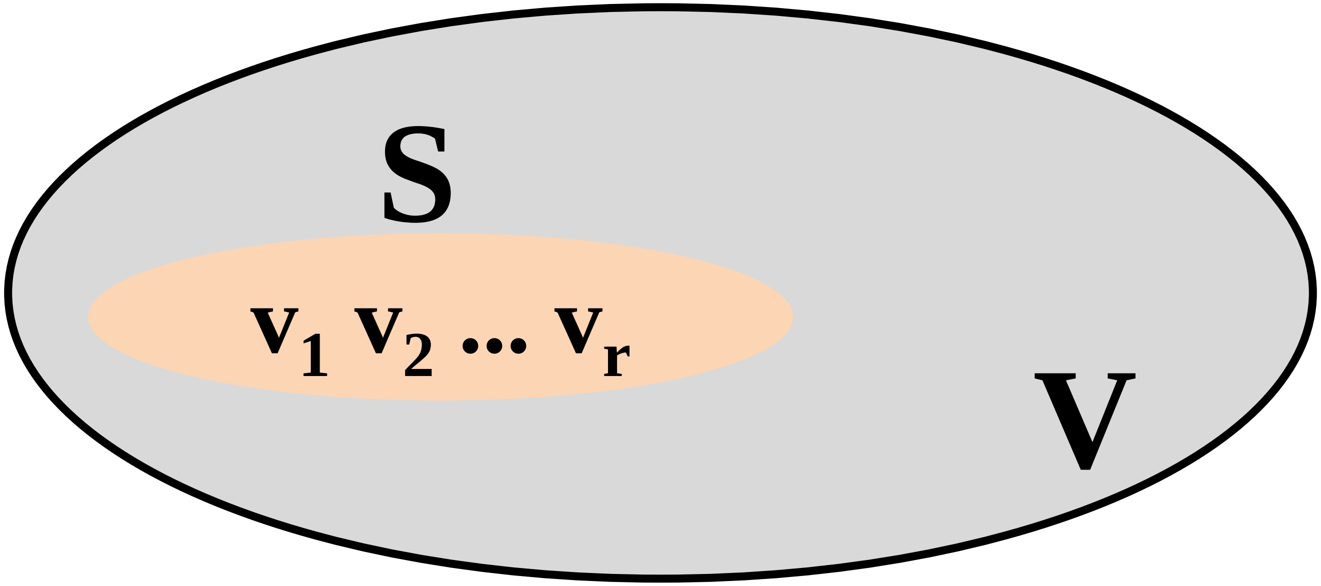
- Geram o Espaço: Qualquer vetor do espaço pode ser escrito como uma combinação dos vetores de base.

Bases e Dimensão

DEFINIÇÃO 1 Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma ***base*** de V se valerem as duas condições a seguir.

(a) S é linearmente independente.

(b) S gera V.



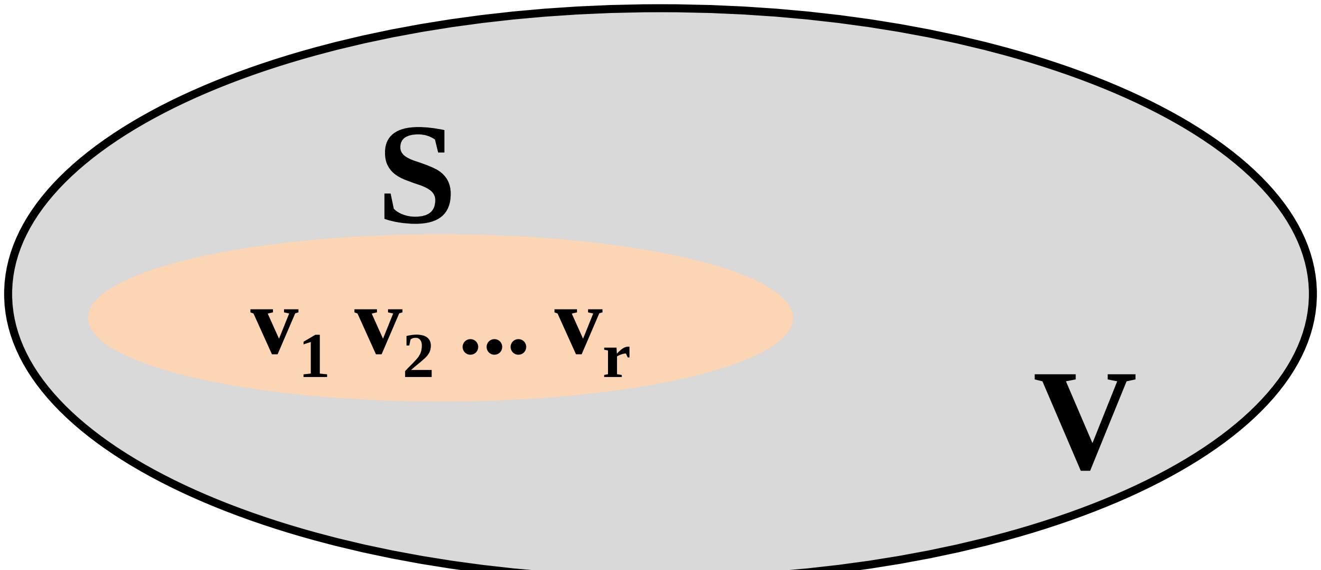
Bases e Dimensão

DEFINIÇÃO 2 Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, v_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V e se

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

é a expressão de um vetor $\mathbf{v}$ em termos da base S, então os escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são denominados ***coordenadas*** de $\mathbf{v}$ em relação à base S. O vetor $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ em R^n construído com essas coordenadas é denominado ***vetor de coordenadas de* v *em relação a S*** e é denotado por

$$(\mathbf{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \tag{6}$$



Bases e Dimensão

Observação Importante:

- A base canônica de R^n tem n vetores e que, portanto, a base canônica de R^3 tem três vetores, a base canônica de R^2 tem dois vetores, e a base canônica de R^1 tem um vetor.

Bases e Dimensão

Teorema fundamental: Todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo número de vetores.

Bases e Dimensão

Teorema fundamental: Todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo número de vetores.

O espaço $\mathbb{R}^2$ tem **dimensão 2**, ou seja, qualquer base de $\mathbb{R}^2$ contém exatamente **dois vetores linearmente independentes**.

Duas possíveis bases para $\mathbb{R}^2$ são:

1. **Base canônica**:

$$B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$$

   Esses vetores são linearmente independentes e geram $\mathbb{R}^2$.

2. **Outra base válida**:

$$B_2 = \{(2,1),(-1,3)\}$$

   Podemos verificar que esses vetores também são linearmente independentes e geram $\mathbb{R}^2$. Portanto, eles também formam uma base.

Bases e Dimensão

Teorema fundamental: Todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo número de vetores.

O espaço P_2 consiste em todos os polinômios da forma:

$$a + bx + cx^2, \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Esse espaço tem **dimensão 3**, então qualquer base de P_2 deve conter **três polinômios linearmente independentes**.

1. **Base canônica**:

$$B_1 = \{1, x, x^2\}$$

2. **Outra base válida**:

$$B_2 = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$$

Esses três polinômios também são linearmente independentes e formam uma base de P_2.

Bases e Dimensão

DEFINIÇÃO 1:

A dimensão de um espaço vetorial de dimensão finita V é denotada por dim(V) e é definida como o número de vetores numa base de V.

Além disso, definimos o espaço vetorial nulo como tendo dimensão zero.

Bases e Dimensão

DEFINIÇÃO 1:

A dimensão de um espaço vetorial de dimensão finita V é denotada por dim(V) e é definida como o número de vetores numa base de V. Além disso, definimos o espaço vetorial nulo como tendo dimensão zero.

EXEMPLO 1 **Dimensões de alguns espaços vetoriais familiares**

$\dim(R^n) = n$ **A base canônica tem** n **vetores.**

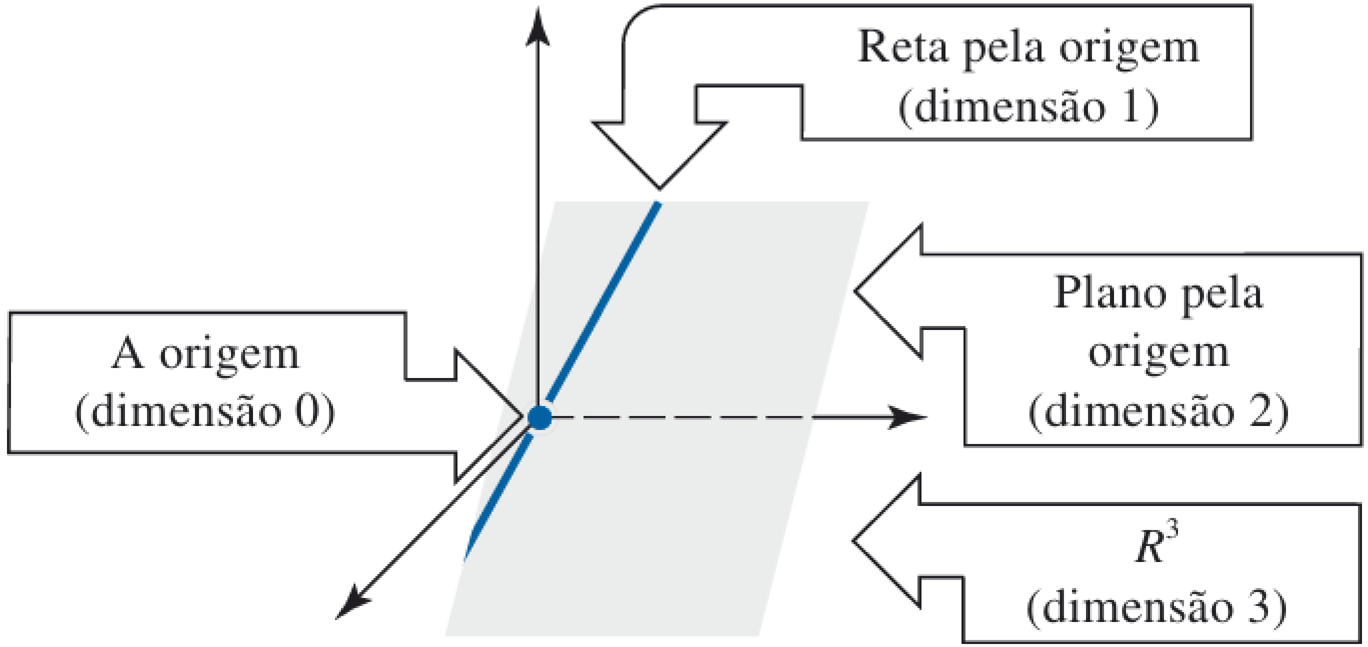
$\dim(P_n) = n + 1$ **A base canônica tem** $n + 1$ **vetores.**

$\dim(M_{mn}) = mn$ **A base canônica tem** mn **vetores.**

Bases e Dimensão

DEFINIÇÃO 1:

A dimensão de um espaço vetorial de dimensão finita V é denotada por dim(V) e é definida como o número de vetores numa base de V. Além disso, definimos o espaço vetorial nulo como tendo dimensão zero.



Bases e Dimensão

EXEMPLO 1:

a) Mostre que os vetores $\mathbf{v_1} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v_2} = (2, 9, 0)$ e $\mathbf{v_3} = (3, 3, 4)$ formam uma base de R^3.

b) Encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{v} = (5, -1, 9)$ em relação à base $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$. E qual a dimensão de S.

c) Encontre o vetor em R^3 cujo vetor de coordenadas em relação à base S é $(\mathbf{v})_S = (-1, 3, 2)$.

Bases e Dimensão

EXEMPLO 1:

a) Mostre que os vetores $\mathbf{v_1}$ = (1, 2, 1), $\mathbf{v_2}$ = (2, 9, 0) e $\mathbf{v_3}$ = (3, 3, 4) formam uma base de R^3.

Solução Devemos mostrar que esses vetores são linearmente independentes e que geram R^3. Para mostrar a independência linear, devemos mostrar que a equação vetorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \tag{1}$$

só tem a solução trivial, e para provar que esses vetores geram R^3, devemos mostrar que cada vetor $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ de R^3 pode ser expresso como

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b} \tag{2}$$

Bases e Dimensão

Igualando componentes correspondentes dos dois lados, essas duas equações podem ser expressas como os sistemas lineares

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 + 4c_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= b_1 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= b_2 \\ c_1 + 4c_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{3}$$

(verifique). Assim, reduzimos o problema a mostrar que o sistema homogêneo (3) só tem a solução trivial, e que o sistema não homogêneo (5) é consistente com quaisquer valores de b_1, b_2 e b_3. Mas os dois sistemas (3) e (5) têm a mesma matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

de modo que segue das partes (*b*), (*e*) e (*g*) do Teorema 2.3.8 que podemos provar ambos resultados simultaneamente mostrando que $\det(A) \neq 0$. Deixamos para o leitor confirmar que $\det(A) = -1$, o que prova que os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ formam uma base de R^3.

Bases e Dimensão

EXEMPLO 1:

b) Encontre o vetor de coordenadas de **v** = (5, -1, 9) em relação à base S = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$} e qual a dimensão de S.

Precisamos primeiro expressar **v** como uma combinação linear dos vetores em S, ou seja, precisamos encontrar valores de c1, c2 e c3, tais que:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

ou, em termos de componentes,

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

- dim(S) e é definida como o número de vetores da base. Logo dim(S) = 3

Bases e Dimensão

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

ou, em termos de componentes,

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

Igualando os componentes correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= -1 \\ c_1 \qquad\quad + 4c_3 &= 9 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$ (verifique). Portanto,

$$(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$$

Bases e Dimensão

EXEMPLO 1:

c) Encontre o vetor em R^3 cujo vetor de coordenadas em relação à base S é $(\mathbf{v})_S$ = **(-1, 3, 2)**.

Usando a definição de $(\mathbf{v})_S$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (-1)\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \\ &= (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) = (11, 31, 7) \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Bases e Dimensão

EXEMPLO 2: Encontre uma base para o subespaço $S = \{(a, b, c, d) \in R^4; a - 2b = 0, c = 3d; b \text{ e } d \in R\}$. E qual a dimensão de S?

Bases e Dimensão

EXEMPLO 2: Encontre uma base para o subespaço S = $\{(a, b, c, d) \in R^4;\ a - 2b = 0,\ c = 3d;\ b \text{ e } d \in R\}$. E qual a dimensão de S?

Se $a – 2b = 0 \Rightarrow a = 2b$ e $c = 3d$, logo:

$S = (2b, b, 3d, d);$

$S = b(2, 1, 0, 0) + d(0, 0, 3, 1).$

- dim(S) é definida como o número de vetores da base B. Logo dim(S) = 2.

- Vamos Verificar se B = {*(2, 1, 0, 0) e (0, 0, 3, 1)*} *é uma base de S* (ou seja, se é LI e se gera S).

Bases e Dimensão

EXEMPLO 2: Encontre uma base para o subespaço S = $\{(a, b, c, d) \in R^4; a - 2b = 0, c = 3d; b \text{ e } d \in R\}$. E qual a dimensão de S?

Verificar se B é LI:

Para ser LI deve-se mostrar que $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} = 0$ tem apenas a solução trivial:

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$$

$$c_1(2, 1, 0, 0) + c_2(0, 0, 3, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} 2c_1 + 0c_2 &= 0 \\ c_1 + 0c_2 &= 0 \\ 0c_1 + 3c_2 &= 0 \\ 0c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Note que o sistema tem apenas a solução trivial: $c_1 = c_2 = 0$, *logo a base é LI!*

Bases e Dimensão

EXEMPLO 2: Encontre uma base para o subespaço S = *{(a, b, c, d) ∈ R⁴; a - 2b = 0, c = 3d; b e d ∈ R}*. E qual a dimensão de S?

Verificar se a B gera S:

Para isso, deve-se mostrar que $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} = (2b, b, 3d, d)$ (gera o R^4):

$$b\mathbf{v_1} + d\mathbf{v_2} = \mathbf{v}$$

$$b(2, 1, 0, 0) + d(0, 0, 3, 1) = (2b, b, 3d, d)$$

Note que qualquer vetor $(a, b, c, d) \in S$ pode ser escrito como: $(a, b, c, d) = b(2,1,0,0) + d(0, 0, 3, 1) = bv_1+dv_2$.

Isso prova que qualquer vetor de S pode ser gerado por uma combinação linear dos vetores (2, 1, 0, 0) e (0, 0, 3, 1).

Bases e Dimensão

EXEMPLO 3: Considere o R^2 munido das operações usuais e os vetores $\mathbf{v_1} = (1, -3)$ e $\mathbf{v_2} = (2, 4)$. Mostre que o conjunto $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ é base do R^2. E encontre as coordenadas do vetor $\mathbf{v} = (5, -9)$ na base B.

Bases e Dimensão

EXEMPLO 3: Considere o R^2 munido das operações usuais e os vetores $\mathbf{v_1} = (1, -3)$ e $\mathbf{v_2} = (2, 4)$. Mostre que o conjunto B = {$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$} é base do R^2. E encontre as coordenadas do vetor $\mathbf{v} = (5, -9)$ na base B.

Verificar se B é LI:

Para ser LI deve-se mostrar que $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} = 0$ tem apenas a solução trivial:

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$$
$$c_1(1, -3) + c_2(2, 4) = (0, 0)$$

$$c_1 + 2c_2 = 0$$
$$-3c_1 + 4c_2 = 0$$

Note que o det(A) = 10, o sistema tem apenas uma solução! E além disso, a solução é a trivial: $c_1 = c_2 = 0$, *logo a base é LI!*

Bases e Dimensão

EXEMPLO 3: Considere o R^2 munido das operações usuais e os vetores $\mathbf{v_1} = (1, -3)$ e $\mathbf{v_2} = (2, 4)$. Mostre que o conjunto B = $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ é base do R^2. E encontre as coordenadas do vetor $\mathbf{v} = (5, -9)$ na base B.

Verificar se B gera o R^2:

Para isso deve-se mostrar que $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} = (b_1, b_2)$:

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} = (b_1, b_2)$$
$$c_1(1, -3) + c_2(2, 4) = (b_1, b_2)$$

$$c_1 + 2c_2 = b_1$$
$$-3c_1 + 4c_2 = b_2$$

Note que o $\det(A) = 10$, logo o sistema é possível e determinado e possui apenas uma solução! L*ogo, B gera o R^2!*

Obs.: Em R^n, um conjunto de n vetores LI automaticamente gera R^n!

Bases e Dimensão

EXEMPLO 3: Considere o R^2 munido das operações usuais e os vetores $\mathbf{v_1} = (1, -3)$ e $\mathbf{v_2} = (2, 4)$. Mostre que o conjunto $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ é base do R^2. E encontre as coordenadas do vetor $\mathbf{v} = (5, -9)$ na base B.

Encontrar as coordenadas do vetor v = (5, -9): $(v)_s$:

Para isso deve-se mostrar que $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} = \mathbf{v}$:

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} = (5, -9)$$
$$c_1(1, -3) + c_2(2, 4) = (5, -9)$$

$$c_1 + 2c_2 = 5$$
$$-3c_1 + 4c_2 = -9$$

$$c_1 = 19/5 \quad e \quad c_2 = 3/5$$

Logo $(\mathbf{v})_s = (19/5\ ;\ 3/5)!$

Bases e Dimensão

EXEMPLO 4: Considere o espaço vetorial V e encontre uma base para V e determine a dimensão de V:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); a - d = 0; b = 2c \right\}$$

Bases e Dimensão

EXEMPLO 4: Considere o espaço vetorial V e encontre uma base para V:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); a - d = 0; b = 2c \right\}$$

Se a – d = 0 ➔ a = d e b = 2c, logo:

$$V = \begin{bmatrix} d & 2c \\ c & d \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Vamos Verificar se $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ *é uma base do M(2,2)* (ou seja, se é LI e se gera S).
- *Se for Base, então a dim(V) é definida como o número de vetores da base B. Logo dim(V) = 2.*

Bases e Dimensão

EXEMPLO 4: Considere o espaço vetorial V e encontre uma base para V:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); a - d = 0; b = 2c \right\}$$

Verificar se B é LI:

Para ser LI deve-se mostrar que $c_1\mathbf{M_1} + c_2\mathbf{M_2} = 0$ tem apenas a solução trivial:

$$c_1\mathbf{M_1} + c_2\mathbf{M_2} = \mathbf{0}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1 + 0c_2 = 0$$
$$0c_1 + 2c_2 = 0$$
$$0c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1 + 0c_2 = 0$$

Note que o sistema tem apenas a solução trivial: *$c_1 = c_2 = 0$, logo a base é LI!*

Bases e Dimensão

EXEMPLO 4: Considere o espaço vetorial V e encontre uma base para V:

$$V=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); a-d=0; b=2c\right\}$$

Verificar se a B gera V:

Para isso, deve-se mostrar que $c_1\mathbf{M_1} + c_2\mathbf{M_2} = \mathrm{M}$ (gera o *M(2,2)*):

$$d\mathbf{M_1} + c\mathbf{M_2} = \mathbf{M}$$

$$d\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 2c \\ c & d \end{bmatrix}$$

Note que qualquer matriz ∈ V pode ser escrito como: $\begin{bmatrix} d & 2c \\ c & d \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ = dM_1+cM_2.

Isso prova que qualquer vetor de V pode ser gerado por uma combinação linear das referidas matrizes.

Bases e Dimensão

EXEMPLO 5: Explique por que os vetores dados não são uma base do espaço vetorial dado:

$$\mathbf{p}_1 = 1 + x + x^2, \mathbf{p}_2 = x - 1 \text{ para } P_2$$

Bases e Dimensão

EXEMPLO 5: Explique por que os vetores dados não são uma base do espaço vetorial dado:

O espaço vetorial dado é P_2, que representa o espaço de todos os polinômios de grau no máximo 2. Esse espaço tem **dimensão 3**, pois uma base canônica para P_2 é, por exemplo, $\{1, x, x^2\}$.

Os vetores (polinômios) dados são:

$$p_1 = 1 + x + x^2, \quad p_2 = x - 1.$$

Para que esses polinômios formassem uma base de P_2, eles precisariam ser **linearmente independentes** e gerar todo P_2. No entanto, existem dois problemas principais:

Bases e Dimensão

EXEMPLO 5: Explique por que os vetores dados não são uma base do espaço vetorial dado:

1. O conjunto não contém três vetores

O espaço P_2 tem dimensão **3**, ou seja, qualquer base precisa conter **três polinômios** linearmente independentes. Como foram fornecidos apenas **dois** polinômios, eles não podem ser uma base de P_2, pois não geram todo o espaço.

Bases e Dimensão

2. Os vetores não geram P_2

Para que os polinômios p_1 e p_2 gerassem P_2, qualquer polinômio genérico de grau no máximo 2:

$$a + bx + cx^2$$

teria que ser escrito como uma combinação linear de p_1 e p_2, ou seja:

$$\alpha(1 + x + x^2) + \beta(x - 1) = a + bx + cx^2.$$

Expandindo:

$$\alpha + \alpha x + \alpha x^2 + \beta x - \beta = a + bx + cx^2.$$

Reorganizando os termos:

$$(\alpha - \beta) + (\alpha + \beta)x + \alpha x^2 = a + bx + cx^2.$$

Bases e Dimensão

EXEMPLO 5: Explique por que os vetores dados não são uma base do espaço vetorial dado:

Isso gera o sistema:

$$\alpha - \beta = a,$$

$$\alpha + \beta = b,$$

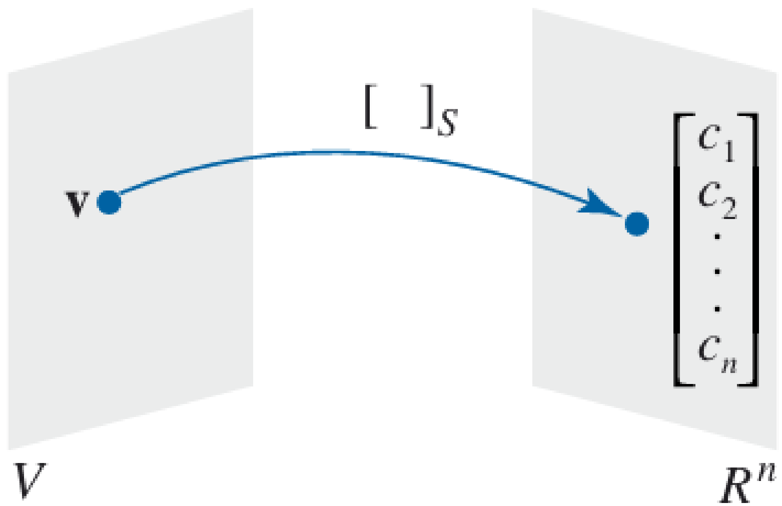
$$\alpha = c.$$

Esse sistema tem apenas **duas variáveis** (α, β) para **três incógnitas** (a, b, c), o que significa que ele nem sempre tem solução para todos os polinômios de P_2. Portanto, os vetores não geram todo P_2.

Mudança de bases

Mudança de bases

Uma base conveniente para um problema pode não ser conveniente para um outro, de forma que é um procedimento comum no estudo de espaços vetoriais a mudança de uma base para uma outra.



Mudança de bases

Solução do problema de mudança de base Se mudarmos a base de um espaço vetorial V de alguma base velha $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ para uma base nova $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, então, dado qualquer vetor $\mathbf{v}$ em V, o velho vetor de coordenadas $[\mathbf{v}]_B$ está relacionado com o novo vetor de coordenadas $[\mathbf{v}]_{B'}$ pela equação

$$[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'} \tag{7}$$

onde as colunas de P são os vetores de coordenadas dos vetores da base nova em relação à base velha; ou seja, os vetores coluna de P são

$$[\mathbf{u}'_1]_B, \quad [\mathbf{u}'_2]_B, \ldots, [\mathbf{u}'_n]_B \tag{8}$$

- A matriz P na Equação (7) é denominada matriz de transição de B para B'.
- As colunas de P de uma base velha para uma base nova são os vetores de coordenadas da base velha em relação à base nova.

Mudança de bases

Um procedimento para calcular $P_{B \to B'}$

Passo 1. Montamos a matriz $[B' \mid B]$.

Passo 2. Reduzimos a matriz do Passo 1 à forma escalonada reduzida usando operações elementares com as linhas.

Passo 3. A matriz resultante é $[I \mid P_{B \to B'}]$.

Passo 4. Extraímos a matriz $P_{B \to B'}$ do lado direito da matriz do Passo 3.

Esse procedimento é capturado no diagrama seguinte.

$$[\text{base nova} \mid \text{base velha}] \xrightarrow{\text{operações com linhas}} [I \mid \text{transição da velha à nova}] \tag{14}$$

Mudança de bases

No Exemplo 1, consideramos as bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $B = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ de R^2, em que

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1), \quad \mathbf{u}'_1 = (1, 1), \quad \mathbf{u}'_2 = (2, 1)$$

(a) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição de B' para B.

(b) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição de B para B'.

Mudança de bases

Passo 1: Definir as bases

A **base canônica** B é formada pelos vetores **padrão**:

$$B = \{(1,0),(0,1)\}$$

Agora, considere a **nova base** B':

$$B' = \{(1,1),(2,1)\}$$

Mudança de bases

Passo 2: Encontrar a matriz de transição $P_{B' \to B}$

No Exemplo 1, consideramos as bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $B = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ de R^2, em que

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1), \quad \mathbf{u}'_1 = (1, 1), \quad \mathbf{u}'_2 = (2, 1)$$

(a) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição de B' para B.

(b) Use a Fórmula (14) para encontrar a matriz de transição de B para B'.

Solução (a) Aqui B' é a base velha e B é a base nova, portanto,

$$[\text{base nova} \mid \text{base velha}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Como o lado esquerdo já é a matriz identidade, não precisamos reduzir. Vemos claramente que a matriz de transição é

$$P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mudança de bases

Passo 3: Encontrar a matriz de transição $P_{B \to B'}$

Solução (b) Aqui B é a base velha e B' é a base nova, portanto,

$$[\text{base nova} \mid \text{base velha}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Reduzindo essa matriz até tornar o lado esquerdo a identidade, obtemos (verifique)

$$[I \mid \text{transição da velha para a nova}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

de modo que a matriz de transição é

$$P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Mudança de bases

Passo 4: Aplicar a Mudança de Base

Agora, vamos considerar um vetor qualquer:

$$v = (5, -9)$$

1. **Passo 4.1: Escrever v na base antiga B**
   - Como B é a base canônica, o vetor já está escrito nela:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Passo 4: Aplicar a Mudança de Base

2. **Passo 4.2: Encontrar $[v]_{B'}$**

- Aplicamos a matriz $P_{B\to B'}$:

$$[v]_{B'} = P_{B\to B'}[v]_B$$

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$

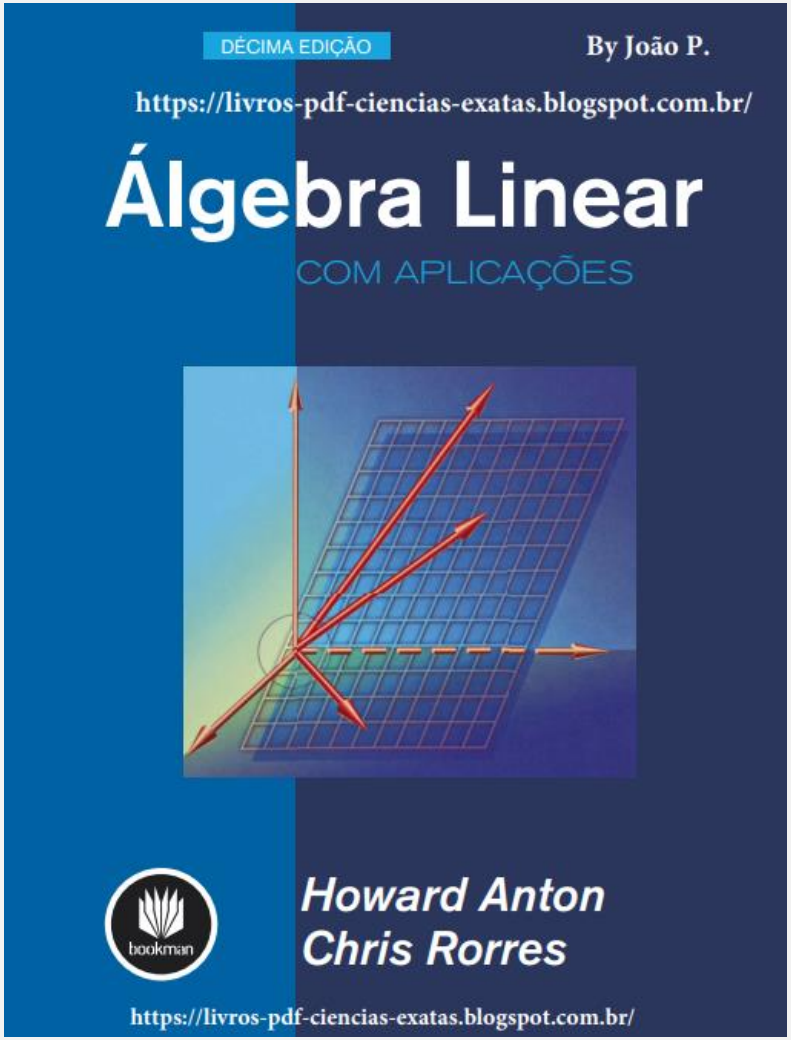
Multiplicamos:

$$\begin{bmatrix} (-1\cdot 5) + (2\cdot -9) \\ (1\cdot 5) + (-1\cdot -9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 - 18 \\ 5 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Então, o vetor $v = (5, -9)$ na nova base B' é:

$$[v]_{B'} = (-23, 14)$$

EXERCÍCIOS


DÉCIMA EDIÇÃO
By João P.
https://livros-pdf-ciencias-exatas.blogspot.com.br/
Álgebra Linear
COM APLICAÇÕES
bookman
Howard Anton
Chris Rorres
https://livros-pdf-ciencias-exatas.blogspot.com.br/

...

CONTINUA na Parte 3