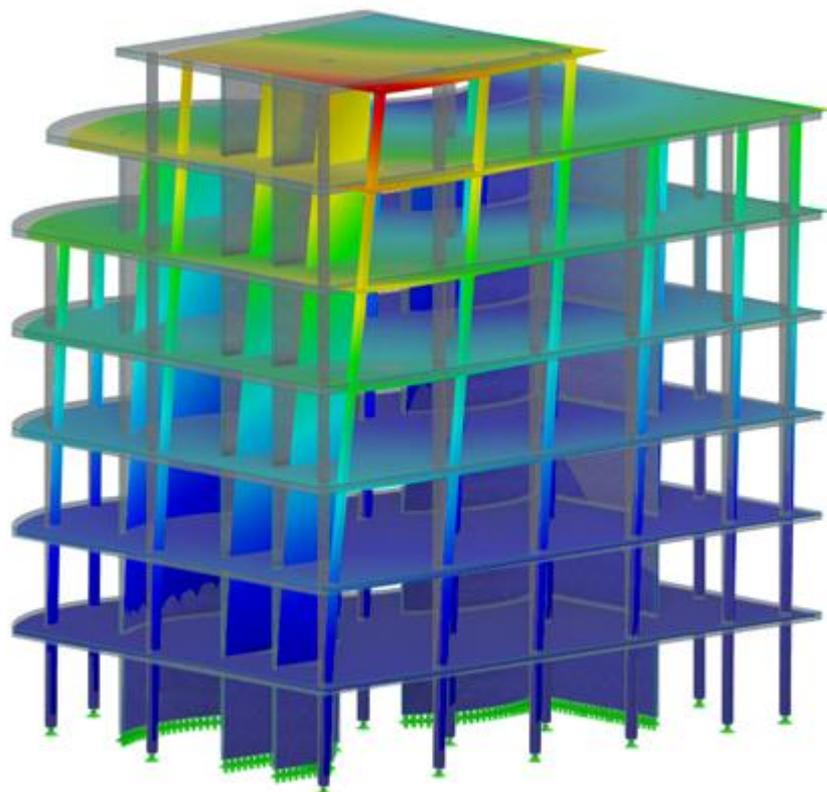




UNIVERSIDADE FEDERAL
DE ALAGOAS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS CAMPUS SERTÃO EIXO TECNOLOGIA



Teoria das Estruturas 2

Introdução à Análise de Estruturas



Prof. Dr. Alverlando Ricardo

Parte 3: **MÉTODO DAS FORÇAS**

Metodologia de análise pelo Método das Forças

Método das Forças

Para facilitar o entendimento do método, esta apresentação é feita com base em um exemplo, que é mostrado na Figura. Todas barras têm $A = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$; $I = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ e $E = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$.

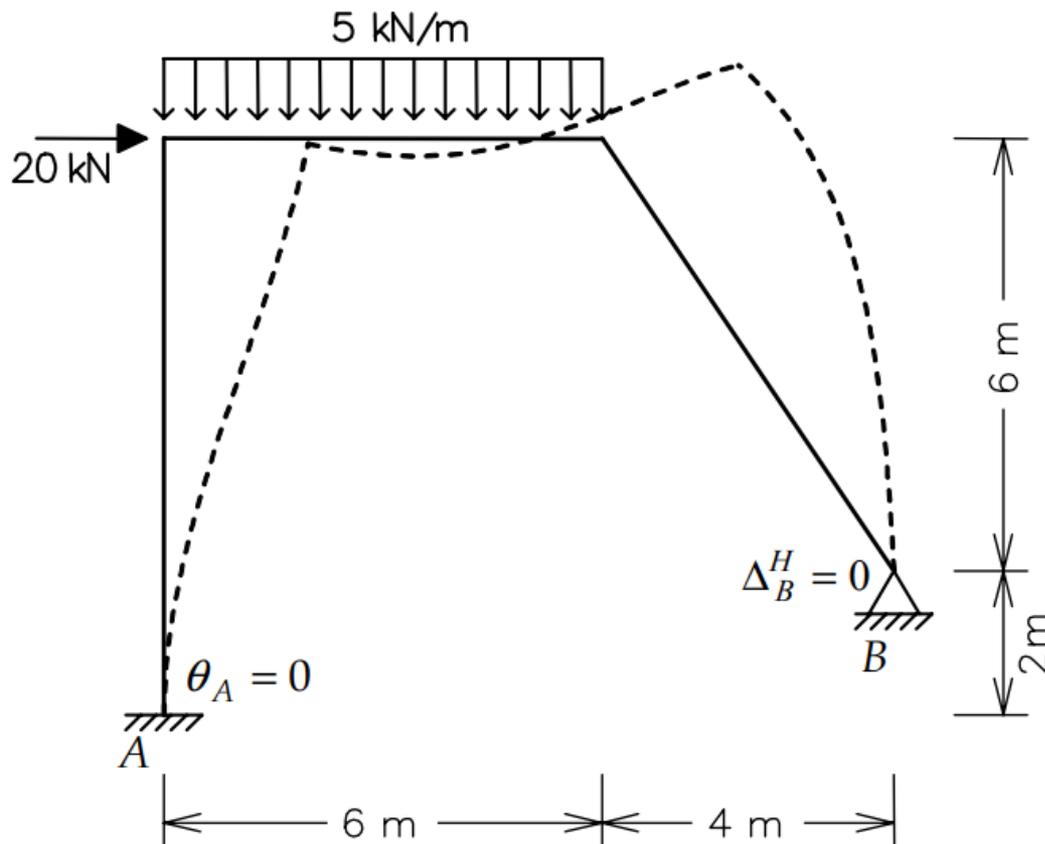


Figura 5.1 – Estrutura utilizada para a descrição da metodologia do Método das Forças.

Metodologia: Método das Forças

Passo 1: Hiperestáticos e Sistema Principal

Definir o grau de hiperestaticidade: No exemplo, $g = 2$. (teremos 2 incógnitas)

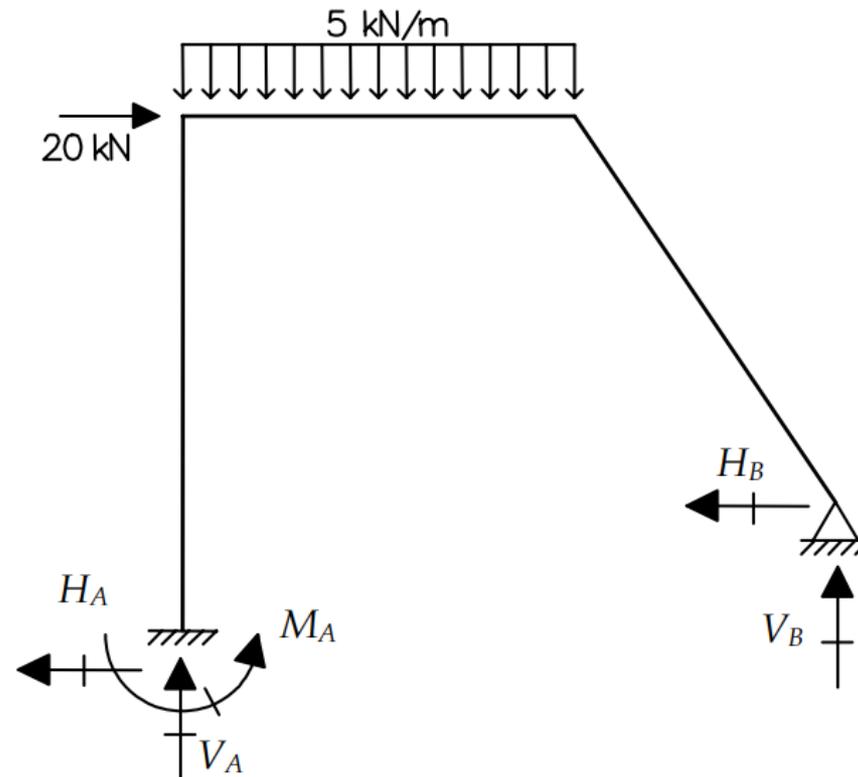
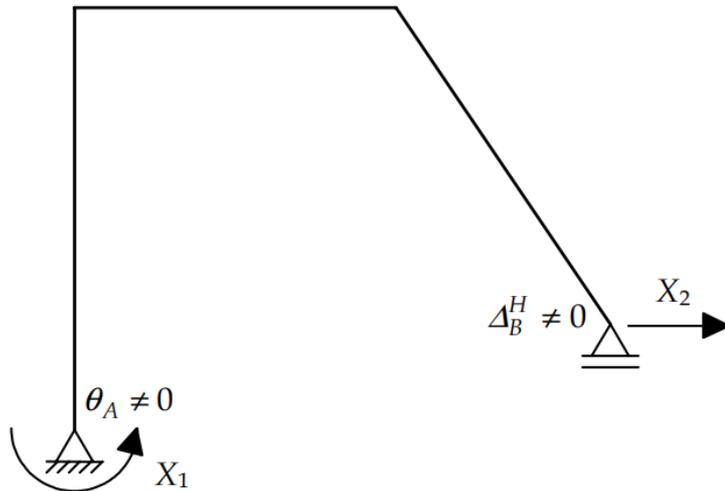


Figura 5.2 – Componentes de reações de apoio da estrutura da Figura 5.1.

Metodologia: Método das Forças

Passo 1: Hiperestáticos e Sistema Principal

Cria-se uma estrutura isostática auxiliar, chamada **Sistema Principal (SP)**, que é obtida da estrutura original hiperestática pela eliminação de vínculos.



**A escolha do SP é arbitrária:
qualquer estrutura isostática
escolhida é válida!**

Figura 5.3 – Sistema Principal adotado para a solução da estrutura da Figura 5.1.

$X_1 = M_A \rightarrow$ reação momento associada ao vínculo de apoio $\theta_A = 0$;

$X_2 = H_B \rightarrow$ reação horizontal associada ao vínculo de apoio $\Delta_B^H = 0$.

Metodologia: Método das Forças

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Procuram-se os valores dos hiperestáticos X_1 e X_2 que fazem com que as condições de compatibilidade violadas na criação do SP, sejam restabelecidas.

A determinação de X_1 e X_2 é feita através da superposição de casos básicos. O número de casos básicos é sempre igual a $g + 1$. No exemplo, isso resulta nos casos (0), (1) e (2) que são mostrados a seguir.

Metodologia: Método das Forças

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SP.

O caso básico (0) isola o efeito da solicitação externa (carregamento aplicado) no SP

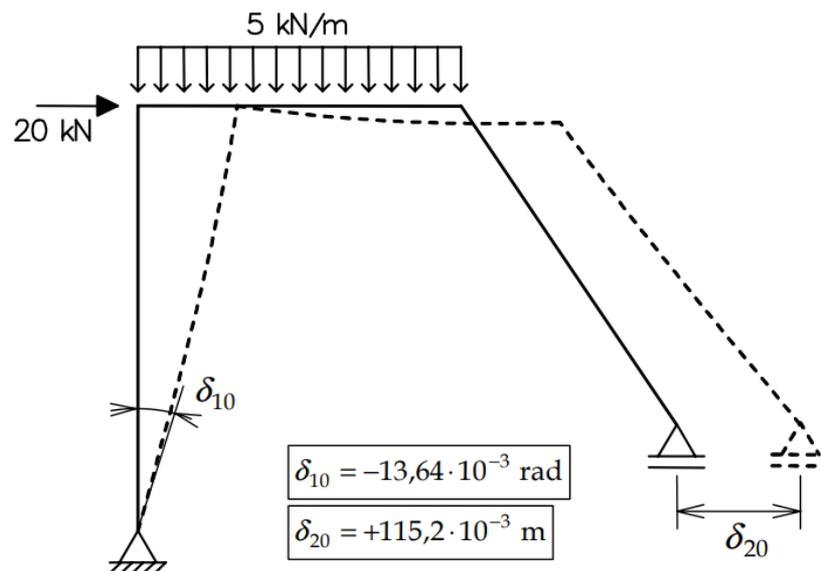


Figura 5.4 – Solicitação externa isolada no SP da estrutura da Figura 5.1.

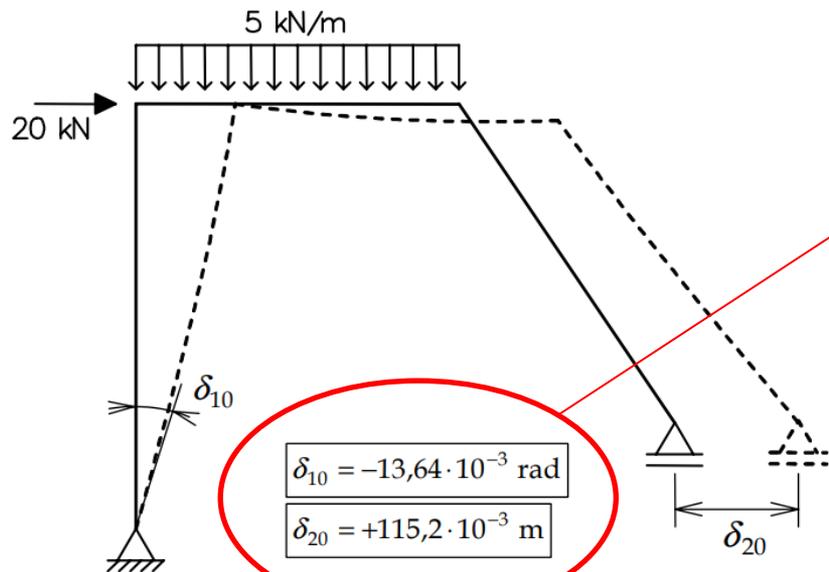
A rotação δ_{10} e o deslocamento horizontal δ_{20} , nas direções dos vínculos eliminados para a criação do SP, são chamados de **termos de carga**.

δ_{i0} → termo de carga: deslocamento ou rotação na direção do vínculo eliminado associado ao hiperestático X_i quando atua a solicitação externa isoladamente no SP (com hiperestáticos com valores nulos).

Metodologia: Método das Forças

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

O sinal negativo da rotação δ_{10} indica que a rotação tem o sentido contrário do que é considerado para o hiperestático X1 no caso (1).



Os termos de carga podem ser calculados utilizando o PFV!

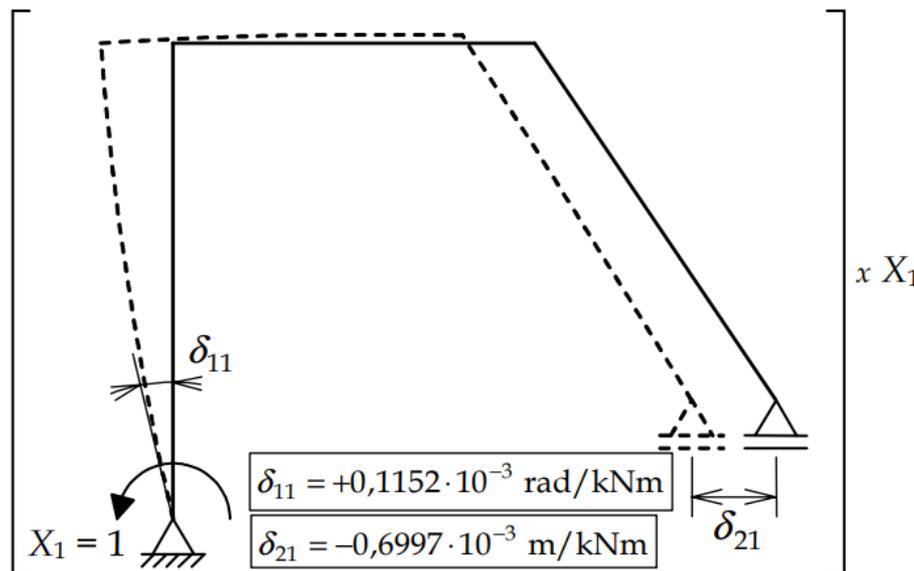
Figura 5.4 – Solicitação externa isolada no SF da estrutura da Figura 5.1.

Metodologia: Método das Forças

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP.

Considera-se um valor unitário para X_1 , sendo o efeito de $X_1 = 1$ multiplicado pelo valor final que X_1 deverá ter.



δ_{ij} → coeficiente de flexibilidade:

deslocamento ou rotação na direção do vínculo eliminado associado ao hiperestático X_i .

Figura 5.5 – Hiperestático X_1 isolado no SP da estrutura da Figura 5.1.

Metodologia: Método das Forças

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP.

Considera-se um valor unitário para X_2 , sendo o efeito de $X_2 = 1$ multiplicado pelo valor final que X_2 deverá ter.

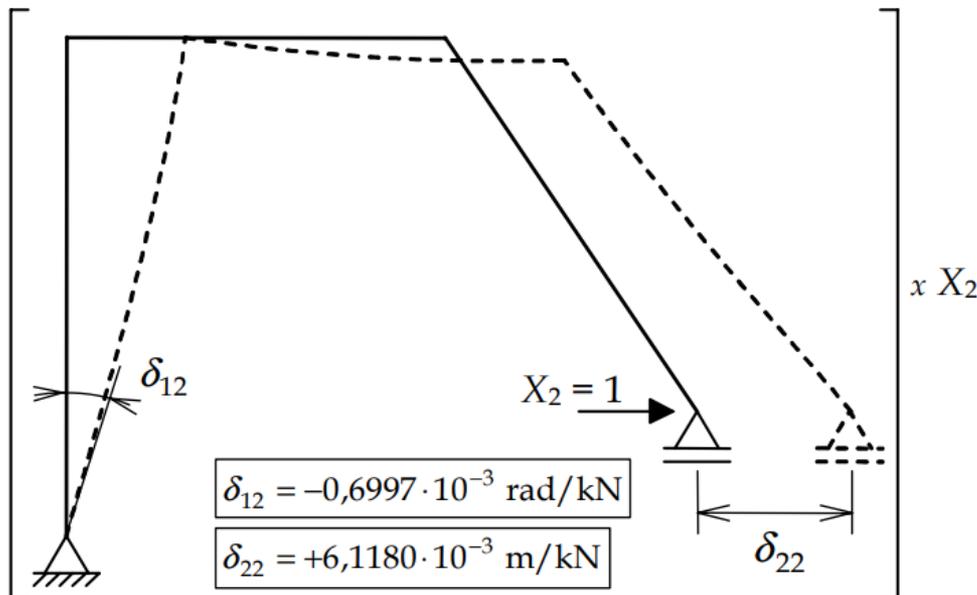


Figura 5.6 – Hiperestático X_2 isolado no SP da estrutura da Figura 5.1.

Os valores de δ_{12} e δ_{21} são iguais!

Os coeficientes δ_{ij} e δ_{ji} , sempre serão iguais, conforme o Teorema de Maxwell.

Metodologia: Método das Forças

Passo 3: Superposição de Efeitos

Utiliza-se a superposição de efeitos para restabelecer as condições de compatibilidade violadas na criação do SP.

Metodologia: Método das Forças

Passo 3: Superposição de Efeitos

Utiliza-se a superposição de efeitos para restabelecer as condições de compatibilidade violadas na criação do SP.

- Superposição das rotações do nó inferior esquerdo (nó A):

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0$$

- Superposição dos deslocamentos horizontais no nó inferior direito (nó B):

$$\delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0$$

- Sistema de equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -13,64 \cdot 10^{-3} + 0,1152 \cdot 10^{-3} \cdot X_1 - 0,6997 \cdot 10^{-3} \cdot X_2 = 0 \\ +115,2 \cdot 10^{-3} - 0,6997 \cdot 10^{-3} \cdot X_1 + 6,1180 \cdot 10^{-3} \cdot X_2 = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema de equações de compatibilidade resulta nos seguintes valores das reações de apoio X_1 e X_2 :

$$X_1 = +13,39 \text{ kNm ;}$$

$$X_2 = -17,29 \text{ kN .}$$

Metodologia: Método das Forças

Passo 3: Superposição de Efeitos

O sistema pode ser reescrito de uma forma matricial:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

No caso geral de uma estrutura com grau de hiperestaticidade g , pode-se escrever:

$$\{\delta_0\} + [\delta]\{X\} = \{0\}. \quad (5.4)$$

Sendo:

$\{\delta_0\}$ → vetor dos termos de carga;

$[\delta]$ → matriz de flexibilidade;

$\{X\}$ → vetor dos hiperestáticos.

Metodologia: Método das Forças

Passo 3: Superposição de Efeitos

Utiliza-se a superposição de efeitos para restabelecer as condições de compatibilidade violadas na criação do SP.

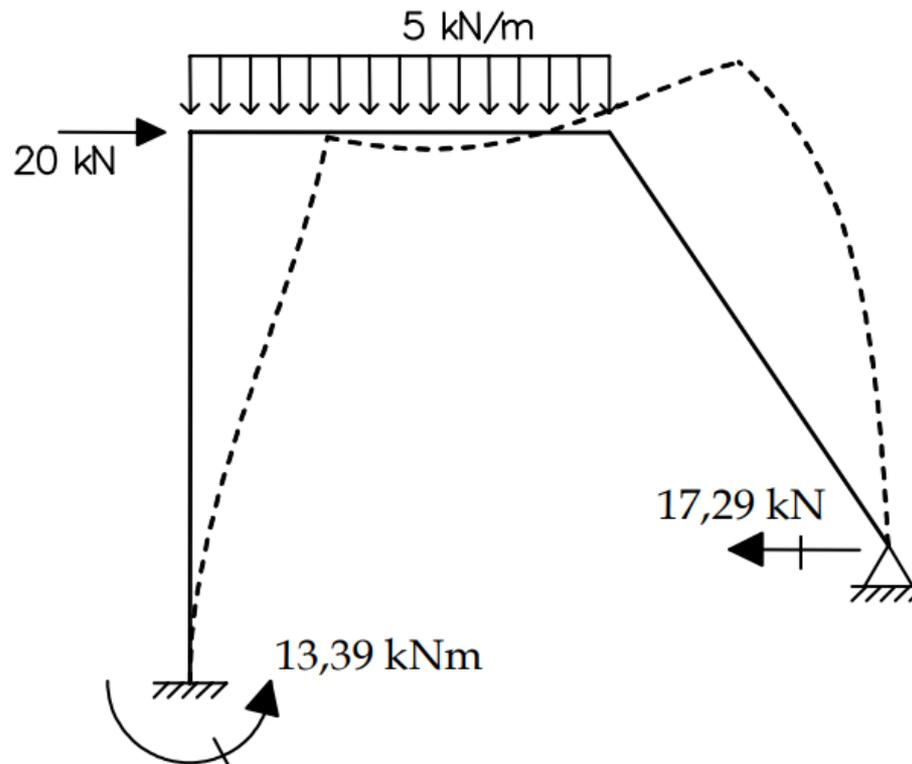


Figura 5.7 – Valores e sentidos dos hiperestáticos na solução da estrutura da Figura 5.1.

Metodologia: Método das Forças

Passo 4: Determinação dos esforços internos

Existem duas alternativas para isso:

1. Calcula-se uma estrutura isostática (o Sistema Principal) com o carregamento aplicado simultaneamente aos hiperestáticos – com os valores corretos encontrados – como se fossem forças e momentos aplicados.
2. Utiliza-se a própria superposição de casos básicos para a obtenção dos esforços internos (ou deslocamentos) finais.

Metodologia: Método das Forças

Passo 4: Determinação dos esforços internos

Existem duas alternativas para isso:

$$M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2,$$

2. Utiliza-se a própria superposição de casos básicos para a obtenção dos esforços internos (ou deslocamentos) finais.

Mais comum, pois, os momentos fletores finais (M) podem ser obtidos pela superposição dos diagramas de momentos fletores (M_i) dos casos básicos.

Metodologia: Método das Forças

Passo 4: Determinação dos esforços internos

Esse resultado pode ser generalizado para todos os esforços internos:

$$N = N_0 + \sum_{j=1}^{j=g} N_j \cdot X_j ; \quad (5.1)$$

$$Q = Q_0 + \sum_{j=1}^{j=g} Q_j \cdot X_j ; \quad (5.2)$$

$$M = M_0 + \sum_{j=1}^{j=g} M_j \cdot X_j . \quad (5.3)$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Considere a viga contínua mostrada na Figura, com três vãos e com uma carga uniformemente distribuída abrangendo o vão da esquerda. A rigidez à flexão da viga, EI , é fornecida. Pede-se o diagrama de momentos fletores da estrutura. Despreze os efeitos axiais e cisalhamento.

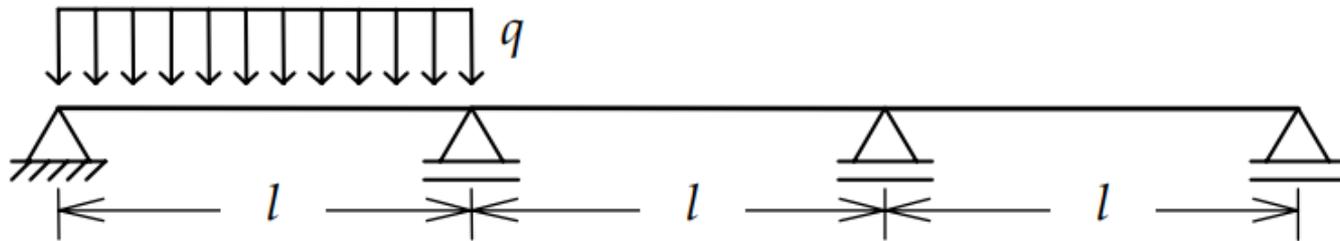


Figura 5.8 – Viga contínua com três vãos e carregamento uniformemente distribuído no primeiro vão.

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Passo 1: Hiperestáticos e Sistema Principal

Hiperestático: $g = 5 - 3 = 2$.

Sistema Principal (SP): obtida da estrutura original hiperestática pela eliminação de vínculos.

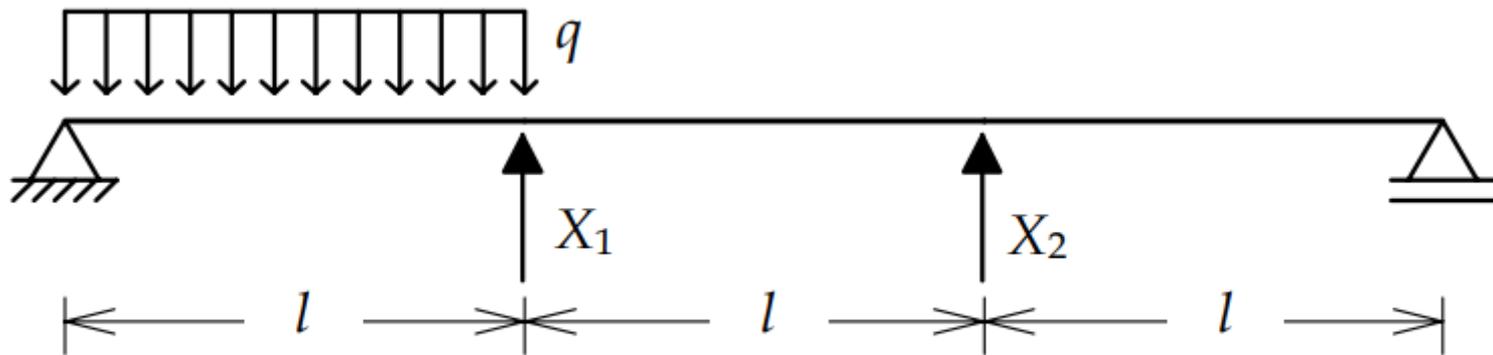


Figura 5.9 – Primeira opção para SP da estrutura da Figura 5.8.

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SP.

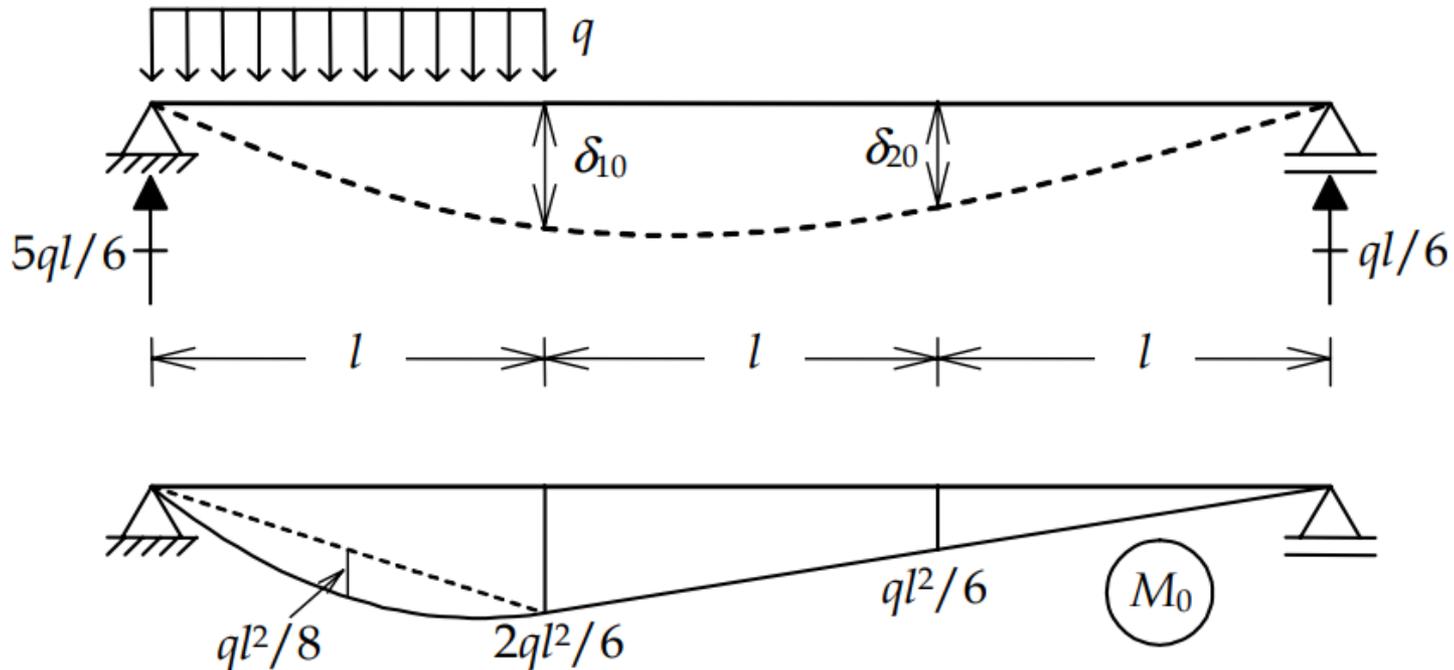
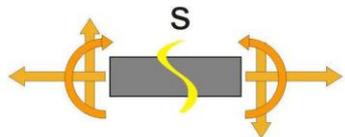


Figura 5.10 – Solicitação externa isolada no SP da Figura 5.9.



EXEMPLO 1: Viga Contínua

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP.

δ_{11} → deslocamento vertical no ponto do apoio eliminado associado a X_1 provocado por $X_1 = 1$ no caso (1);

δ_{21} → deslocamento vertical no ponto do apoio eliminado associado a X_2 provocado por $X_1 = 1$ no caso (1).

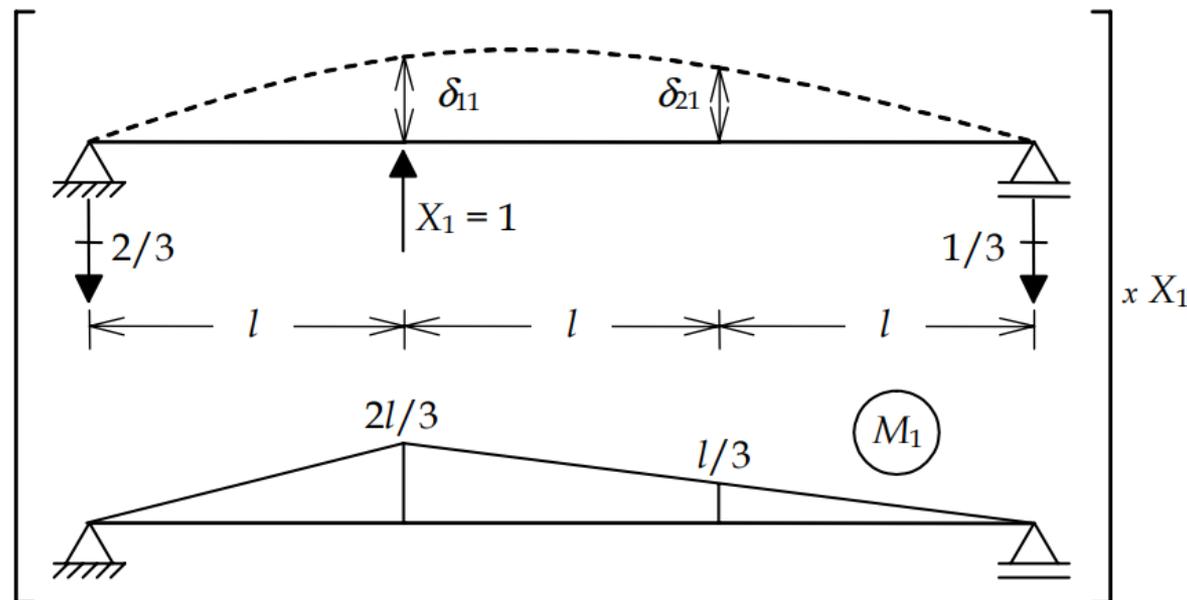


Figura 5.11 – Hiperestático X_1 isolado no SP da Figura 5.9.

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP.

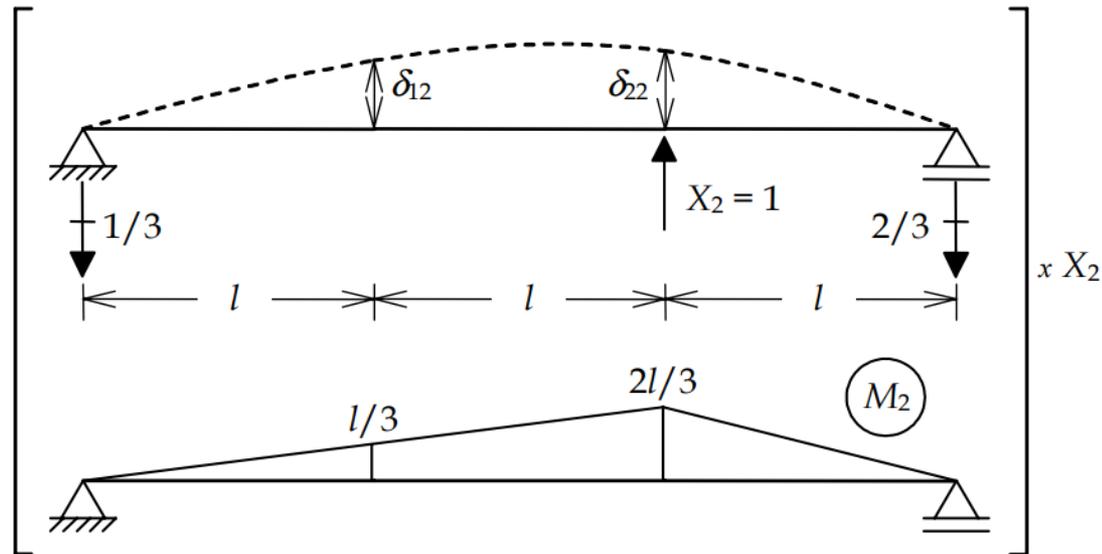
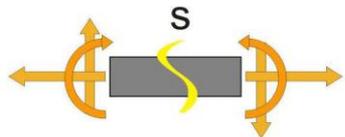


Figura 5.12 – Hiperestático X_2 isolado no SP da Figura 5.9.

Os coeficientes de flexibilidade no caso (2) têm a seguinte interpretação física:

δ_{12} → deslocamento vertical no ponto do apoio eliminado associado a X_1 provocado por $X_2 = 1$ no caso (2);

δ_{22} → deslocamento vertical no ponto do apoio eliminado associado a X_2 provocado por $X_2 = 1$ no caso (2).



EXEMPLO 1: Viga Contínua

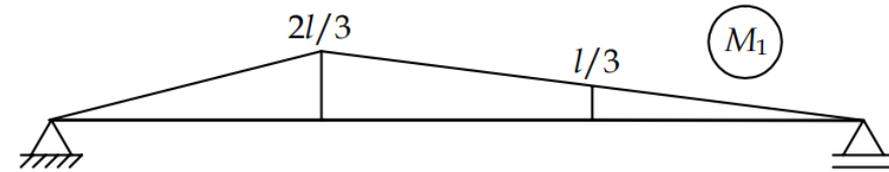
Passo 3: Superposição de Efeitos

Utiliza-se a superposição de efeitos para restabelecer as condições de compatibilidade violadas na criação do SP.

$$\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{10} usando o PFV



$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \int_{\text{viga}} \overline{M} M dx = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_1 M_0 dx .$$

A integral acima é calculada para cada trecho da viga:

$$\int_0^{3l} M_1 M_0 dx = \int_0^l M_1 M_0 dx + \int_l^{2l} M_1 M_0 dx + \int_{2l}^{3l} M_1 M_0 dx .$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{10} usando o PFV

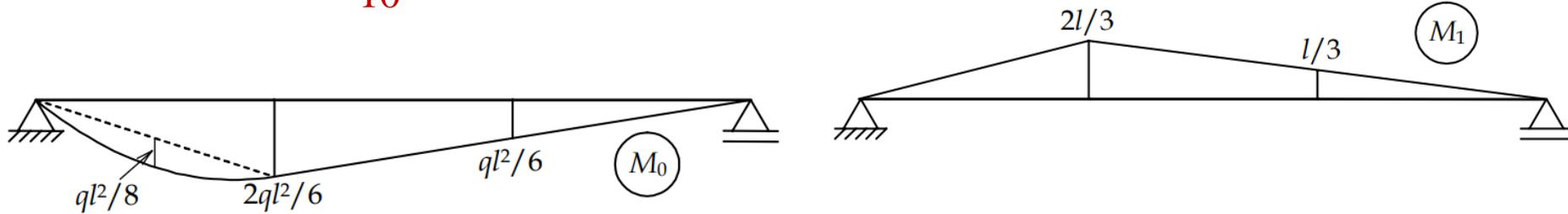
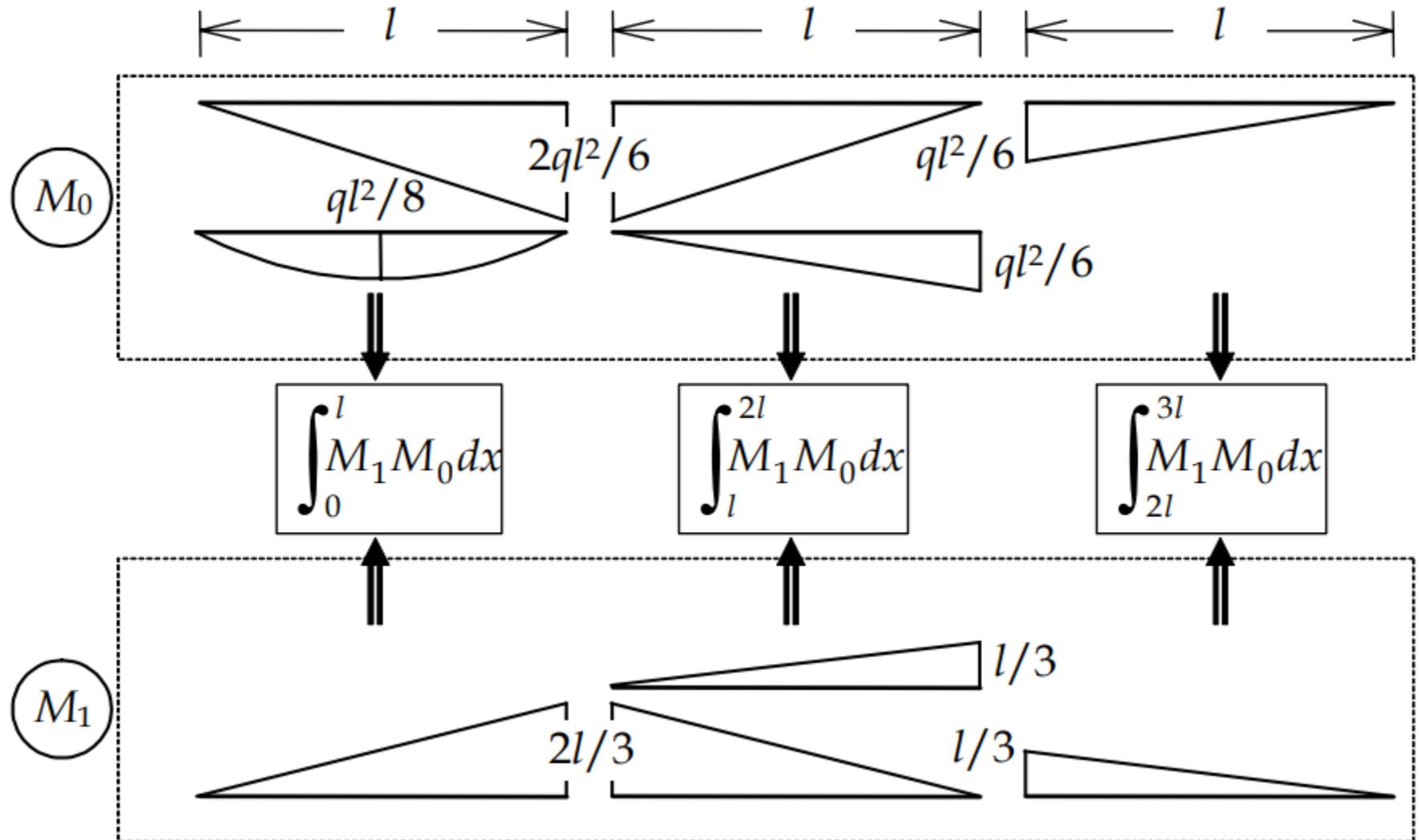


Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.

$\int_0^l MM dx$				
		$\overline{M_A} M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M_B} M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M_C} M_A l$
		$\frac{1}{2} \overline{M_A} M_B l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B} M_B l$	$\frac{1}{6} \overline{M_C} M_B l$
		$\frac{1}{2} \overline{M_A} M_C l$	$\frac{1}{6} \overline{M_B} M_C l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C} M_C l$
		$\frac{2}{3} \overline{M_A} M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B} M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C} M_D l$

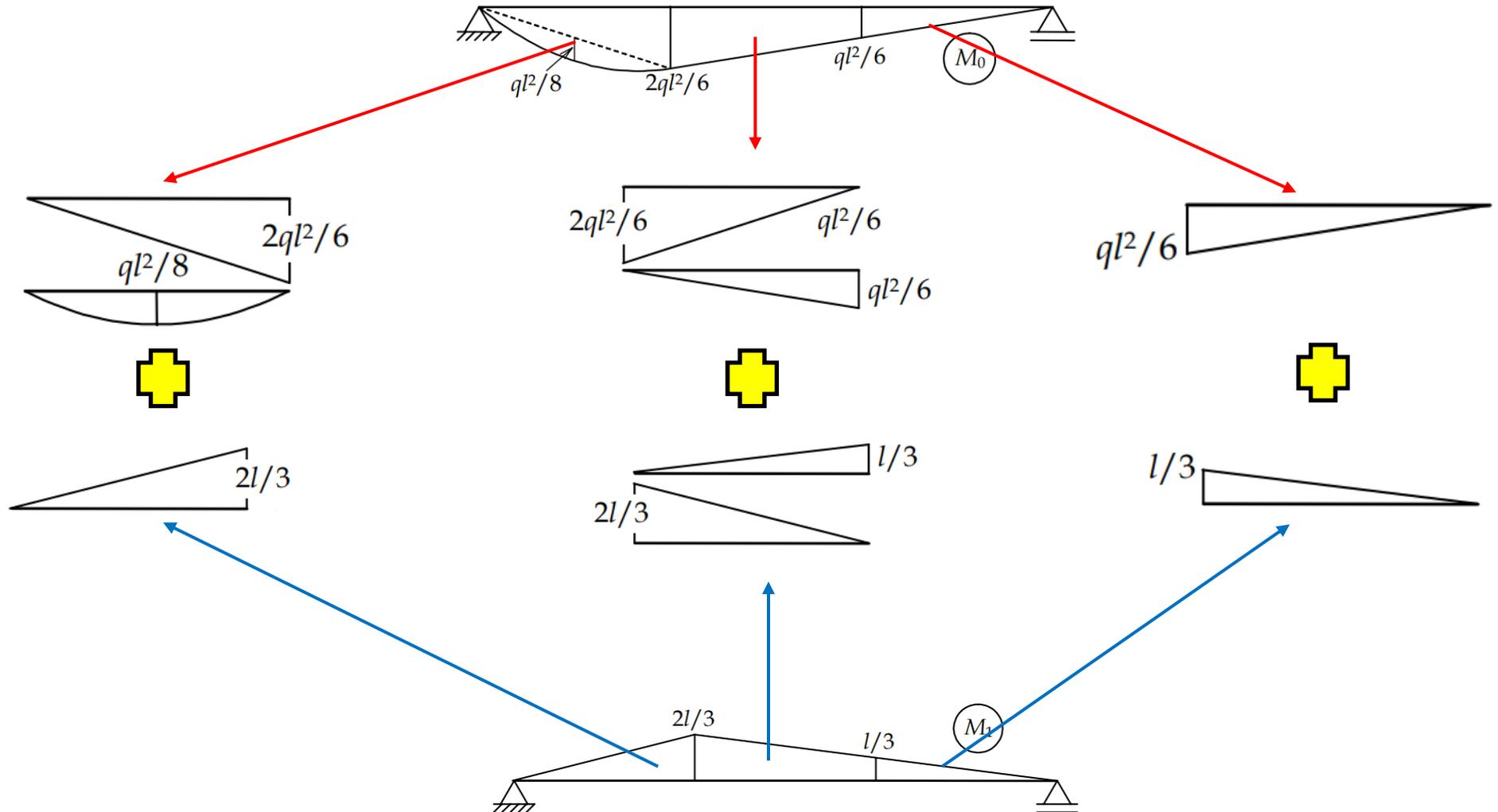
EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{10} usando o PFV



EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{10} usando o PFV



EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{10} usando o PFV

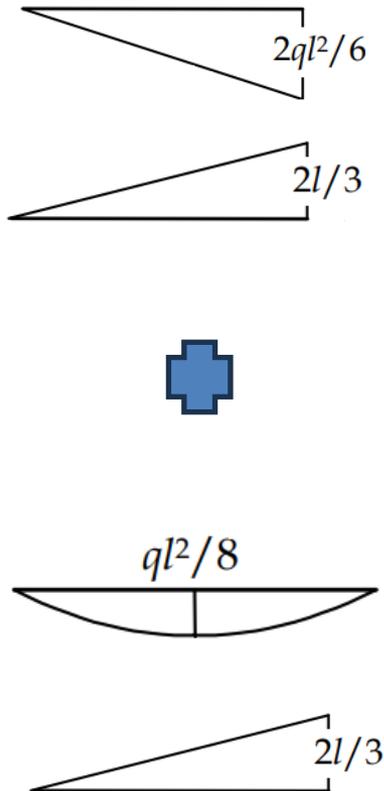


Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.

$\int_0^l M M_0 dx$				
		$\overline{M_A} M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M_B} M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M_C} M_A l$
		$\frac{1}{2} \overline{M_A} M_B l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B} M_B l$	$\frac{1}{6} \overline{M_C} M_B l$
		$\frac{1}{2} \overline{M_A} M_C l$	$\frac{1}{6} \overline{M_B} M_C l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C} M_C l$
		$\frac{2}{3} \overline{M_A} M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B} M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C} M_D l$

$$\int_0^l M_1 M_0 dx = -\frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{2ql^2}{6} \right) (l) - \frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{ql^2}{8} \right) (l);$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{10} usando o PFV

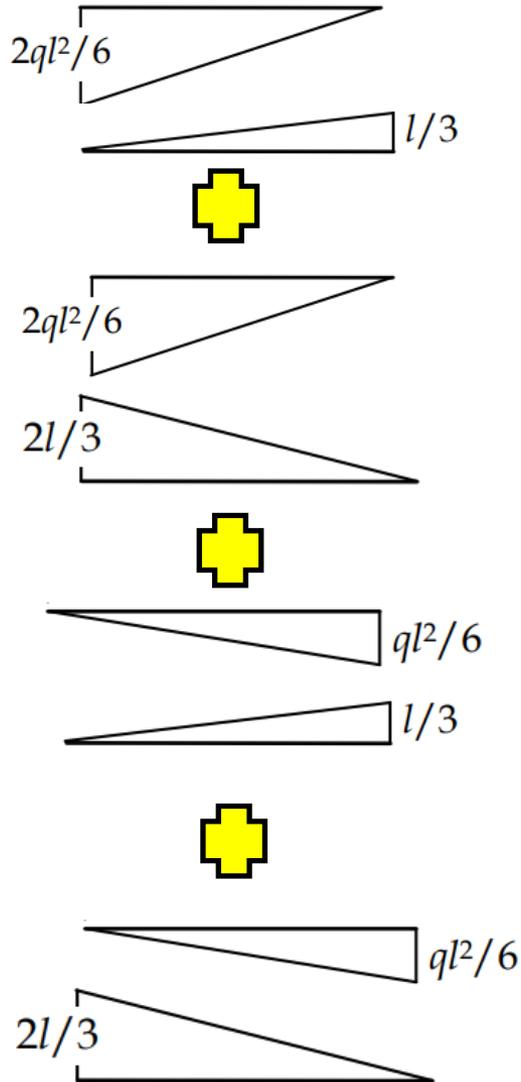


Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.

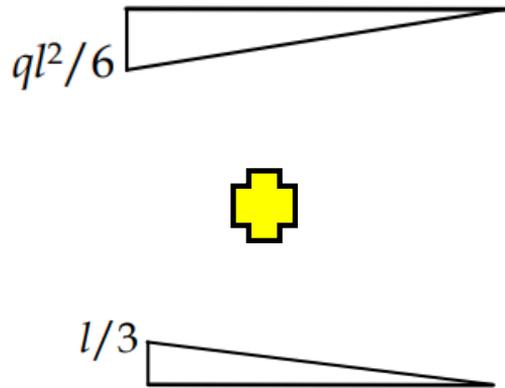
$\int_0^l \overline{M} M dx$	$\overline{M}_B \begin{array}{ c } \hline \leftarrow l \rightarrow \\ \hline \end{array} M_C$		
	$\overline{M}_A \begin{array}{ c } \hline \leftarrow l \rightarrow \\ \hline \end{array}$	$\overline{M}_B \begin{array}{ c } \hline \leftarrow l \rightarrow \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline \leftarrow l \rightarrow \\ \hline \end{array} M_C$
	$M_A \begin{array}{ c } \hline \leftarrow l \rightarrow \\ \hline \end{array}$	$\overline{M}_A M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M}_B M_A l$
$M_B \begin{array}{ c } \hline \leftarrow l \rightarrow \\ \hline \end{array} M_C$	$M_B \begin{array}{ c } \hline \leftarrow l \rightarrow \\ \hline \end{array} M_C$	$\frac{1}{2} \overline{M}_A M_B l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_B M_B l$
	$\begin{array}{ c } \hline \leftarrow l \rightarrow \\ \hline \end{array} M_C$	$\frac{1}{2} \overline{M}_A M_C l$	$\frac{1}{6} \overline{M}_B M_C l$
	$\begin{array}{ c } \hline \leftarrow l \rightarrow \\ \hline \end{array} M_D$	$\frac{2}{3} \overline{M}_A M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_B M_D l$
		$\frac{1}{2} \overline{M}_C M_A l$	$\frac{1}{6} \overline{M}_C M_B l$
		$\frac{1}{2} \overline{M}_C M_C l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_C M_C l$
		$\frac{1}{3} \overline{M}_C M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_C M_D l$

$$\int_l^{2l} M_1 M_0 dx = -\frac{1}{6} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{2ql^2}{6} \right) (l) - \frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{ql^2}{6} \right) (l) - \frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{2ql^2}{6} \right) (l) - \frac{1}{6} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{ql^2}{6} \right) (l);$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{10} usando o PFV

Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.



$\int_0^l MMdx$				
		$\overline{M_A}M_A l$		
		$\overline{M_A}M_B l$		$\frac{1}{2}\overline{M_C}M_B l$
		$\frac{1}{2}\overline{M_A}M_C l$		$\frac{1}{3}\overline{M_C}M_C l$
		$\frac{2}{3}\overline{M_A}M_D l$		$\frac{1}{3}\overline{M_C}M_D l$

$$\int_{2l}^{3l} M_1 M_0 dx = -\frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{ql^2}{6} \right) (l);$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{10} usando o PFV

$$\int_0^l M_1 M_0 dx = -\frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{2ql^2}{6} \right) (l) - \frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{ql^2}{8} \right) (l);$$

$$\int_l^{2l} M_1 M_0 dx = -\frac{1}{6} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{2ql^2}{6} \right) (l) - \frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{ql^2}{6} \right) (l) - \frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{2ql^2}{6} \right) (l) - \frac{1}{6} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{ql^2}{6} \right) (l);$$

$$\int_{2l}^{3l} M_1 M_0 dx = -\frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{ql^2}{6} \right) (l);$$

$$\int_0^{3l} M_1 M_0 dx = -\frac{ql^4}{4}.$$

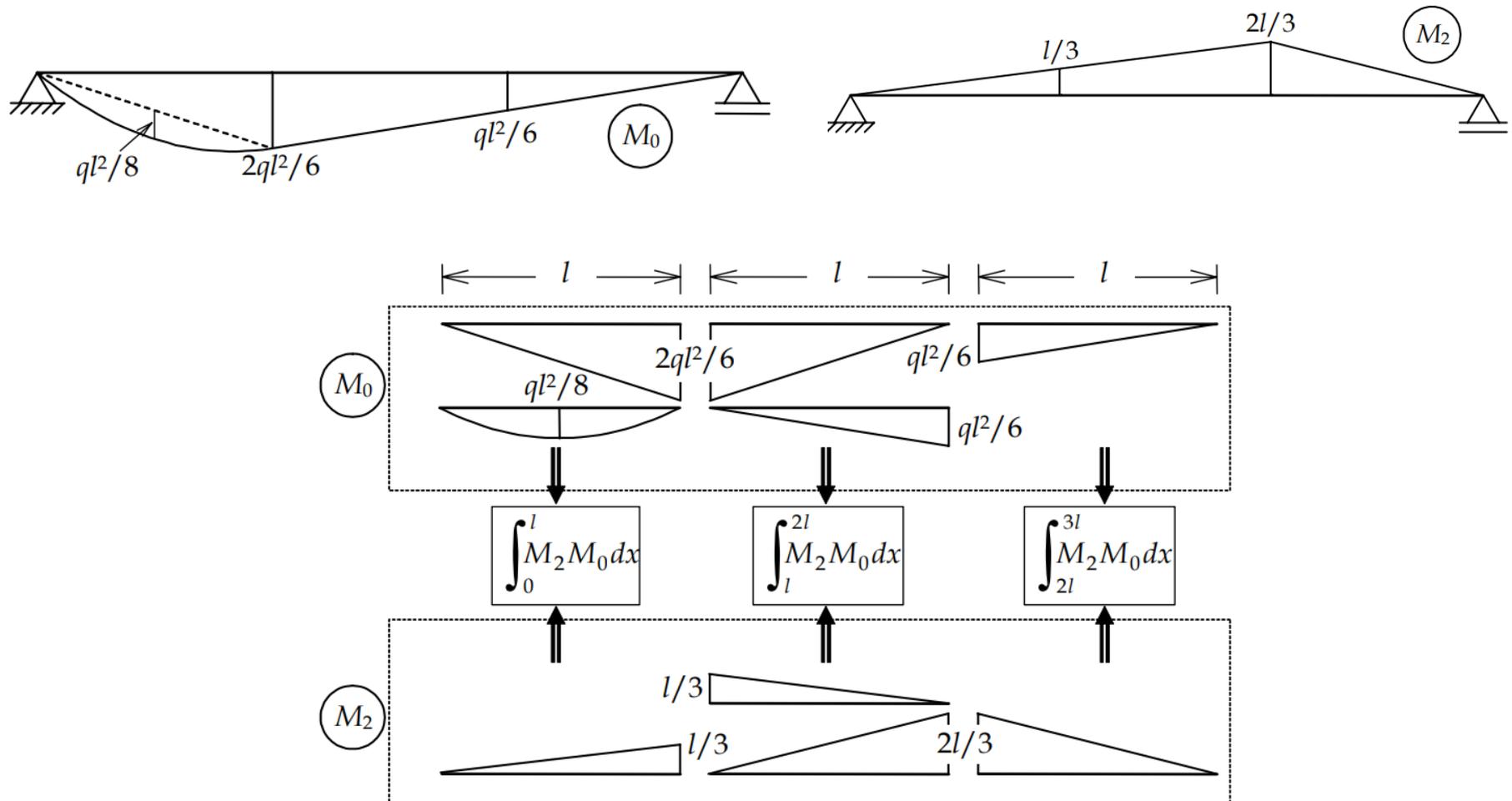
O valor final de δ_{10} é:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_1 M_0 dx = -\frac{ql^4}{4EI}.$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{20} usando o PFV.

Este cálculo é análogo ao cálculo do termo de carga δ_{10} .



EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{20} usando o PFV

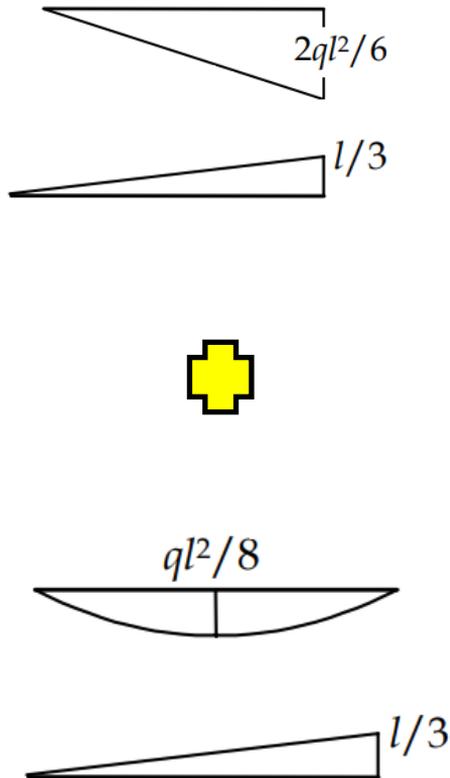


Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.

$\int_0^l MMdx$				
		$\overline{M}_A M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M}_B M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M}_C M_A l$
		$\frac{1}{2} \overline{M}_A M_B l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_B M_B l$	$\frac{1}{6} \overline{M}_C M_B l$
		$\frac{1}{2} \overline{M}_A M_C l$	$\frac{1}{6} \overline{M}_B M_C l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_C M_C l$
		$\frac{2}{3} \overline{M}_A M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_B M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_C M_D l$

$$\int_0^l M_2 M_0 dx = -\frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{2ql^2}{6} \right) (l) - \frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{ql^2}{8} \right) (l);$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{20} usando o PFV

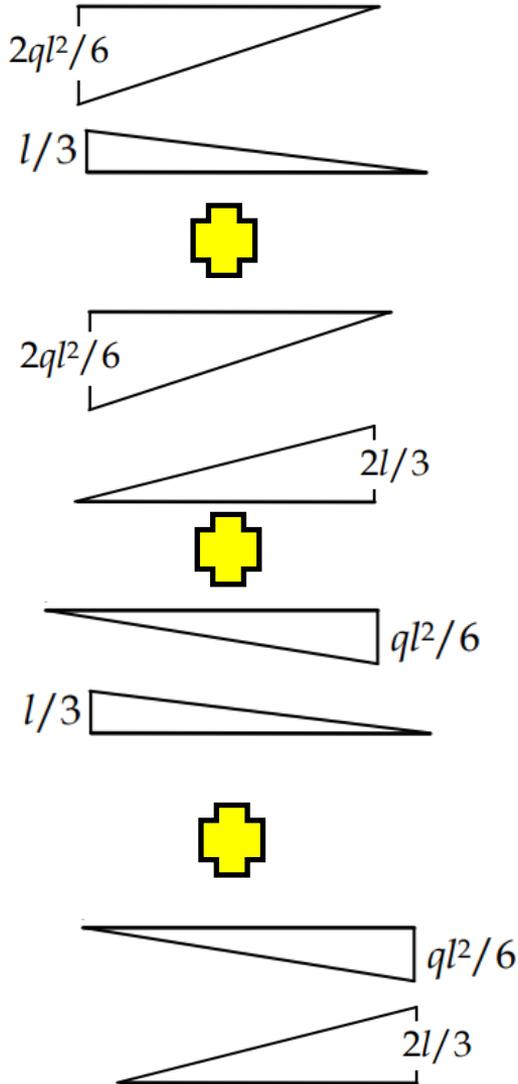


Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.

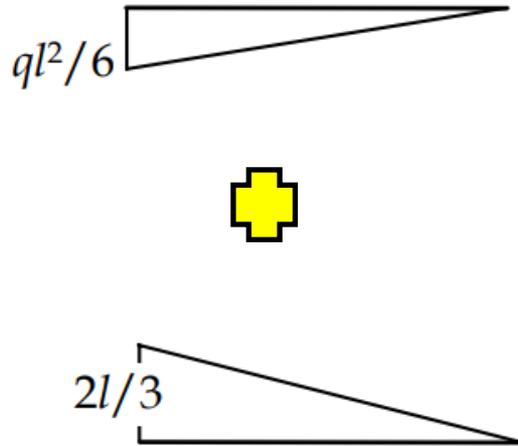
$\int_0^l MM dx$				
		$\overline{M_A} M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M_B} M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M_C} M_A l$
		$\frac{1}{2} \overline{M_A} M_B l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B} M_B l$	$\frac{1}{6} \overline{M_C} M_B l$
		$\frac{1}{2} \overline{M_A} M_C l$	$\frac{1}{6} \overline{M_B} M_C l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C} M_C l$
		$\frac{2}{3} \overline{M_A} M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B} M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C} M_D l$

$$\int_l^{2l} M_2 M_0 dx = -\frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{2ql^2}{6} \right) (l) - \frac{1}{6} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{ql^2}{6} \right) (l) - \frac{1}{6} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{2ql^2}{6} \right) (l) - \frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{ql^2}{6} \right) (l);$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{20} usando o PFV

Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.



$\int_0^l MM dx$					
		$\overline{M_A M_A} l$	$\frac{1}{2} \overline{M_B M_A} l$	$\frac{1}{2} \overline{M_C M_A} l$	
		$\frac{1}{2} \overline{M_A M_B} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B M_B} l$	$\frac{1}{6} \overline{M_C M_B} l$	
		$\frac{1}{2} \overline{M_A M_C} l$	$\frac{1}{6} \overline{M_B M_C} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C M_C} l$	
		$\frac{2}{3} \overline{M_A M_D} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B M_D} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C M_D} l$	

$$\int_{2l}^{3l} M_2 M_0 dx = -\frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{ql^2}{6} \right) (l);$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{20} usando o PFV

$$\int_0^l M_2 M_0 dx = -\frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{2ql^2}{6} \right) (l) - \frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{ql^2}{8} \right) (l);$$

$$\int_l^{2l} M_2 M_0 dx = -\frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{2ql^2}{6} \right) (l) - \frac{1}{6} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{ql^2}{6} \right) (l) - \frac{1}{6} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{2ql^2}{6} \right) (l) - \frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{ql^2}{6} \right) (l);$$

$$\int_{2l}^{3l} M_2 M_0 dx = -\frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{ql^2}{6} \right) (l);$$

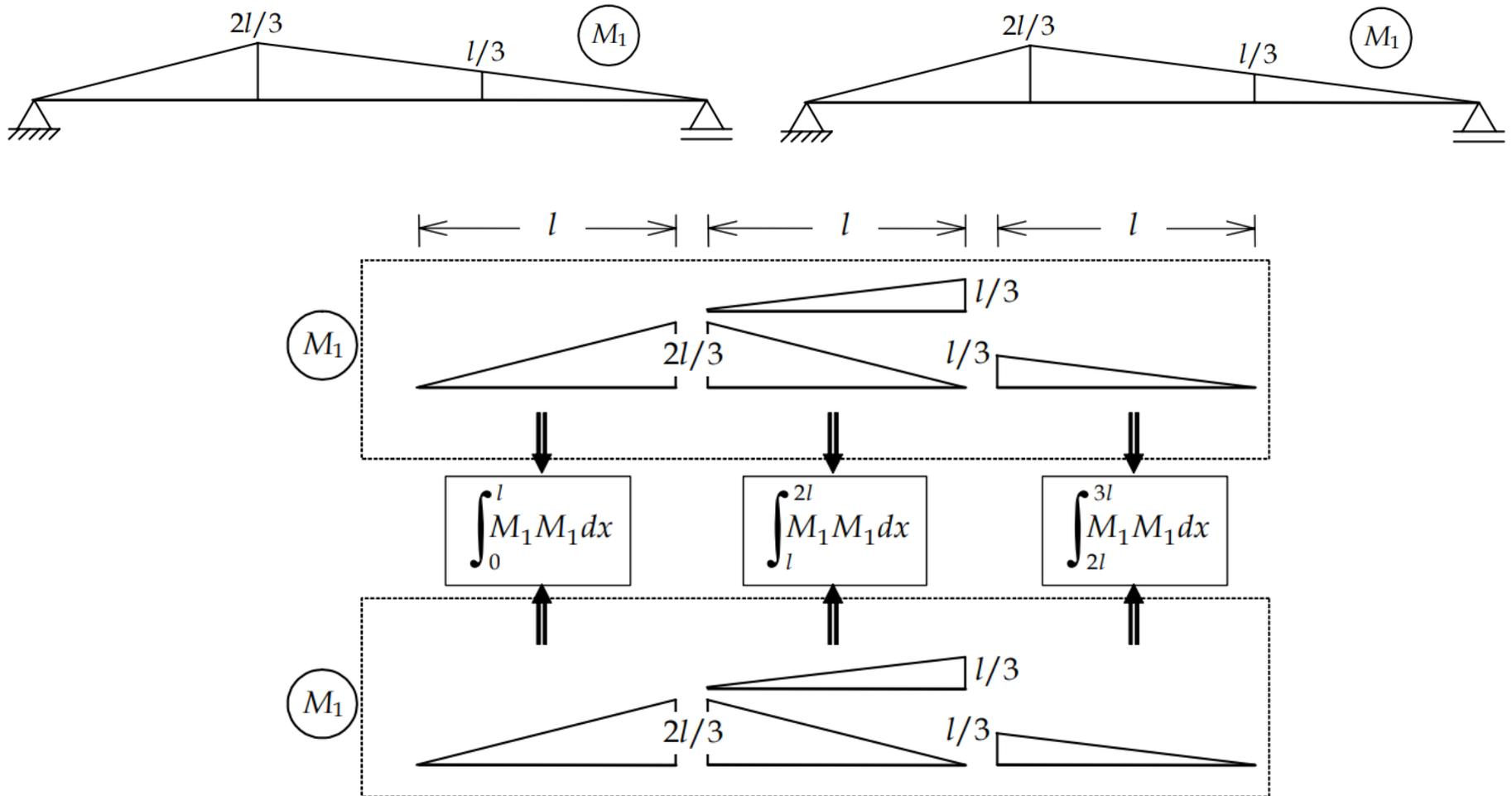
$$\int_0^{3l} M_2 M_0 dx = -\frac{5ql^4}{24}.$$

Isso resulta em:

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_2 M_0 dx = -\frac{5ql^4}{24EI}.$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

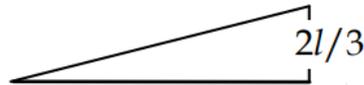
Cálculo de δ_{11} usando o PFV.



EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{11} usando o PFV

Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.



$\int_0^l MM dx$				
		$\overline{M_A M_A} l$	$\frac{1}{2} \overline{M_B M_A} l$	$\frac{1}{2} \overline{M_C M_A} l$
		$\frac{1}{2} \overline{M_A M_B} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B M_B} l$	$\frac{1}{6} \overline{M_C M_B} l$
		$\frac{1}{2} \overline{M_A M_C} l$	$\frac{1}{6} \overline{M_B M_C} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C M_C} l$
		$\frac{2}{3} \overline{M_A M_D} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B M_D} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C M_D} l$

$$\int_0^l M_1 M_1 dx = + \frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l);$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{11} usando o PFV

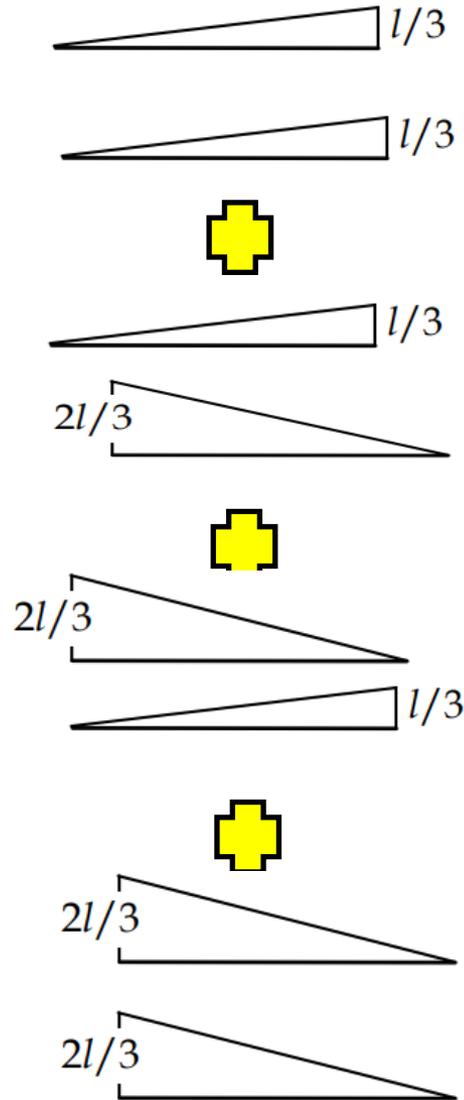


Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.

$\int_0^l MM dx$					

$$\int_l^{2l} M_1 M_1 dx = +\frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l) + \frac{1}{6} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l) + \frac{1}{6} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l) + \frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l);$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{11} usando o PFV

Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.



$\int_0^l MM dx$				
		$\overline{M_A M_A} l$	$\frac{1}{2} \overline{M_B M_A} l$	$\frac{1}{2} \overline{M_C M_A} l$
		$\frac{1}{2} \overline{M_A M_B} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B M_B} l$	$\frac{1}{6} \overline{M_C M_B} l$
		$\frac{1}{2} \overline{M_A M_C} l$	$\frac{1}{6} \overline{M_B M_C} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C M_C} l$
		$\frac{2}{3} \overline{M_A M_D} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B M_D} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C M_D} l$

$$\int_{2l}^{3l} M_1 M_1 dx = + \frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l);$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{11} usando o PFV

$$\int_0^l M_1 M_1 dx = +\frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l);$$

$$\int_l^{2l} M_1 M_1 dx = +\frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l) + \frac{1}{6} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l) + \frac{1}{6} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l) + \frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l);$$

$$\int_{2l}^{3l} M_1 M_1 dx = +\frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l);$$

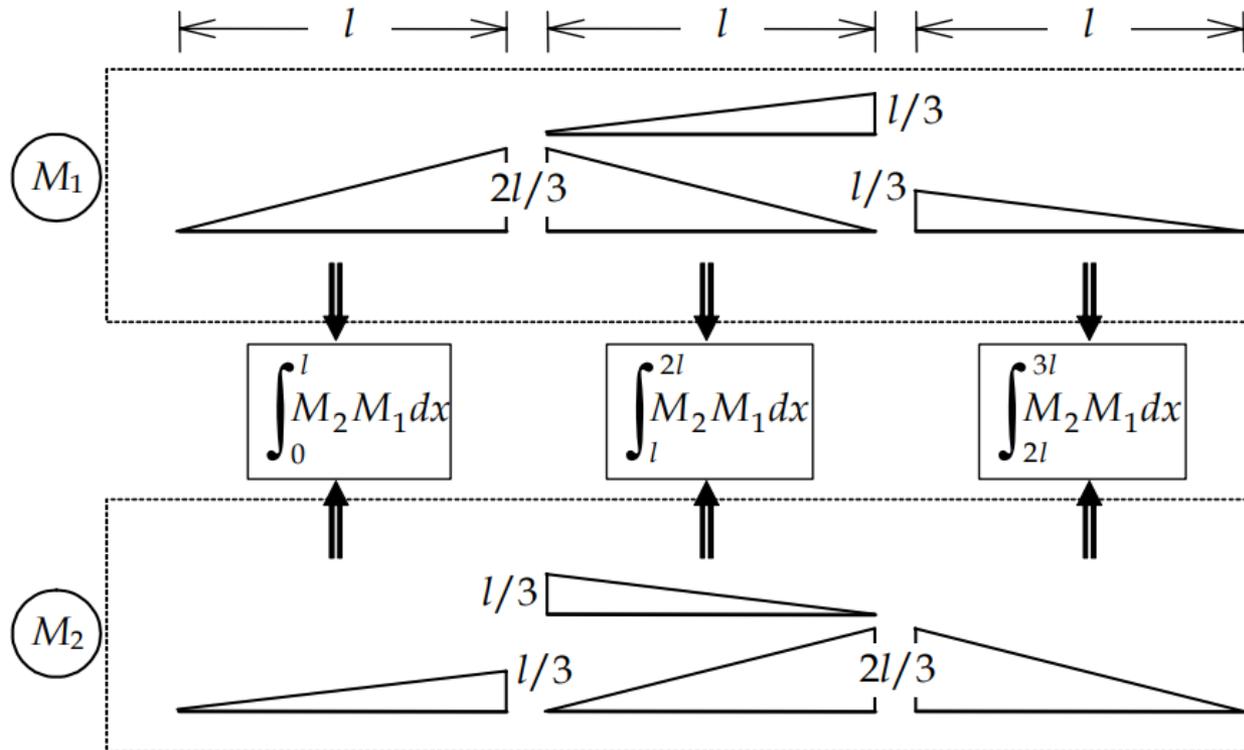
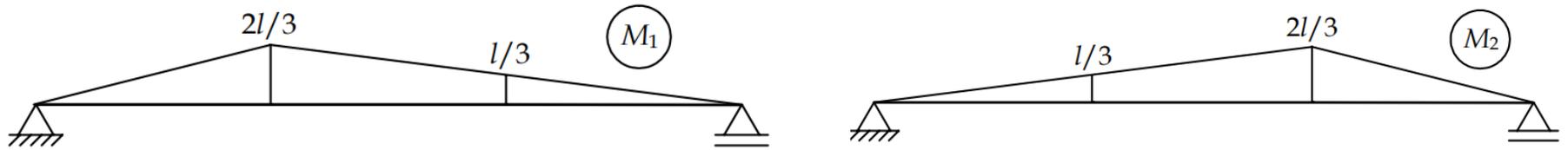
$$\int_0^{3l} M_1 M_1 dx = +\frac{4l^3}{9}.$$

O valor resultante para δ_{11} é:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_1 M_1 dx = +\frac{4l^3}{9EI}.$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

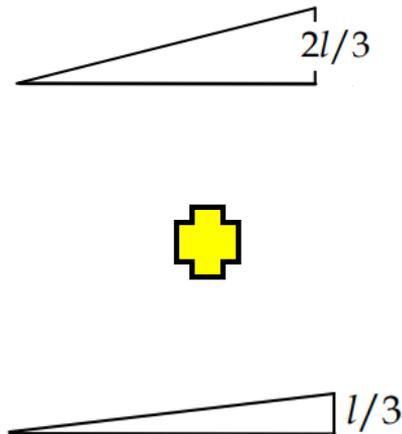
Cálculo de δ_{12} e δ_{21} usando o PFV.



EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{12} e δ_{21} usando o PFV.

Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.



$\int_0^l MMdx$				
	M_A	$\overline{M_A M_A} l$	$\frac{1}{2} \overline{M_B M_A} l$	$\frac{1}{2} \overline{M_C M_A} l$
		$\frac{1}{2} \overline{M_A M_B} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B M_B} l$	$\frac{1}{6} \overline{M_C M_B} l$
		$\frac{1}{2} \overline{M_A M_C} l$	$\frac{1}{6} \overline{M_B M_C} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C M_C} l$
		$\frac{2}{3} \overline{M_A M_D} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B M_D} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C M_D} l$

$$\int_0^l M_2 M_1 dx = \int_0^l M_1 M_2 dx = + \frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l);$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{12} e δ_{21} usando o PFV.

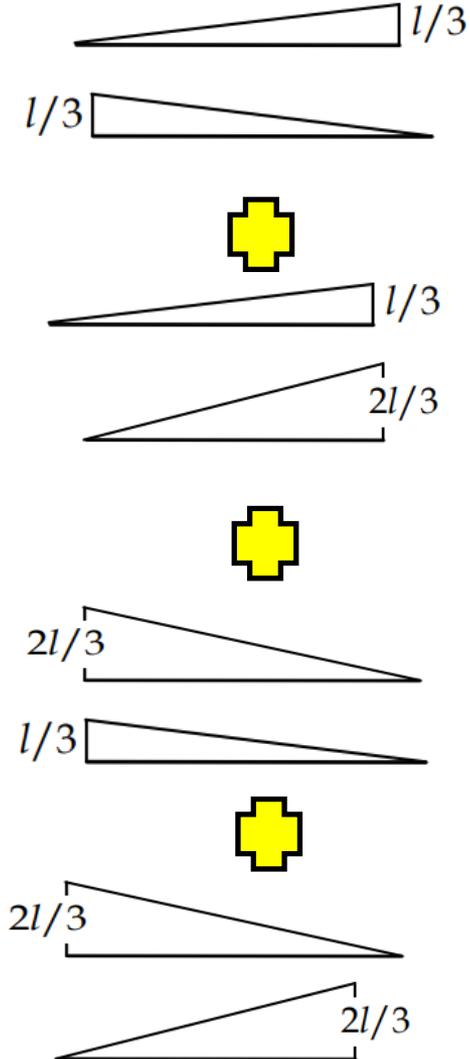
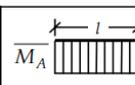
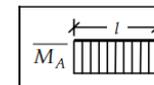
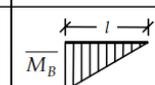
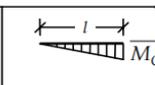
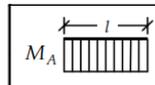
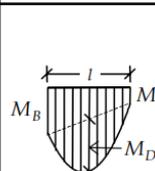
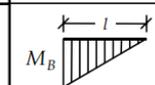
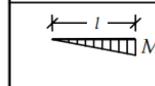
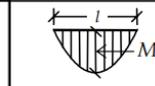


Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.

$\int_0^l MMdx$	$\overline{M_B}$ 		$\overline{M_C}$ 	
	$\overline{M_A}$ 	$\overline{M_B}$ 	$\overline{M_C}$ 	
	M_A 	$\overline{M_A M_A l}$	$\frac{1}{2} \overline{M_B M_A l}$	$\frac{1}{2} \overline{M_C M_A l}$
	M_B 	$\frac{1}{2} \overline{M_A M_B l}$	$\frac{1}{3} \overline{M_B M_B l}$	$\frac{1}{6} \overline{M_C M_B l}$
	M_C 	$\frac{1}{2} \overline{M_A M_C l}$	$\frac{1}{6} \overline{M_B M_C l}$	$\frac{1}{3} \overline{M_C M_C l}$
		$\frac{2}{3} \overline{M_A M_D l}$	$\frac{1}{3} \overline{M_B M_D l}$	$\frac{1}{3} \overline{M_C M_D l}$

$$\int_l^{2l} M_2 M_1 dx = \int_l^{2l} M_1 M_2 dx = +\frac{1}{6} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l) + \frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l) + \frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l) + \frac{1}{6} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l);$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{12} e δ_{21} usando o PFV.

Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.



$\int_0^l MM dx$				
		$\overline{M_A M_A} l$	$\frac{1}{2} \overline{M_B M_A} l$	$\frac{1}{2} \overline{M_C M_A} l$
		$\frac{1}{2} \overline{M_A M_B} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B M_B} l$	$\frac{1}{6} \overline{M_C M_B} l$
		$\frac{1}{2} \overline{M_A M_C} l$	$\frac{1}{6} \overline{M_B M_C} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C M_C} l$
		$\frac{2}{3} \overline{M_A M_D} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B M_D} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C M_D} l$

$$\int_{2l}^{3l} M_2 M_1 dx = \int_{2l}^{3l} M_1 M_2 dx = + \frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l);$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{12} e δ_{21} usando o PFV.

$$\int_0^l M_2 M_1 dx = \int_0^l M_1 M_2 dx = +\frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l);$$

$$\int_l^{2l} M_2 M_1 dx = \int_l^{2l} M_1 M_2 dx = +\frac{1}{6} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l) + \frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l) + \frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l) + \frac{1}{6} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l);$$

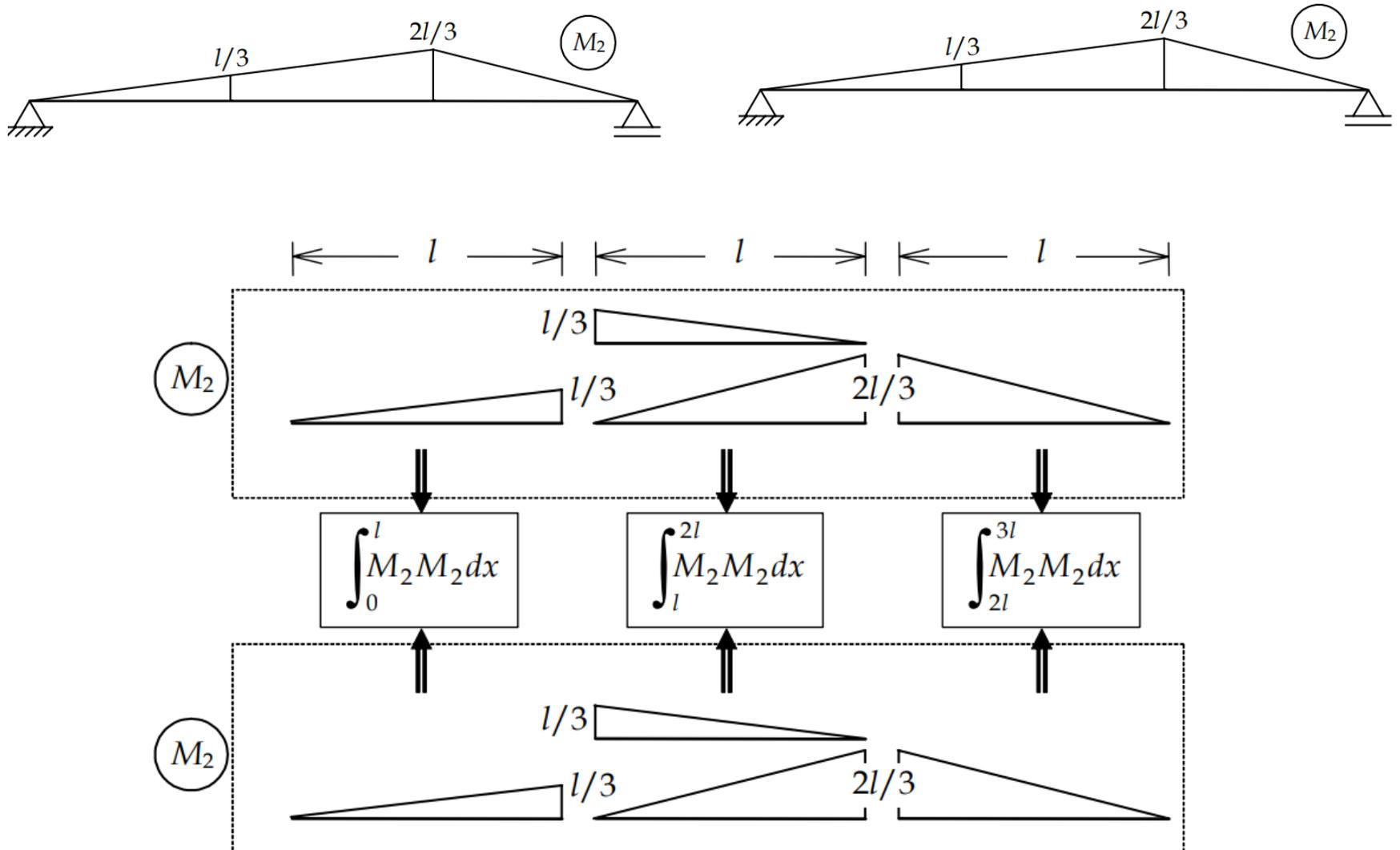
$$\int_{2l}^{3l} M_2 M_1 dx = \int_{2l}^{3l} M_1 M_2 dx = +\frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l);$$

$$\int_0^{3l} M_2 M_1 dx = \int_0^{3l} M_1 M_2 dx = +\frac{7l^3}{18};$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_2 M_1 dx = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_1 M_2 dx = +\frac{7l^3}{18EI}.$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{22} usando o PFV.



EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{22} usando o PFV.

Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.



$\int_0^l MMdx$				
		$\overline{M_A}M_A l$	$\frac{1}{2}\overline{M_B}M_A l$	$\frac{1}{2}\overline{M_C}M_A l$
		$\frac{1}{2}\overline{M_A}M_B l$	$\frac{1}{3}\overline{M_B}M_B l$	$\frac{1}{6}\overline{M_C}M_B l$
		$\frac{1}{2}\overline{M_A}M_C l$	$\frac{1}{6}\overline{M_B}M_C l$	$\frac{1}{3}\overline{M_C}M_C l$
		$\frac{2}{3}\overline{M_A}M_D l$	$\frac{1}{3}\overline{M_B}M_D l$	$\frac{1}{3}\overline{M_C}M_D l$

$$\int_0^l M_2 M_2 dx = +\frac{1}{3}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{l}{3}\right)(l);$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{22} usando o PFV.

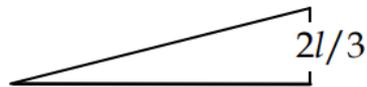
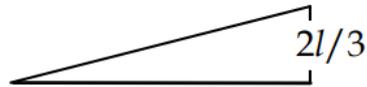


Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.

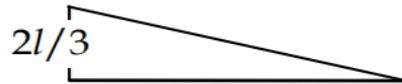
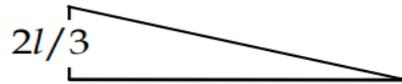
$\int_0^l MMdx$			$\overline{M_B} \overline{M_C}$	
	$\overline{M_A}$	$\overline{M_B}$	$\overline{M_B}$	$\overline{M_C}$
	M_A	M_B	M_B	M_C
$\overline{M_A}$	$\overline{M_A} M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M_A} M_B l$	$\frac{1}{2} \overline{M_B} M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M_C} M_A l$
$\overline{M_B}$	$\frac{1}{2} \overline{M_A} M_B l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B} M_B l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B} M_B l$	$\frac{1}{6} \overline{M_C} M_B l$
$\overline{M_C}$	$\frac{1}{2} \overline{M_A} M_C l$	$\frac{1}{6} \overline{M_B} M_C l$	$\frac{1}{6} \overline{M_B} M_C l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C} M_C l$
$\overline{M_D}$	$\frac{2}{3} \overline{M_A} M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B} M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B} M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C} M_D l$

$$\int_l^{2l} M_2 M_2 dx = +\frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l) + \frac{1}{6} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l) + \frac{1}{6} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l) + \frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l);$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{22} usando o PFV.

Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.



$\int_0^l MMdx$				
		$\overline{M_A M_A} l$	$\frac{1}{2} \overline{M_B M_A} l$	$\frac{1}{2} \overline{M_C M_A} l$
		$\frac{1}{2} \overline{M_A M_B} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B M_B} l$	$\frac{1}{6} \overline{M_C M_B} l$
		$\frac{1}{2} \overline{M_A M_C} l$	$\frac{1}{6} \overline{M_B M_C} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C M_C} l$
		$\frac{2}{3} \overline{M_A M_D} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B M_D} l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C M_D} l$

$$\int_{2l}^{3l} M_2 M_2 dx = + \frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l);$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Cálculo de δ_{12} e δ_{21} usando o PFV.

$$\int_0^l M_2 M_2 dx = +\frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l);$$

$$\int_l^{2l} M_2 M_2 dx = +\frac{1}{3} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l) + \frac{1}{6} \left(\frac{l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l) + \frac{1}{6} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right) (l) + \frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l);$$

$$\int_{2l}^{3l} M_2 M_2 dx = +\frac{1}{3} \left(\frac{2l}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) (l);$$

$$\int_0^{3l} M_2 M_2 dx = +\frac{4l^3}{9};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_2 M_2 dx = +\frac{4l^3}{9EI}.$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Passo 3: Superposição de Efeitos

Sistema de compatibilidade final para este exemplo:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow -\frac{ql^4}{EI} \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 5/24 \end{Bmatrix} + \frac{l^3}{EI} \begin{bmatrix} 4/9 & 7/18 \\ 7/18 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

A partir da solução deste sistema de equações determinam-se os valores dos hiperestáticos X_1 e X_2 em função de l (comprimento de um vão da viga) e q (taxa de carregamento distribuído):

$$\begin{cases} X_1 = +\frac{13ql}{20} \\ X_2 = -\frac{ql}{10} \end{cases}.$$

Metodologia: Método das Forças

Passo 4: Determinação dos esforços internos

Existem duas alternativas para isso:

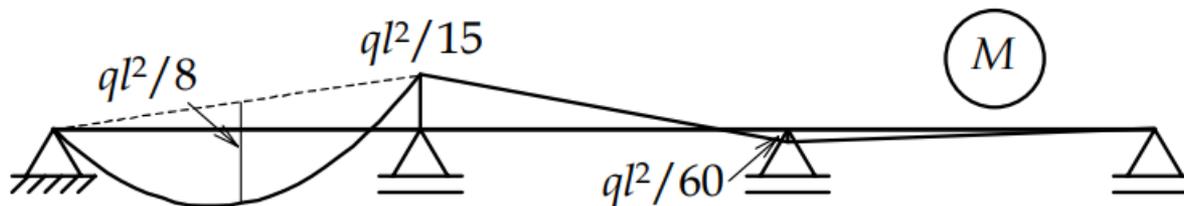
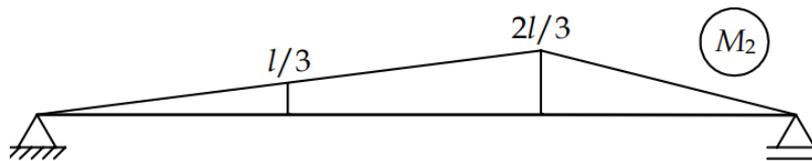
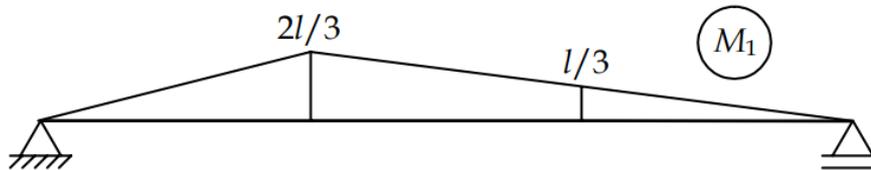
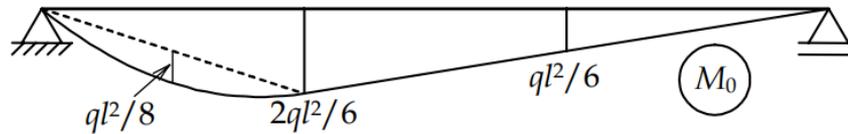
- Calcula-se o Sistema Principal com o carregamento aplicado simultaneamente aos hiperestáticos X_1 e X_2 com os valores corretos encontrados;
- Utiliza-se a própria superposição de casos básicos para a obtenção dos momentos fletores finais: $M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$.

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Passo 4: Determinação dos esforços internos

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2.$$

$$\begin{cases} X_1 = +\frac{13ql}{20} \\ X_2 = -\frac{ql}{10} \end{cases}.$$



EXEMPLO 1: Viga Contínua

Passo 4: Determinação dos esforços internos

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2.$$

$$\begin{cases} X_1 = +\frac{13ql}{20} \\ X_2 = -\frac{ql}{10} \end{cases}.$$

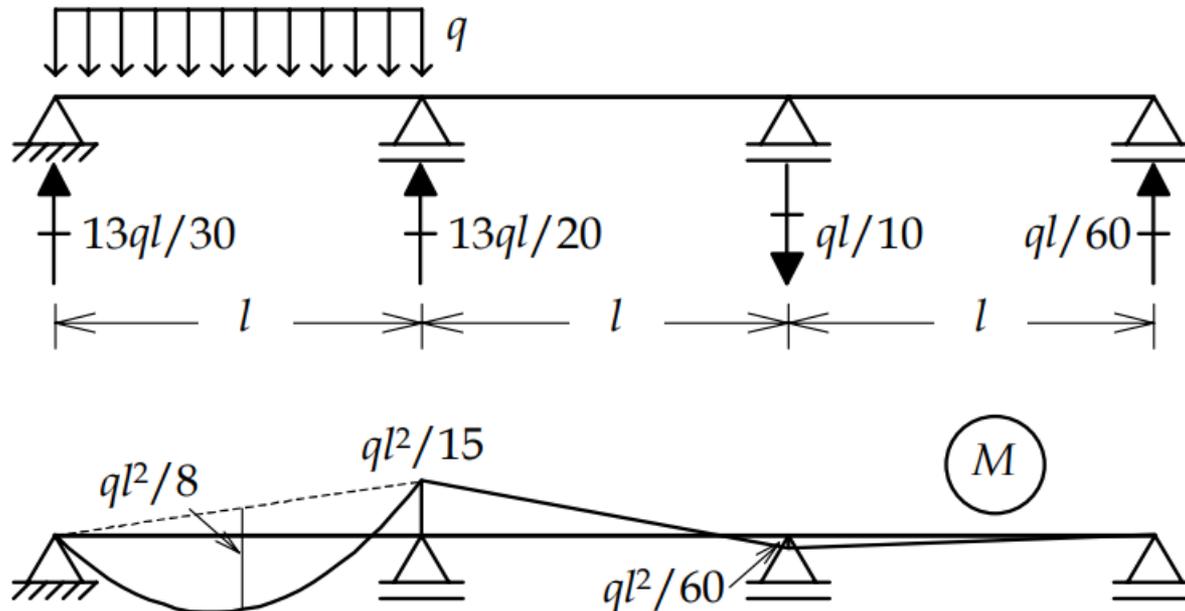


Figura 5.18 – Reações de apoio e diagrama de momentos fletores finais da estrutura da Figura 5.8.

EXERCÍCIO PARA O LAR

- Resolver o problema anterior, considerando o Sistema Principal obtido por introdução de rótulas internas.

Neste caso, são introduzidas duas rótulas nas seções dos dois apoios internos. Os hiperestáticos X_1 e X_2 são momentos fletores associados à continuidade de rotação da viga nestas seções.

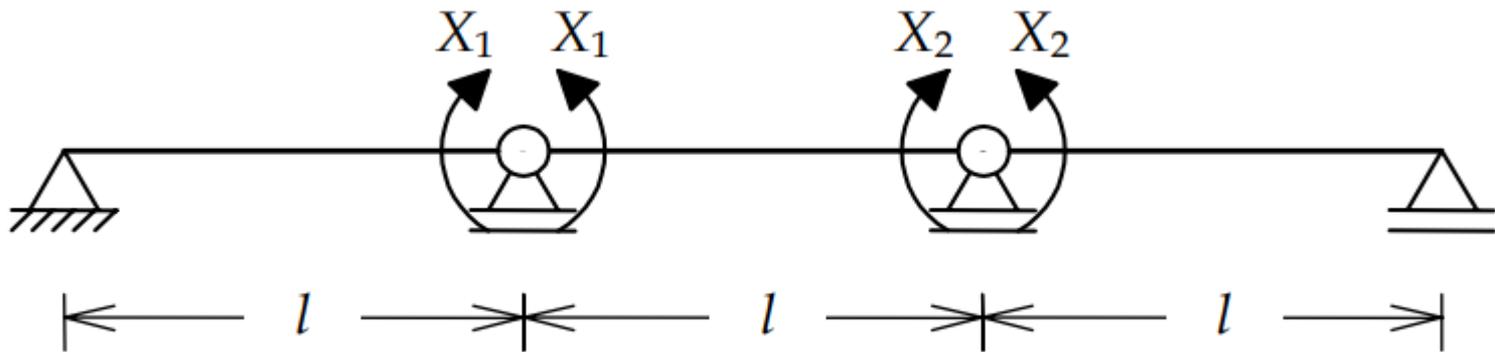


Figura 5.19 – Segunda opção para SP da estrutura da Figura 5.8.

Viga com rótulas

Passo 1: Hiperestáticos e Sistema Principal

Hiperestático: $g = 5 - 3 = 2$.

Sistema Principal (SP): obtida da estrutura original hiperestática pela eliminação de vínculos.

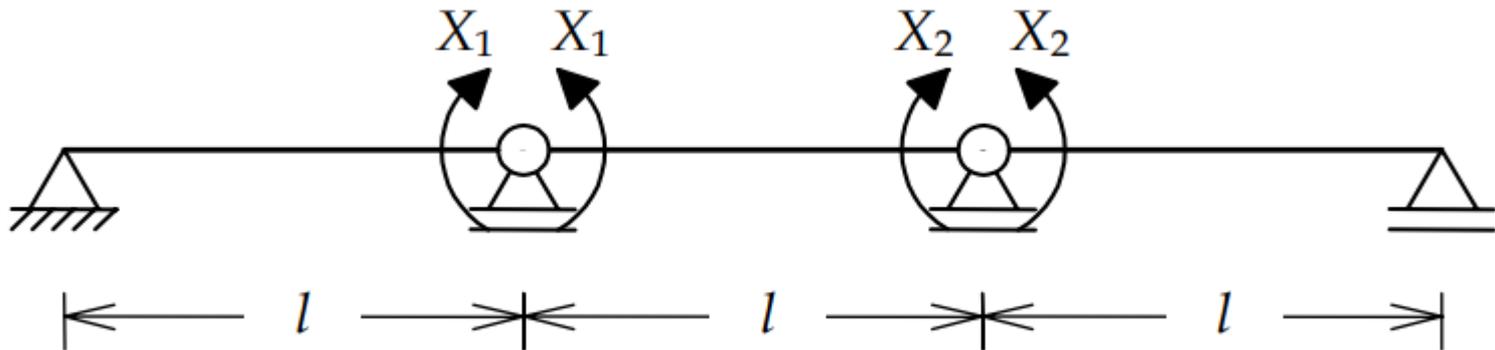


Figura 5.19 – Segunda opção para SP da estrutura da Figura 5.8.

Viga com rótulas

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SP.

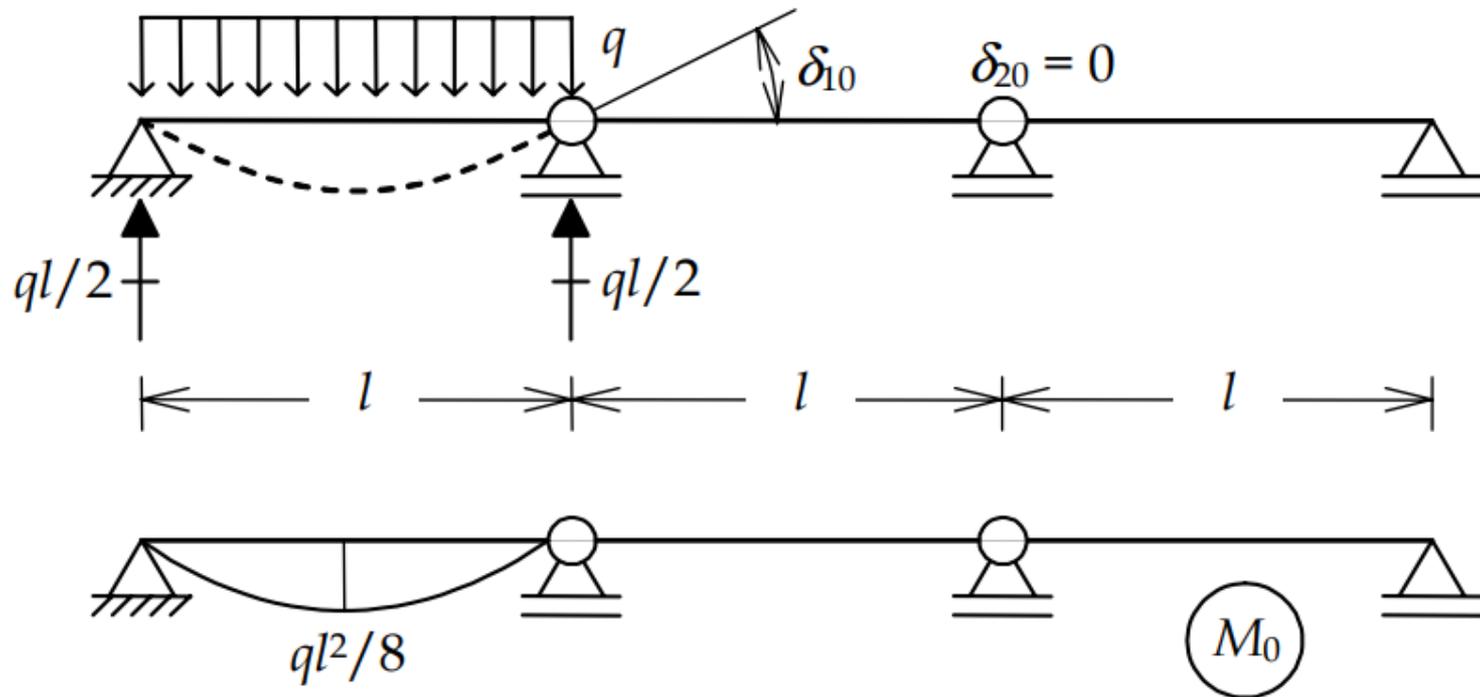
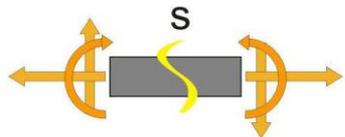


Figura 5.20 – Solicitação externa isolada no SP da Figura 5.19.



Viga com rótulas

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP.

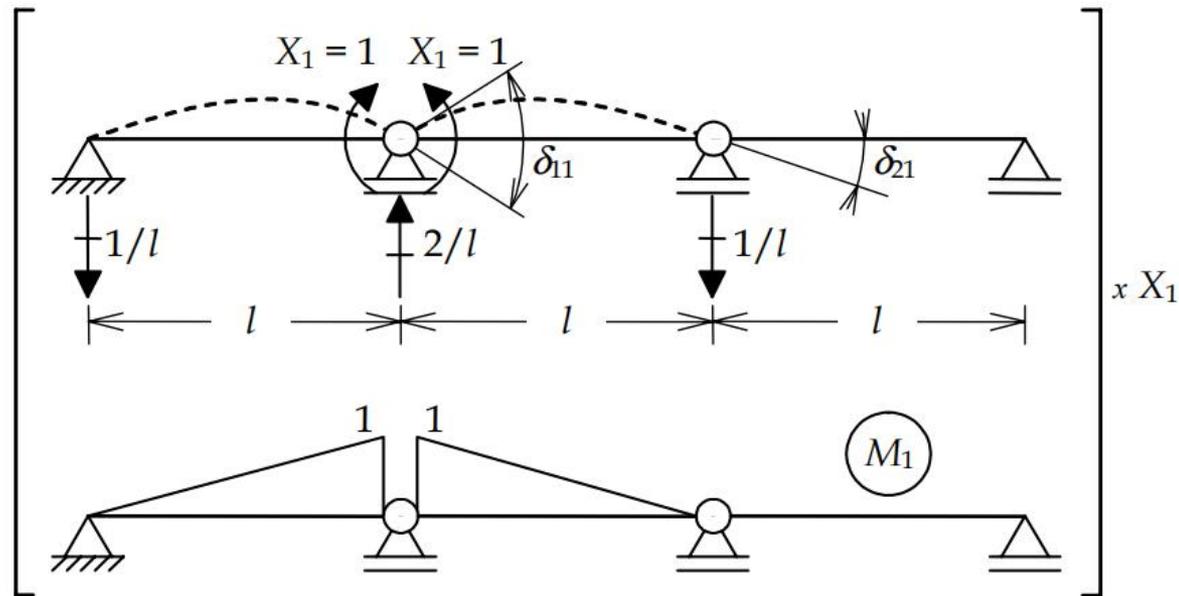


Figura 5.21 – Hiperestático X_1 isolado no SP da Figura 5.19.

δ_{11} → rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada a X_1 devida a $X_1 = 1$ no caso (1);

δ_{21} → rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada a X_2 devida a $X_1 = 1$ no caso (1).

Viga com rótulas

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP.

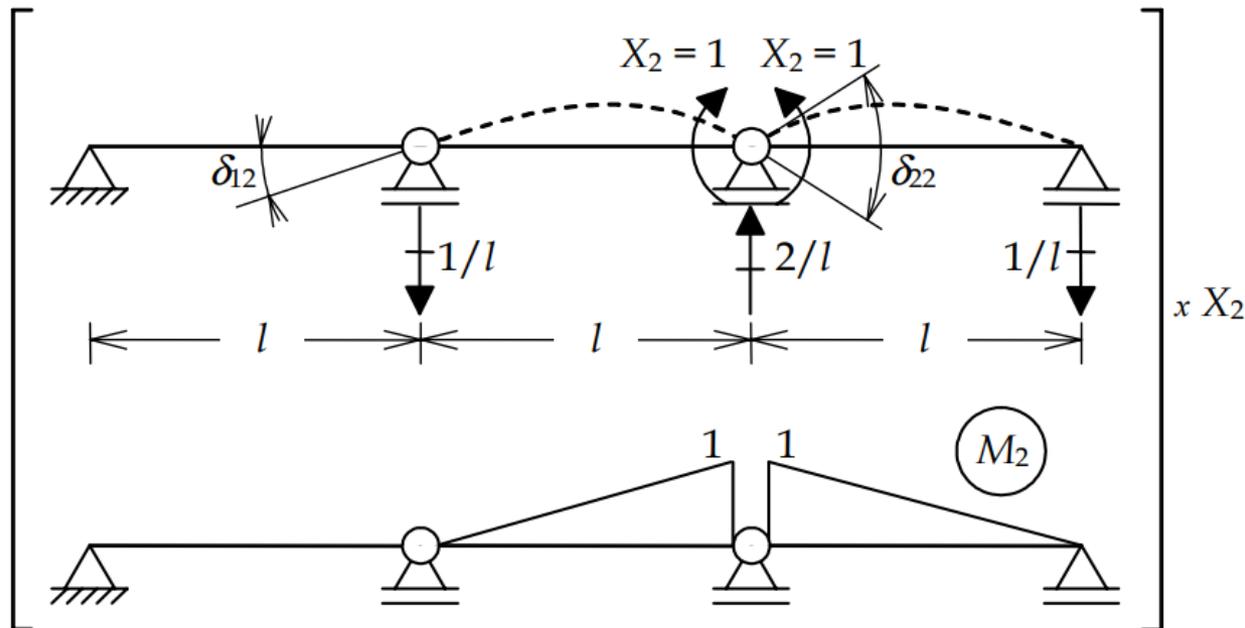


Figura 5.22 – Hiperestático X_2 isolado no SP da Figura 5.19.

δ_{12} → rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada a X_1 devida a $X_2 = 1$ no caso (2);

Viga com rótulas

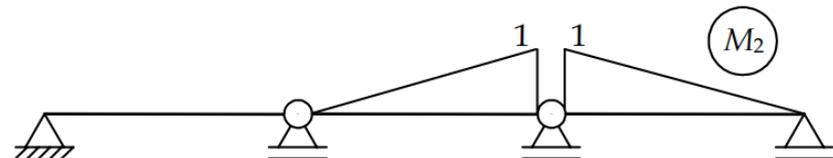
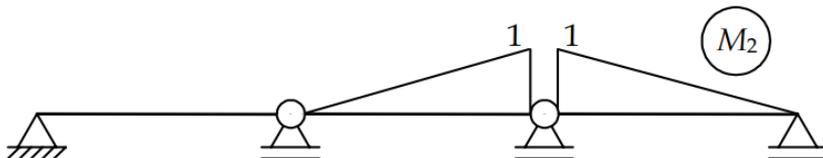
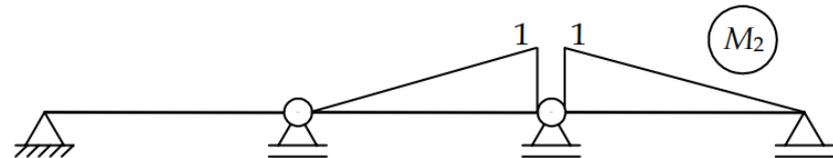
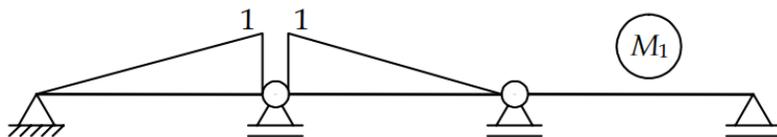
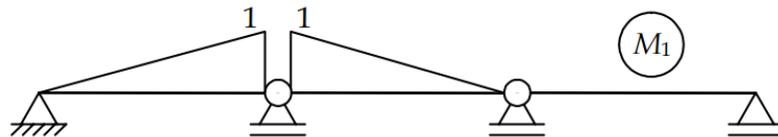
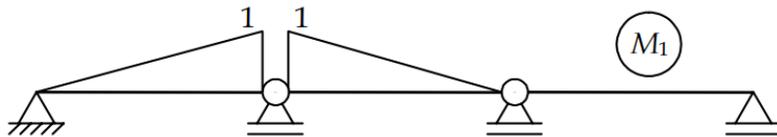
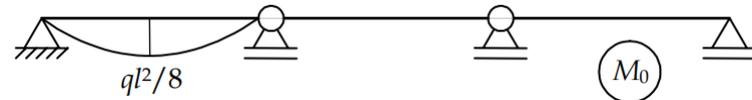
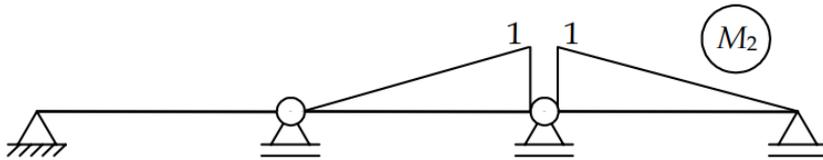
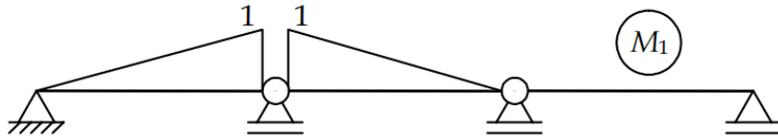
Passo 3: Superposição de Efeitos

Utiliza-se a superposição de efeitos para restabelecer as condições de compatibilidade violadas na criação do SP.

$$\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Viga com rótulas

Cálculo dos δ_{ij} usando o PFV



Viga com rótulas

Cálculo dos δ_{ij} usando o PFV

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} (1) \left(\frac{ql^2}{8} \right) (l) \right] = -\frac{ql^3}{24EI};$$

$$\delta_{20} = 0;$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{3} (1)(1)(l) + \frac{1}{3} (1)(1)(l) \right] = +\frac{2l}{3EI};$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{6} (1)(1)(l) \right] = +\frac{l}{6EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{3} (1)(1)(l) + \frac{1}{3} (1)(1)(l) \right] = +\frac{2l}{3EI}.$$

Viga com rótulas

Passo 3: Superposição de Efeitos

Sistema de compatibilidade final para este exemplo:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow -\frac{ql^3}{EI} \begin{Bmatrix} 1/24 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{l}{EI} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

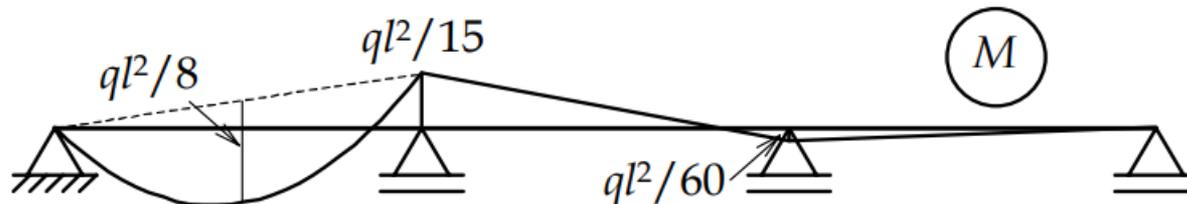
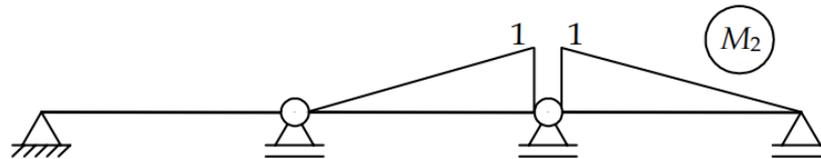
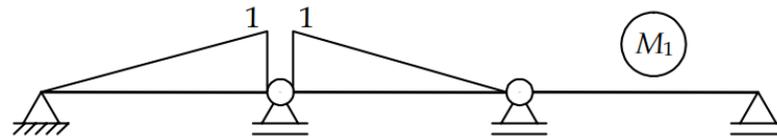
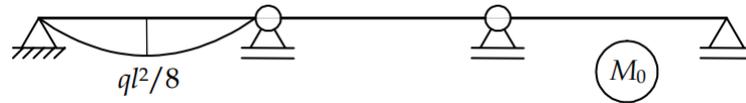
$$\begin{cases} X_1 = +\frac{ql^2}{15} \\ X_2 = -\frac{ql^2}{60} \end{cases}.$$

EXEMPLO 1: Viga Contínua

Passo 4: Determinação dos esforços internos

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2.$$

$$\begin{cases} X_1 = +\frac{ql^2}{15} \\ X_2 = -\frac{ql^2}{60} \end{cases}.$$



EXEMPLO 2: Quadro Fechado

EXEMPLO 2: Quadro Fechado

Quadro externamente isostático: Neste estudo, apenas são discutidos os Sistemas Principais adotados. A solução final da estrutura não é mostrada, visto que isso é feito para diversos outros exemplos.

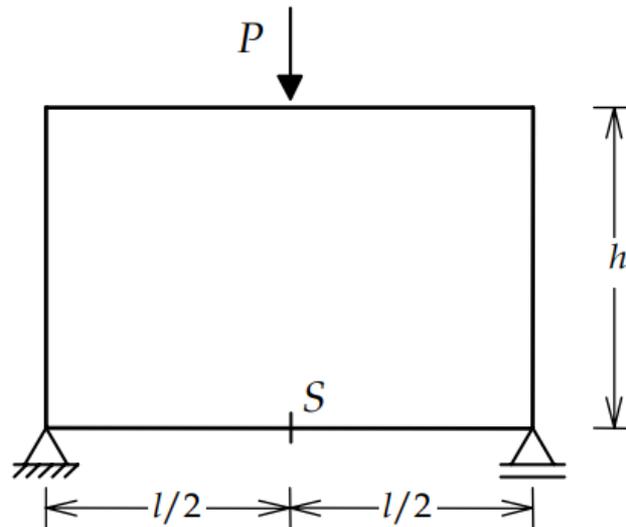


Figura 5.23 – Pórtico plano externamente isostático e com hiperestaticidade interna devida a um anel.

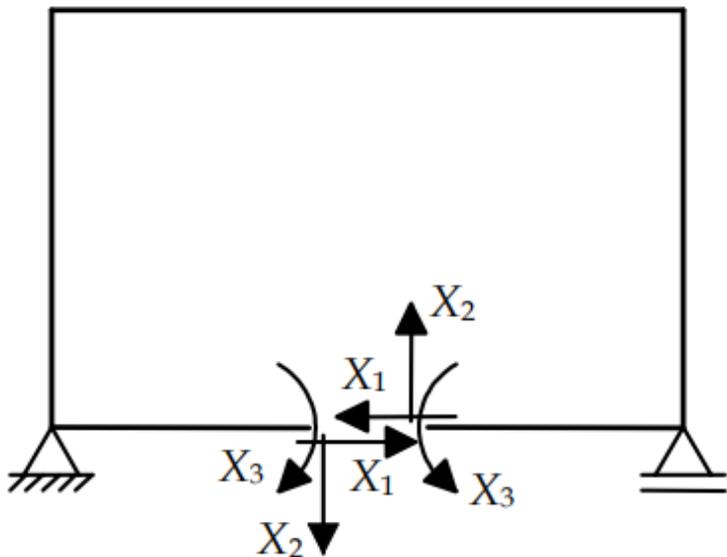
EXEMPLO 2: Quadro Fechado

Passo 1: Hiperestáticos e Sistema Principal

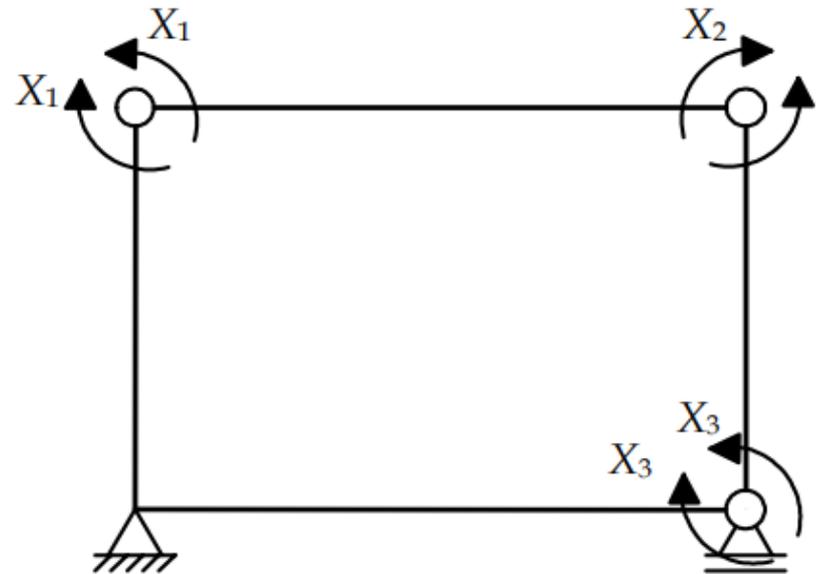
Hiperestático: $g = 6 - 3 = 3$.

$$g = [(n^\circ \text{ de componentes de reação de apoio}) + 3 \cdot (n^\circ \text{ de anéis})] - [3 + (n^\circ \text{ de equações vindas de articulações internas})].$$

Sistema Principal (SP): obtida da estrutura original hiperestática pela eliminação de vínculos.



OU



EXEMPLO 2: Quadro Fechado

Passo 1: Hiperestáticos e Sistema Principal

As rótulas poderiam ser colocadas em quaisquer outros três pontos, desde que não ficassem alinhadas em uma mesma barra, o que caracterizaria uma instabilidade!

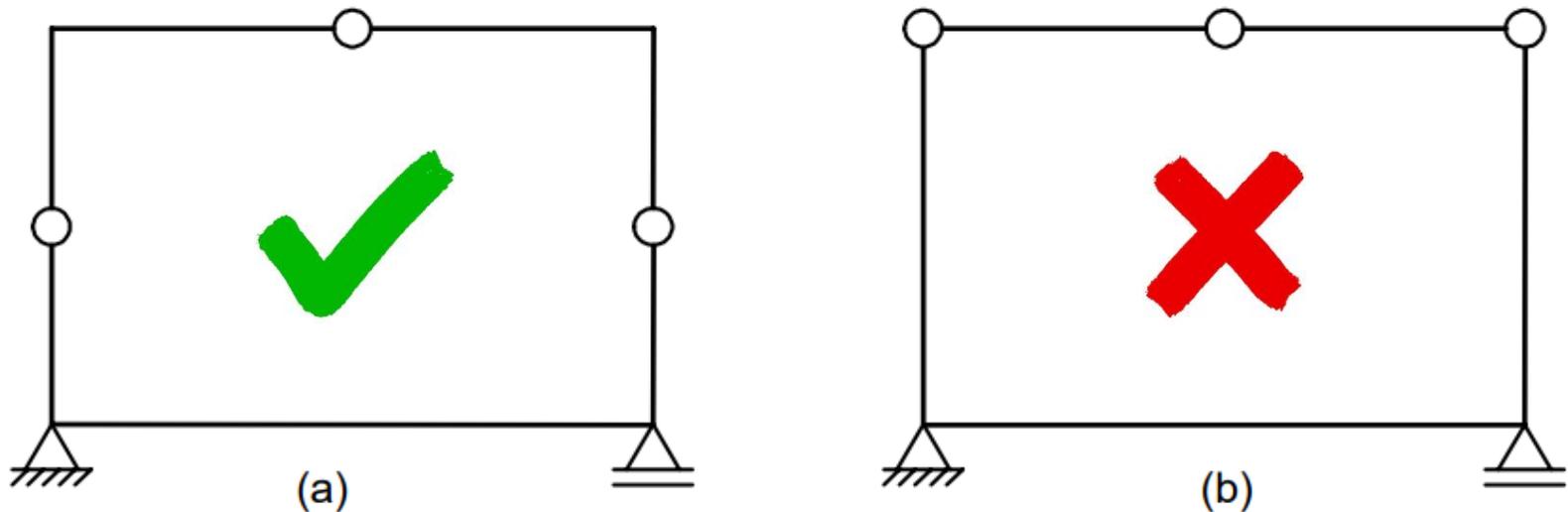


Figura 5.30 – Outras alternativas para SP do quadro da Figura 5.23 com introdução de rótulas: (a) opção válida; (b) opção inválida.

EXEMPLO 2: Quadro Fechado

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SP.

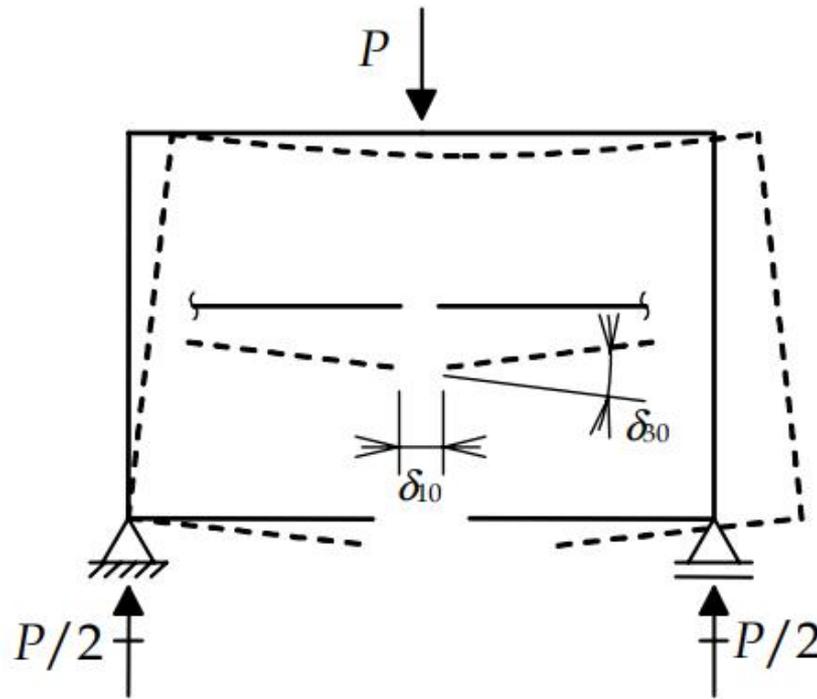
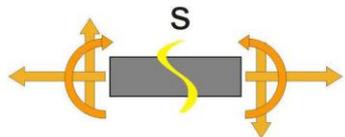


Figura 5.25 – Solicitação externa isolada no SP da Figura 5.24.



EXEMPLO 2: Quadro Fechado

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP.

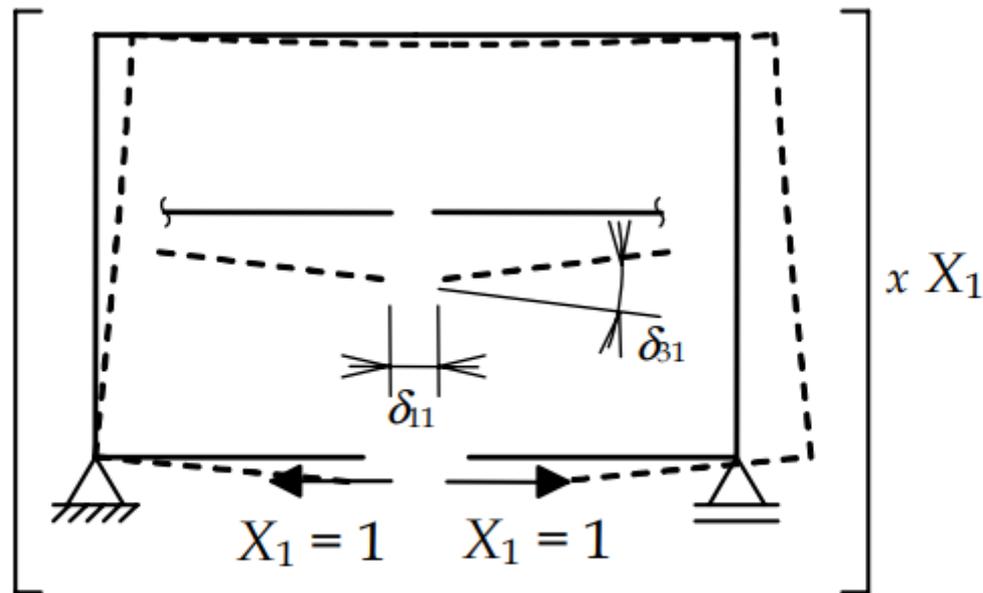


Figura 5.26 – Hiperestático X_1 isolado no SP da Figura 5.24.

EXEMPLO 2: Quadro Fechado

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP.

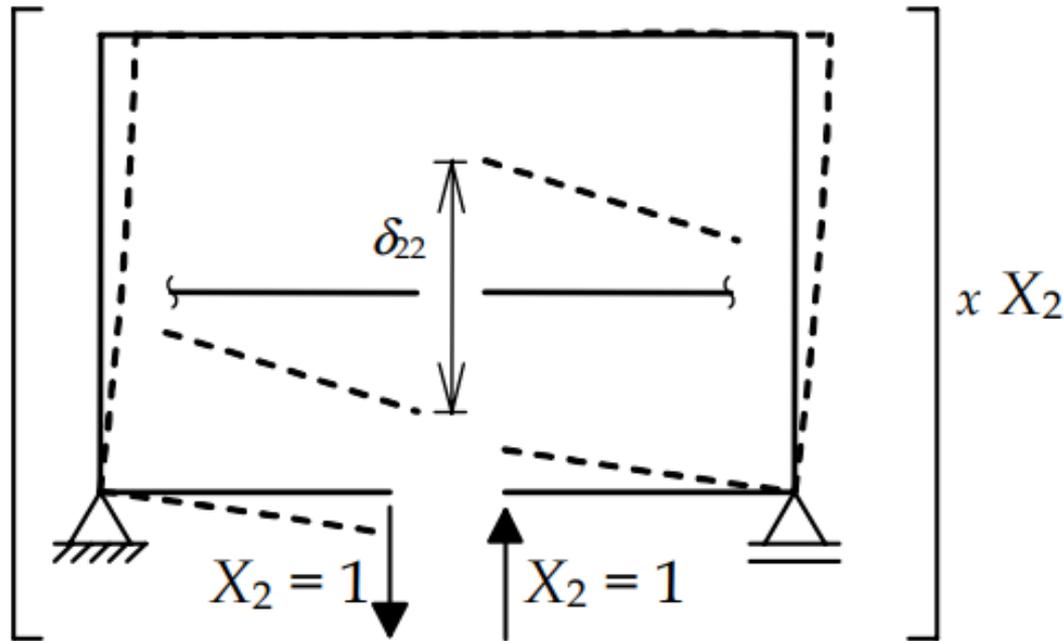


Figura 5.27 – Hiperestático X_2 isolado no SP da Figura 5.24.

EXEMPLO 2: Quadro Fechado

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (3) – Hiperestático X_3 isolado no SP.

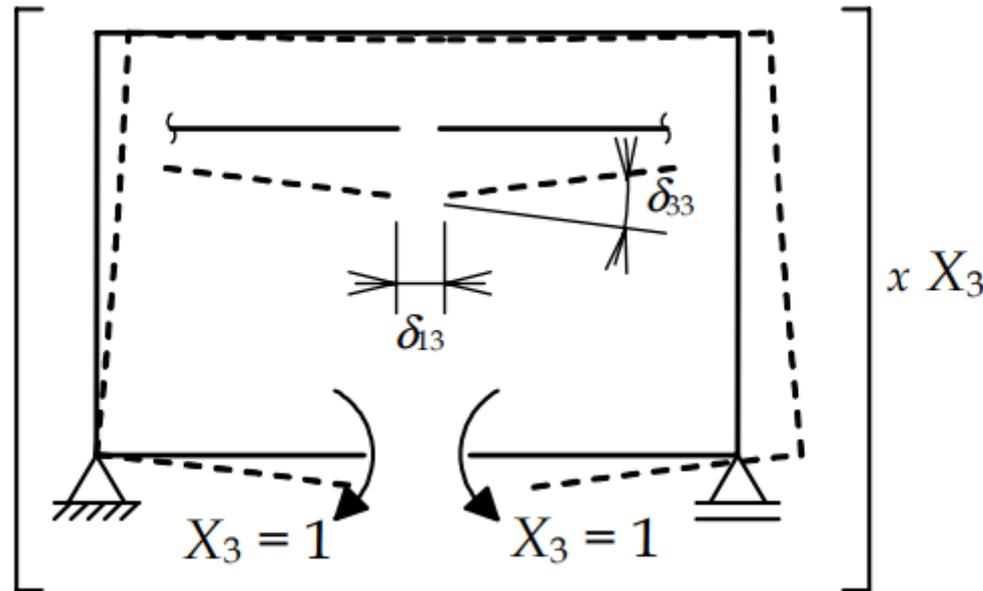


Figura 5.28 – Hiperestático X_3 isolado no SP da Figura 5.24.

EXEMPLO 2: Quadro Fechado

Passo 3: Superposição de Efeitos

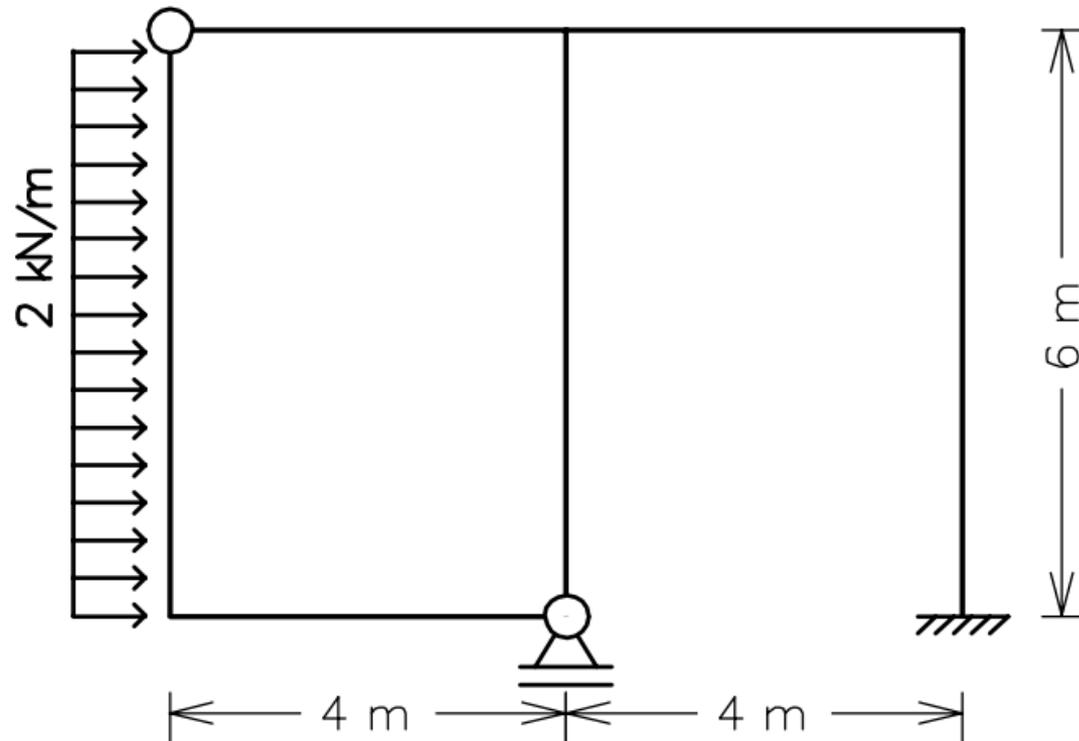
Utiliza-se a superposição de efeitos para restabelecer as condições de compatibilidade violadas na criação do SP.

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0. \\ \delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0 \end{cases}$$

EXEMPLO 3: Pórtico com anel

EXEMPLO 3: Pórtico com anel

Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 1,0 \times 10^5 \text{kNm}^2$.

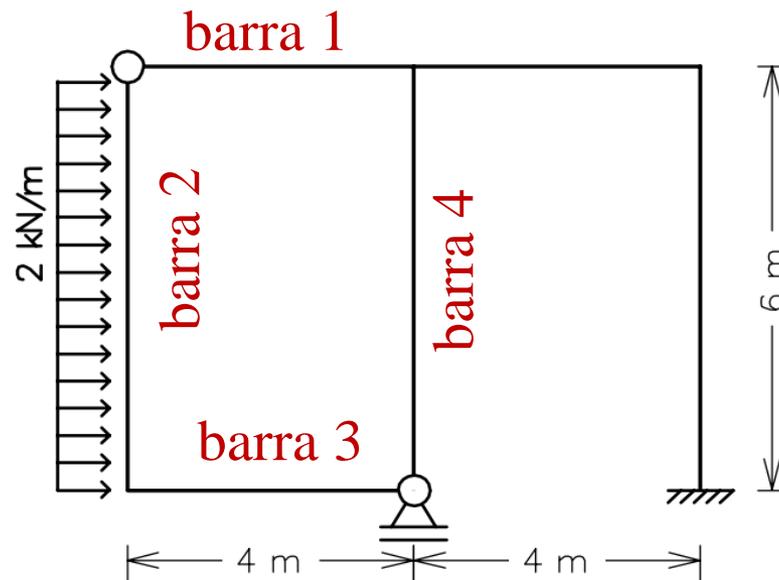


EXEMPLO 3: Pórtico com anel

Passo 1: Hiperestáticos e Sistema Principal

$$g = [(n^\circ \text{ de componentes de reação de apoio}) + 3 \cdot (n^\circ \text{ de anéis})] - [3 + (n^\circ \text{ de equações vindas de articulações internas})].$$

Hiperestático: $g = 4 + 3 \cdot 1 - (3 + (4 - 1)) = 2$.



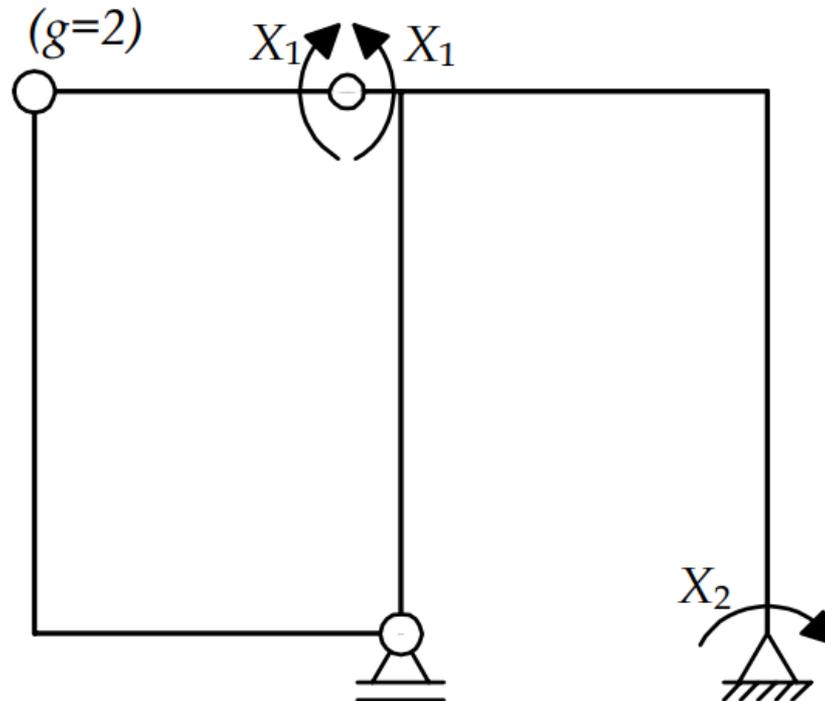
EXEMPLO 3: Pórtico com anel

Passo 1: Hiperestáticos e Sistema Principal

$$g = [(n^\circ \text{ de componentes de reação de apoio}) + 3 \cdot (n^\circ \text{ de anéis})] - [3 + (n^\circ \text{ de equações vindas de articulações internas})].$$

Hiperestático: $g = 4 + 3 \cdot 1 - (3 + (4 - 1)) = 2$.

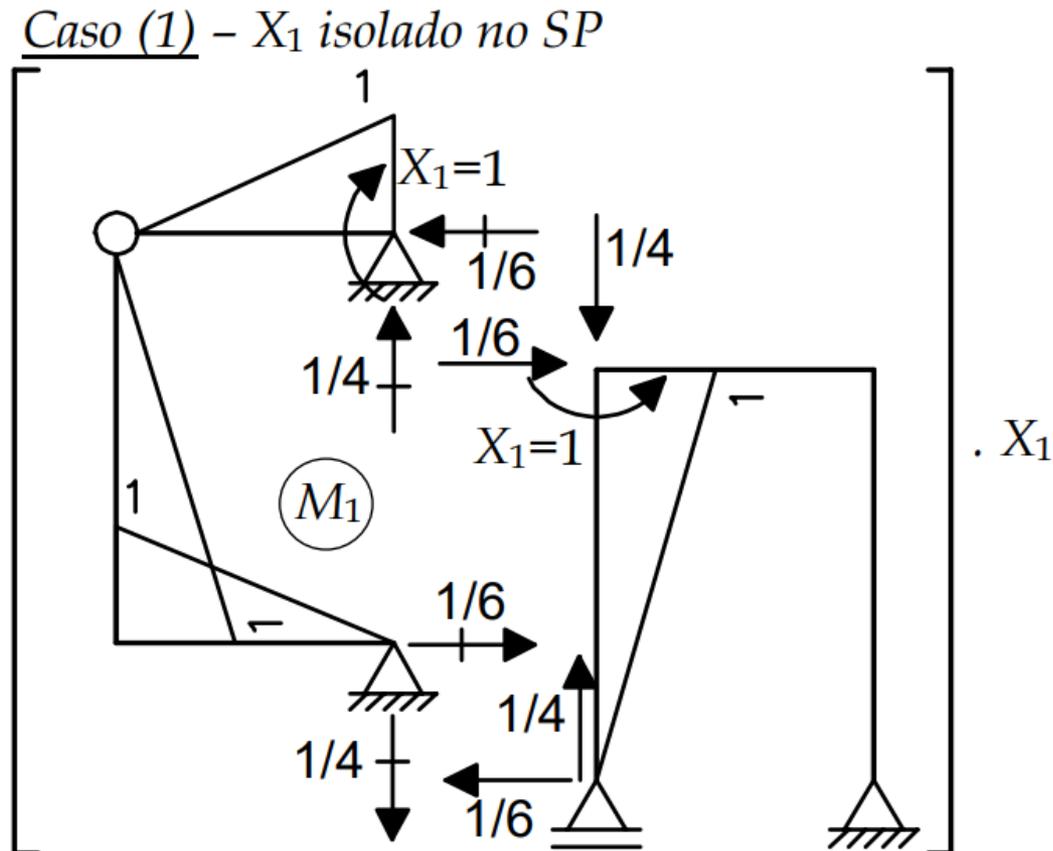
Sistema Principal (SP): obtida da estrutura original hiperestática pela eliminação de vínculos.



EXEMPLO 3: Pórtico com anel

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP.

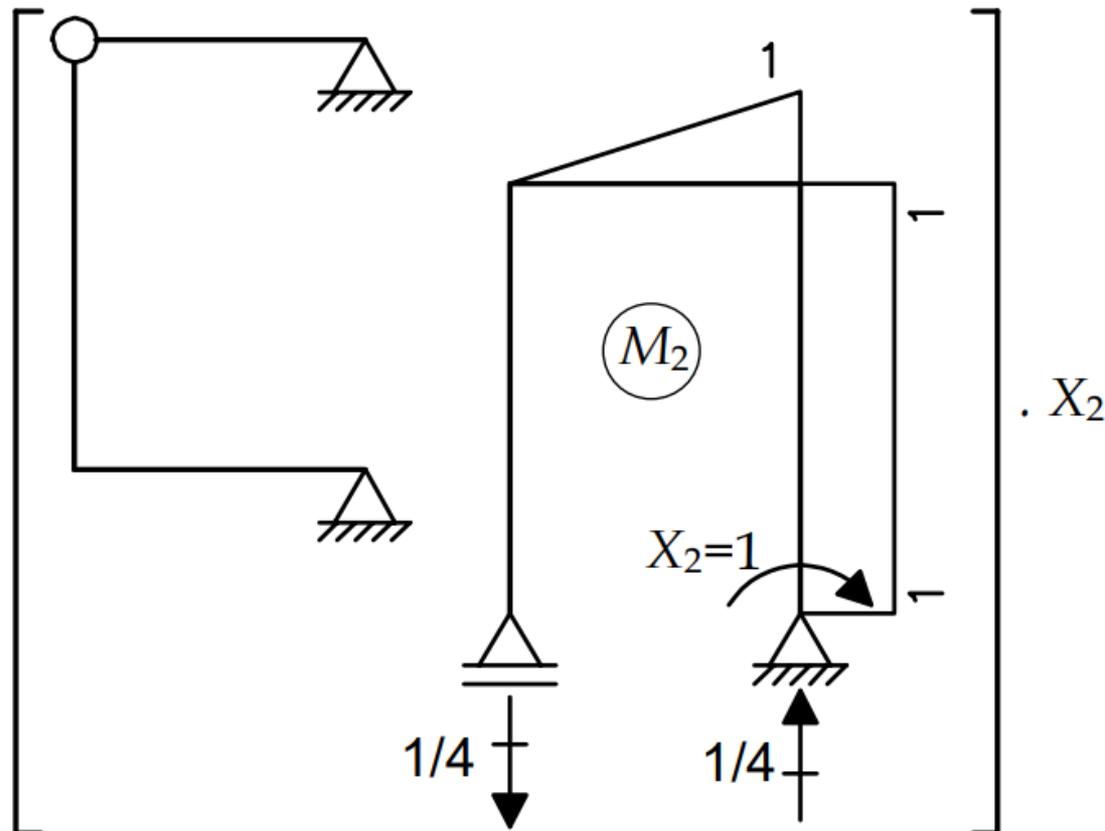


EXEMPLO 3: Pórtico com anel

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP.

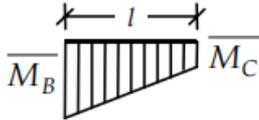
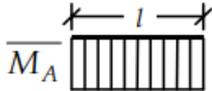
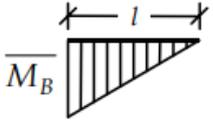
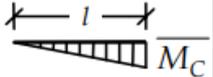
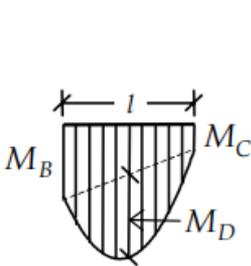
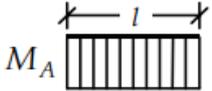
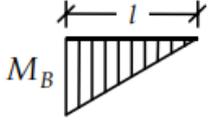
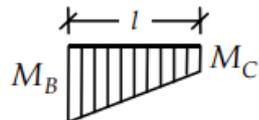
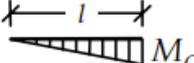
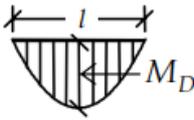
Caso (2) – X_2 isolado no SP



EXEMPLO 3: Pórtico com anel

Passo 3: Superposição de Efeitos

Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.

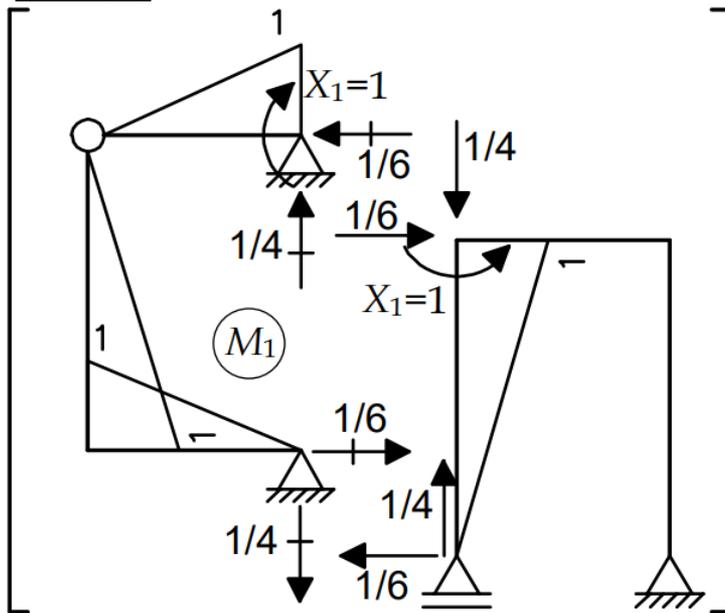
$\int_0^l Mm dx$					
					
			$\overline{M_A} M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M_B} M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M_C} M_A l$
			$\frac{1}{2} \overline{M_A} M_B l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B} M_B l$	$\frac{1}{6} \overline{M_C} M_B l$
			$\frac{1}{2} \overline{M_A} M_C l$	$\frac{1}{6} \overline{M_B} M_C l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C} M_C l$
			$\frac{2}{3} \overline{M_A} M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B} M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C} M_D l$

EXEMPLO 3: Pórtico com anel

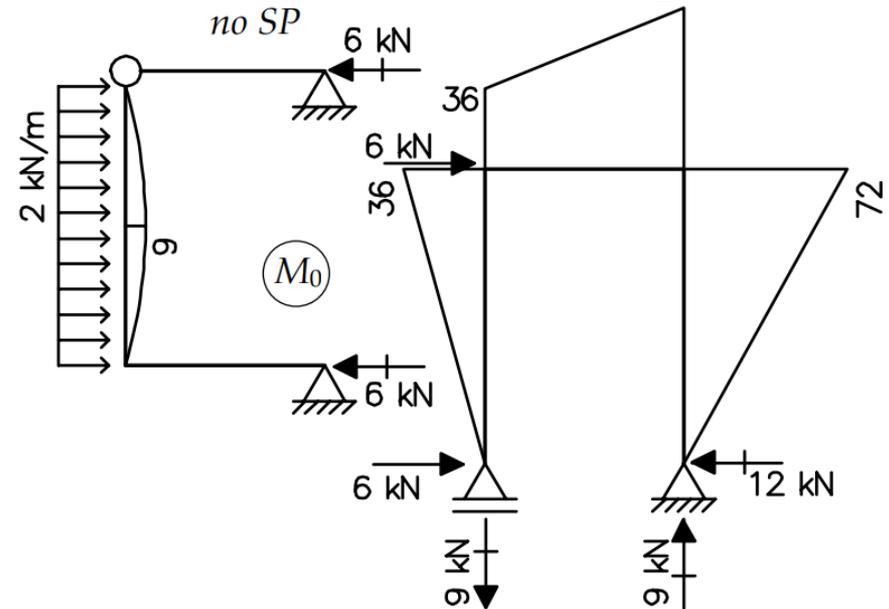
Passo 3: Superposição de Efeitos

Cálculo dos δ_{10} usando o PFV

Caso (1) - X_1 isolado no SP



Caso (0) - Solicitação externa isolada no SP



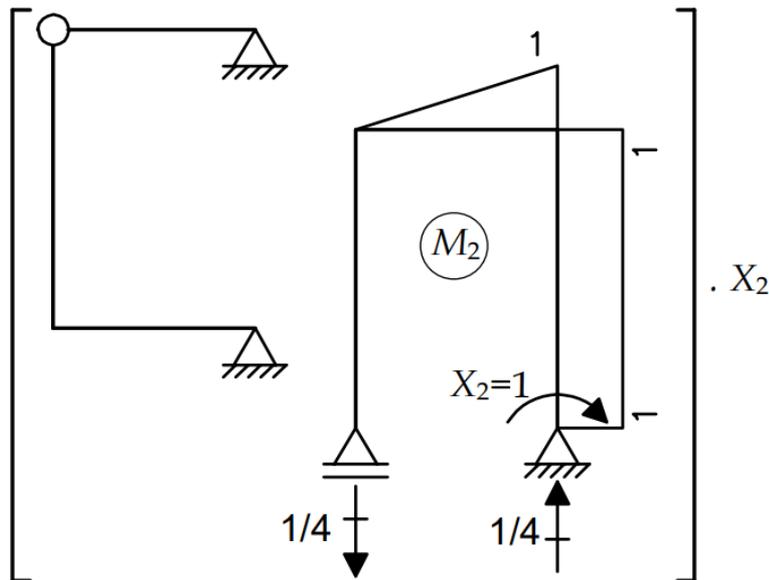
$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 9 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 6 \right] = -\frac{54}{EI}$$

EXEMPLO 3: Pórtico com anel

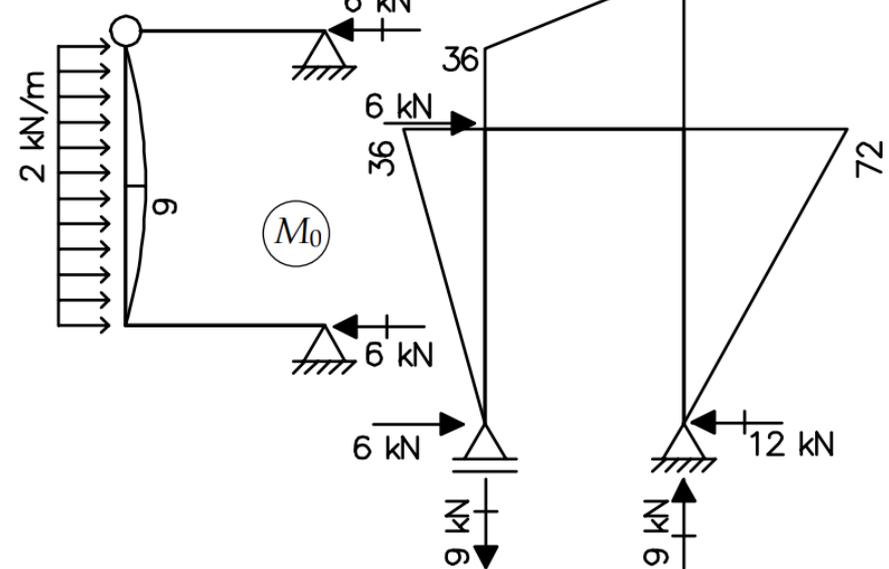
Passo 3: Superposição de Efeitos

Cálculo dos δ_{20} usando o PFV

Caso (2) - X_2 isolado no SP



Caso (0) - Solicitação externa isolada no SP



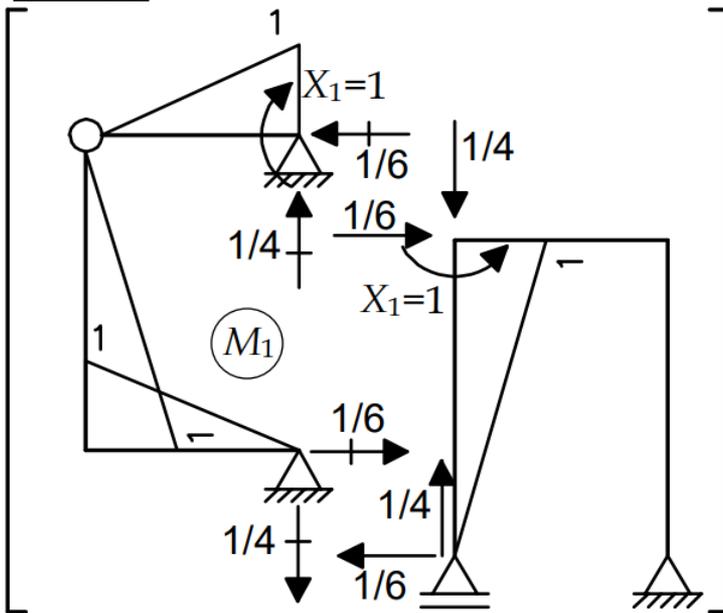
$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 72 \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 72 \cdot 6 \right] = + \frac{336}{EI}$$

EXEMPLO 3: Pórtico com anel

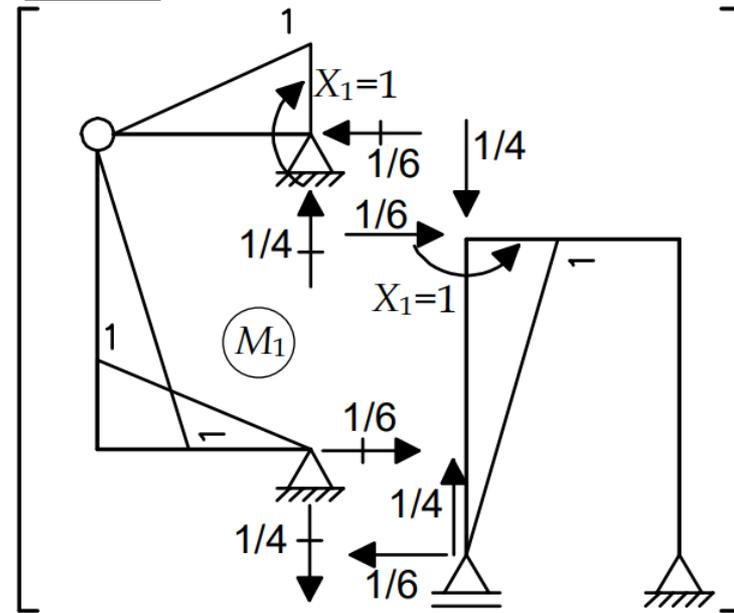
Passo 3: Superposição de Efeitos

Cálculo dos δ_{11} usando o PFV

Caso (1) - X_1 isolado no SP



Caso (1) - X_1 isolado no SP



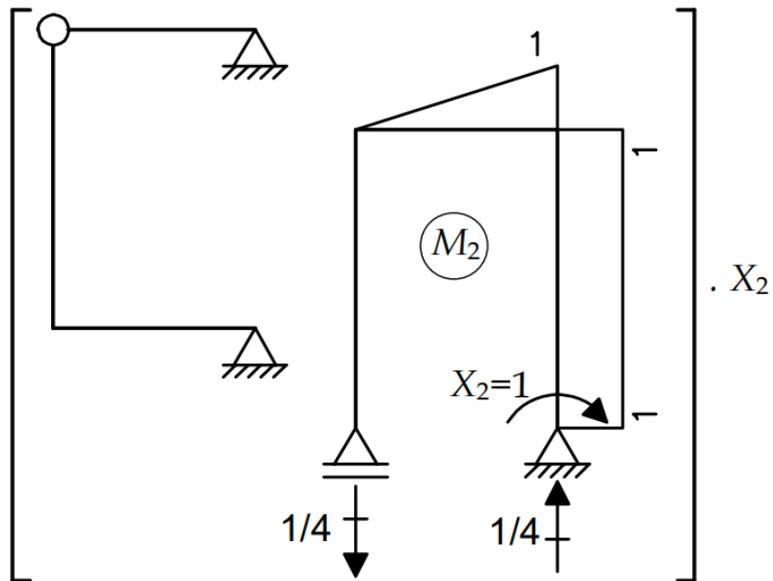
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right] = + \frac{20}{3EI}$$

EXEMPLO 3: Pórtico com anel

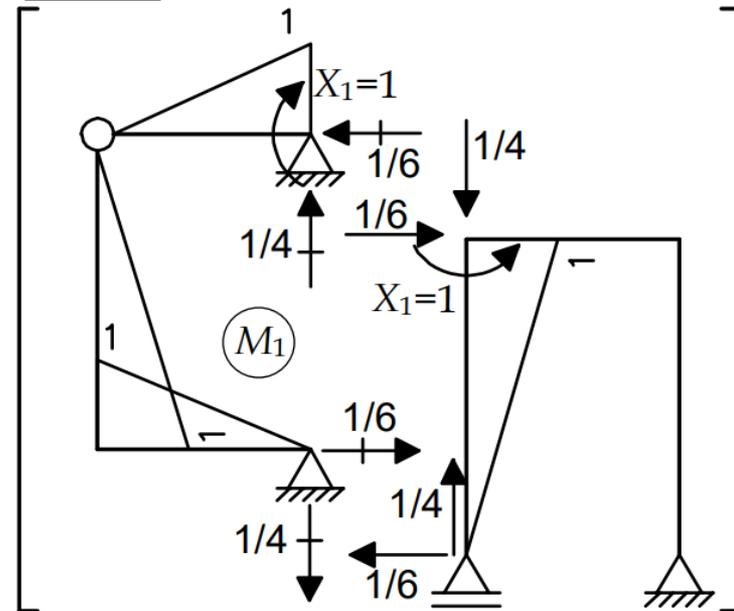
Passo 3: Superposição de Efeitos

Cálculo dos $\delta_{21} = \delta_{12}$ usando o PFV

Caso (2) - X_2 isolado no SP



Caso (1) - X_1 isolado no SP



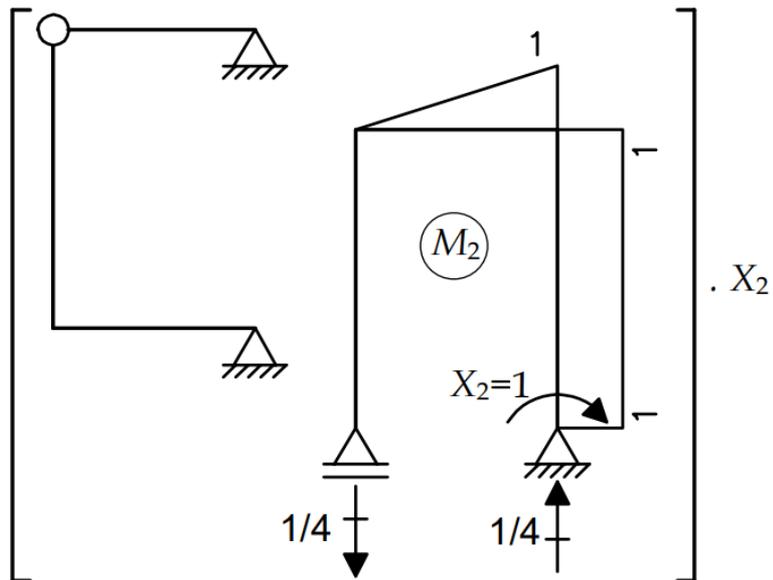
$$\delta_{21} = \delta_{12} = 0$$

EXEMPLO 3: Pórtico com anel

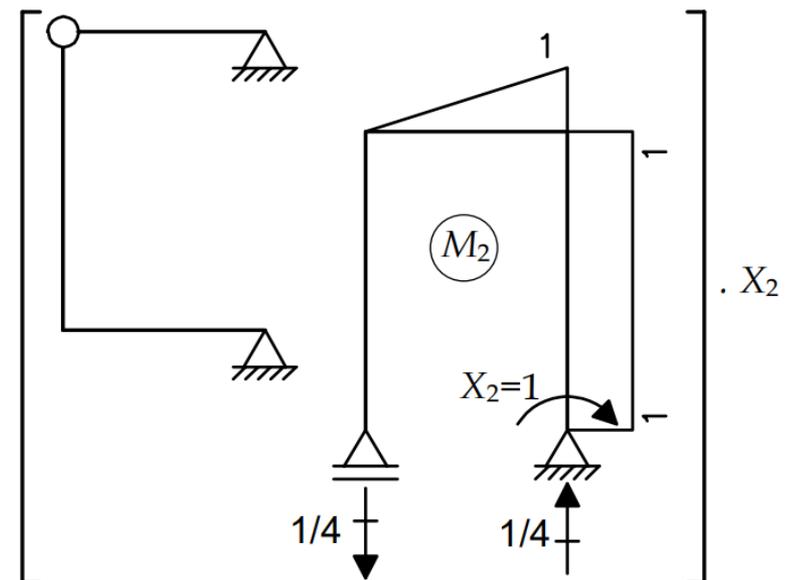
Passo 3: Superposição de Efeitos

Cálculo dos δ_{22} usando o PFV

Caso (2) - X_2 isolado no SP



Caso (2) - X_2 isolado no SP



$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 6 \right] = + \frac{22}{3EI}$$

EXEMPLO 3: Pórtico com anel

Passo 3: Superposição de Efeitos

Equações de Compatibilidade

$$\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = +8.10kNm \\ X_2 = -45.82kNm \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 9 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 6 \right] = -\frac{54}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 72 \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 72 \cdot 6 \right] = +\frac{336}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right] = +\frac{20}{3EI}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = 0$$

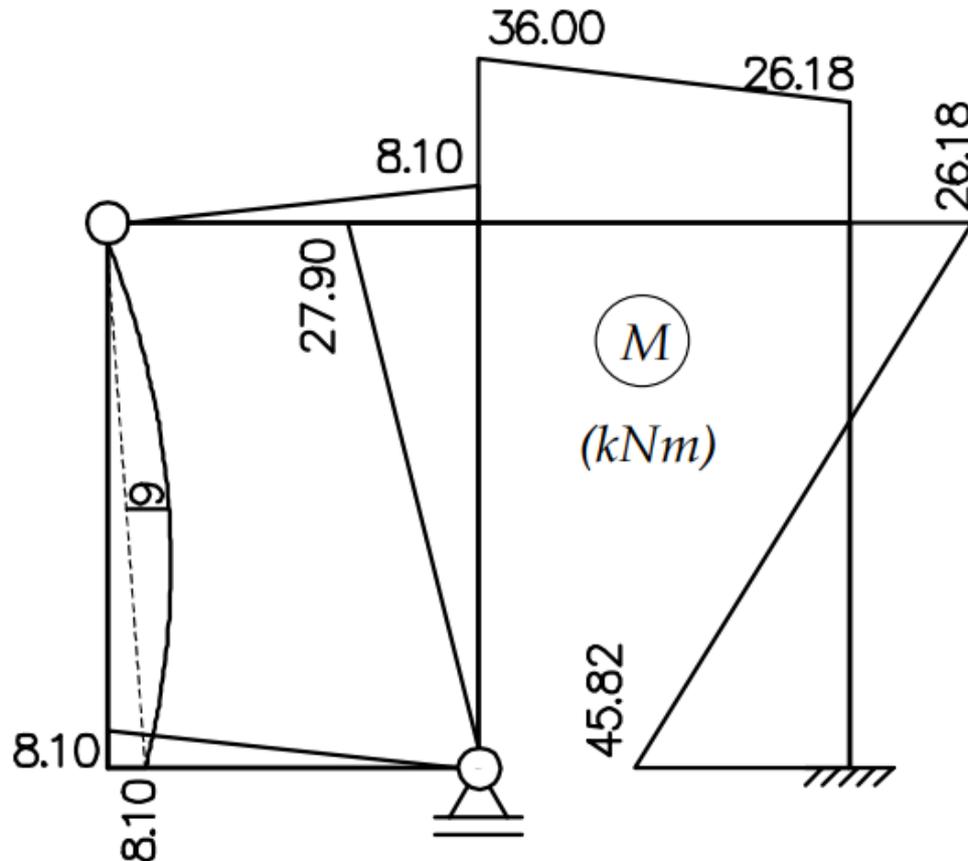
$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 6 \right] = +\frac{22}{3EI}$$

EXEMPLO 3: Pórtico com anel

Passo 4: Determinação dos esforços internos

Diagrama de Momentos Fletores

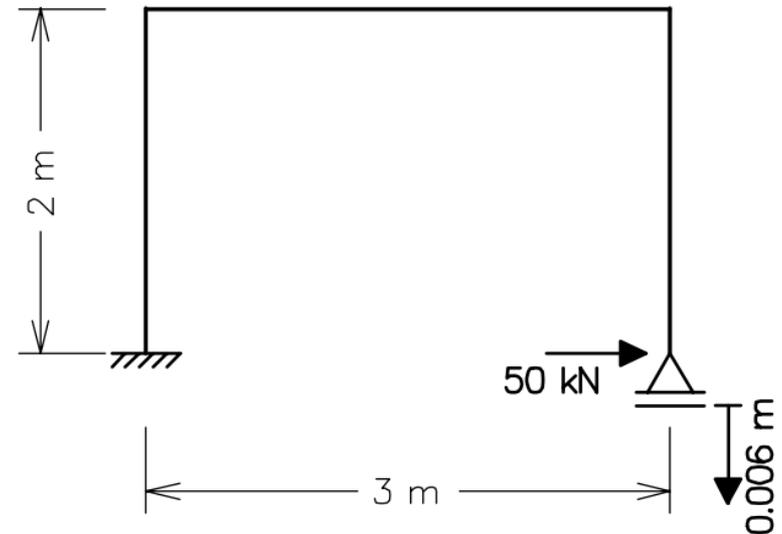
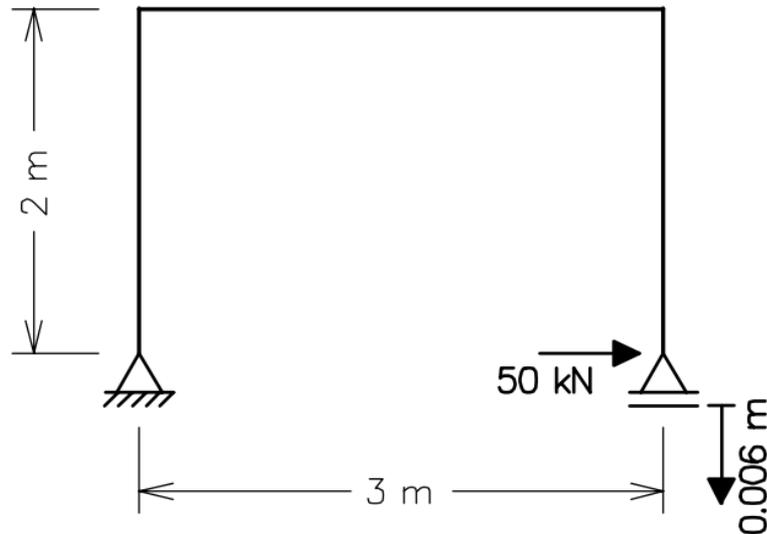
$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$



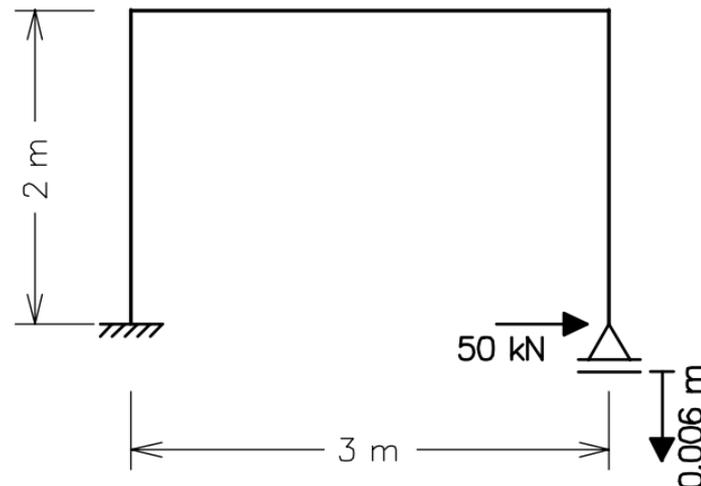
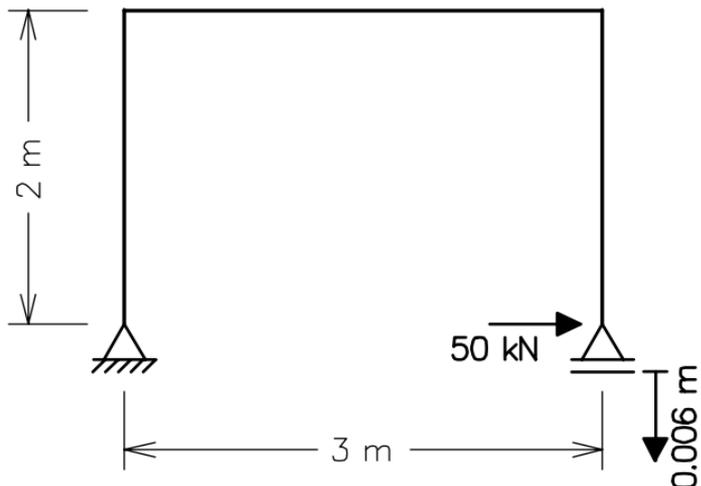
EXEMPLO 4: Pórtico com Recalque

EXEMPLO 4: Pórtico com Recalque

Considere as duas estruturas mostradas abaixo. A da esquerda é um **quadro isostático** e a da direita é um **quadro hiperestático**. Os dois quadros sofrem a mesma sollicitação: uma força horizontal de **50 kN** aplicada no apoio da direita e um **recalque** desse mesmo apoio de **6 mm** para baixo. Todas as barras têm um material com módulo de elasticidade $E = 1,0 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ e seções transversais com momento de inércia $I = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^4$. Considere válida a hipótese de **pequenos deslocamentos**.



EXEMPLO 4: Pórtico com Recalque

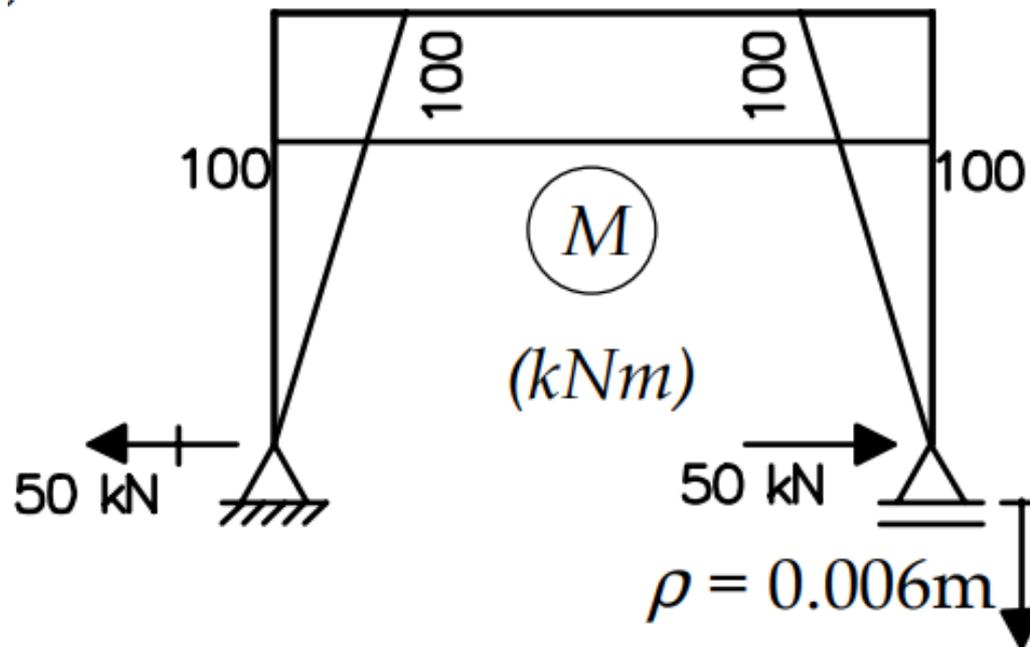


Pede-se:

- Determine o diagrama de momentos fletores da estrutura isostática.
- Determine o diagrama de momentos fletores da estrutura hiperestática. Deve-se utilizar o Método das Forças, adotando OBRIGATORIAMENTE como Sistema Principal a estrutura isostática da esquerda. Somente considere deformações por flexão.
 - Dê a interpretação física do termo de carga δ_{10} do sistema de equações de compatibilidade do Método das Forças para esta solução.
 - Mostre a dedução do termo de carga δ_{10} pelo Princípio das Forças Virtuais.
- Considere que as colunas dos quadros acima tiveram a seção transversal modificada para uma com momento de inércia $I = 2,0 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ (a viga não se altera). Responda sem fazer nenhum cálculo:
 - O diagrama de momentos fletores da estrutura isostática se altera? Por que?
 - O diagrama de momentos fletores da estrutura hiperestática se altera? Por que?

EXEMPLO 4: Pórtico com Recalque

Item (a): Como a estrutura é isostática, o “pequeno” recalque de apoio não provoca deformações (só movimento de corpo rígido). Portanto, o recalque não provoca momentos fletores, que só são devidos à carga de 50 kN aplicada!



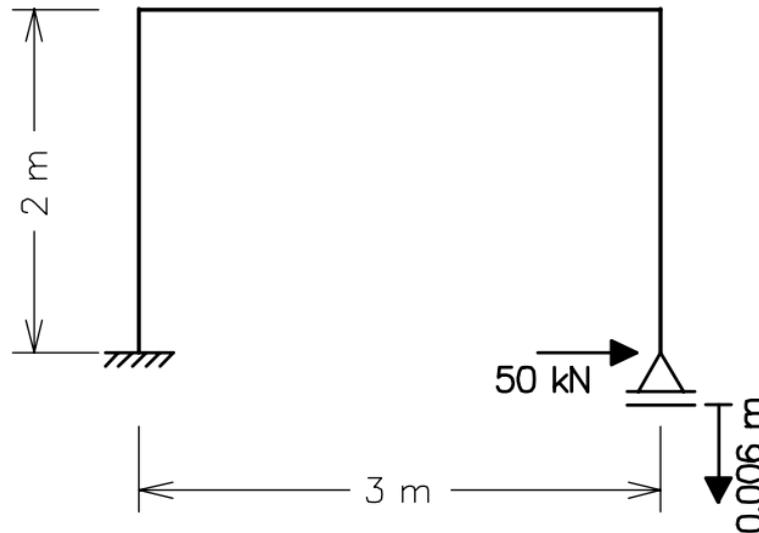
EXEMPLO 4: Pórtico com Recalque

Item (b):

Passo 1: Hiperestáticos e Sistema Principal

$$g = [(n^\circ \text{ de componentes de reação de apoio}) + 3 \cdot (n^\circ \text{ de anéis})] - [3 + (n^\circ \text{ de equações vindas de articulações internas})].$$

Hiperestático: $g = 4 + 3 \cdot 0 - (3 + (0)) = 1$.



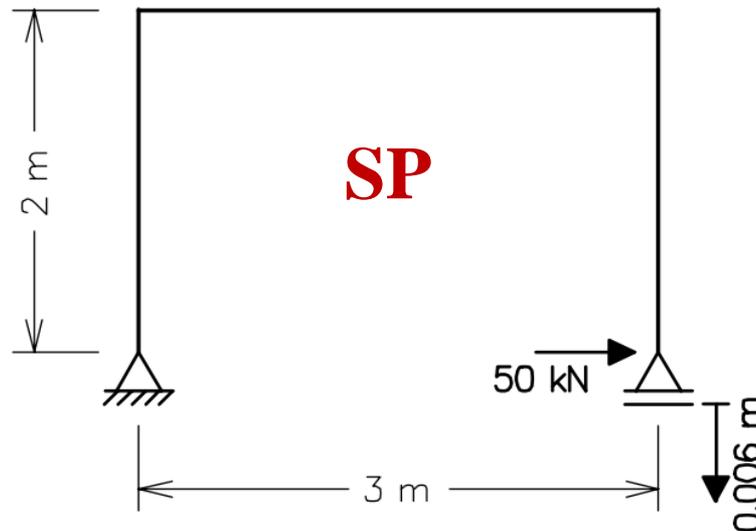
EXEMPLO 4: Pórtico com Recalque

Item (b):

Passo 1: Hiperestáticos e Sistema Principal

$$g = [(n^\circ \text{ de componentes de reação de apoio}) + 3 \cdot (n^\circ \text{ de anéis})] - [3 + (n^\circ \text{ de equações vindas de articulações internas})].$$

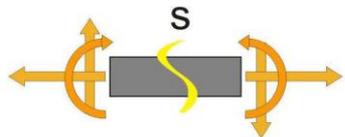
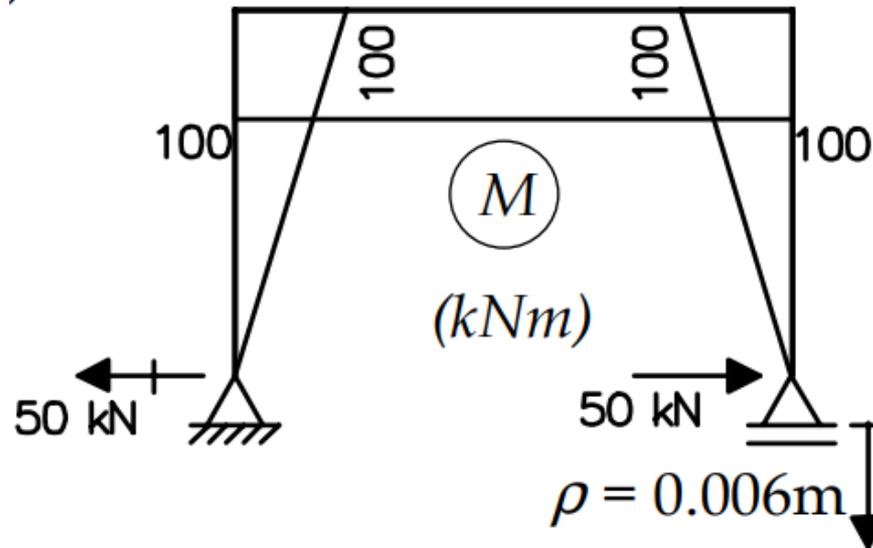
Hiperestático: $g = 4 + 3 \cdot 0 - (3 + (0)) = 1$.



EXEMPLO 4: Pórtico com Recalque

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

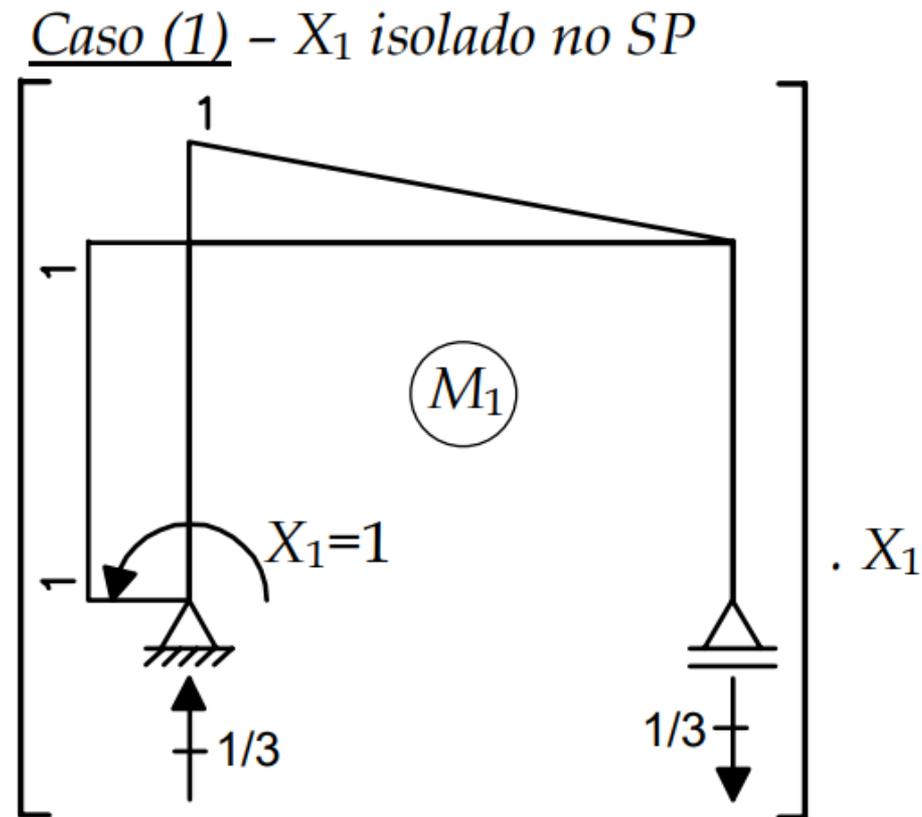
Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SP.



EXEMPLO 4: Pórtico com Recalque

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP.



EXEMPLO 4: Pórtico com Recalque

Passo 3: Superposição de Efeitos: Ver Aula Métodos de Energia!

Item (b.2) – Cálculo de δ_{10} pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV)

PFV: $\overline{W}_E = \overline{U}$

\overline{W}_E → Trabalho das forças externas do sistema virtual com os correspondentes deslocamentos externos do sistema real.

Neste caso, o trabalho externo virtual é igual ao produto de $X_1 = 1$ por δ_{10} mais o produto da reação vertical no apoio direito do caso (1) - força de 1/3 para baixo - pelo recalque de apoio ρ :

$$\overline{W}_E = 1 \cdot \delta_{10} + (1/3) \cdot \rho.$$

\overline{U} → Energia de deformação interna virtual. Esta é a energia de deformação por flexão provocada pelos momentos fletores do sistema virtual $\overline{M} = M_1$ com as correspondentes rotações relativas internas do sistema real $d\theta = (M_0 / EI)dx$. Deve ser observado que o recalque de apoio ρ não provoca deformações internas (só provoca movimento de corpo rígido). Portanto, $d\theta$ é somente devido à carga de 50 kN aplicada. Assim:

$$\overline{U} = \int_{\text{estrutura}} \overline{M} d\theta = \int_{\text{estrutura}} M_1 d\theta = \int_{\text{estrutura}} \frac{M_1 M_0}{EI} dx$$

EXEMPLO 4: Pórtico com Recalque

Passo 3: Superposição de Efeitos

Item (b.2) – Cálculo de δ_{10} pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV)

$$\overline{W_E} = \overline{U}$$

$$1 \cdot \delta_{10} + (1/3) \cdot \rho = \int_{\text{estrutura}} \overline{M} d\theta = \int_{\text{estrutura}} M_1 d\theta = \int_{\text{estrutura}} \frac{M_1 M_0}{EI} dx$$

$$\delta_{10} = (1/EI) \cdot \int_{\text{estrut.}} M_1 M_0 dx - (1/3) \cdot \rho$$

EXEMPLO 4: Pórtico com Recalque

Passo 3: Superposição de Efeitos

Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.

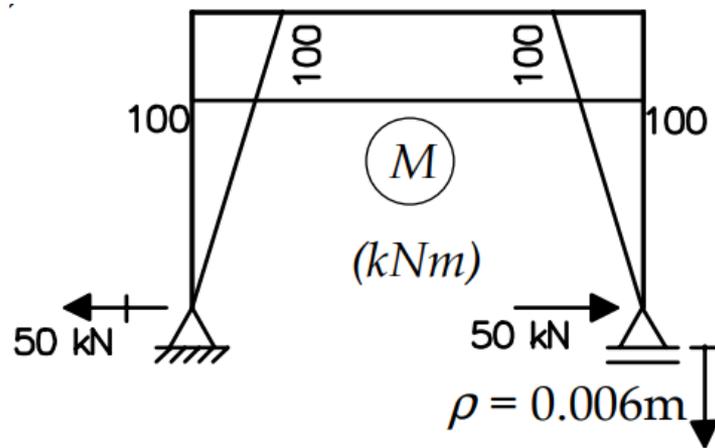
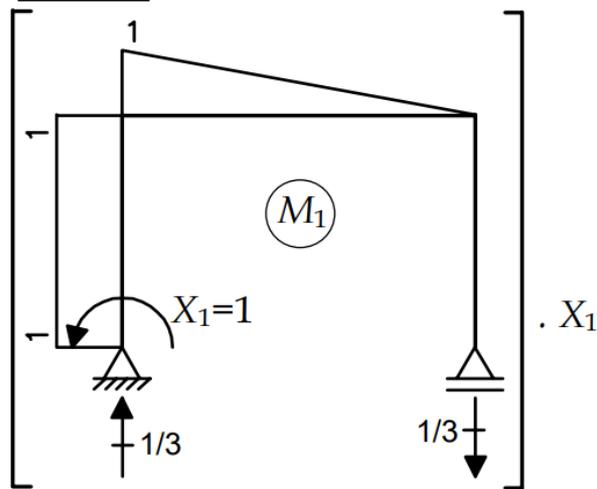
$\int_0^l Mm dx$					
			$\overline{M_A} M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M_B} M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M_C} M_A l$
			$\frac{1}{2} \overline{M_A} M_B l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B} M_B l$	$\frac{1}{6} \overline{M_C} M_B l$
			$\frac{1}{2} \overline{M_A} M_C l$	$\frac{1}{6} \overline{M_B} M_C l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C} M_C l$
			$\frac{2}{3} \overline{M_A} M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M_B} M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M_C} M_D l$

EXEMPLO 4: Pórtico com Recalque

Passo 3: Superposição de Efeitos

Cálculo dos δ_{10} usando o PFV

Caso (1) - X_1 isolado no SP



$$\delta_{10} = (1/EI) \cdot \int_{\text{estrut.}} M_1 M_0 dx - (1/3) \cdot \rho$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 2 \right] - \left(\frac{1}{3} \right) \cdot 0.006$$

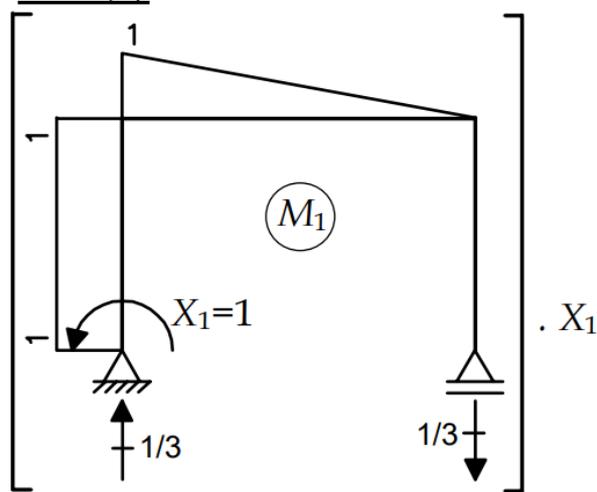
$$\delta_{10} = -4.5 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

EXEMPLO 4: Pórtico com Recalque

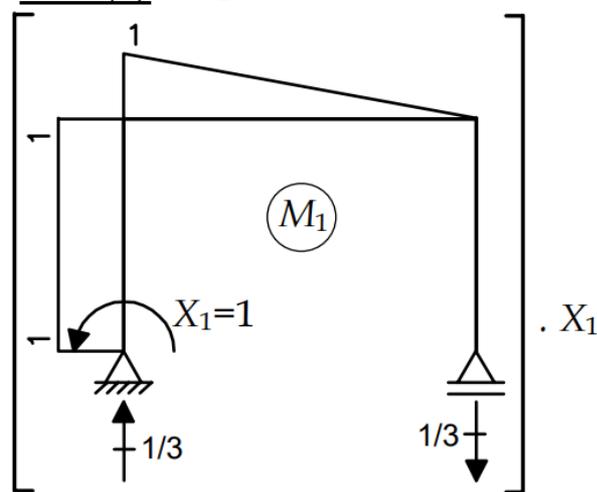
Passo 3: Superposição de Efeitos

Cálculo dos δ_{11} usando o PFV

Caso (1) - X_1 isolado no SP



Caso (1) - X_1 isolado no SP



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 \right] = +3 \times 10^{-5} \text{ rad} / \text{kNm}$$

EXEMPLO 4: Pórtico com Recalque

Passo 3: Superposição de Efeitos

$$\delta_{10} = (1/EI) \cdot \int_{\text{estrut.}} M_1 M_0 dx - (1/3) \cdot \rho$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 2 \right] - \left(\frac{1}{3} \right) \cdot 0.006$$

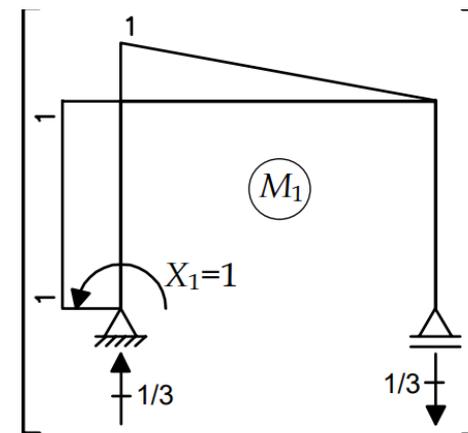
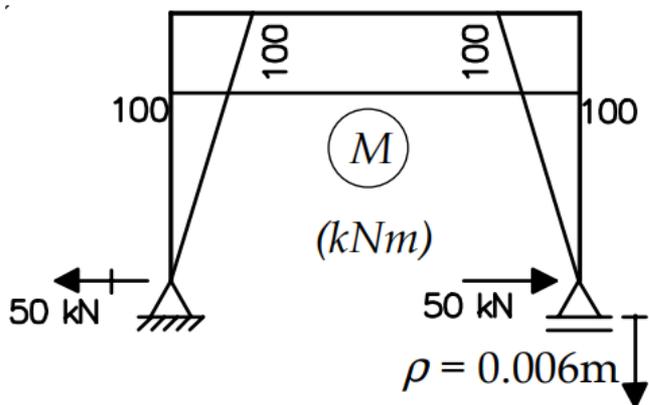
$$\delta_{10} = -4.5 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 \right] = +3 \times 10^{-5} \text{ rad / kNm}$$

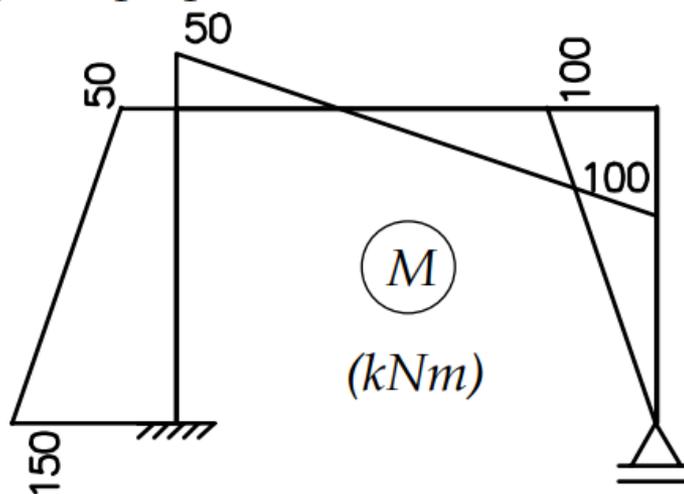
$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = 150 \text{ kNm}$$

EXEMPLO 4: Pórtico com Recalque

Passo 4: Determinação dos esforços internos



$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$



EXEMPLO 4: Pórtico com Recalque

Item (c):

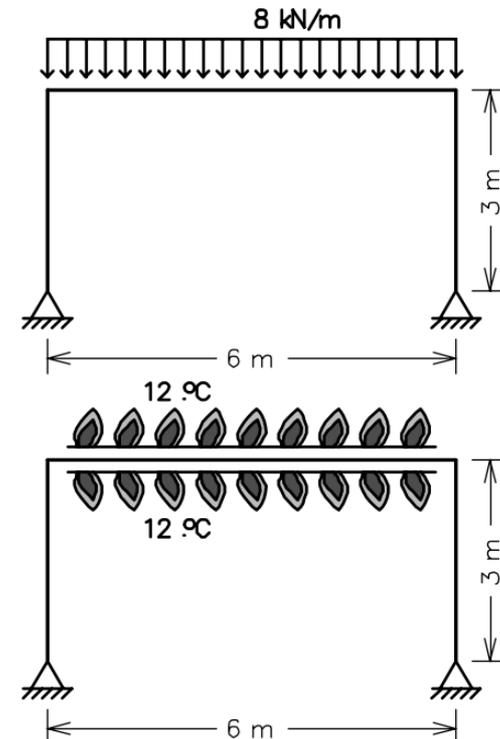
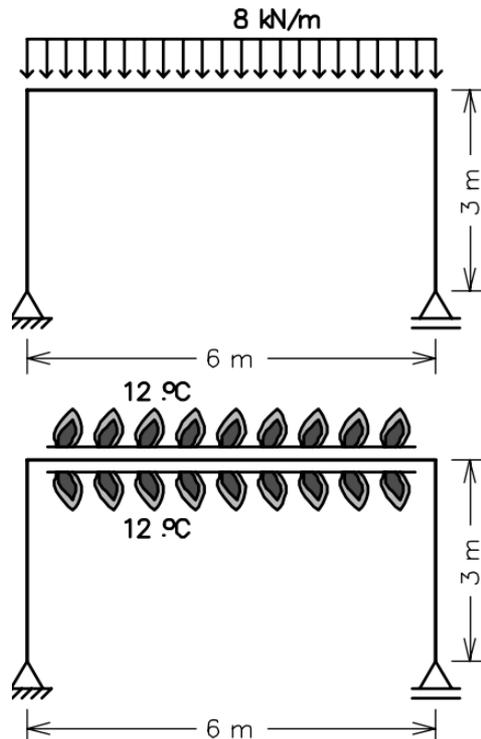
Item (c.1) – Em estruturas isostáticas, o diagrama de momentos fletores depende apenas das cargas, reações e geometria. Como as equações de equilíbrio consideram a estrutura sem deformações, mudanças no momento de inércia das colunas não alteram o diagrama de momentos.

Item (c.2) – Em estruturas hiperestáticas, por ter vínculos excedentes, os esforços internos dependem da rigidez das barras. Com as colunas mais rígidas do que a viga, as rotações das extremidades da vigas são menores do que no caso com todas as barras com rigidez iguais, se aproximando do caso de uma viga com extremidades engastadas. Portanto, o diagrama de momentos fletores fica alterado com a modificação do momento de inércia da seção transversal das colunas.

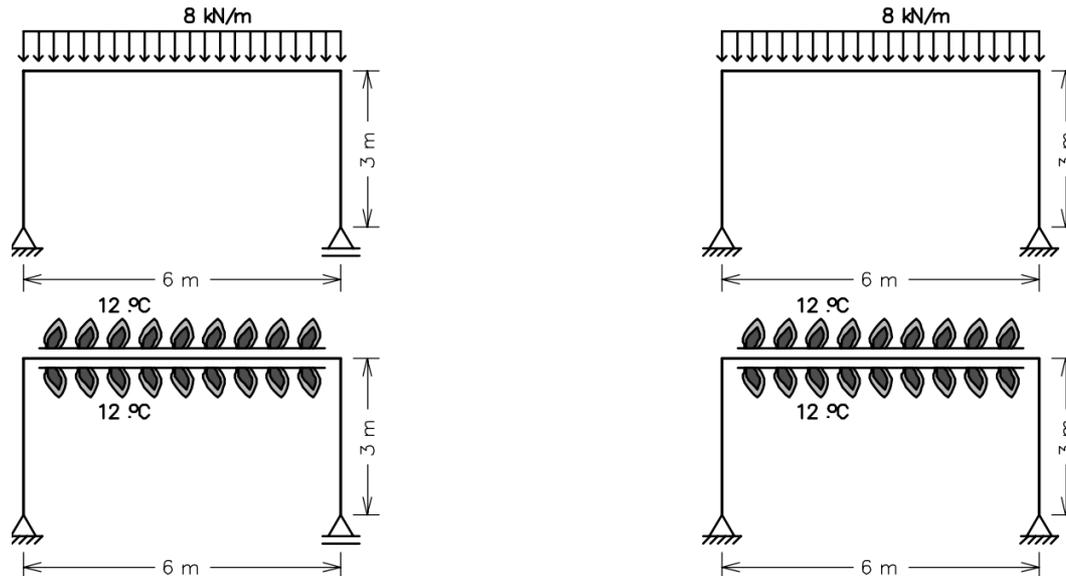
EXEMPLO 5: Pórtico sujeito a variação de temperatura

EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

Considere os quatro pórticos mostrados abaixo. Os pórticos do lado esquerdo são **isostáticos** e os do lado direito são **hiperestáticos**. Os pórticos superiores têm como solicitação uma carga uniformemente distribuída aplicada na viga. As duas estruturas inferiores têm como solicitação um aumento uniforme de temperatura ($\Delta T = 12\text{ }^{\circ}\text{C}$) na viga. Todas as barras têm um material com módulo de elasticidade $E = 10^8\text{ kN/m}^2$ e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}\text{ /}^{\circ}\text{C}$. Todas as barras têm seções transversais com momento de inércia $I = 1,0 \times 10^{-3}\text{ m}^4$.



EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

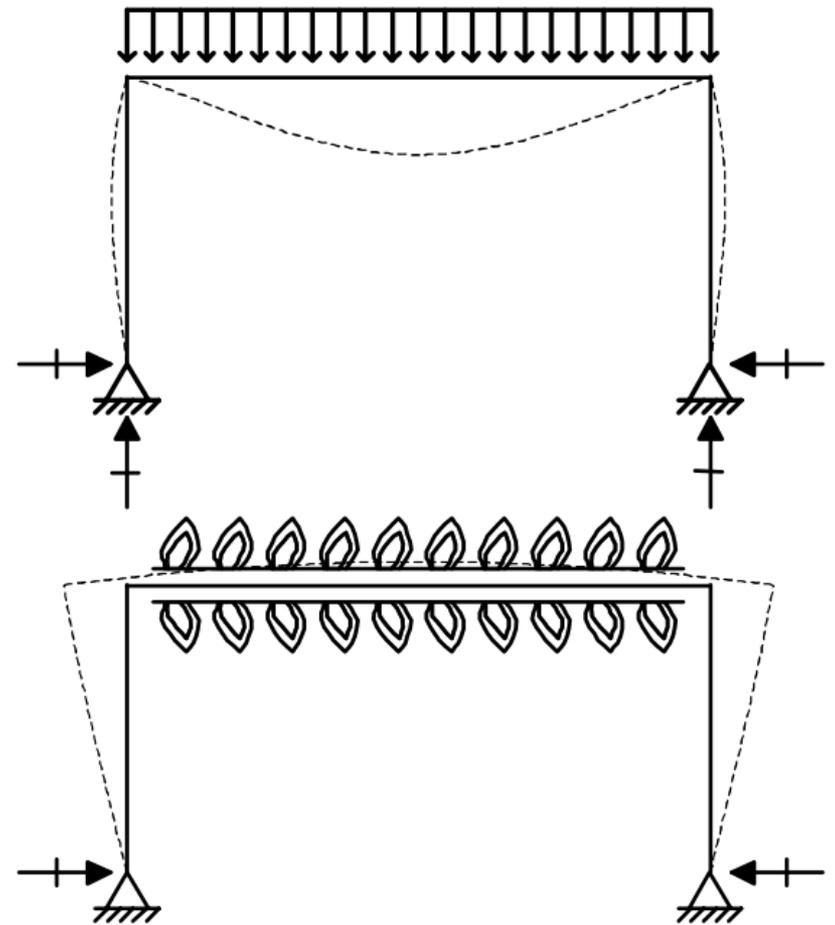
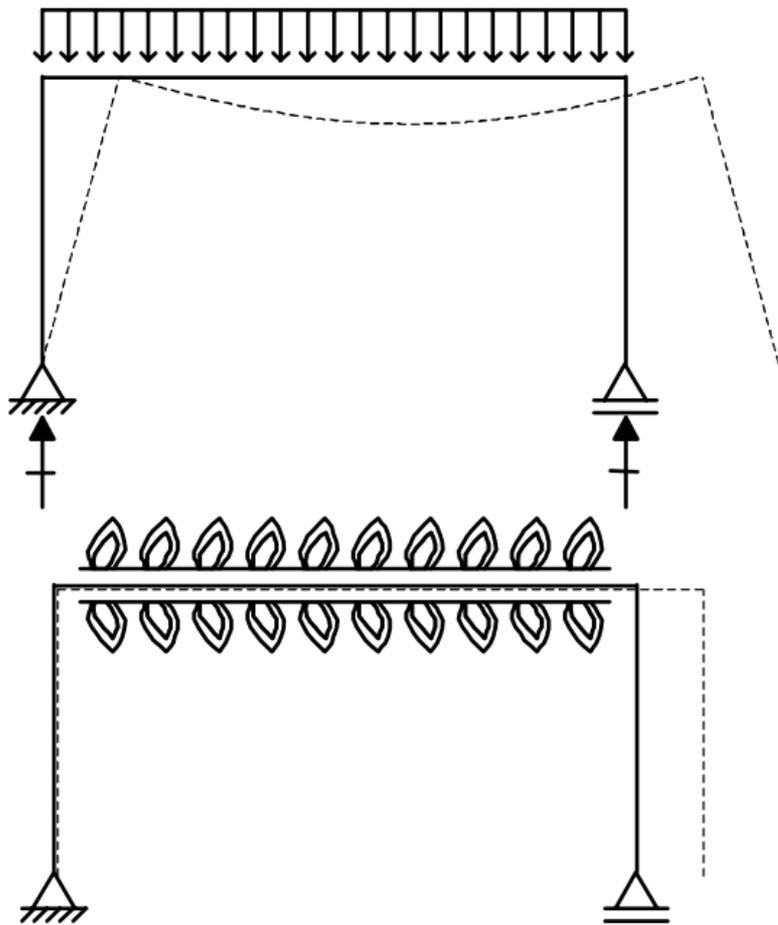


Pede-se:

- Indique os aspectos das configurações deformadas (amplificadas) das quatro estruturas.
- Determine os diagramas de momentos fletores das estruturas isostáticas e os aspectos (não precisa dos valores numéricos) dos diagramas de momentos fletores das estruturas hiperestáticas.
- Determine o diagrama de momentos fletores (com valores numéricos) da estrutura hiperestática inferior (solicitada pela variação de temperatura). Deve-se utilizar o Método das Forças, adotando obrigatoriamente como Sistema Principal a estrutura isostática da esquerda. Somente considere deformações por flexão. Sabe-se que o alongamento relativo interno de um elemento infinitesimal de barra devido a uma variação uniforme de temperatura é $du = \alpha \Delta T dx$. Neste caso não existe rotação relativa interna do elemento infinitesimal.
- Considere que as colunas dos quadros acima tiveram a seção transversal modificada para uma com momento de inércia $I = 2,0 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ (a viga não se altera). Responda:
 - Os diagramas de momentos fletores das estruturas isostáticas se alteram? Por que?
 - Os diagramas de momentos fletores das estruturas hiperestáticas se alteram? Por que?

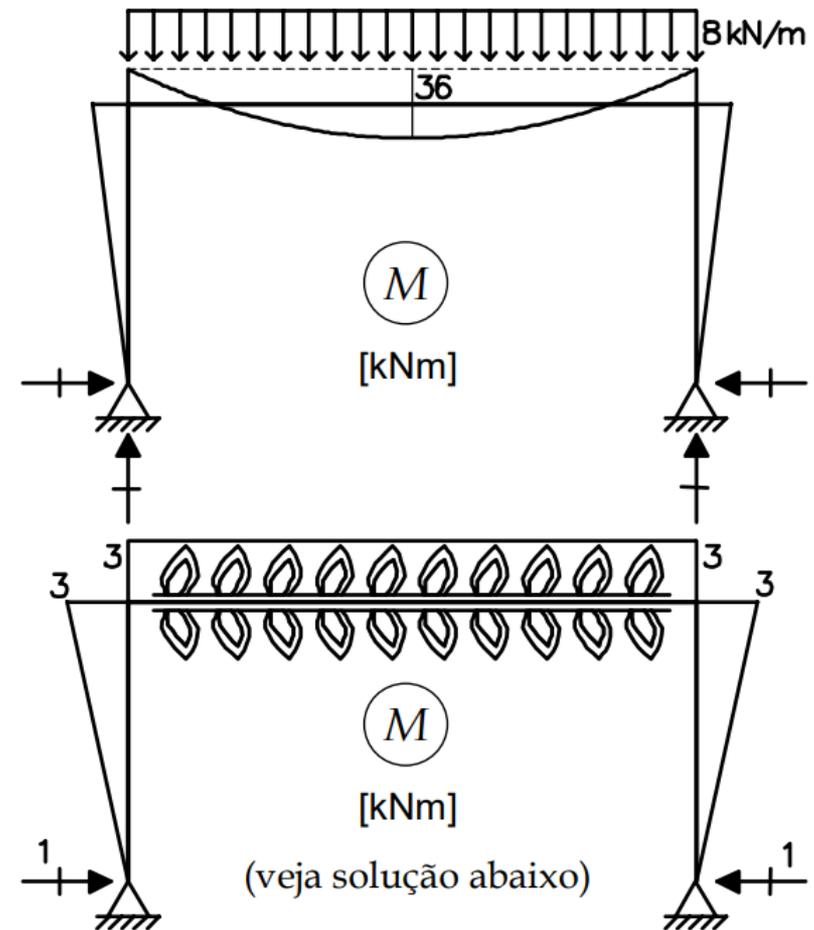
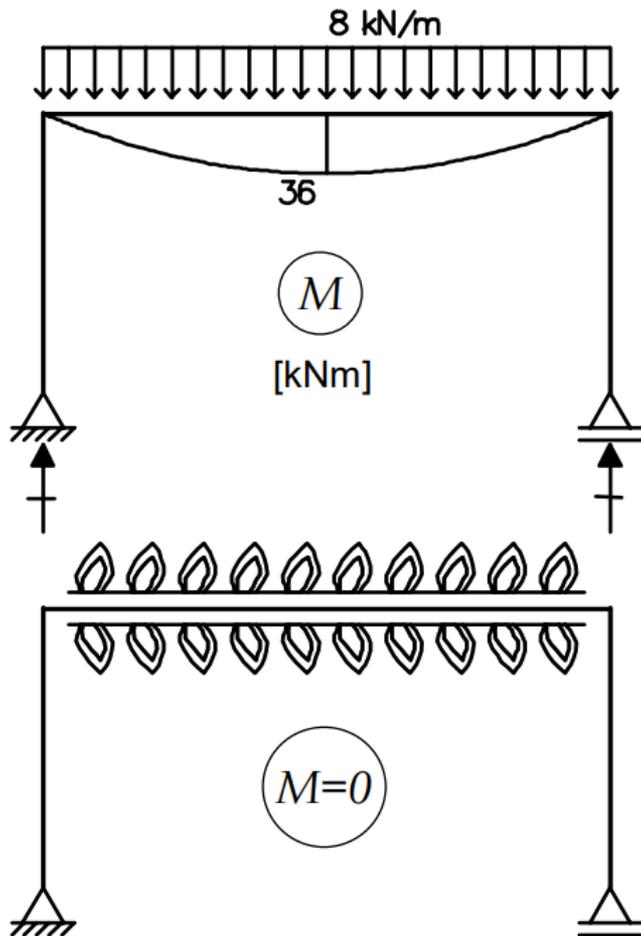
EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

Item (a): Indique os aspectos das configurações deformadas (amplificadas) das quatro estruturas.



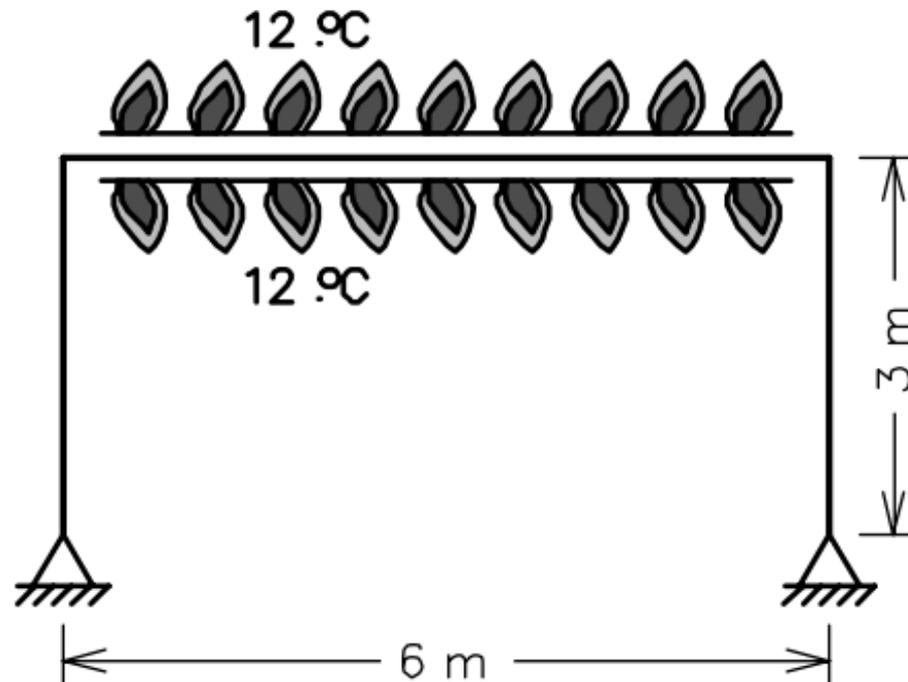
EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

Item (b): Determine os diagramas de momentos fletores das estruturas isostáticas e os aspectos (não precisa dos valores numéricos) dos diagramas de momentos fletores das estruturas hiperestáticas.



EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

- (c) Determine o diagrama de momentos fletores (com valores numéricos) da estrutura hiperestática inferior (solicitada pela variação de temperatura). Deve-se utilizar o Método das Forças, adotando obrigatoriamente como Sistema Principal a estrutura isostática da esquerda. Somente considere deformações por flexão. Sabe-se que o alongamento relativo interno de um elemento infinitesimal de barra devido a uma variação uniforme de temperatura é $du = \alpha \Delta T dx$. Neste caso não existe rotação relativa interna do elemento infinitesimal.



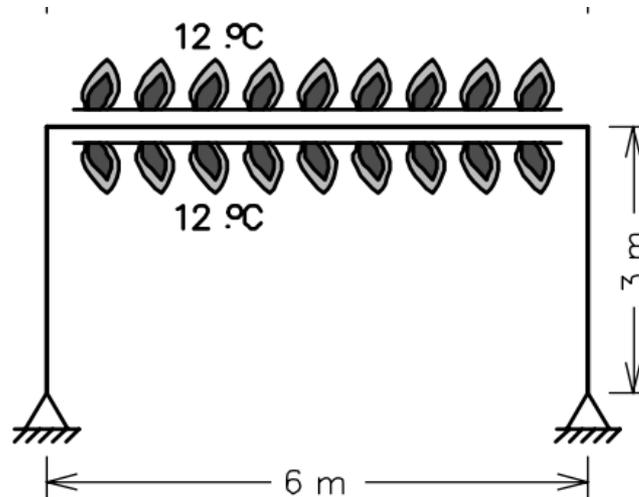
EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

Item (b):

Passo 1: Hiperestáticos e Sistema Principal

$$g = [(n^\circ \text{ de componentes de reação de apoio}) + 3 \cdot (n^\circ \text{ de anéis})] - [3 + (n^\circ \text{ de equações vindas de articulações internas})].$$

Hiperestático: $g = 4 + 3 \cdot 0 - (3 + (0)) = 1$.



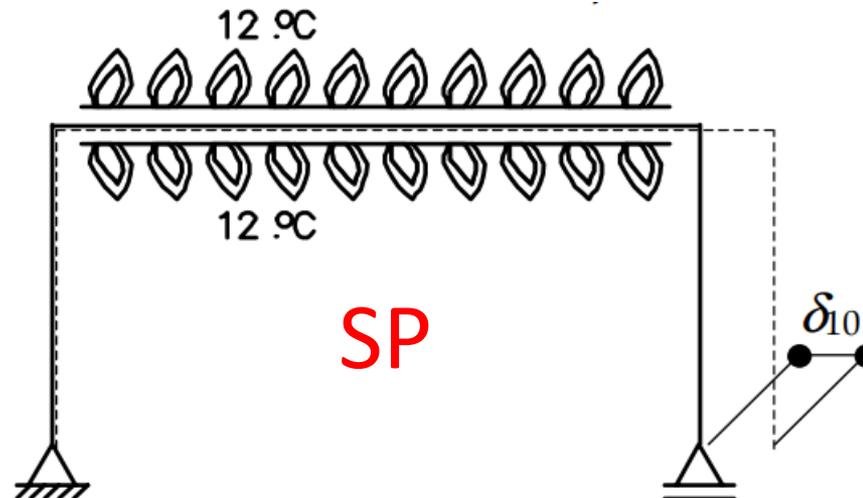
EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

Item (b):

Passo 1: Hiperestáticos e Sistema Principal

$$g = [(n^\circ \text{ de componentes de reação de apoio}) + 3 \cdot (n^\circ \text{ de anéis})] - [3 + (n^\circ \text{ de equações vindas de articulações internas})].$$

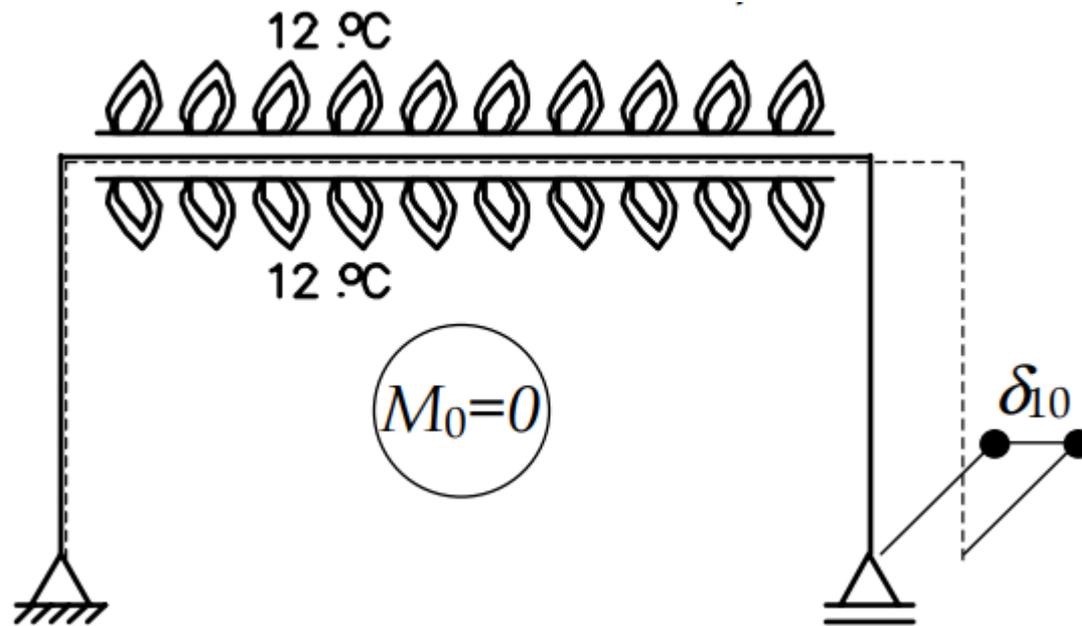
Hiperestático: $g = 4 + 3 \cdot 0 - (3 + (0)) = 1$.



EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SP.

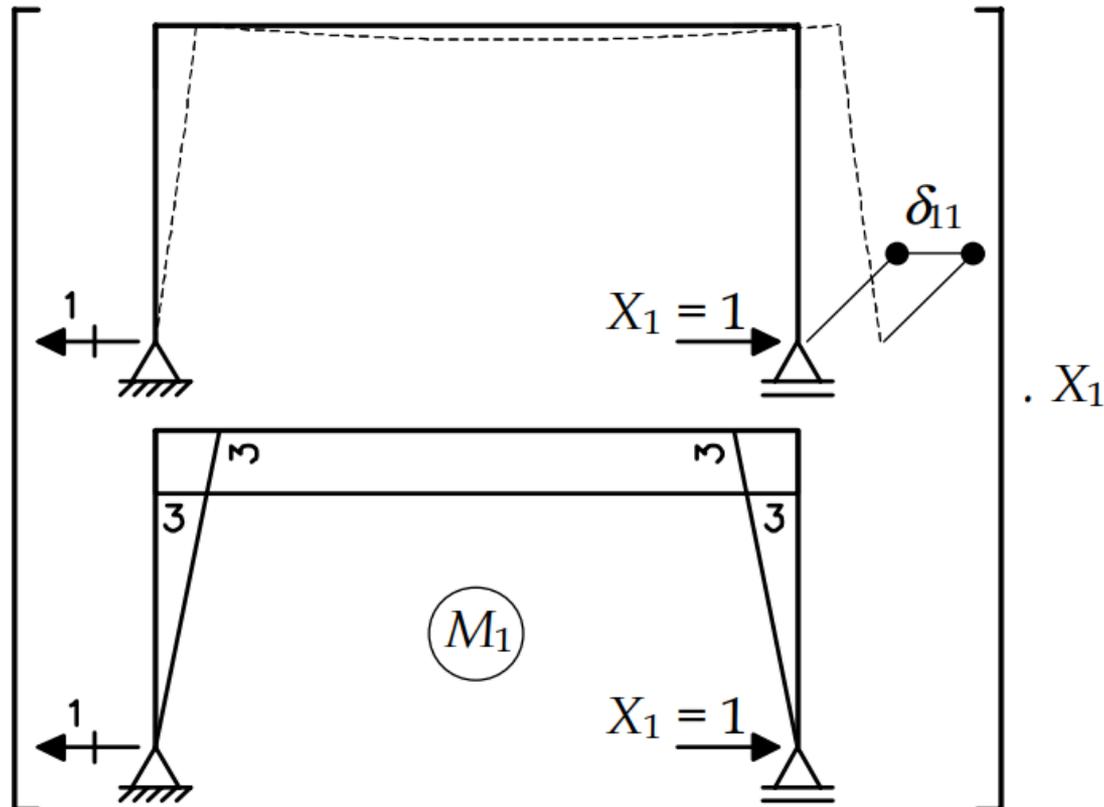


EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP.

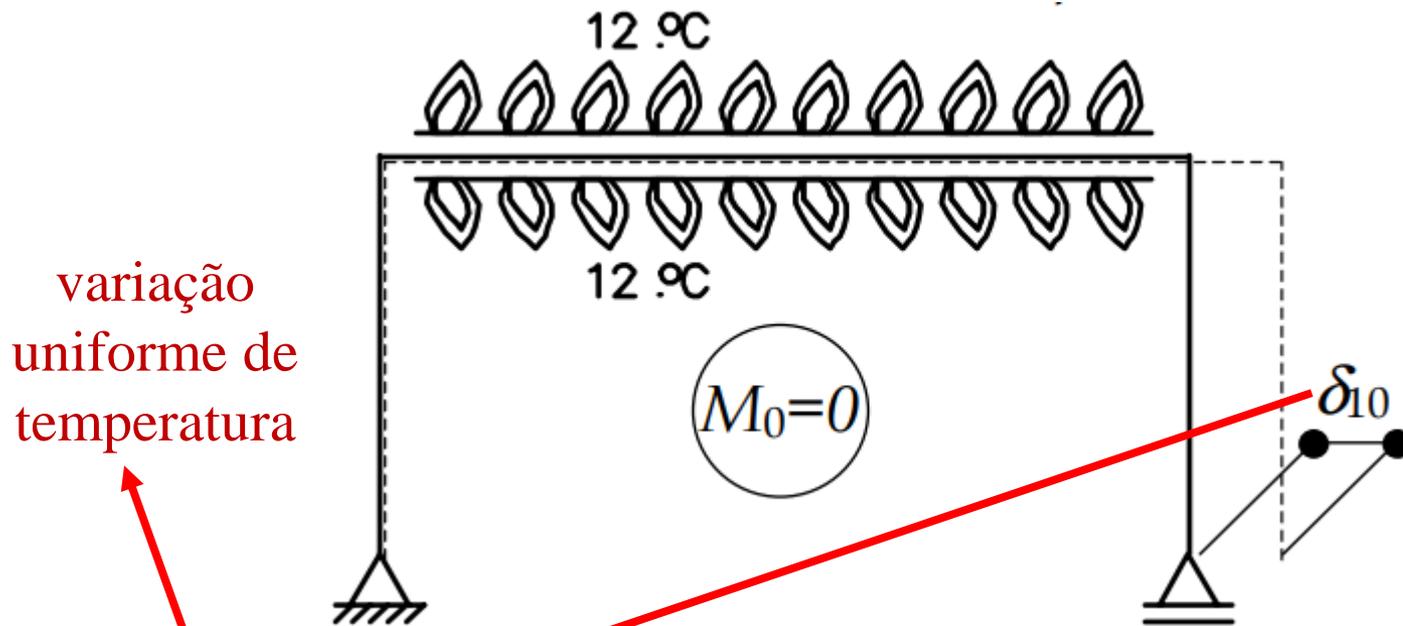
Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

Passo 3: Superposição de Efeitos:

Cálculo de δ_{10} pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV)



$$\delta_{10} = \alpha \cdot \Delta T \cdot L = 10^{-5} \cdot 12 \cdot 6 = +72 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

Passo 3: Superposição de Efeitos: Ver Aula métodos de energia!

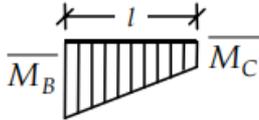
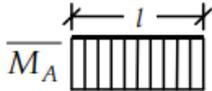
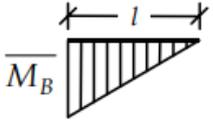
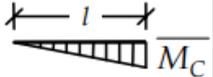
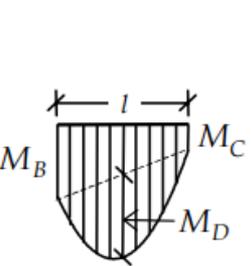
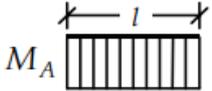
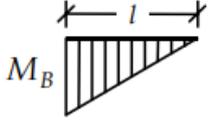
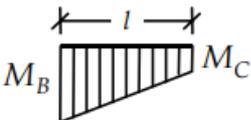
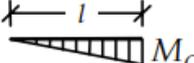
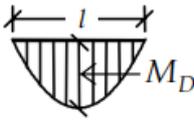
Se fosse temperatura **aquecimento diferencial e linear** em relação as fibras superiores e inferiores:

$$\delta_{10} = \frac{1}{P} \cdot \left[\sum_{\text{barras}} \left[\alpha \cdot T_{CG} \cdot \int \bar{N} \cdot dx \right]_{\text{barra}} + \sum_{\text{barras}} \left[\frac{\alpha \cdot (T_i - T_s)}{h} \cdot \int \bar{M} \cdot dx \right]_{\text{barra}} \right]$$

EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

Passo 3: Superposição de Efeitos

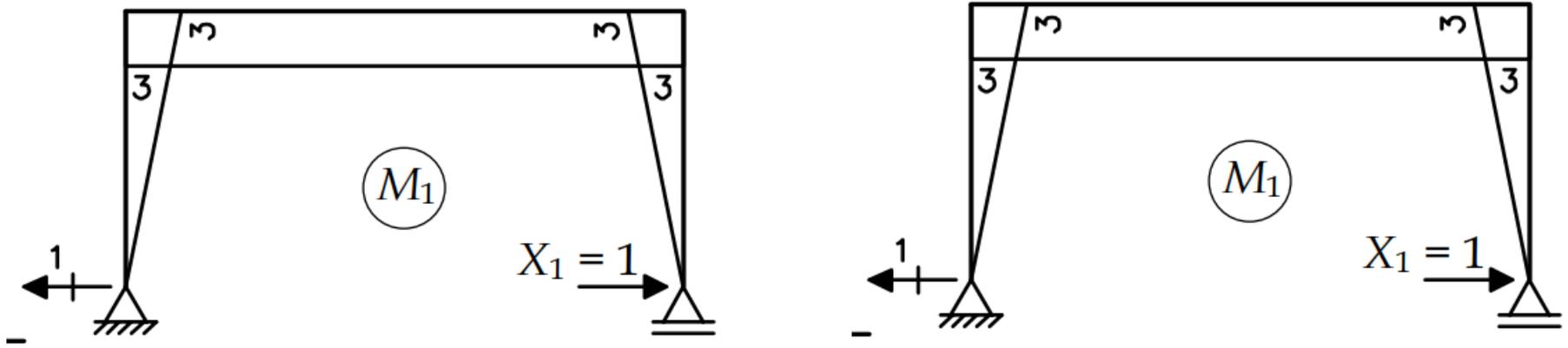
Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.

$\int_0^l Mm dx$					
					
			$\overline{M}_A M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M}_B M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M}_C M_A l$
			$\frac{1}{2} \overline{M}_A M_B l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_B M_B l$	$\frac{1}{6} \overline{M}_C M_B l$
			$\frac{1}{2} \overline{M}_A M_C l$	$\frac{1}{6} \overline{M}_B M_C l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_C M_C l$
			$\frac{2}{3} \overline{M}_A M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_B M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_C M_D l$

EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

Passo 3: Superposição de Efeitos

Cálculo dos δ_{11} usando o PFV



$$\delta_{11} = \int \frac{(M_1)^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 6 \right]$$

$$\delta_{11} = +72 \cdot 10^{-5} \text{ m / kN}$$

EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

Passo 3: Superposição de Efeitos

$$\delta_{10} = \alpha \cdot \Delta T \cdot L = 10^{-5} \cdot 12 \cdot 6 = +72 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

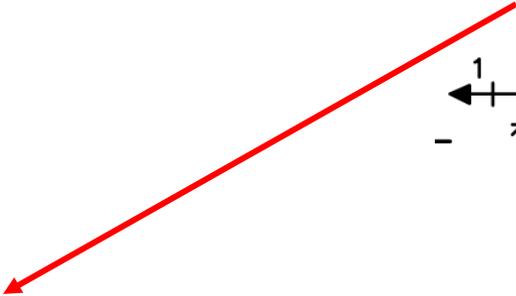
$$\delta_{11} = +72 \cdot 10^{-5} \text{ m / kN}$$

Equação de compatibilidade

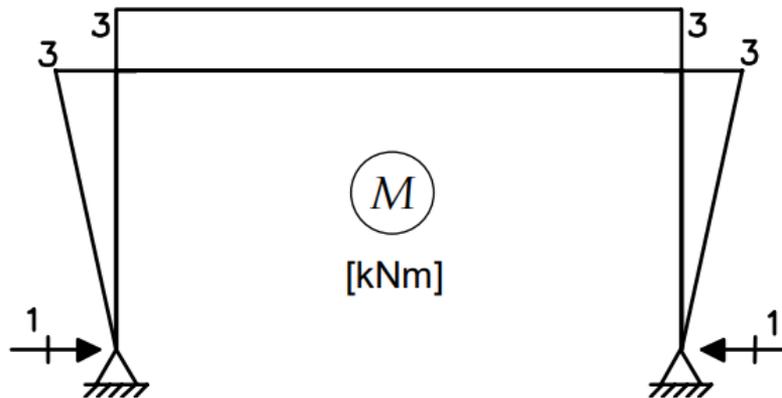
$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = -1 \text{ kN}$$

EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

Passo 4: Determinação dos esforços internos



$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 = 0 + M_1 \cdot (-1) = -M_1$$



EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

Item (d): Considere que as colunas dos quadros acima tiveram a seção transversal modificada para uma com momento de inércia $I = 2,0 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ (a viga não se altera). Responda:

(d.1) Os diagramas de momentos fletores das estruturas isostáticas se alteram? Por que?

(d.2) Os diagramas de momentos fletores das estruturas hiperestáticas se alteram? Por que?

Item (d.1) – Na estrutura isostática, o diagrama de momentos fletores só depende dos valores da carga e reações, e da geometria da estrutura. Com a consideração da hipótese de pequenos deslocamentos, as equações de equilíbrio podem ser escritas para a geometria indeformada (original) da estrutura. Portanto, o diagrama de momentos fletores não se altera com a modificação do momento de inércia da seção transversal das colunas.

No caso da carga uniformemente distribuída, a estrutura isostática terá sempre o diagrama de momentos fletores indicado no item (a) (diagrama parabólico no viga). No caso da variação de temperatura, a estrutura isostática terá sempre momentos fletores nulos.

EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

Item (d): Considere que as colunas dos quadros acima tiveram a seção transversal modificada para uma com momento de inércia $I = 2,0 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ (a viga não se altera). Responda:

- (d.1) Os diagramas de momentos fletores das estruturas isostáticas se alteram? Por que?
- (d.2) Os diagramas de momentos fletores das estruturas hiperestáticas se alteram? Por que?

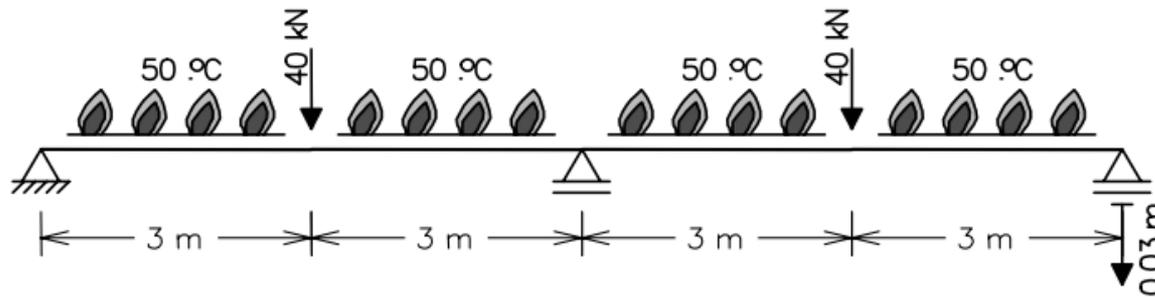
Item (d.2) – Na estrutura hiperestática, por ter vínculos excedentes, os esforços internos dependem da rigidez relativa entre as barras. Com as colunas mais rígidas do que a viga, as rotações das extremidades da viga são menores do que no caso com todas as barras com rigidez iguais, se aproximando do caso de uma viga com extremidades engastadas. Portanto, o diagrama de momentos fletores fica alterado com a modificação do momento de inércia da seção transversal das colunas. No caso da carga uniformemente distribuída, a estrutura isostática terá como o mesmo aspecto do diagrama de momentos fletores indicado no item (a), mas os valores ficam alterados em relação ao diagrama com viga e colunas com mesma seção transversal.

EXEMPLO 6: Viga com temperatura e recalque

EXEMPLO 6: Temperatura e Recalque

Para a viga contínua com dois vãos mostrada abaixo pede-se o diagrama de momentos fletores utilizando o Método das Forças. As seguintes solicitações atuam na estrutura concomitantemente:

- Uma carga concentrada de 40 kN no centro de cada vão.
- Aquecimento das fibras superiores da viga de $\Delta T_s = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ ao longo de toda a sua extensão (as fibras inferiores não sofrem variação de temperatura, isto é, $\Delta T_i = 0 \text{ }^\circ\text{C}$).
- Recalque vertical (para baixo) de 3 cm do apoio direito.



Sabe-se:

- A viga tem um material com módulo de elasticidade $E = 10^8 \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$.
- A viga tem seção transversal com área $A = 1,0 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ e momento de inércia $I = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^4$. A altura da seção transversal é $h = 0,60 \text{ m}$ e o seu centro de gravidade fica posicionado na metade da altura.
- O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é

$$du^T = \alpha \Delta T_{CG} dx,$$

sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

- O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é

$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx.$$

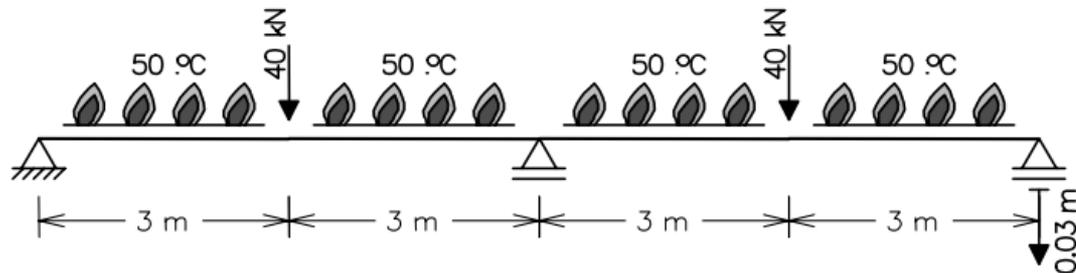
EXEMPLO 6: Temperatura e Recalque

Item (b):

Passo 1: Hiperestáticos e Sistema Principal

$$g = [(n^\circ \text{ de componentes de reação de apoio}) + 3 \cdot (n^\circ \text{ de anéis})] - [3 + (n^\circ \text{ de equações vindas de articulações internas})].$$

Hiperestático: $g = 4 + 3 \cdot 0 - (3 + (0)) = 1$.



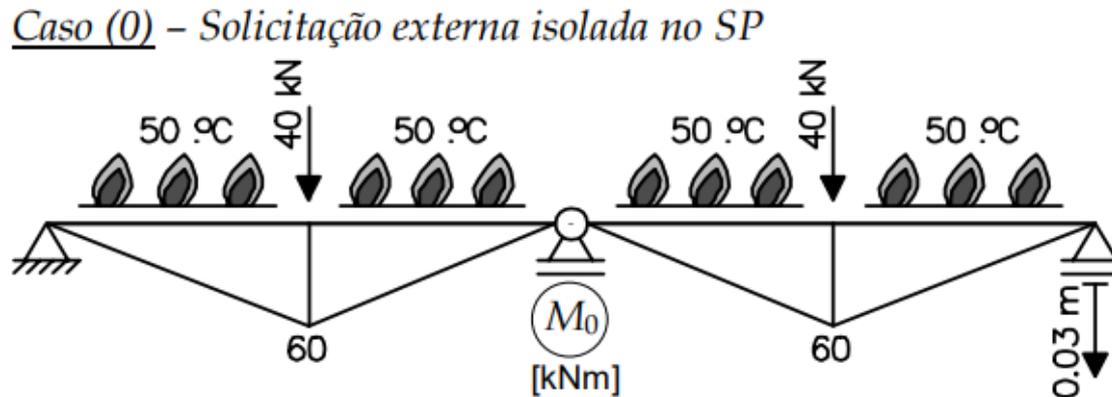
Sistema Principal e Hiperestático



EXEMPLO 6: Temperatura e Recalque

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SP.

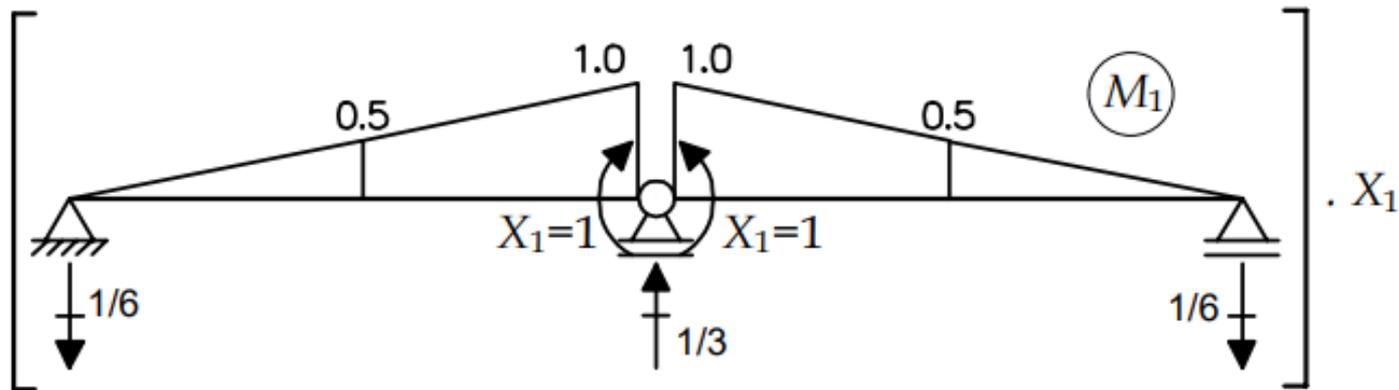


EXEMPLO 6: Temperatura e Recalque

Passo 2: Restabelecimento das condições de compatibilidade

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP.

Caso (1) – X_1 isolado no SP



EXEMPLO 6: Temperatura e Recalque

Passo 3: Superposição de Efeitos: Ver Aula Métodos de Energia!

Cálculo de δ_{10} pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV)

$$\overline{W_E} = \overline{U}$$

$$1 \cdot \delta_{10} + (-1/6) \cdot (-0.03) = \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dx + \int \frac{M_1 \cdot \alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} \int M_1 dx - \frac{1}{6} \cdot 0.03$$

EXEMPLO 6: Temperatura e Recalque

Passo 3: Superposição de Efeitos: Ver Aula Métodos de Energia!

Cálculo de δ_{10} pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV)

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} \int M_1 dx - \frac{1}{6} \cdot 0.03$$

Tabela

Integral do
momento
fletor virtual

EXEMPLO 6: Temperatura e Recalque

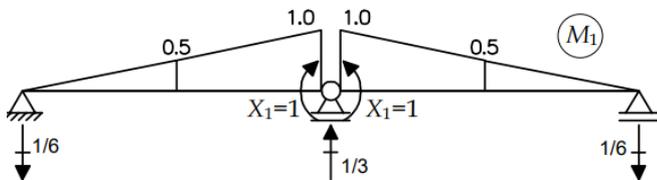
Passo 3: Superposição de Efeitos: Ver Aula Métodos de Energia!

Cálculo de δ_{10} pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV)

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} \int M_1 dx - \frac{1}{6} \cdot 0.03$$

Tabela

Integral do
momento
fletor virtual



$$\int_0^6 \left(\frac{1x}{6}\right) dx + \int_0^6 \left(\frac{1x}{6}\right) dx$$

EXEMPLO 6: Temperatura e Recalque

Passo 3: Superposição de Efeitos: Ver Aula Métodos de Energia!

Cálculo de δ_{10} pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV)

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 60 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 60 \cdot 3 - \frac{1}{6} \cdot 1.0 \cdot 60 \cdot 3 \right) \right]$$

$$+ \frac{\alpha \cdot (-50)}{0.60} \cdot \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1.0 \right) \right] - \frac{1}{6} \cdot 0.03 = -\frac{180}{EI}$$

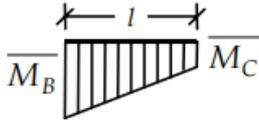
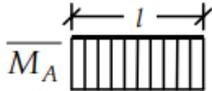
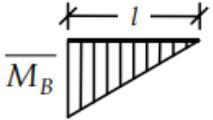
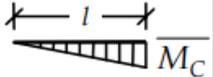
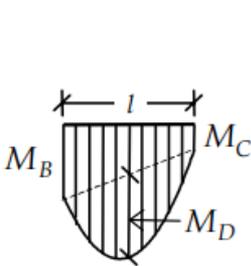
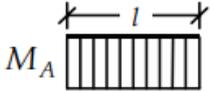
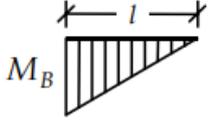
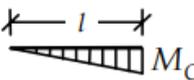
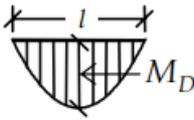
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 6 \right) \right] = +\frac{4}{EI}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = 45 \text{ kNm}$$

EXEMPLO 5: Variação de Temperatura

Passo 3: Superposição de Efeitos

Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.

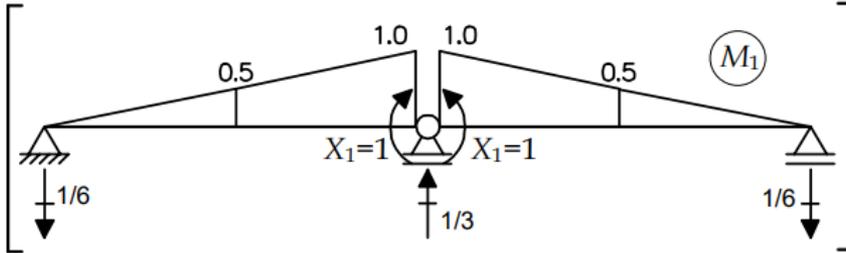
$\int_0^l Mm dx$					
					
			$\overline{M}_A M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M}_B M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M}_C M_A l$
			$\frac{1}{2} \overline{M}_A M_B l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_B M_B l$	$\frac{1}{6} \overline{M}_C M_B l$
			$\frac{1}{2} \overline{M}_A M_C l$	$\frac{1}{6} \overline{M}_B M_C l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_C M_C l$
			$\frac{2}{3} \overline{M}_A M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_B M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_C M_D l$

EXEMPLO 6: Temperatura e Recalque

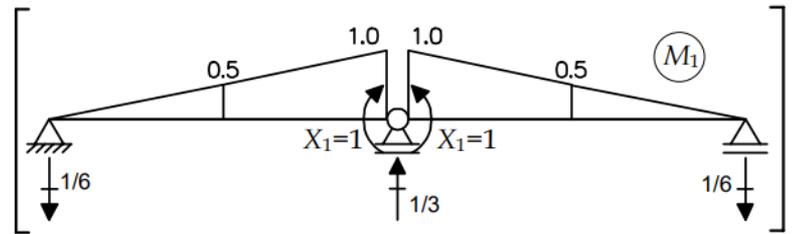
Passo 3: Superposição de Efeitos

Cálculo dos δ_{11} usando o PFV

Caso (1) - X_1 isolado no SP



Caso (1) - X_1 isolado no SP



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 6 \right) \right] = + \frac{4}{EI}$$

EXEMPLO 6: Temperatura e Recalque

Passo 3: Superposição de Efeitos

$$\overline{W}_E = \overline{U} \Rightarrow$$

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} \int M_1 dx - \frac{1}{6} \cdot 0.03$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 60 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 60 \cdot 3 - \frac{1}{6} \cdot 1.0 \cdot 60 \cdot 3 \right) \right]$$

$$+ \frac{\alpha \cdot (-50)}{0.60} \cdot \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1.0 \right) \right] - \frac{1}{6} \cdot 0.03 = -\frac{180}{EI}$$

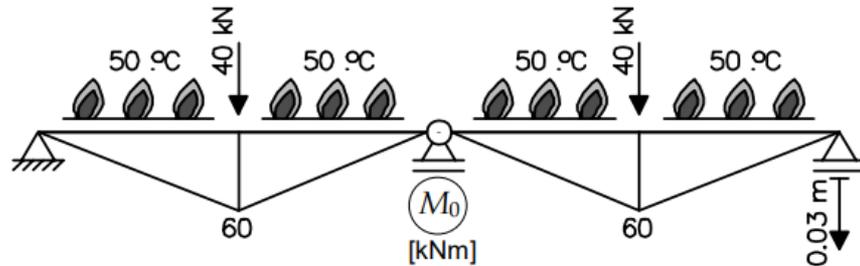
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 6 \right) \right] = +\frac{4}{EI}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = 45 \text{ kNm}$$

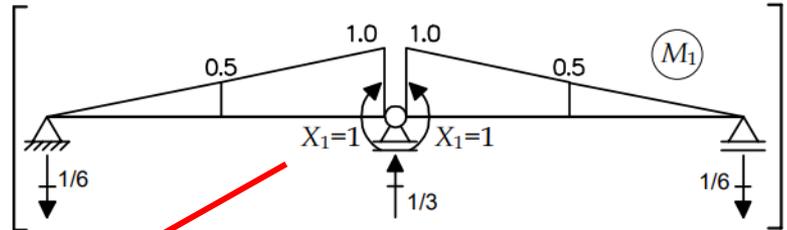
EXEMPLO 6: Temperatura e Recalque

Passo 4: Determinação dos esforços internos

Caso (0) - Solicitação externa isolada no SP



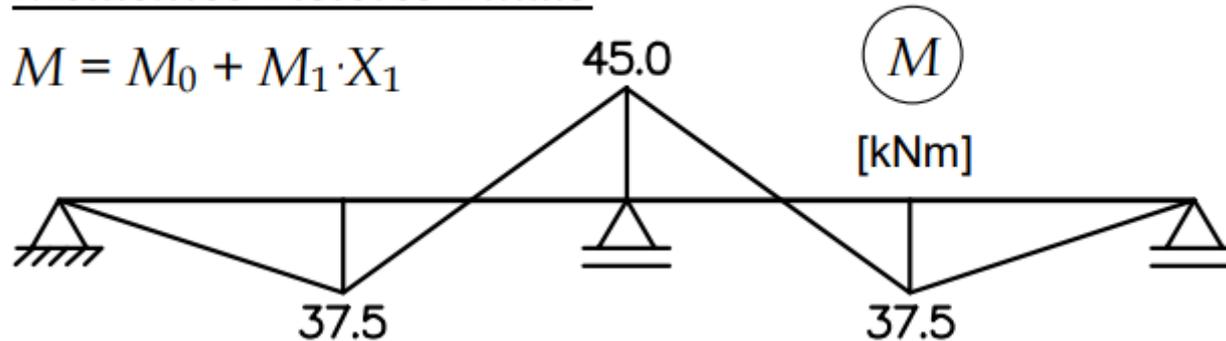
Caso (1) - X_1 isolado no SP



$$X_1 = 45 \text{ kNm}$$

Momentos Fletores Finais

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$



...

CONTINUA na Próxima Parte