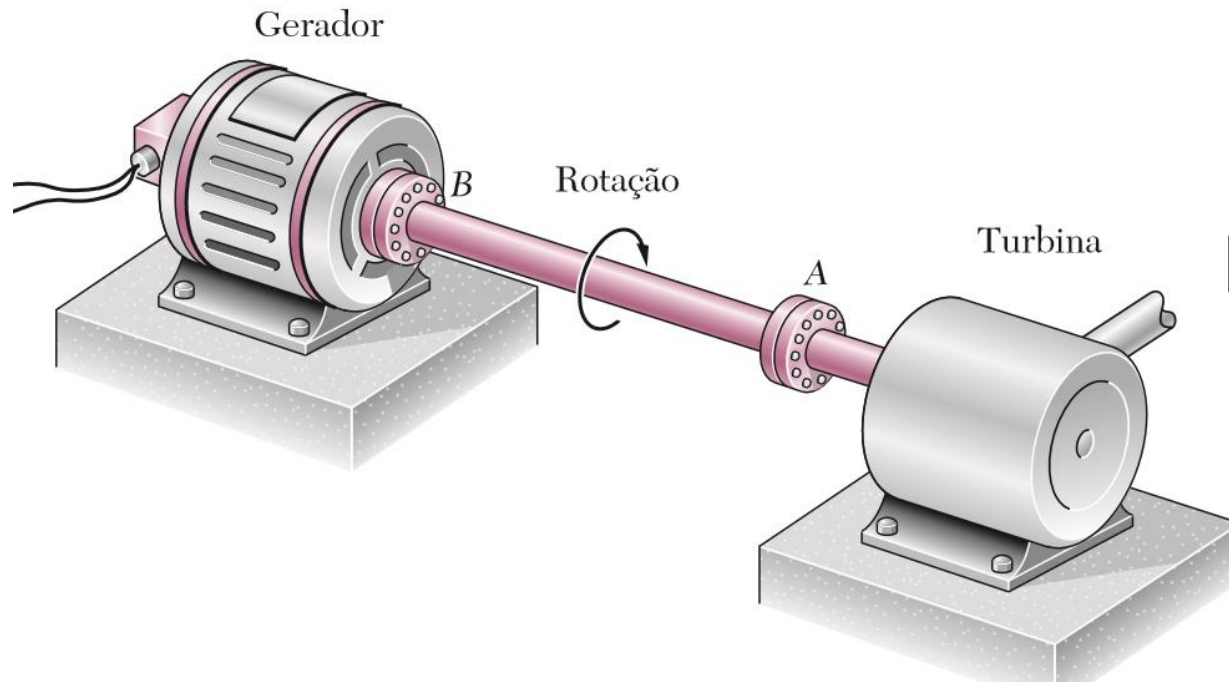




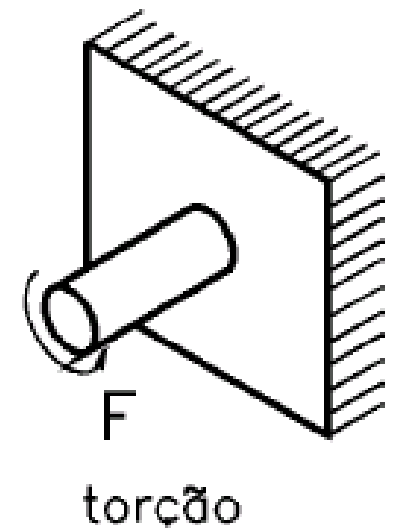
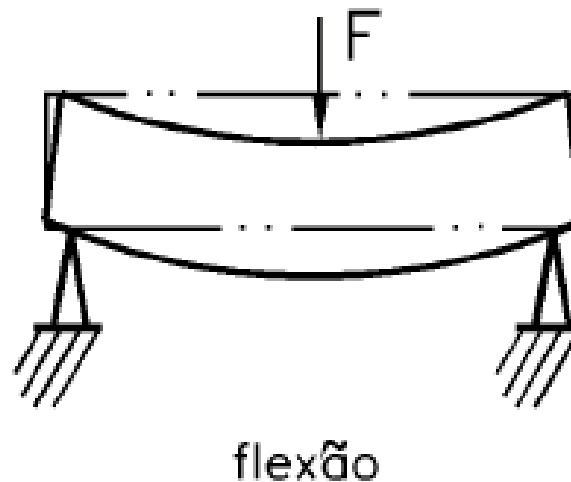
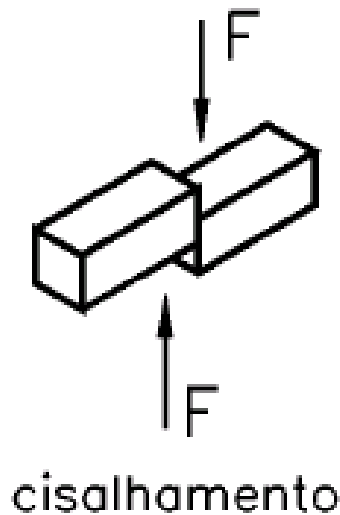
Mecânica dos Sólidos II

Prof. Dr. Alverlando Ricardo

Aula 10: PARTE III: **TORÇÃO**

INTRODUÇÃO

Da AULA 1: Tipos de Solicitações

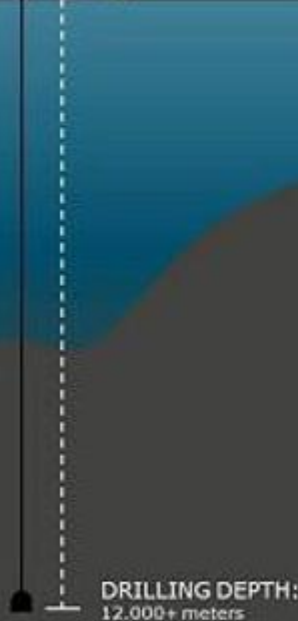


INTRODUÇÃO

Drilling Rig Types

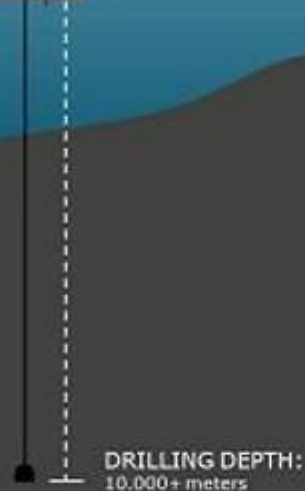
DRILLSHIP

Operates at water depth of:
500-3.650 meters



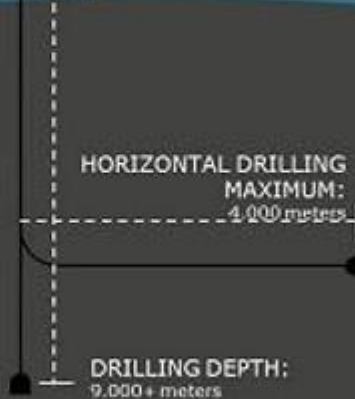
SEMI-SUBMERSIBLE

Operates at water depth of:
500-3.000 meters



JACK-UP RIG

Operates at water depth of:
25-150 meters



Quais as tensões e deformações que ocorrem na coluna de perfuração?

Fonte: <http://www.maerskdrilling.com/en/about-us/the-drilling-industry>

Acesso em: 02/05/2016

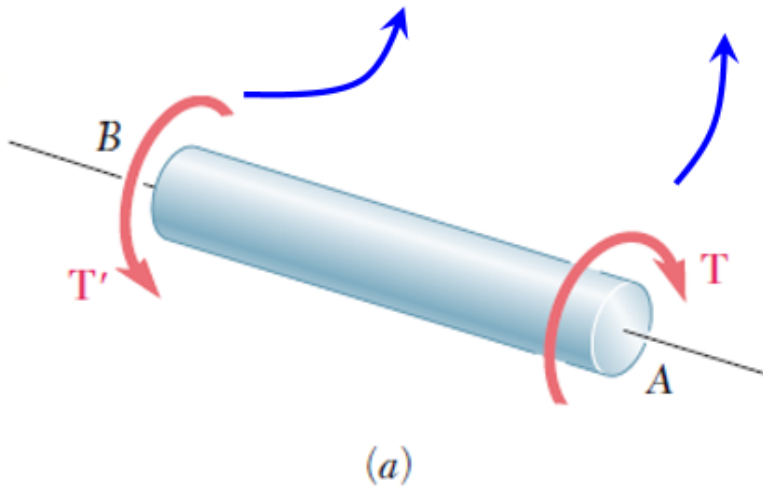
INTRODUÇÃO

- Estudaremos peças submetidas a **efeito de torção**, ou seja, estudaremos as **tensões e deformações** produzidas em peças de “**seção transversal constante**”, sujeitas à ação de conjugados que **tendem a torcer essas peças**:

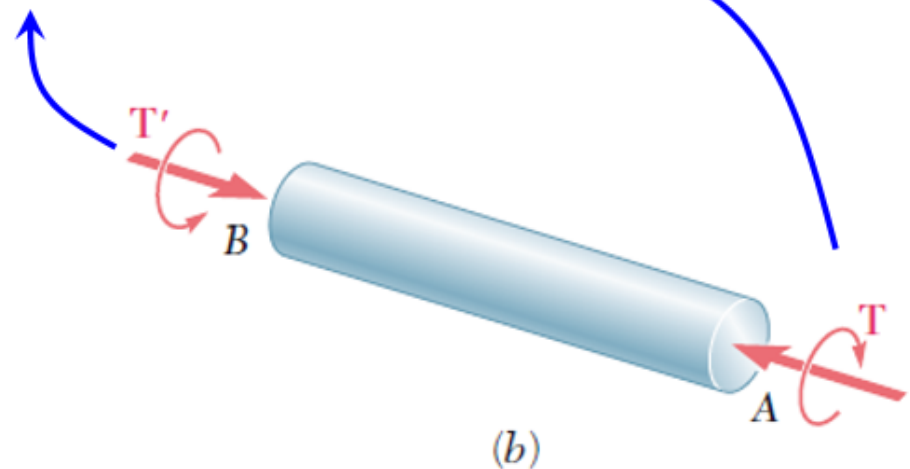
INTRODUÇÃO

- Estudaremos peças submetidas a **efeito de torção**, ou seja, estudaremos as **tensões e deformações** produzidas em peças de “**seção transversal constante**”, sujeitas à ação de conjugados que **tendem a torcer essas peças**:

Momentos de torção, momentos torcionais ou torque.



Representação por setas curvas.

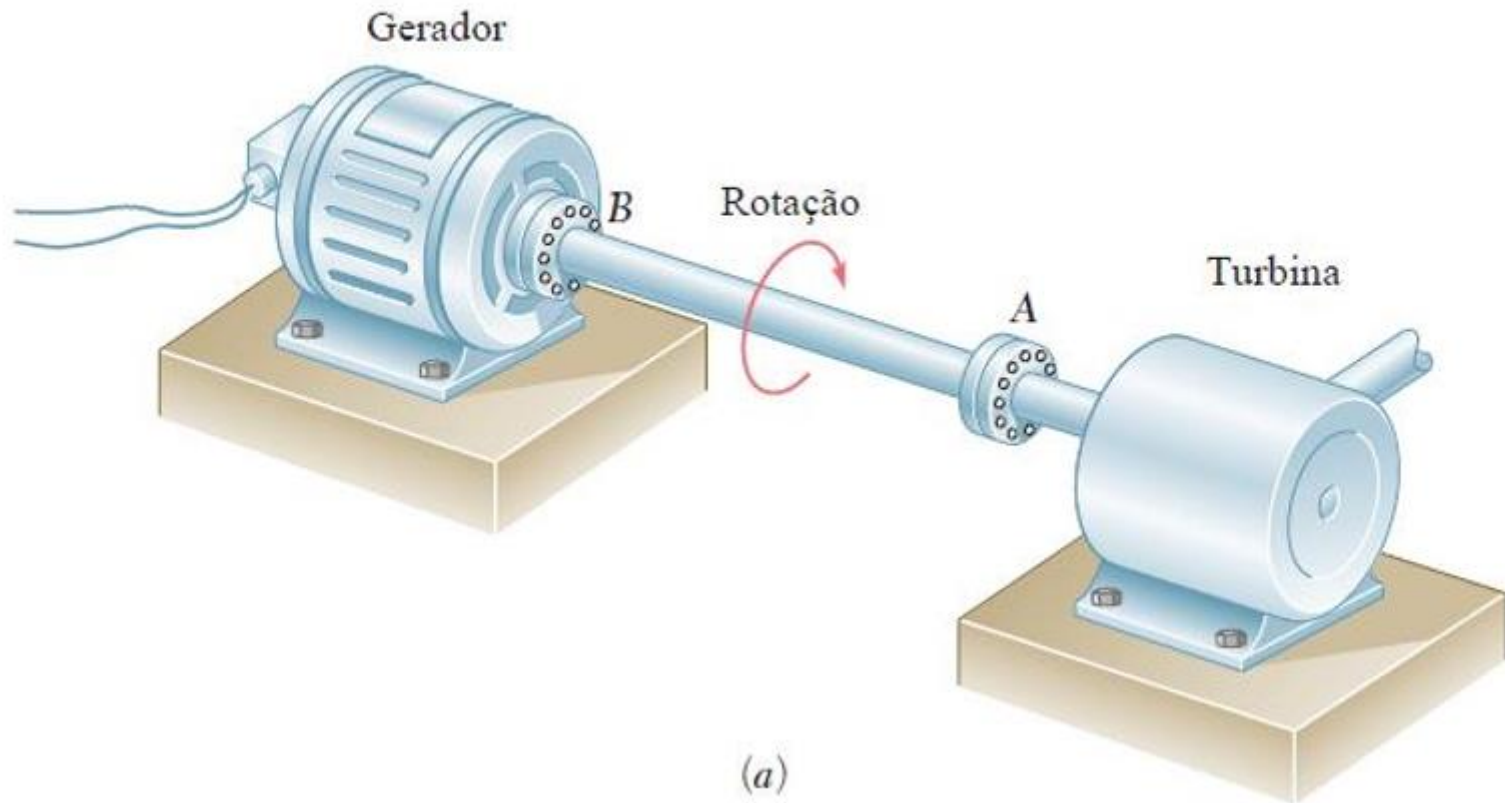


Representação por vetores conjugados.

INTRODUÇÃO

- Na prática da engenharia, a torção é encontrada, por exemplo, em eixos de transmissão e vigas:

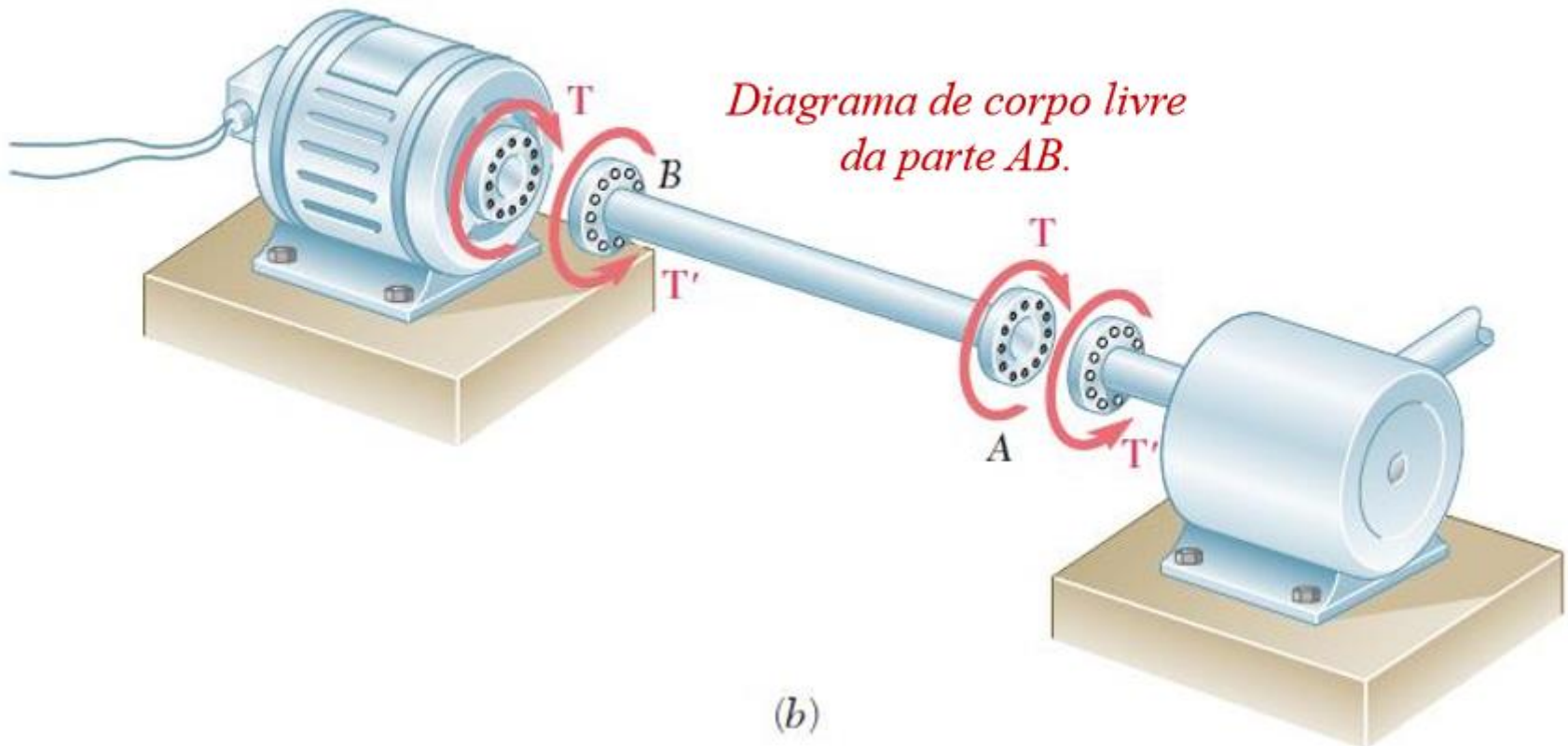
Transmissão de potência de uma turbina para um gerador de eletricidade:



INTRODUÇÃO

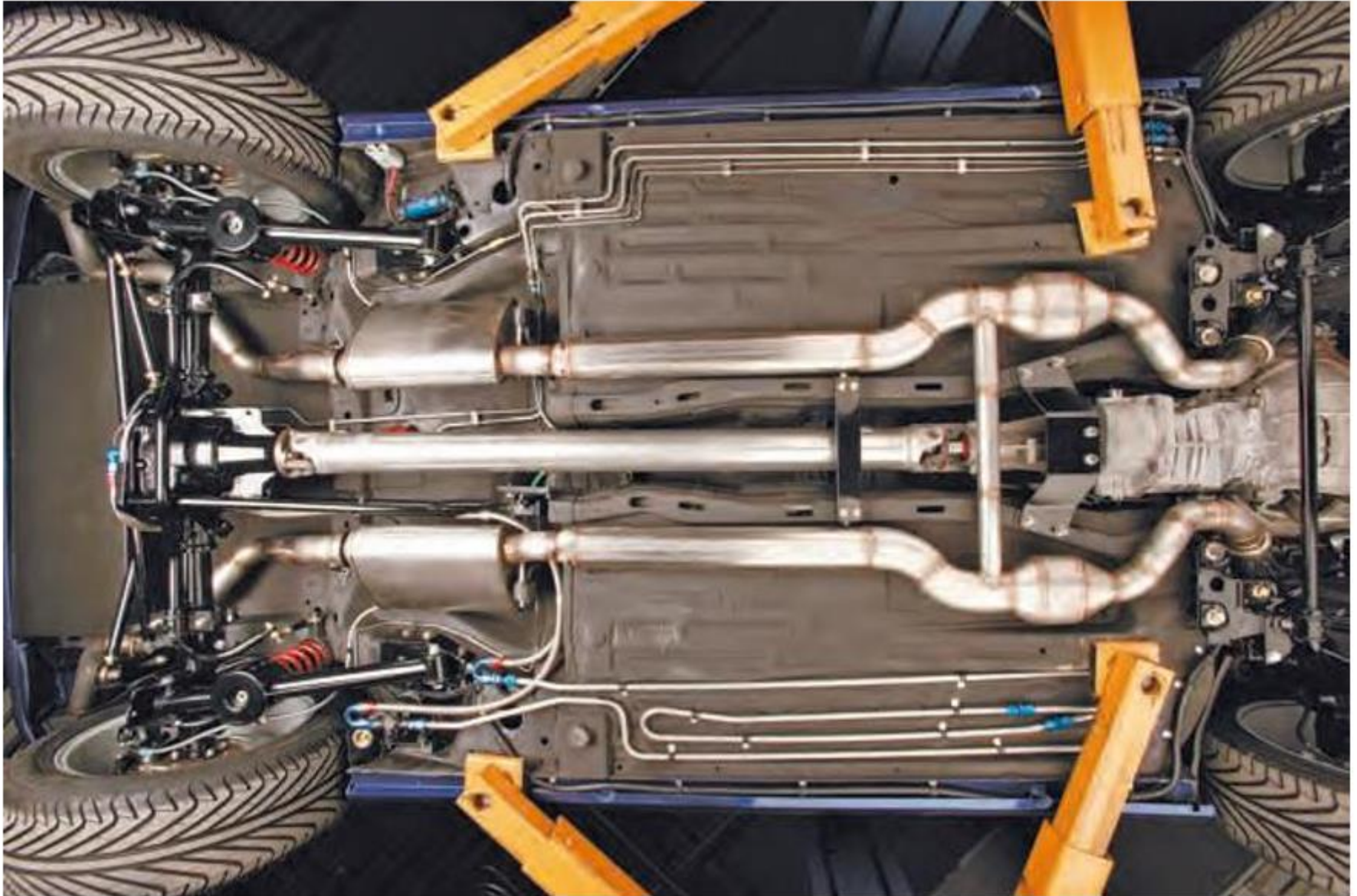
- Na prática da engenharia, a torção é encontrada, por exemplo, em eixos de transmissão e vigas:

Transmissão de potência de uma turbina para um gerador de eletricidade:

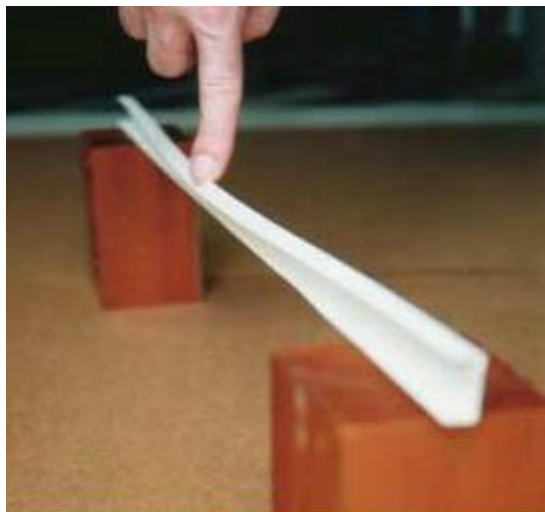
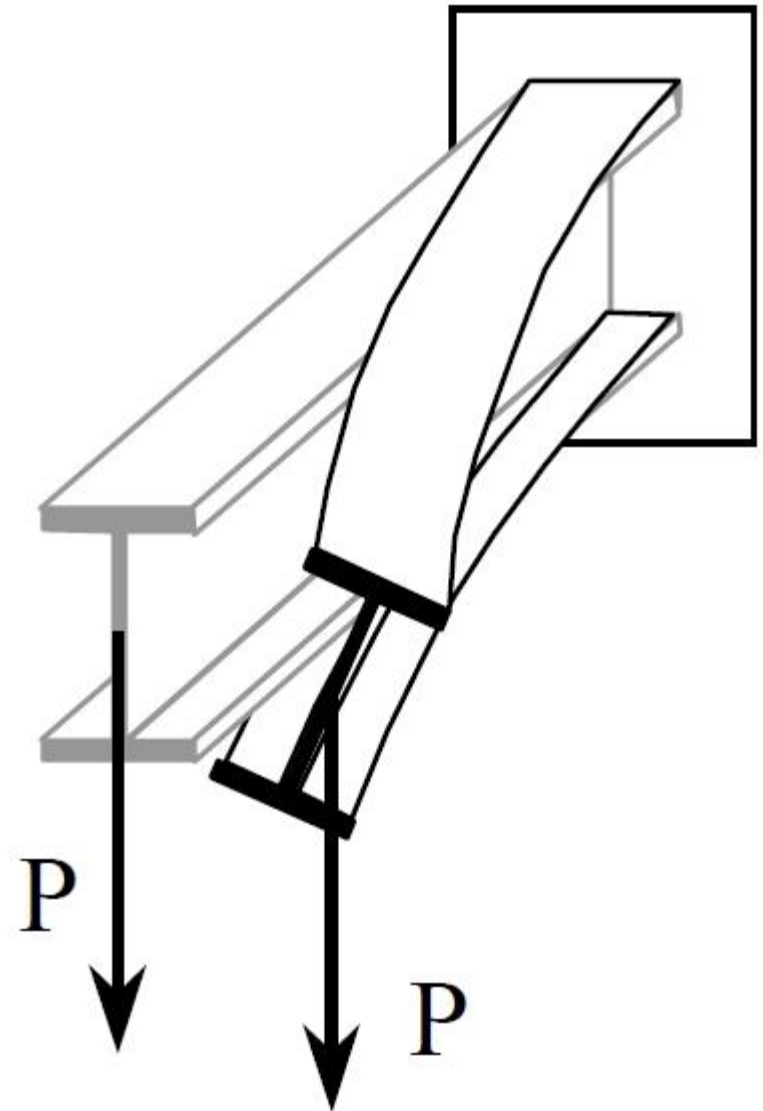
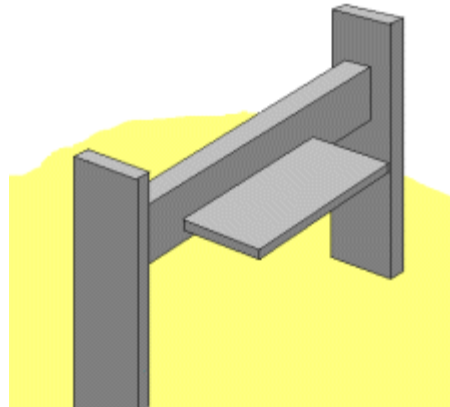
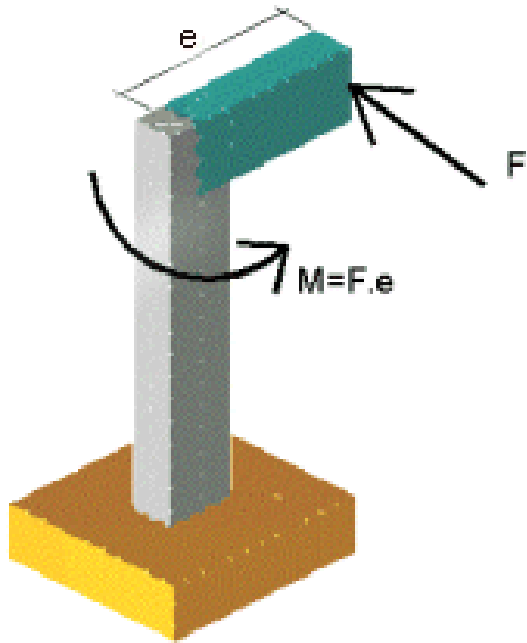


INTRODUÇÃO

Transmissão de potência do motor de um carro ao eixo de tração:



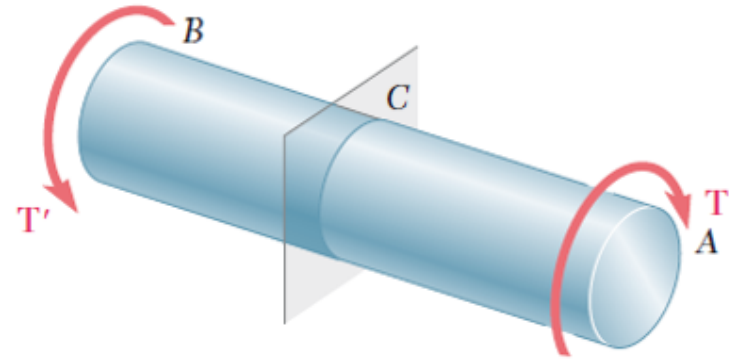
INTRODUÇÃO



Análise preliminar das tensões em um eixo

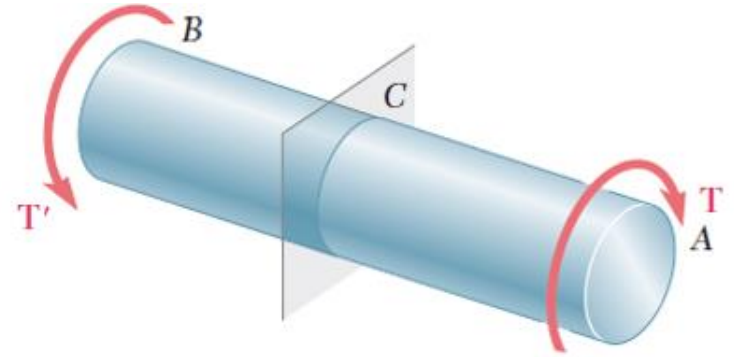
Análise preliminar: tensões em um eixo

- Consideremos o eixo AB sujeito à ação dos momentos de torção T e T' (iguais e de sentidos opostos):

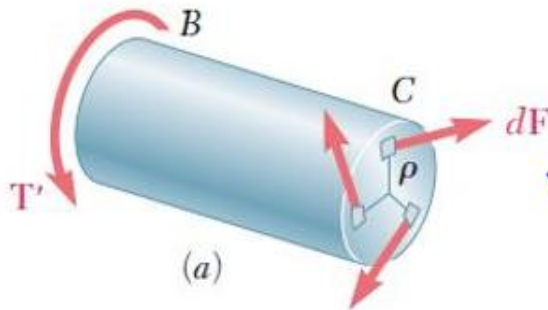


Análise preliminar: tensões em um eixo

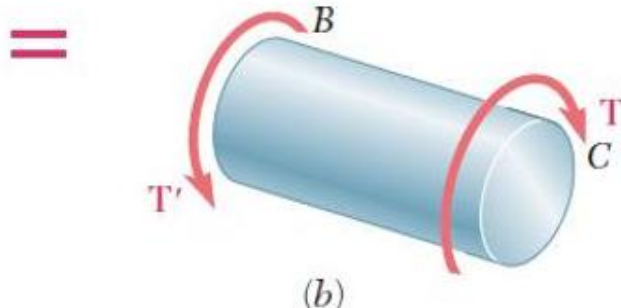
- Consideremos o eixo AB sujeito à ação dos momentos de torção T e T' (iguais e de sentidos opostos):



- Cortando o eixo no ponto C e traçando o diagrama de corpo livre da parte BC :

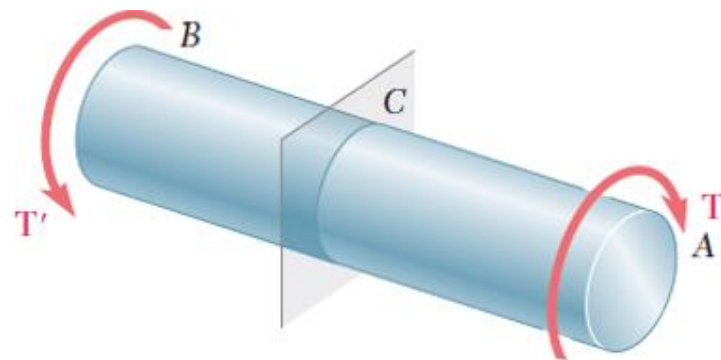


Forças elementares de cisalhamento, dF , perpendiculares ao raio do eixo.

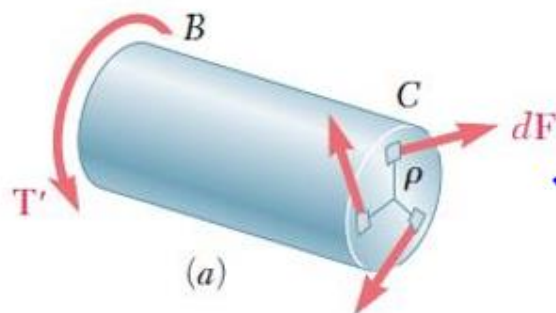


Análise preliminar: tensões em um eixo

- Consideremos o eixo AB sujeito à ação dos momentos de torção T e T' (iguais e de sentidos opostos):

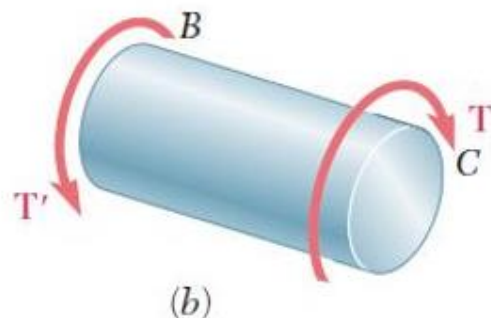


- Cortando o eixo no ponto C e traçando o diagrama de corpo livre da parte BC:



Forças elementares de cisalhamento, dF , perpendiculares ao raio do eixo.

=

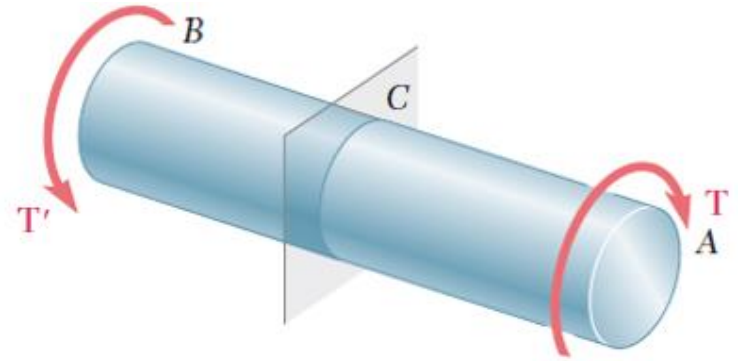


- O conjunto de forças elementares deve produzir um **momento de torção interno** T tal que a parte BC esteja em equilíbrio:

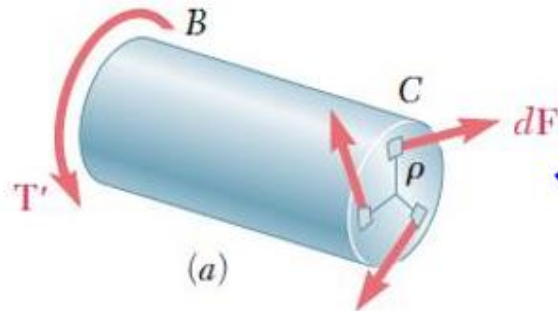
$$\int \rho dF = T$$

Análise preliminar: tensões em um eixo

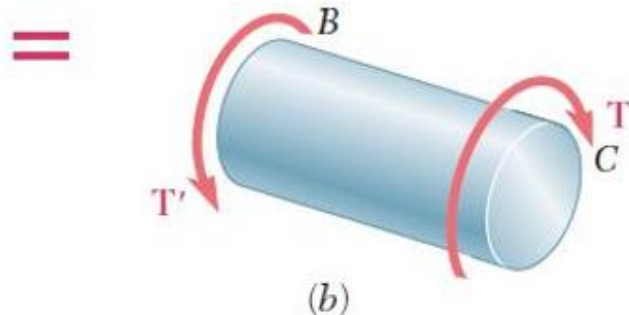
- Consideremos o eixo AB sujeito à ação dos momentos de torção T e T' (iguais e de sentidos opostos):



- Cortando o eixo no ponto C e traçando o diagrama de corpo livre da parte BC:



Forças elementares de cisalhamento, dF , perpendiculares ao raio do eixo.



- O conjunto de forças elementares deve produzir um **momento de torção interno** T tal que a parte BC esteja em equilíbrio:

$$\int_{\tau \cdot dA} \rho dF = T \quad \Rightarrow \quad \int \rho(\tau \cdot dA) = T$$

Análise preliminar: tensões em um eixo

- A **condição de equilíbrio** deve ser satisfeita ao longo de todo o eixo, porém ela **não** indica como as tensões se distribuem na seção transversal;

A distribuição real de tensões **não** pode ser determinada pelos métodos da estática.

Análise preliminar: tensões em um eixo

- A **condição de equilíbrio** deve ser satisfeita ao longo de todo o eixo, porém ela **não** indica como as tensões se distribuem na seção transversal;

A distribuição real de tensões
não pode ser determinada pelos
métodos da estática.



Ela é estaticamente
indeterminada.



Análise preliminar: tensões em um eixo

- A **condição de equilíbrio** deve ser satisfeita ao longo de todo o eixo, porém ela **não** indica como as tensões se distribuem na seção transversal;

A distribuição real de tensões **não** pode ser determinada pelos métodos da estática.



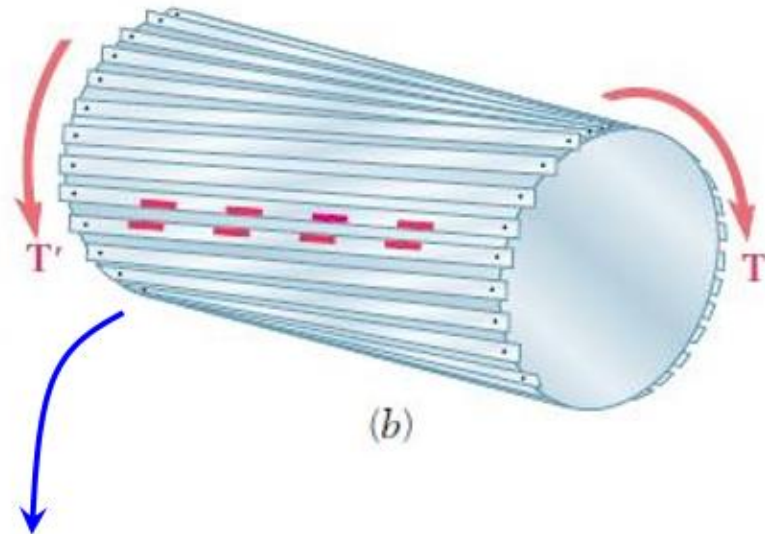
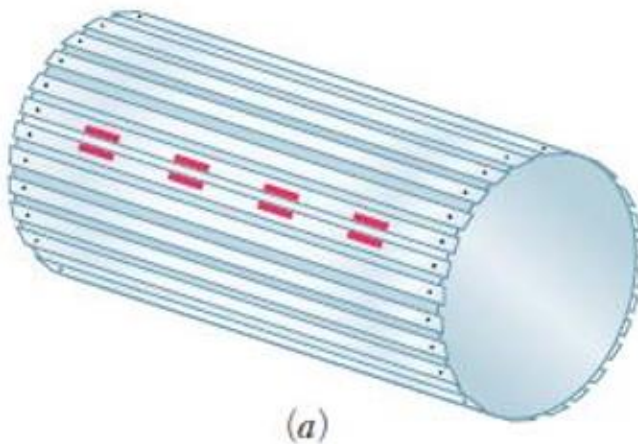
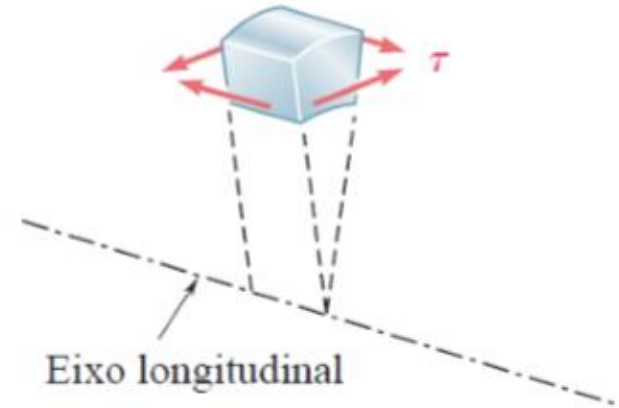
Ela é estaticamente indeterminada.



É necessário estudar as **deformações** produzidas nos eixos por efeito da torção.

Análise preliminar: tensões em um eixo

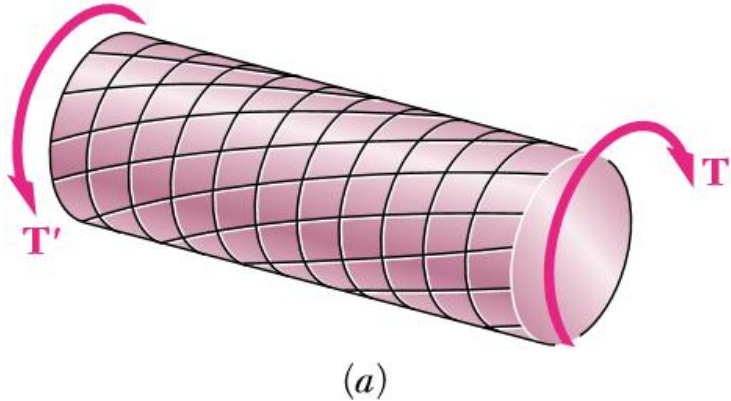
Analizando o equilíbrio de um elemento (infinitesimal) de uma barra circular, constatamos que existem tensões de cisalhamento tanto em planos perpendiculares ao eixo da barra circular quanto em planos longitudinais.



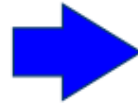
Como em materiais coesivos e homogêneos esse deslizamento não ocorre, devem existir tensões de cisalhamento que combatam esta tendência ao deslizamento.

Deformações em eixos circulares

Deformações em eixos circulares

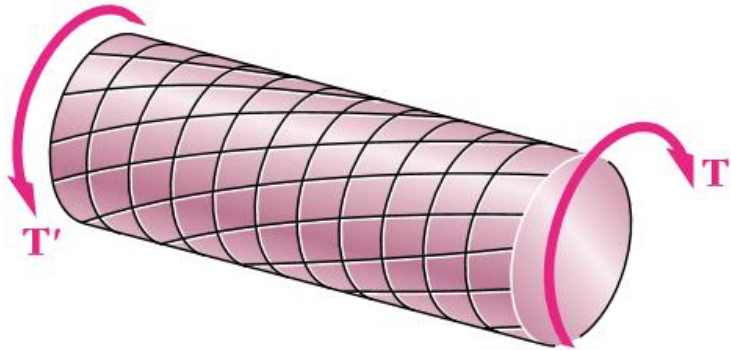


- Quando um eixo circular (maciço ou vazado) é submetido à torção, todas as **seções transversais permanecem planas** e conservam sua forma;



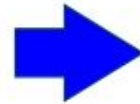
Eixos circulares são axissimétricos

Deformações em eixos circulares



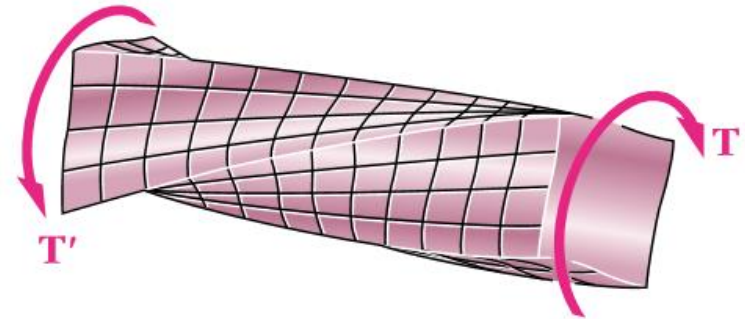
(a)

- Quando um eixo circular (maciço ou vazado) é submetido à torção, todas as **seções transversais permanecem planas** e conservam sua forma;

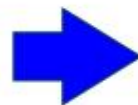


Eixos circulares são axissimétricos

- Quando uma barra de seção quadrada é submetida a momento de torção, suas várias seções transversais se deformam.



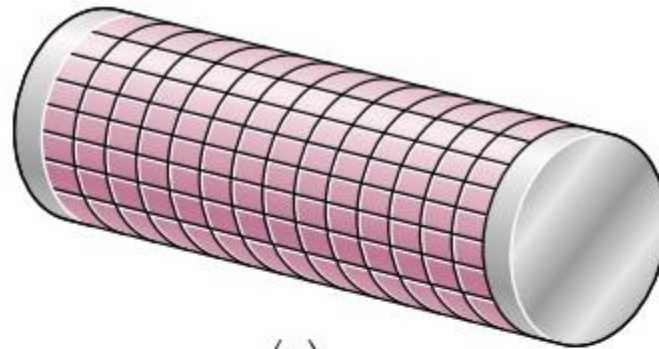
(b)



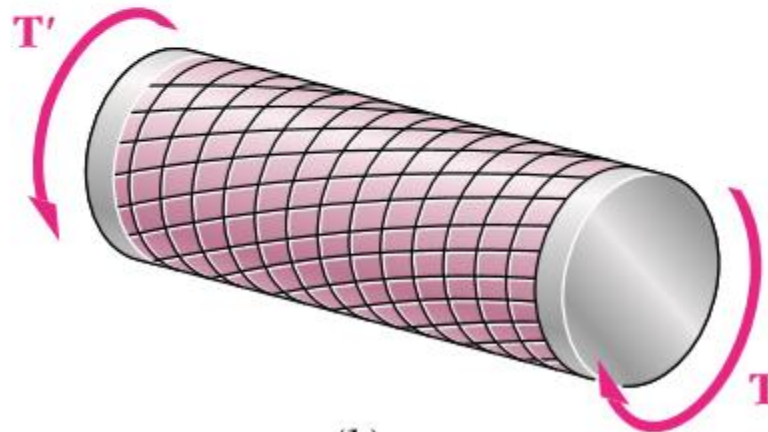
Barras quadradas apresentam apenas alguns eixos de simetria.

Deformações em eixos circulares

- Para assegurarmos que as extremidades do eixo também permaneçam planas e indeformadas, os momentos de torção serão aplicados por meio de **placas rígidas**:



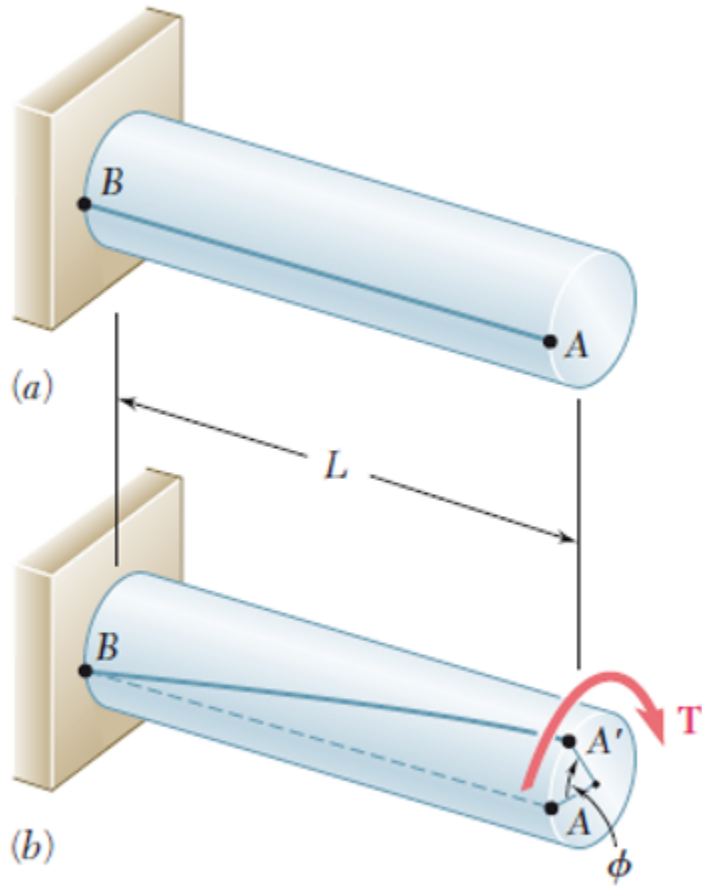
(a)



(b)

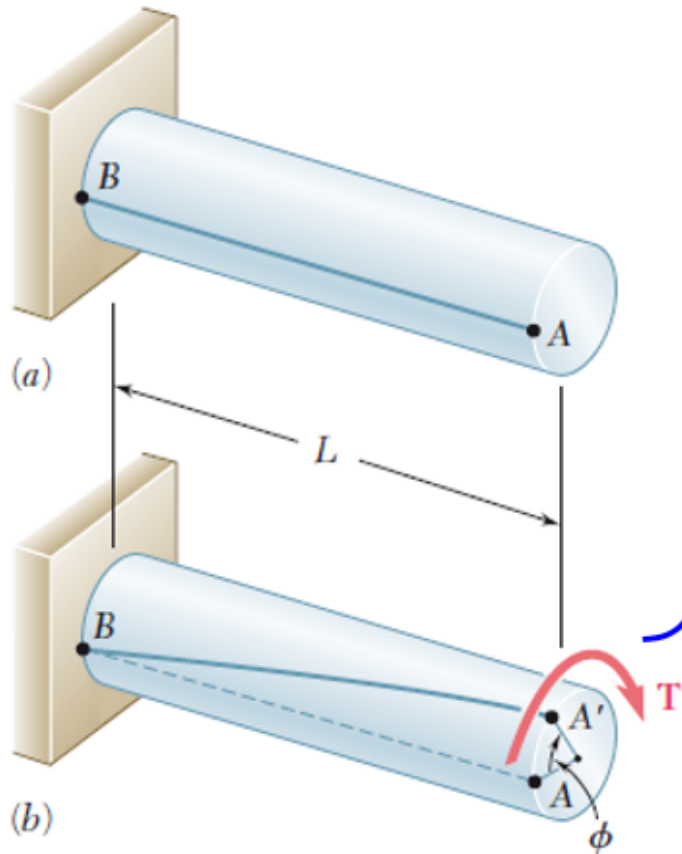
Deformações em eixos circulares

- Considere um eixo circular fixado a um suporte indeslocável:



Deformações em eixos circulares

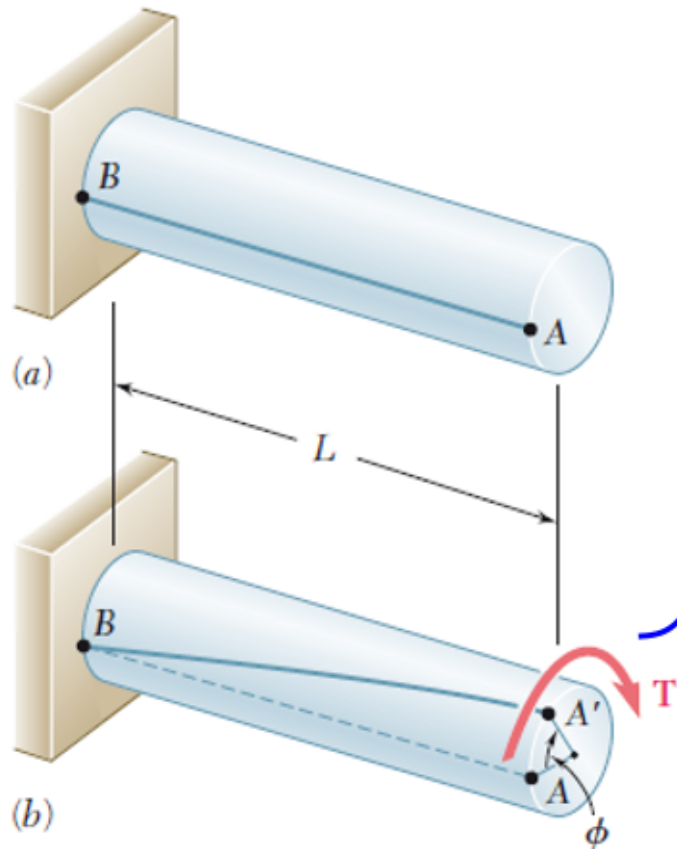
- Considere um eixo circular fixado a um suporte indeslocável:



Aplicando um momento de torção T à extremidade livre, o eixo gira, e a seção transversal da extremidade apresenta uma rotação representada pelo ângulo ϕ , chamado **ângulo de torção**.

Deformações em eixos circulares

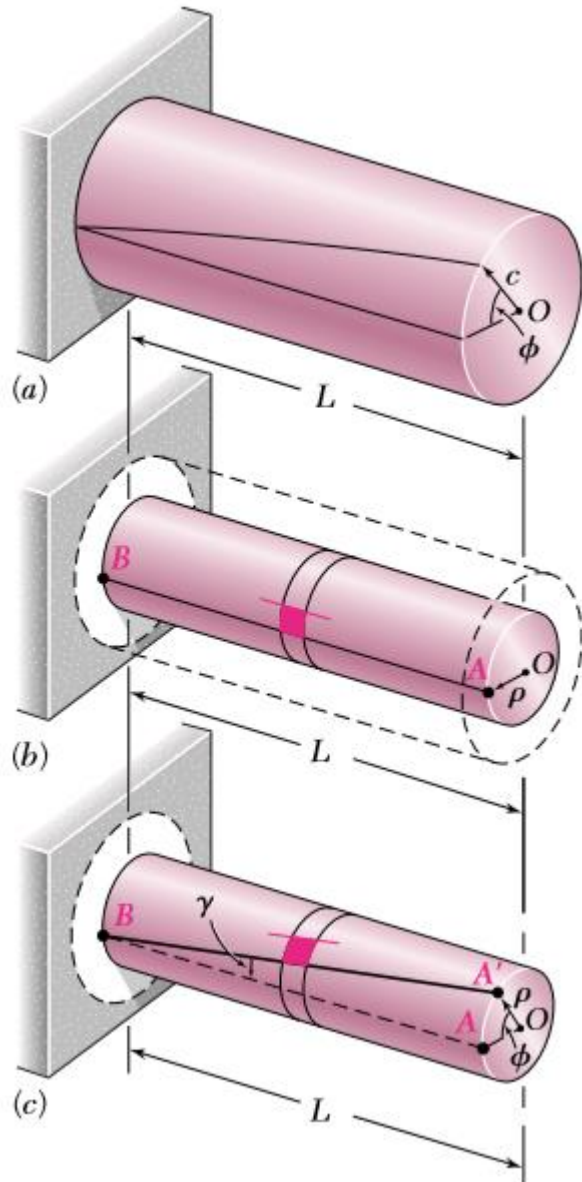
- Considere um eixo circular fixado a um suporte indeslocável:



Aplicando um momento de torção T à extremidade livre, o eixo gira, e a seção transversal da extremidade apresenta uma rotação representada pelo ângulo ϕ , chamado **ângulo de torção**.

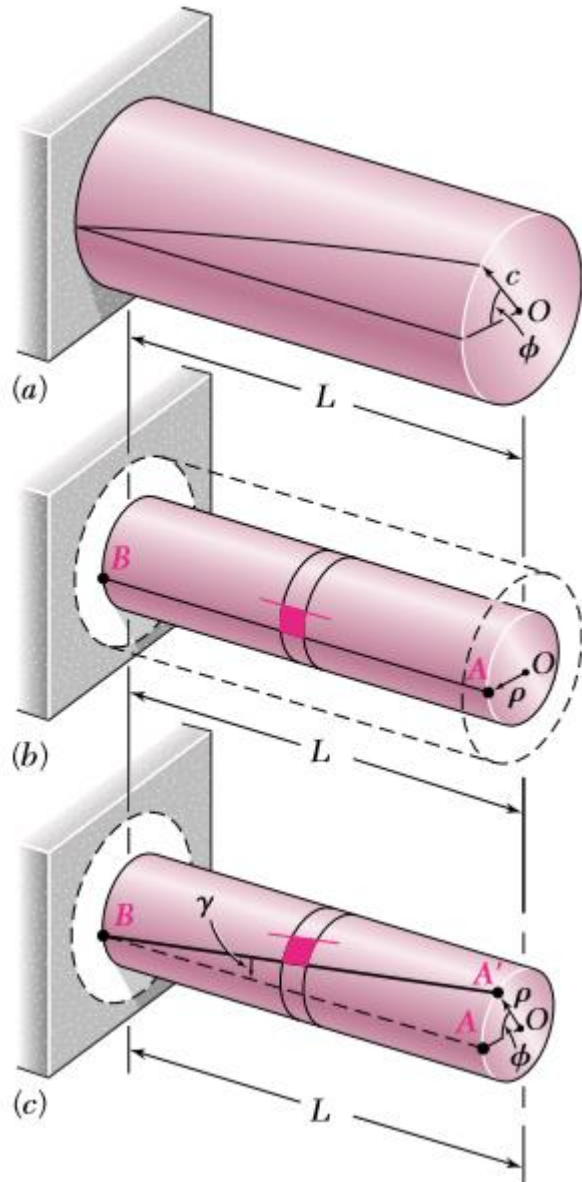
Para uma certa faixa de variação do valor T , o ângulo de torção é proporcional a T e ao comprimento L .

Deformações em eixos circulares



- Partindo agora de um eixo circular de comprimento L e raio c , torcido em um ângulo de torção ϕ , retira-se do interior do eixo um cilindro de raio ρ , marca-se na superfície deste um elemento de área:

Deformações em eixos circulares

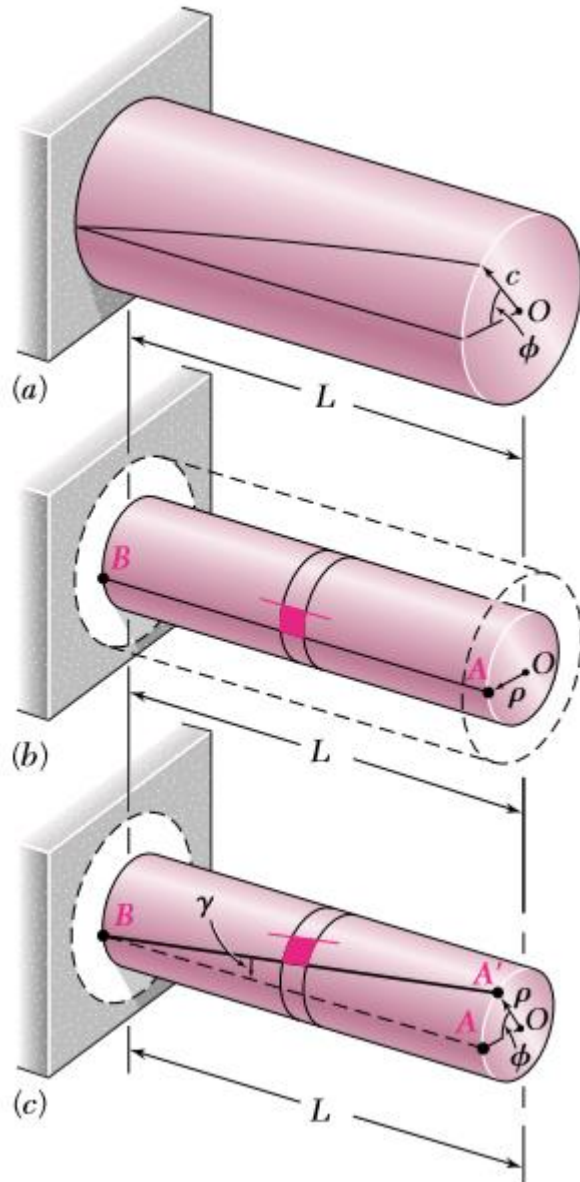


- Partindo agora de um eixo circular de comprimento L e raio c , torcido em um ângulo de torção ϕ , retira-se do interior do eixo um cilindro de raio ρ , marca-se na superfície deste um elemento de área:

← *Antes da aplicação de qualquer esforço de torção.*

Depois da aplicação do momento torçor, o elemento se transforma em um “losango”.

Deformações em eixos circulares



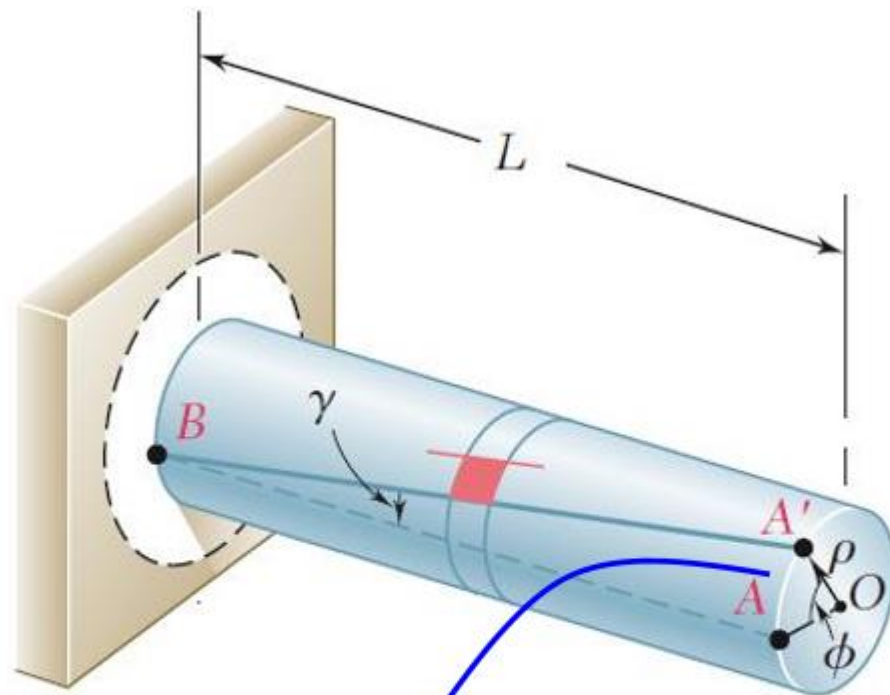
- Partindo agora de um eixo circular de comprimento L e raio c , torcido em um ângulo de torção ϕ , retira-se do interior do eixo um cilindro de raio ρ , marca-se na superfície deste um elemento de área:

← *Antes da aplicação de qualquer esforço de torção.*

Depois da aplicação do momento torçor, o elemento se transforma em um “losango”.

*Por definição, a **deformação de cisalhamento** em um certo elemento é medida pela variação do ângulo formado pelos lados do elemento.*

Deformações em eixos circulares

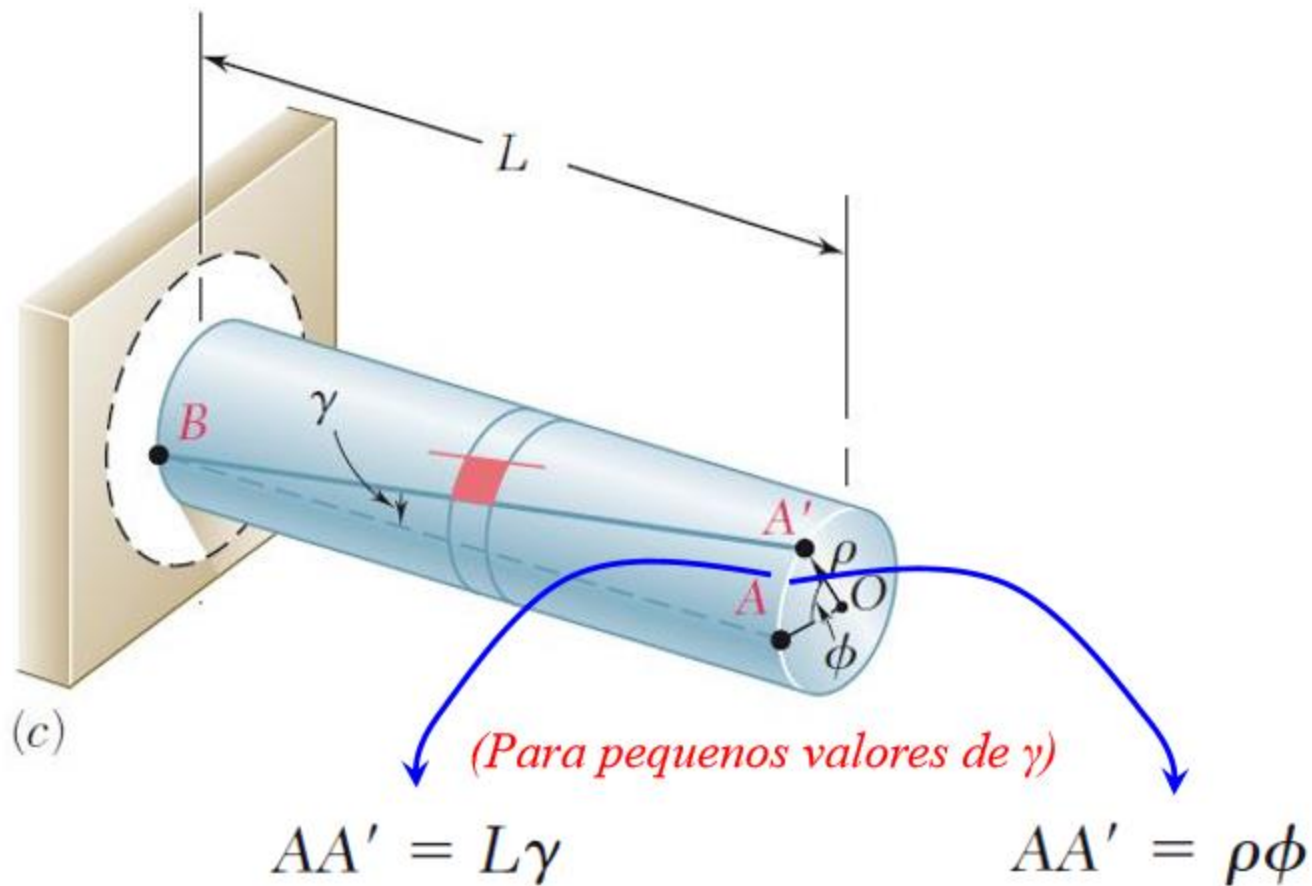


(c)

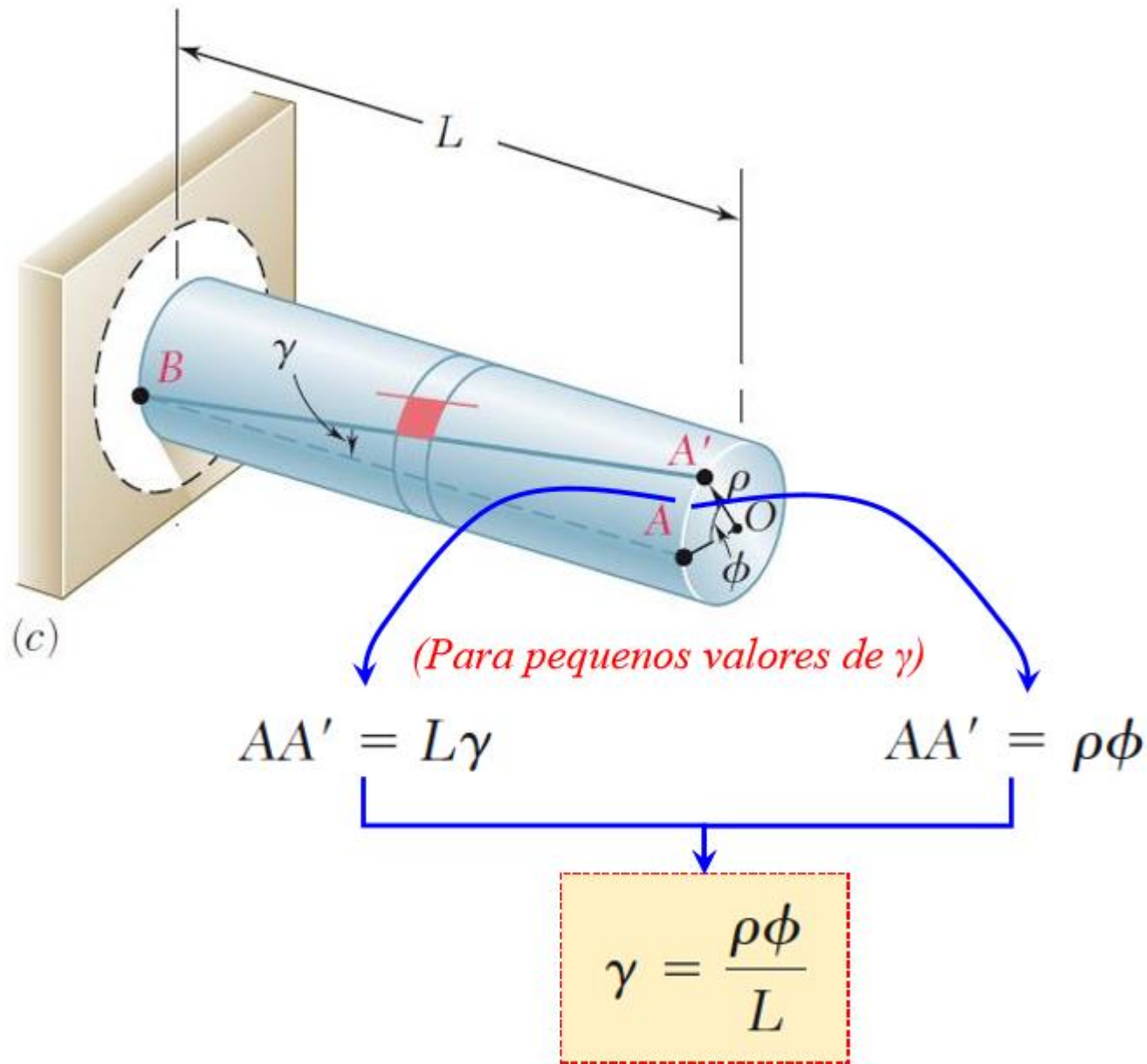
(Para pequenos valores de γ)

$$AA' = L\gamma$$

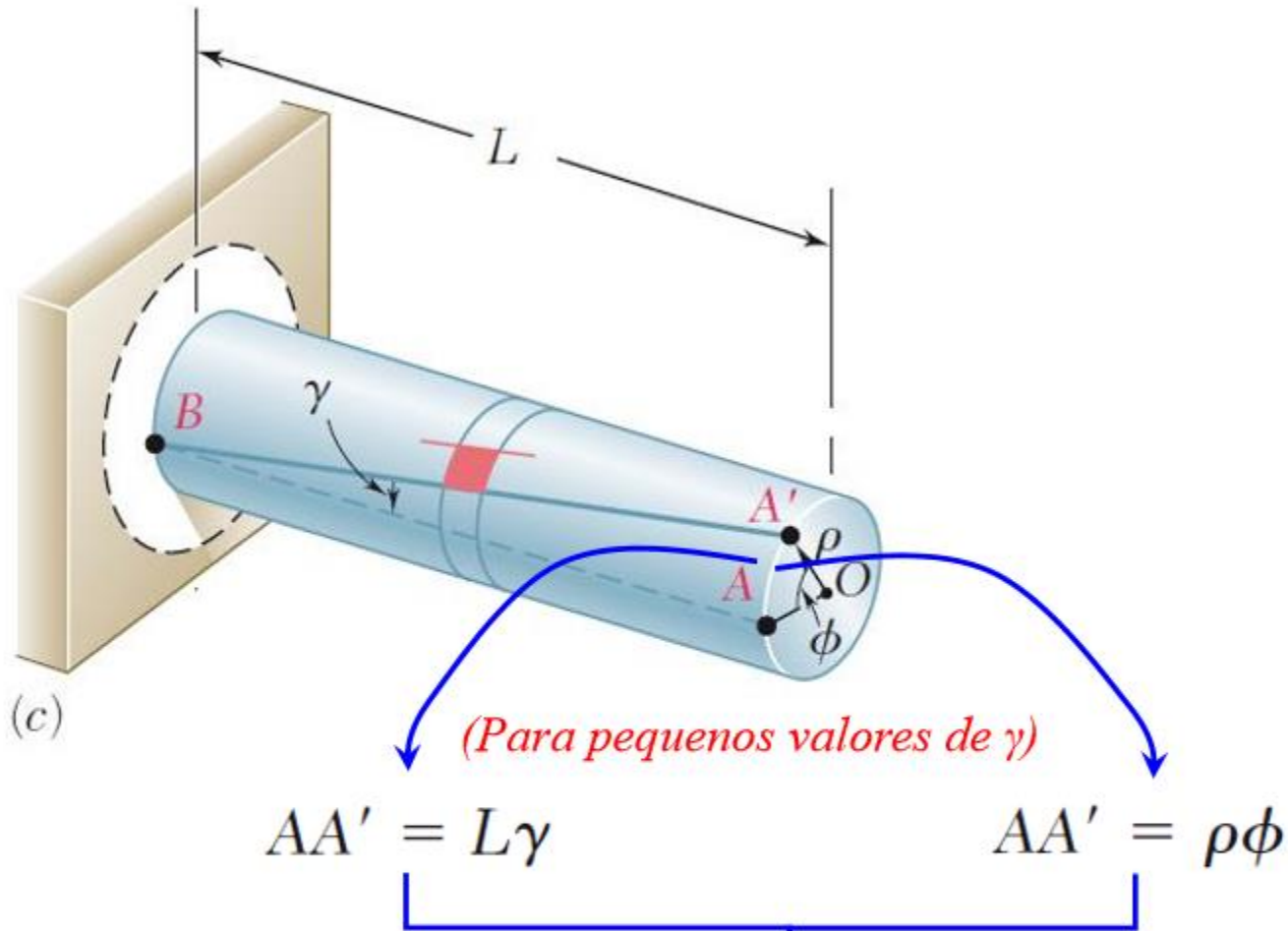
Deformações em eixos circulares



Deformações em eixos circulares



Deformações em eixos circulares



A deformação de cisalhamento em uma barra circular varia linearmente com a distância ao eixo da barra.

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

Para qual valor de ρ esta deformação será máxima?

Deformações em eixos circulares

- A deformação de cisalhamento é máxima na superfície da barra circular, onde $\rho=c$:

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad \therefore \quad \frac{\phi}{L} = \frac{\gamma_{\max}}{c}$$

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max}$$


Tensões no regime elástico

Tensões no regime elástico

- Aplicando a Lei de Hooke para tensões e deformações de cisalhamento:

$$\underbrace{\tau = G\gamma \quad \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{\max}}$$

$$\tau = G\gamma = \frac{\rho}{c} \underbrace{G\gamma_{\max}}_{\tau_{\max}}$$

$$\therefore \tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max}$$

Tensões no regime elástico

- Aplicando a Lei de Hooke para tensões e deformações de cisalhamento:

$$\underbrace{\tau = G\gamma \quad \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{\max}}$$

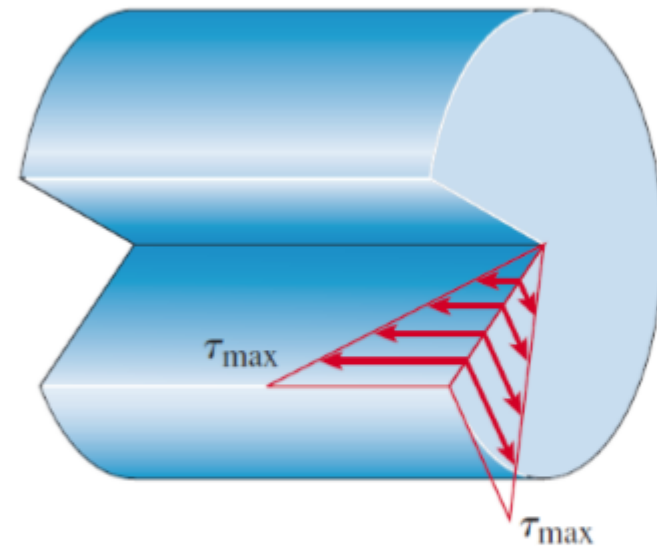
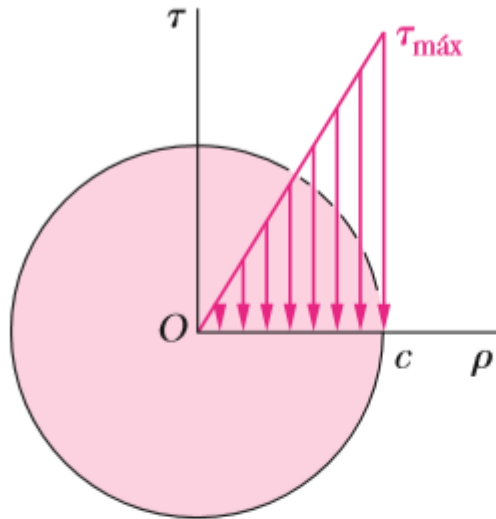
$$\tau = G\gamma = \frac{\rho}{c} \underbrace{G\gamma_{\max}}_{\tau_{\max}}$$

$$\therefore \tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max}$$

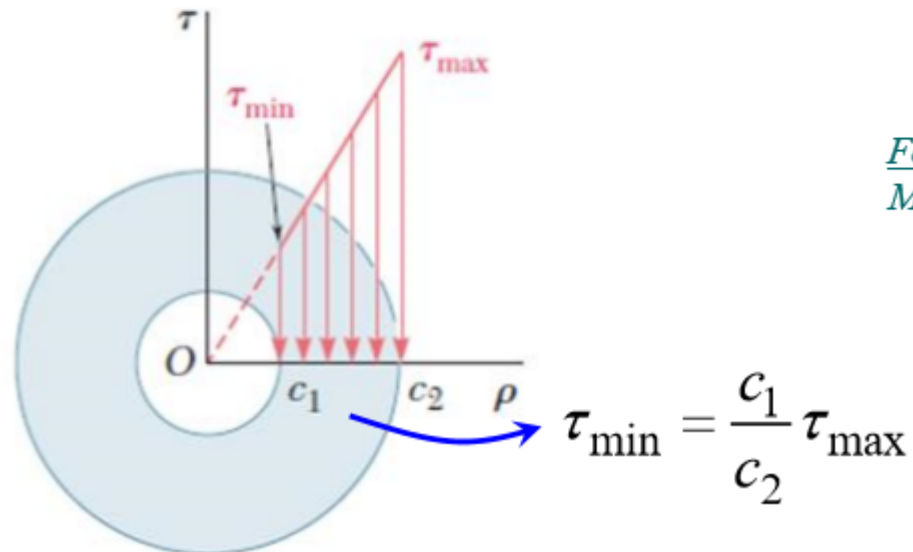
Enquanto a tensão de escoamento (ou limite de proporcionalidade) não for atingida, a tensão de cisalhamento na barra circular varia linearmente com a distância ρ ao eixo da barra.

Tensões no regime elástico

- Distribuição de tensões cisalhantes na seção transversal de um eixo circular:



Fonte: Gere JM, Goodno, BJ. Mechanics of Materials. 8th Edition. Cengage Learning, 2013.



Tensões no regime elástico

- Como visto anteriormente, a soma dos momentos das forças elementares que atuam na seção do eixo circular deve ser igual à intensidade do momento T aplicado:

$$\int \rho(\tau \cdot dA) = T$$

Tensões no regime elástico

- Como visto anteriormente, a soma dos momentos das forças elementares que atuam na seção do eixo circular deve ser igual à intensidade do momento T aplicado:

$$\int \rho(\tau \cdot dA) = T$$

- Substituindo o valor de τ :

$$T = \int \rho(\tau \cdot dA) = \int \rho \left(\frac{\rho}{c} \tau_{\max} \cdot dA \right) = \frac{\tau_{\max}}{c} \underbrace{\int \rho^2 dA}_{?}$$

Tensões no regime elástico

- Como visto anteriormente, a soma dos momentos das forças elementares que atuam na seção do eixo circular deve ser igual à intensidade do momento T aplicado:

$$\int \rho(\tau \cdot dA) = T$$

- Substituindo o valor de τ :

$$T = \int \rho(\tau \cdot dA) = \int \rho \left(\frac{\rho}{c} \tau_{\max} \cdot dA \right) = \frac{\tau_{\max}}{c} \underbrace{\int \rho^2 dA}$$

Momento de inércia polar (J).

Tensões no regime elástico

- Como visto anteriormente, a soma dos momentos das forças elementares que atuam na seção do eixo circular deve ser igual à intensidade do momento T aplicado:

$$\int \rho(\tau \cdot dA) = T$$

- Substituindo o valor de τ :

$$T = \int \rho(\tau \cdot dA) = \int \rho \left(\frac{\rho}{c} \tau_{\max} \cdot dA \right) = \frac{\tau_{\max}}{c} \underbrace{\int \rho^2 dA}$$

Momento de inércia polar (J).

$$T = \frac{J \cdot \tau_{\max}}{c} \quad \therefore \quad \tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

- A tensão de cisalhamento a uma distância qualquer do eixo da barra é dada por:

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

Tensões no regime elástico

- Como visto anteriormente, a soma dos momentos das forças elementares que atuam na seção do eixo circular deve ser igual à intensidade do momento T aplicado:

$$\int \rho(\tau \cdot dA) = T$$

- Substituindo o valor de τ :

$$T = \int \rho(\tau \cdot dA) = \int \rho \left(\frac{\rho}{c} \tau_{\max} \cdot dA \right) = \frac{\tau_{\max}}{c} \underbrace{\int \rho^2 dA}$$

Momento de inércia polar (J).

$$T = \frac{J \cdot \tau_{\max}}{c} \quad \therefore$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

*Fórmulas da
torção em regime
elástico.*



- A tensão de cisalhamento a uma distância qualquer do eixo da barra é dada por:

Tensões no regime elástico

- Da estática, recordamos que o momento de inércia polar de um círculo de raio c é dado por:

$$J = \frac{1}{2} \pi c^4$$

- No caso de um eixo circular de seção vazada, com raio interno c_1 e raio externo c_2 :

$$J = \frac{1}{2} \pi c_2^4 - \frac{1}{2} \pi c_1^4 = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4)$$

$$J = \frac{\pi c^4}{2}$$

*Seção circular
cheia.*

$$J = \frac{\pi (c_2^4 - c_1^4)}{2}$$

*Seção circular
vazada.*



UNIDADES

Grandeza	Unidade
T	$N \cdot m$
J	m^4
τ	$Pa (N/m^2)$

Formulário:

$$\int \rho(\tau \cdot dA) = T$$

➤ *Momento de torção interno*

$$\gamma = \frac{\rho \phi}{L}$$



$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max}$$



➤ *Deformação angular*

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max}$$

$$\tau = \frac{T \rho}{J}$$

➤ *Tensão cisalhante em um ponto qualquer*

$$\tau_{\max} = \frac{T c}{J}$$

$$\tau_{\min} = \frac{c_1}{c_2} \tau_{\max}$$

➤ *Tensões Cisalhante máxima e mínima*

$$J = \frac{\pi c^4}{2}$$

*Seção circular
cheia.*

$$J = \frac{\pi (c_2^4 - c_1^4)}{2}$$

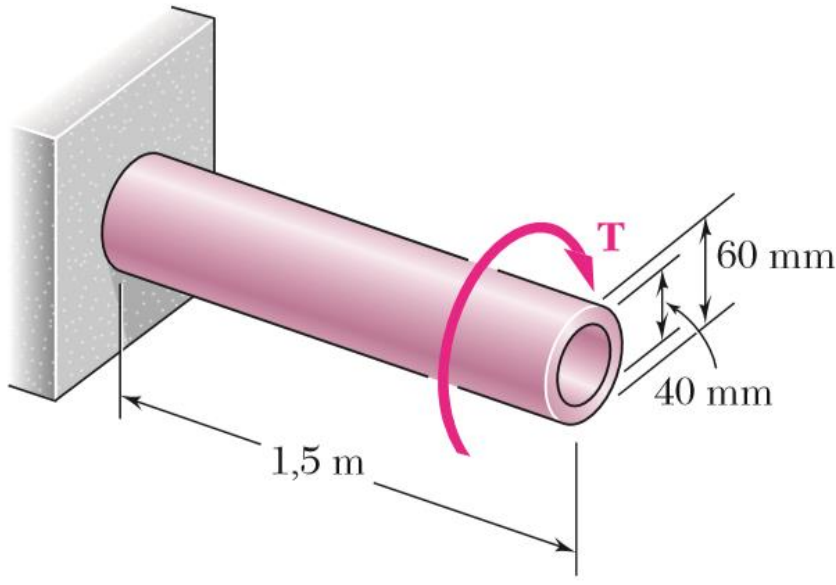
*Seção circular
vazada.*



➤ *Momento polar de
Inércia*

Exemplo

- *Um eixo circular vazado de aço tem comprimento $L=1,5\text{ m}$ e diâmetros interno e externo iguais a 40 e 60mm, respectivamente.*



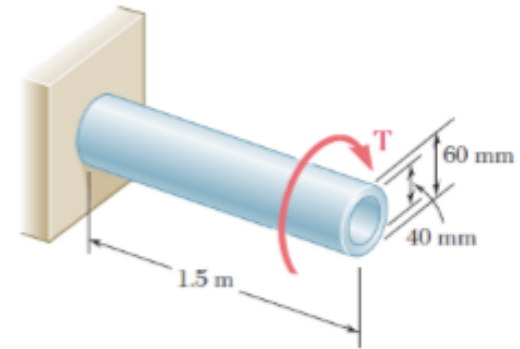
- a) *Qual é o maior momento de torção que pode ser aplicado ao eixo de maneira que as tensões de cisalhamento não excedam 120MPa?*
- b) *Qual é o valor mínimo da tensão de cisalhamento para esse caso?*

EXEMPLO

a) Maior momento de torção:

O maior momento torçor que pode ser aplicado ao eixo é aquele que leva à tensão máxima $\tau_{max}=120\text{MPa}$, daí:

$$T = \frac{J\tau_{max}}{c}$$



EXEMPLO

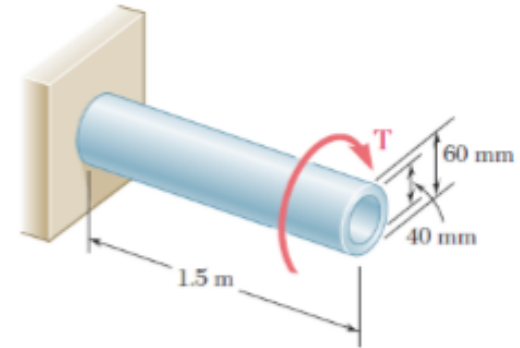
a) Maior momento de torção:

O maior momento torçor que pode ser aplicado ao eixo é aquele que leva à tensão máxima $\tau_{max}=120\text{MPa}$, daí:

$$T = \frac{J\tau_{max}}{c}$$

Calculando o momento de inércia polar:

$$J = \frac{1}{2}\pi (c_2^4 - c_1^4) = \frac{1}{2}\pi(0.03^4 - 0.02^4) = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

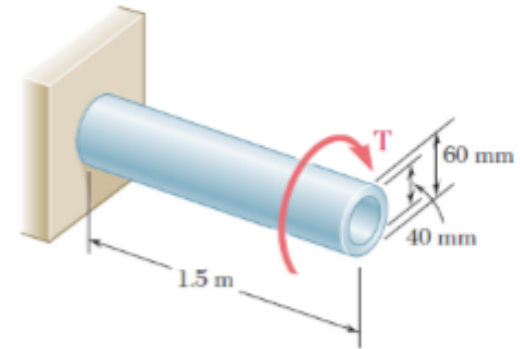


EXEMPLO

a) Maior momento de torção:

O maior momento torçor que pode ser aplicado ao eixo é aquele que leva à tensão máxima $\tau_{max}=120\text{MPa}$, daí:

$$T = \frac{J\tau_{max}}{c}$$



Calculando o momento de inércia polar:

$$J = \frac{1}{2}\pi (c_2^4 - c_1^4) = \frac{1}{2}\pi(0.03^4 - 0.02^4) = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Substituindo os valores de J e τ_{max} na equação anterior:

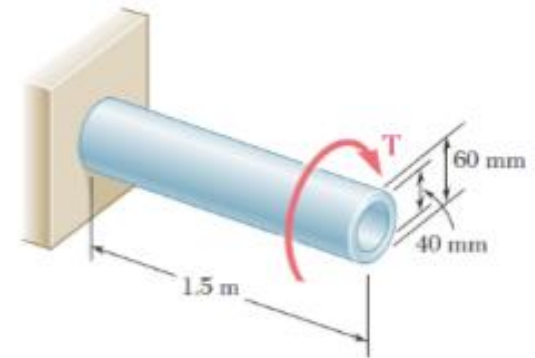
$$T = \frac{J\tau_{max}}{c} = \frac{(1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(120 \times 10^6 \text{ Pa})}{0.03 \text{ m}} = 4.08 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

EXEMPLO

b) Tensão de cisalhamento mínima:

O menor valor da tensão de cisalhamento ocorre na face interna do eixo circular, portanto:

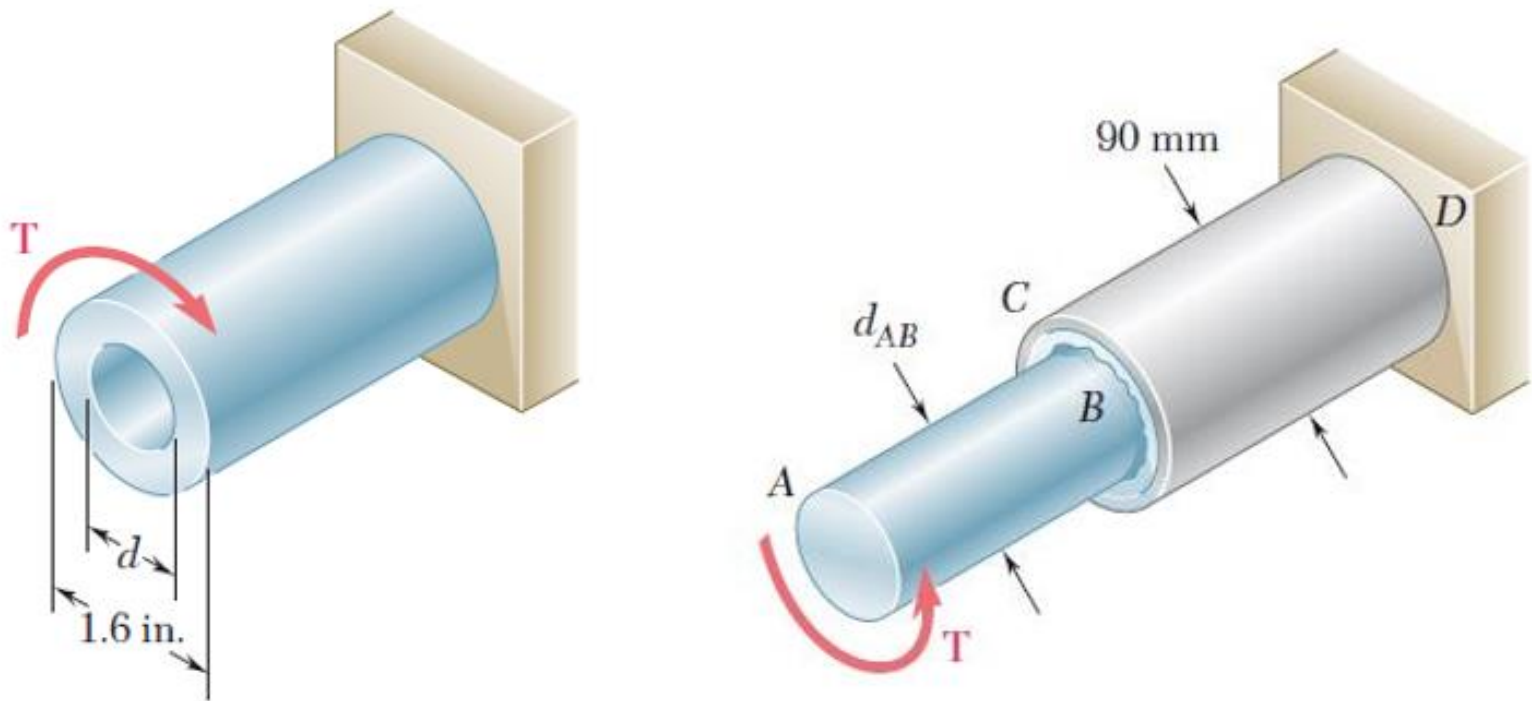
$$\tau_{\min} = \frac{c_1}{c_2} \tau_{\max} = \frac{0.02 \text{ m}}{0.03 \text{ m}} (120 \text{ MPa}) = 80 \text{ MPa}$$



**Voltando ao estudo das tensões no
regime elástico**

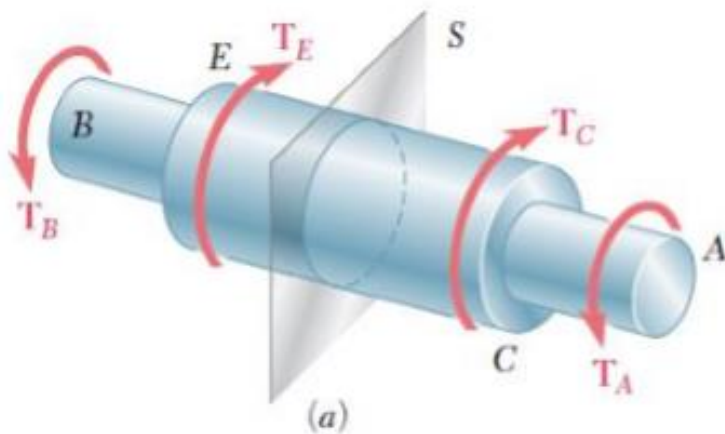
Tensões no regime elástico

- As equações anteriores foram deduzidas considerando um **eixo circular de seção transversal uniforme** com momentos aplicados às extremidades do eixo, mas podem ser utilizadas para o **cálculo de tensões** no caso de **seções transversais variáveis**.



Tensões no regime elástico

- No caso de seções transversais variáveis, será necessário determinar o **esforço interno de torção** em cada seção, através do DCL da parte do eixo localizada em um dos lados da seção:



Tensões no regime elástico

- No caso de seções transversais variáveis, será necessário determinar o **esforço interno de torção** em cada seção, através do DCL da parte do eixo localizada em um dos lados da seção:

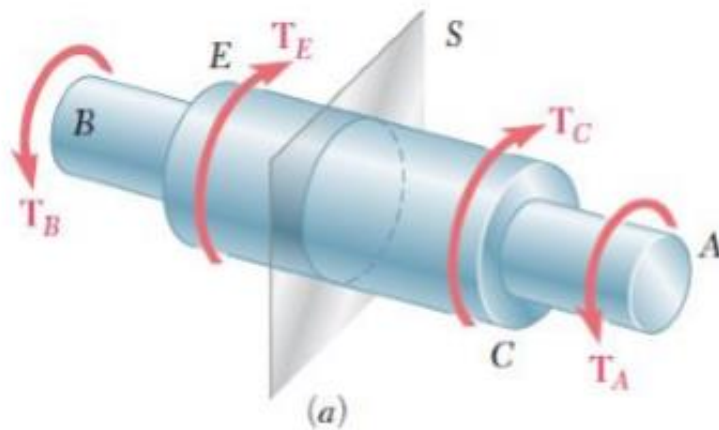
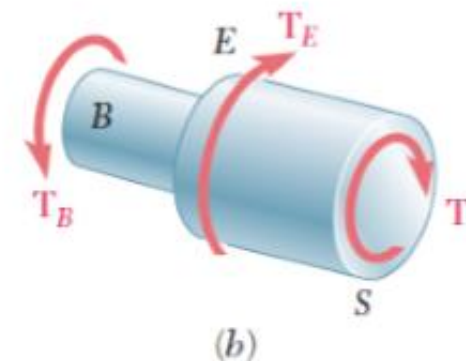


Diagrama de corpo livre da parte do eixo localizada à esquerda da seção S:



Tensões no regime elástico

- No caso de seções transversais variáveis, será necessário determinar o **esforço interno de torção** em cada seção, através do DCL da parte do eixo localizada em um dos lados da seção:

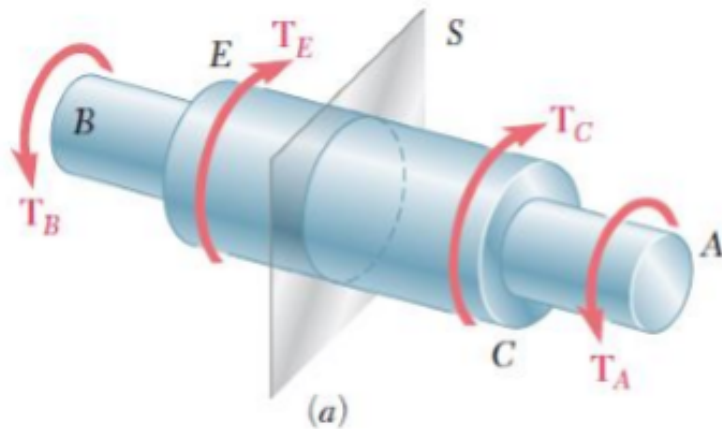
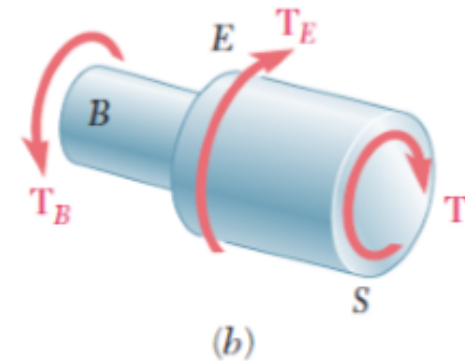


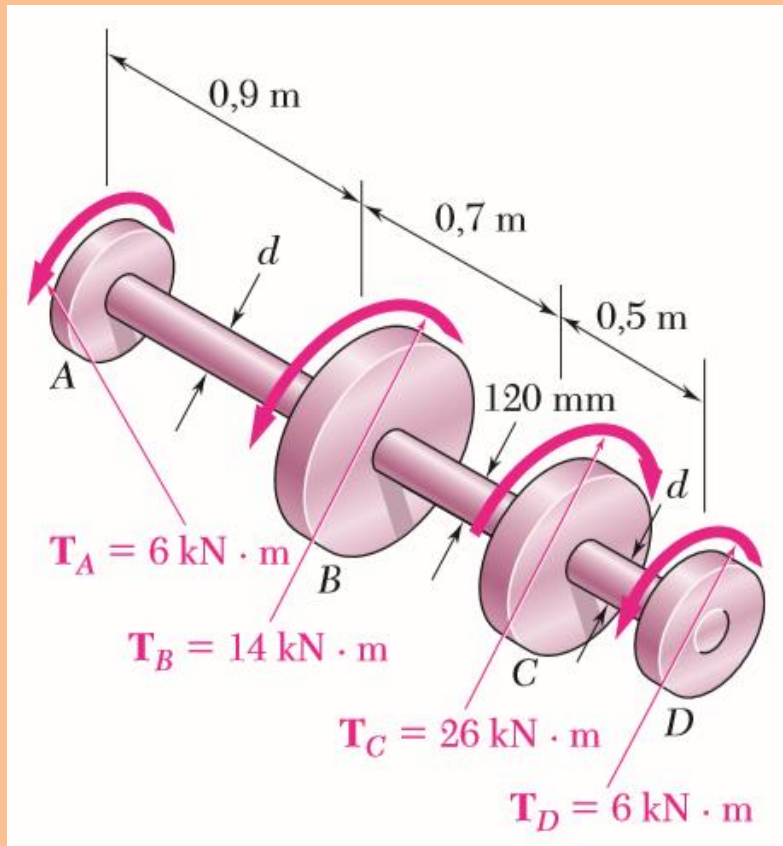
Diagrama de corpo livre da parte do eixo localizada à esquerda da seção S:



O valor de T é obtido considerando que a soma dos momentos de torção aplicados a essa parte (incluindo o momento interno T) deve ser igual a zero.

Exemplo

➤ O eixo circular vazado BC tem diâmetros interno e externo iguais a 90mm e 120mm, respectivamente. Os eixos AB e CD são maciços, com diâmetro d . Determinar, para o carregamento indicado:

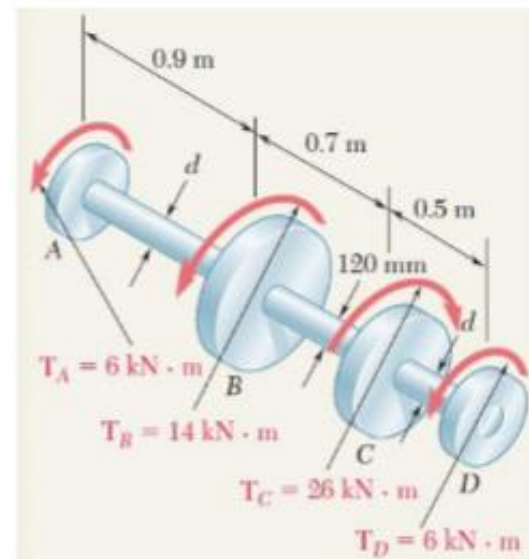
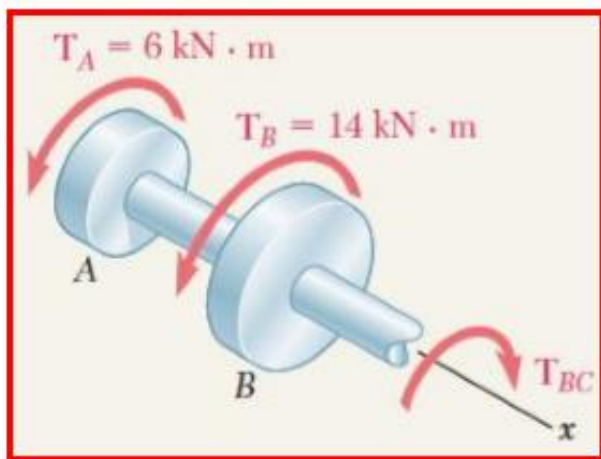
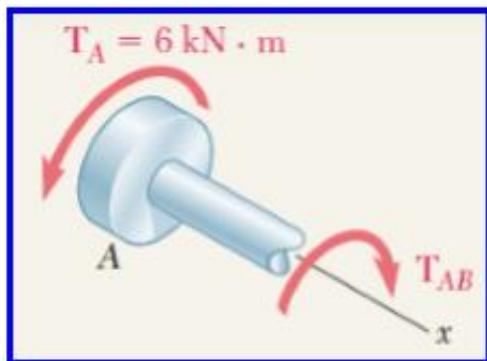


- O valor máximo e o valor mínimo da tensão de cisalhamento no eixo BC?
- Qual o diâmetro necessário nos eixos AB e CD se a tensão admissível no material é 65MPa?

EXEMPLO

Condições da estática:

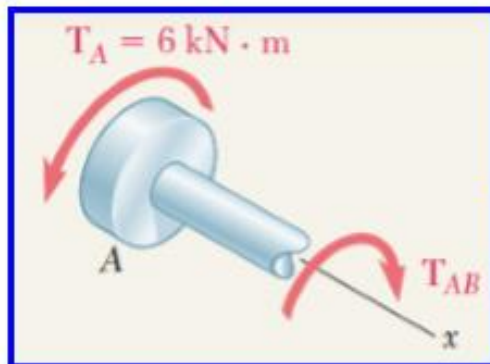
Passando seções transversais em cada um dos trechos e desenhando os diagramas de corpo livre, temos:



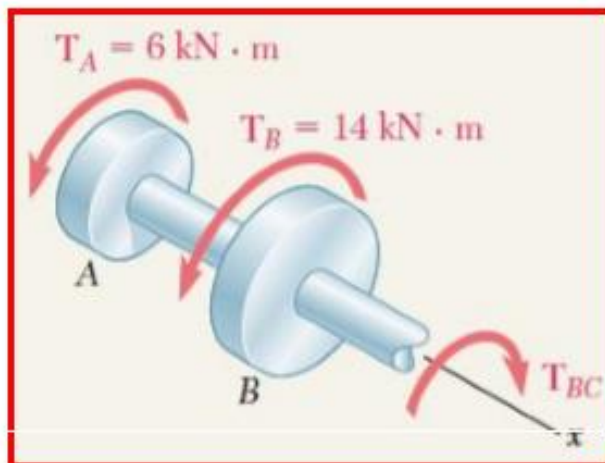
EXEMPLO

Condições da estática:

Passando seções transversais em cada um dos trechos e desenhando os diagramas de corpo livre, temos:

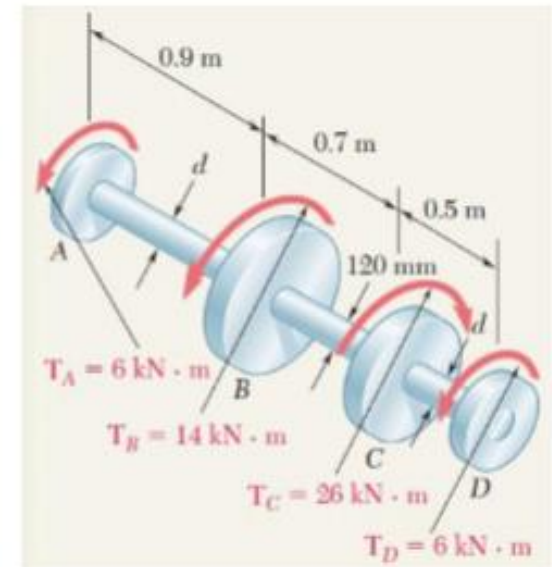


$$\sum M_x = 0: \quad (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{AB} = 0 \quad T_{AB} = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



$$\sum M_x = 0: \quad (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) + (14 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{BC} = 0$$

$$T_{BC} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



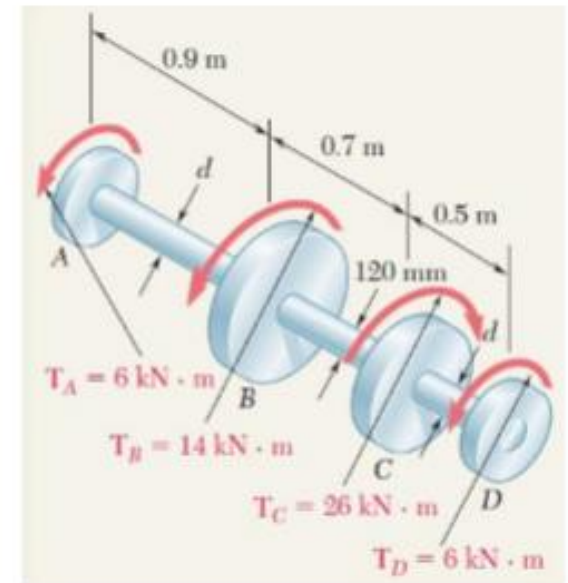
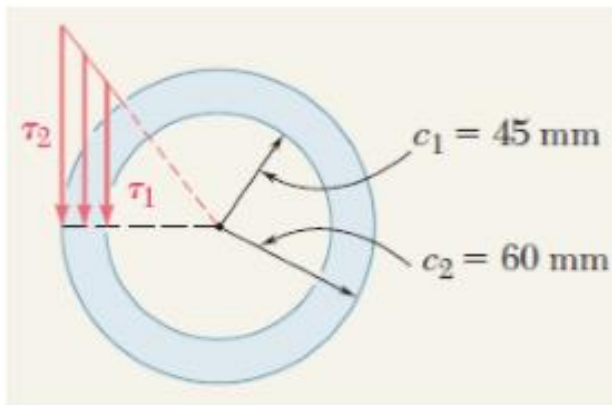
EXEMPLO

a) Eixo BC:

Momento de inércia polar do eixo vazado:

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0.060)^4 - (0.045)^4]$$

$$= 13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



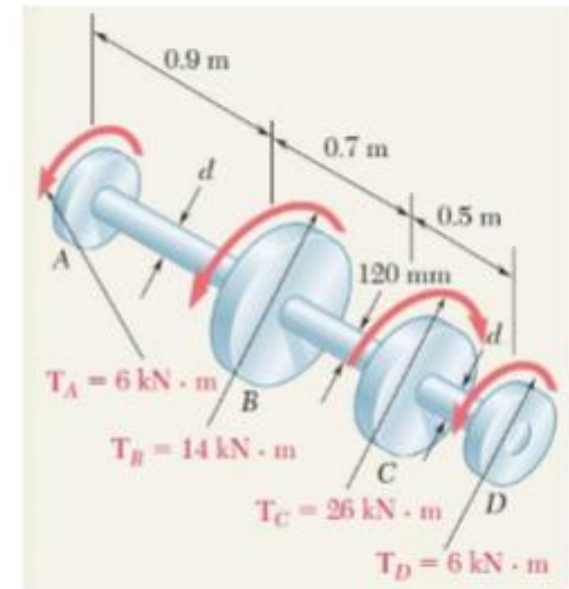
EXEMPLO

a) Eixo BC:

Momento de inércia polar do eixo vazado:

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0.060)^4 - (0.045)^4]$$

$$= 13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



Máxima tensão de cisalhamento. Na superfície externa, tem-se:

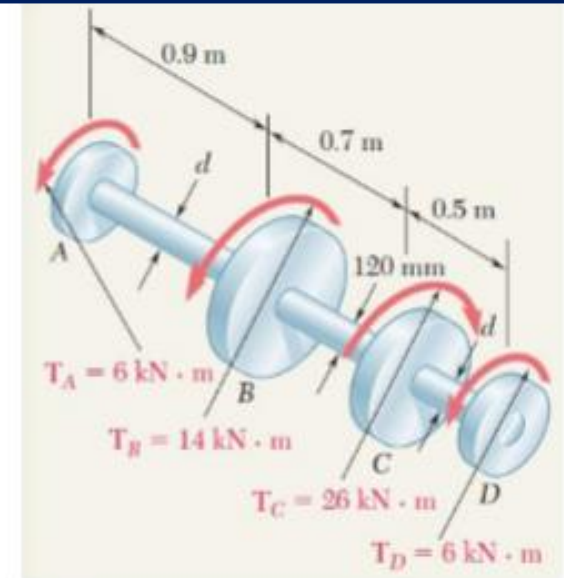
$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{T_{BC} c_2}{J} = \frac{(20 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.060 \text{ m})}{13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \quad \tau_{\max} = 86.2 \text{ MPa}$$

EXEMPLO

a) Eixo BC:

Momento de inércia polar do eixo vazado:

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0.060)^4 - (0.045)^4]$$
$$= 13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



Máxima tensão de cisalhamento. Na superfície externa, tem-se:

$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{T_{BC} c_2}{J} = \frac{(20 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.060 \text{ m})}{13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \quad \tau_{\max} = 86.2 \text{ MPa}$$

Tensão de cisalhamento mínima. Como as tensões são proporcionais à distância ao eixo geométrico da barra, então:

$$\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = \frac{c_1}{c_2} \quad \frac{\tau_{\min}}{86.2 \text{ MPa}} = \frac{45 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} \quad \tau_{\min} = 64.7 \text{ MPa}$$

EXEMPLO

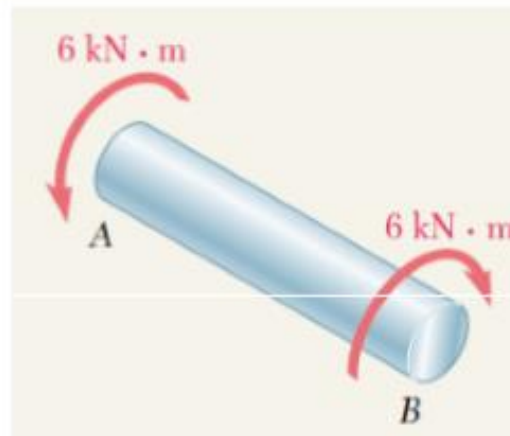
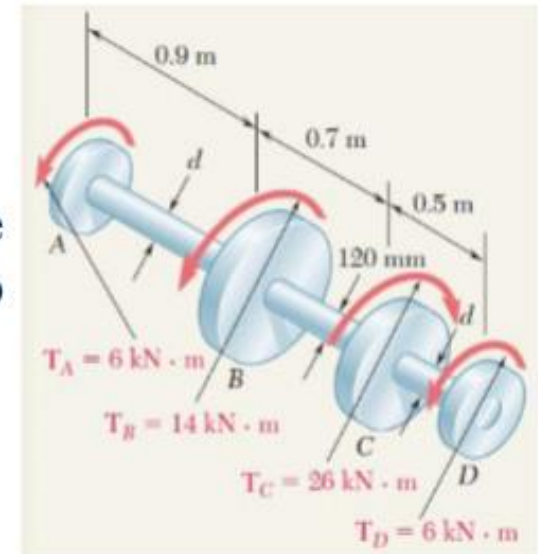
b) Eixos *AB* e *CD*:

Nessas duas partes o torque é $T=6\text{kN}\cdot\text{m}$ e a tensão de cisalhamento : admissível é igual a 65MPa . Sendo c o raio do eixo circular, tem-se que:

$$\tau = \frac{Tc}{J} \quad 65 \text{ MPa} = \frac{(6 \text{ kN} \cdot \text{m})c}{\frac{\pi}{2} c^4}$$

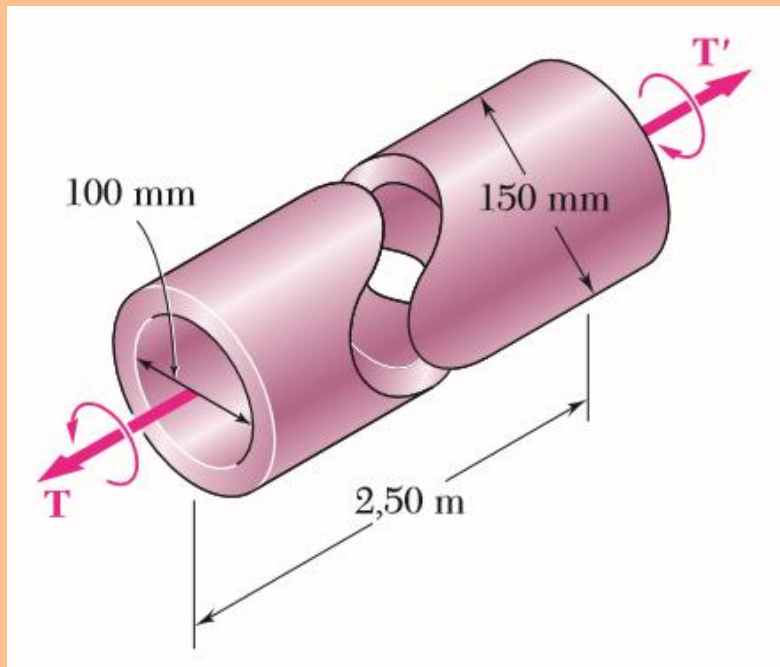
$$c^3 = 58.8 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \quad c = 38.9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 2c = 2(38.9 \text{ mm}) \quad d = 77.8 \text{ mm}$$



Exemplo

- O projeto preliminar de um grande eixo conectando um motor a um gerador determinou que o eixo escolhido fosse vazado e com diâmetros interno e externo de 100 mm e 150 mm, respectivamente. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível é de 82 MPa, determine o valor do torque máximo que pode ser transmitido



- a) pelo eixo conforme o projeto preliminar;
- b) por um eixo de seção cheia com o mesmo peso;
- c) por um eixo de seção vazada com o mesmo peso e com diâmetro externo de 200 mm.

EXEMPLO

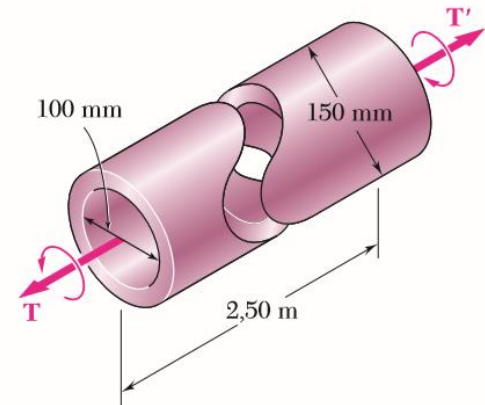
a. Eixo vazado conforme foi projetado. Para o eixo vazado, temos

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0,075 \text{ m})^4 - (0,050 \text{ m})^4] = 39,9 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_2}{J}$$

$$82 \text{ MPa} = \frac{T(0,075 \text{ m})}{39,9 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

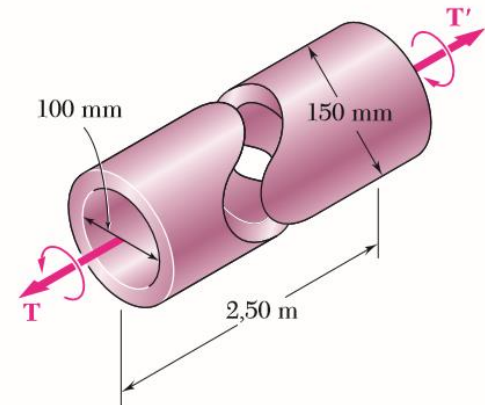
$$T = 43,6 \text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$



EXEMPLO

b. Eixo de seção cheia de mesmo peso. Para que o eixo projetado e a seção transversal cheia tenham o mesmo peso e comprimento, suas áreas de seção transversal devem ser iguais.

$$A_{(a)} = A_{(b)}$$
$$\pi[(0,075 \text{ m})^2 - (0,050 \text{ m})^2] = \pi c_3^2 \quad c_3 = 0,056 \text{ m}$$



EXEMPLO

b. Eixo de seção cheia de mesmo peso. Para que o eixo projetado e a seção transversal cheia tenham o mesmo peso e comprimento, suas áreas de seção transversal devem ser iguais.

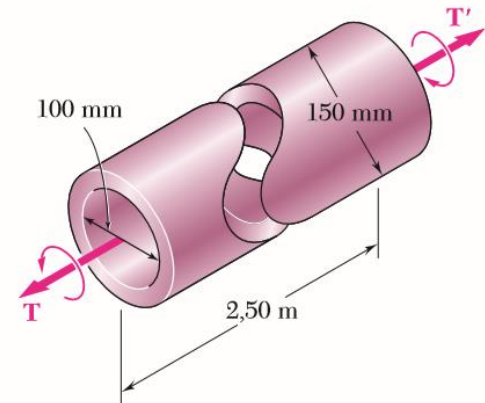
$$A_{(a)} = A_{(b)}$$
$$\pi[(0,075 \text{ m})^2 - (0,050 \text{ m})^2] = \pi c_3^2 \quad c_3 = 0,056 \text{ m}$$

Como $\tau_{\text{adm}} = 82 \text{ MPa}$, escrevemos

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_3}{J}$$

$$82 \text{ MPa} = \frac{T(0,056 \text{ m})}{\frac{\pi}{2}(0,056 \text{ m})^4}$$

$$T = 22,62 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \blacktriangleleft$$



EXEMPLO

c. Eixo vazado com 200 mm de diâmetro externo. Para ter o mesmo peso, as áreas das seções transversais devem ser iguais. Determinamos o diâmetro interno do eixo escrevendo

$$A_{(a)} = A_{(c)} \\ \pi[(0,075 \text{ m})^2 - (0,050 \text{ m})^2] = \pi[(0,100 \text{ m})^2 - c_5^2] \quad c_5 = 0,083 \text{ m}$$

Para $c_5 = 0,083 \text{ m}$ e $c_4 = 100 \text{ mm}$

$$J = \frac{\pi}{2}[(0,100 \text{ m})^4 - (0,083 \text{ m})^4] = 8,25 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

EXEMPLO

c. Eixo vazado com 200 mm de diâmetro externo. Para ter o mesmo peso, as áreas das seções transversais devem ser iguais. Determinamos o diâmetro interno do eixo escrevendo

$$A_{(a)} = A_{(c)} \\ \pi[(0,075 \text{ m})^2 - (0,050 \text{ m})^2] = \pi[(0,100 \text{ m})^2 - c_5^2] \quad c_5 = 0,083 \text{ m}$$

Para $c_5 = 0,083 \text{ m}$ e $c_4 = 100 \text{ mm}$

$$J = \frac{\pi}{2}[(0,100 \text{ m})^4 - (0,083 \text{ m})^4] = 8,25 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

Com $\tau_{\text{adm}} = 82 \text{ MPa}$ e $c_4 = 100 \text{ mm}$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_4}{J} \quad 82 \text{ MPa} = \frac{T(0,10 \text{ m})}{8,25 \times 10^{-5} \text{ m}^4} \quad T = 67,65 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \blacktriangleleft$$

EXEMPLO

c. Eixo vazado com 200 mm de diâmetro externo. Para ter o mesmo peso, as áreas das seções transversais devem ser iguais. Determinamos o diâmetro interno do eixo escrevendo

$$A_{(a)} = A_{(c)} \\ \pi[(0,075 \text{ m})^2 - (0,050 \text{ m})^2] = \pi[(0,100 \text{ m})^2 - c_5^2] \quad c_5 = 0,083 \text{ m}$$

Para $c_5 = 0,083 \text{ m}$ e $c_4 = 100 \text{ mm}$

$$J = \frac{\pi}{2}[(0,100 \text{ m})^4 - (0,083 \text{ m})^4] = 8,25 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

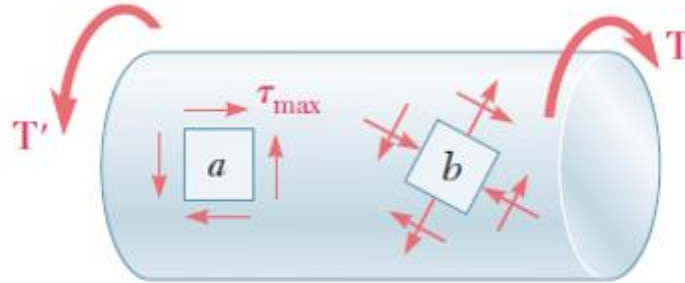
Com $\tau_{\text{adm}} = 82 \text{ MPa}$ e $c_4 = 100 \text{ mm}$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc_4}{J} \quad 82 \text{ MPa} = \frac{T(0,10 \text{ m})}{8,25 \times 10^{-5} \text{ m}^4} \quad T = 67,65 \text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

Análise do caso plano de tensões

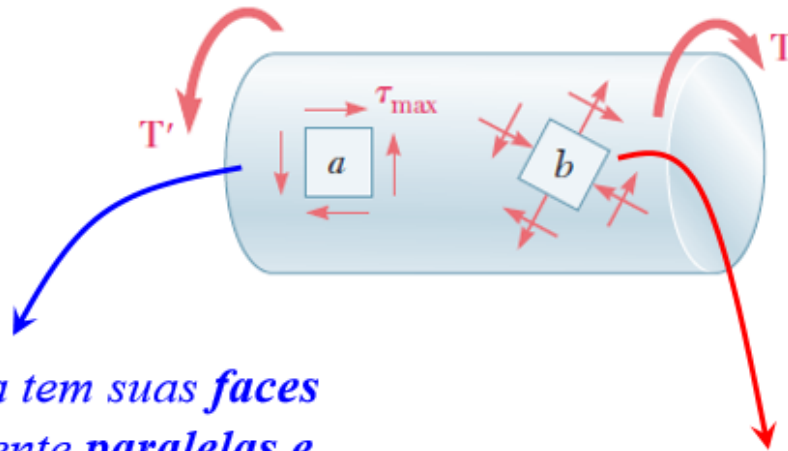
Análise do caso plano de tensões

- Consideremos os elementos infinitesimais a e b :



Análise do caso plano de tensões

- Consideremos os elementos infinitesimais a e b :

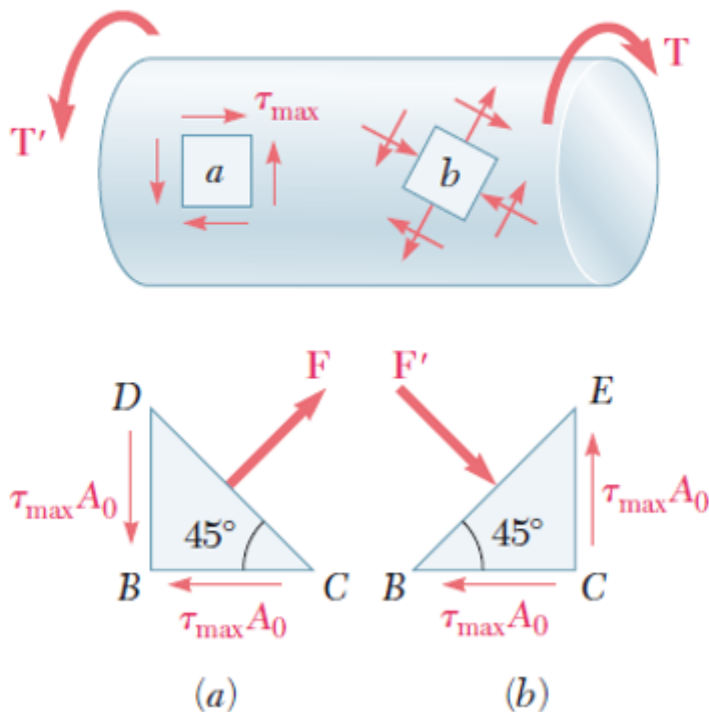


O elemento a tem suas faces respectivamente paralelas e perpendiculares ao eixo da barra, estando sujeito somente a tensões de cisalhamento!

As faces do elemento b formam um ângulo arbitrário com o eixo da barra e estarão sujeitas a uma combinação de tensões normais e de cisalhamento!

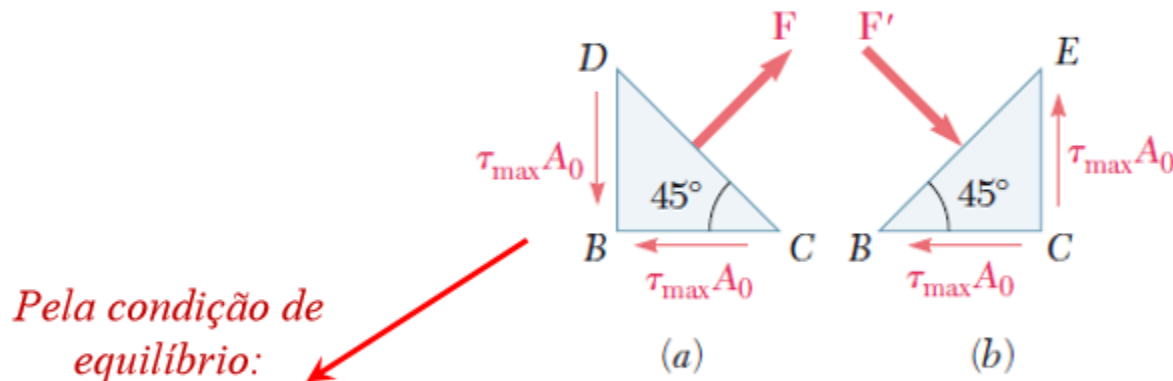
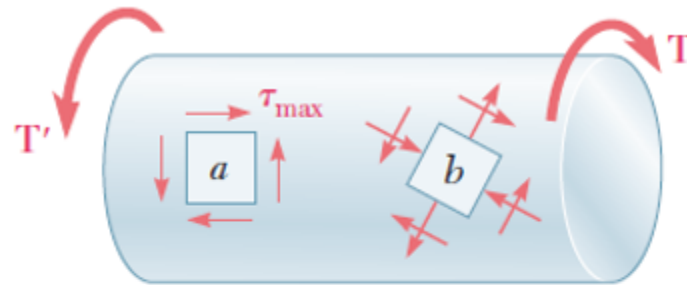
Análise do caso plano de tensões

- Considerando um elemento infinitesimal formando um **ângulo de 45°** com eixo da barra:



Análise do caso plano de tensões

- Considerando um elemento infinitesimal formando um **ângulo de 45°** com eixo da barra:



$$F = 2(\tau_{\max} A_0) \cos 45^\circ = \tau_{\max} A_0 \sqrt{2}$$

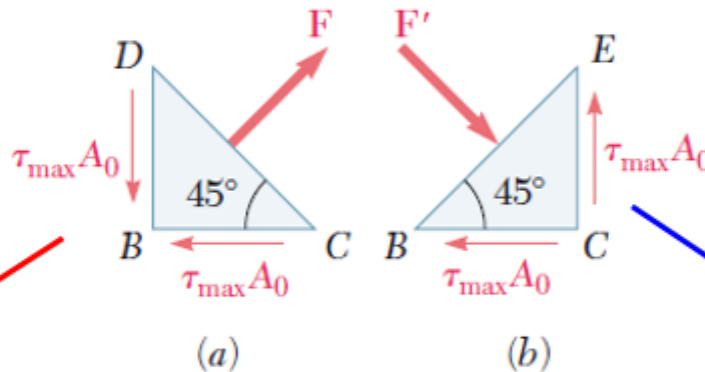
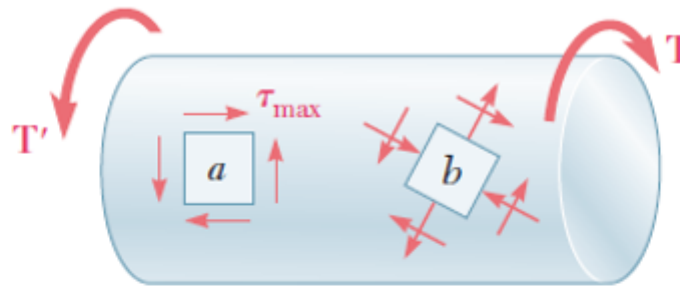


$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\max} A_0 \sqrt{2}}{A_0 \sqrt{2}} = \tau_{\max}$$

(Verifiquemos via círculo de Mohr)

Análise do caso plano de tensões

- Considerando um elemento infinitesimal formando um **ângulo de 45°** com eixo da barra:



Pela condição de equilíbrio:

$$\sigma = -\tau_{\max}$$

$$F = 2(\tau_{\max}A_0)\cos 45^\circ = \tau_{\max}A_0\sqrt{2}$$



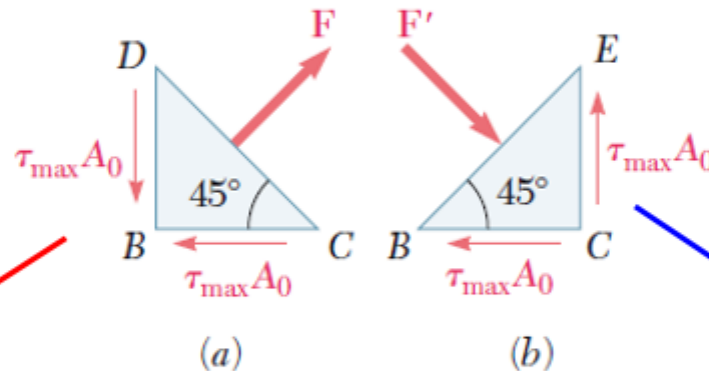
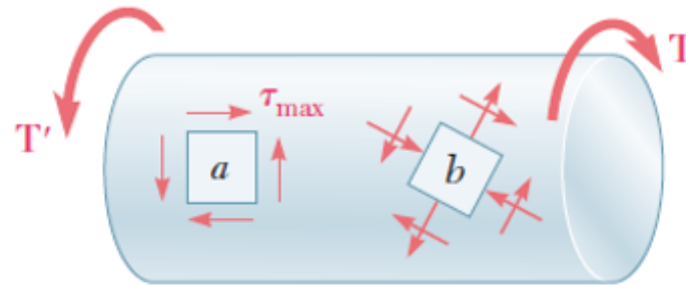
$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\max}A_0\sqrt{2}}{A_0\sqrt{2}} = \tau_{\max}$$



$$\sigma_{45^\circ} = \pm \frac{Tc}{J}$$

Análise do caso plano de tensões

- Considerando um elemento infinitesimal formando um **ângulo de 45°** com eixo da barra:



Pela condição de equilíbrio:

$$F = 2(\tau_{\max} A_0) \cos 45^\circ = \tau_{\max} A_0 \sqrt{2}$$



$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\max} A_0 \sqrt{2}}{A_0 \sqrt{2}} = \tau_{\max}$$

$$\sigma = -\tau_{\max}$$

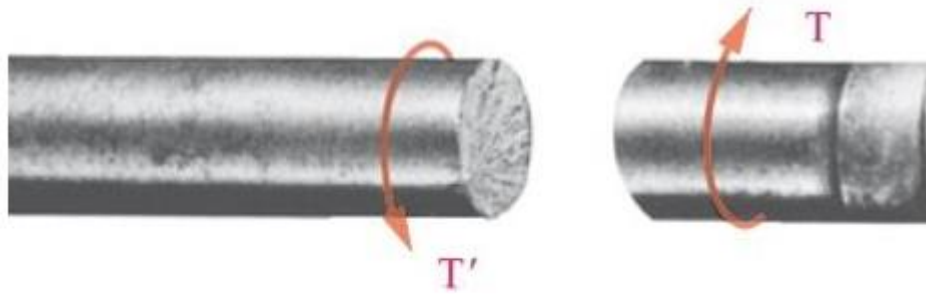


$$\sigma_{45^\circ} = \pm \frac{Tc}{J}$$

Tensão normal máxima atuante no elemento.

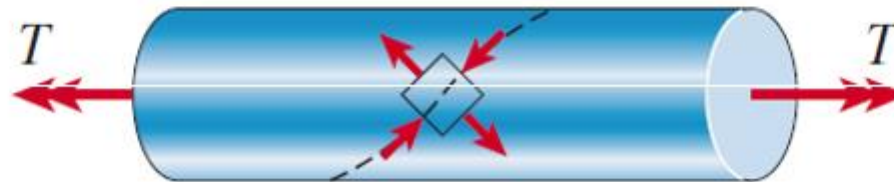
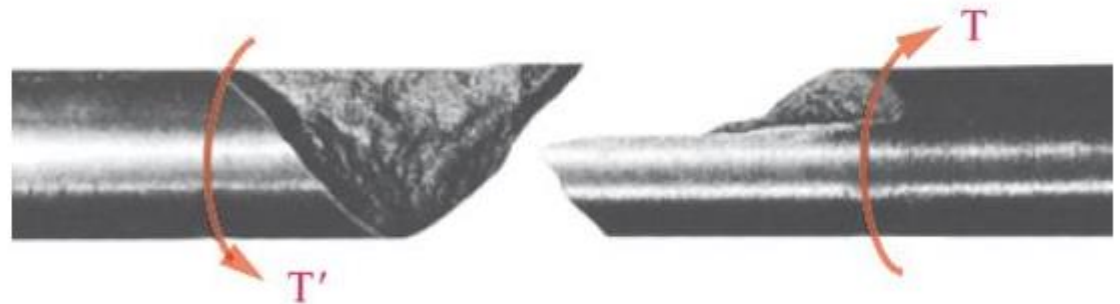
Análise do caso plano de tensões

- Ruptura de corpos de prova quando sujeitos à torção:



*Materiais dúcteis:
geralmente se rompem por
cisalhamento.*

*Materiais frágeis: menos
resistentes à tração que
ao cisalhamento.*



Fonte: Gere JM, Goodno, BJ. Mechanics of Materials. 8th Edition. Cengage Learning, 2013.

...

CONTINUA