Mapa Mental para Estudo de Formas Quadráticas

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2 + (\text{todos os termos } a_k x_i x_j \text{ possíveis nos quais } x_i \neq x_j)$$

Problemas comuns em aplicações de formas quadráticas

FORMA MATRICIAL (Ex.: R² e R³)

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

Muitas das técnicas para resolver esses problemas têm por base a simplificação da forma quadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ obtida com uma substituição

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

D é a matriz diagonal formada pelos ***autovalores de A***

Teorema dos eixos principais

Problema 1: Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R² ou R³, que tipo de curva ou superfície é representada pela equação $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$

Problema 2: Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^n, que condições deve satisfazer **A** para garantir que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ tenha valores

Problema 3: Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ for uma forma quadrática de R^n, quais são seus valores máximo e mínimo se **x** for condicionado a satisfazer

Cônica Central ou reduzida: Os círculos, as elipses e as hipérboles

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0$$

$b = 0?$

Sim

Cônica Central em Posição Canônica: *Identifica o tipo de curva por comparação com a Tabela 1.*

Não

Geometricamente, indica que o gráfico da forma quadrática foi girado em torno da origem

Gira os eixos coordenados para colocá-la na posição canônica usando ***autovalores de A***:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = k$$

$$\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{a - c}{2b}$$

Identifica o tipo de curva por comparação com a Tabela 1.

Observação: **Este problema não será aprofundado neste curso, pois envolve técnicas de otimização com restrições, geralmente abordadas em disciplinas específicas de Otimização.**

positiva se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$, com qualquer $\mathbf{x} \neq 0$

*Para **A** simétrica:*

$\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é positiva** se, e só se, todos os **autovalores de A são positivos

Seja A uma matriz 2x2 simétrica:

$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$** será uma **Elipse!

*Uma matriz **simétrica A (nxn)** é **positiva** se, e só se, o **determinante** de cada submatriz **principal é positivo***

negativa se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$, com qualquer $\mathbf{x} \neq 0$

*Para **A** simétrica:*

$\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é negativa** se, e só se, todos os **autovalores de A são negativos

Seja A uma matriz 2x2 simétrica:

$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$, não** terá **gráfico** se **A for Negativa!

indefinida se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ tem valores tanto positivos quanto negativos

*Para **A** simétrica:*

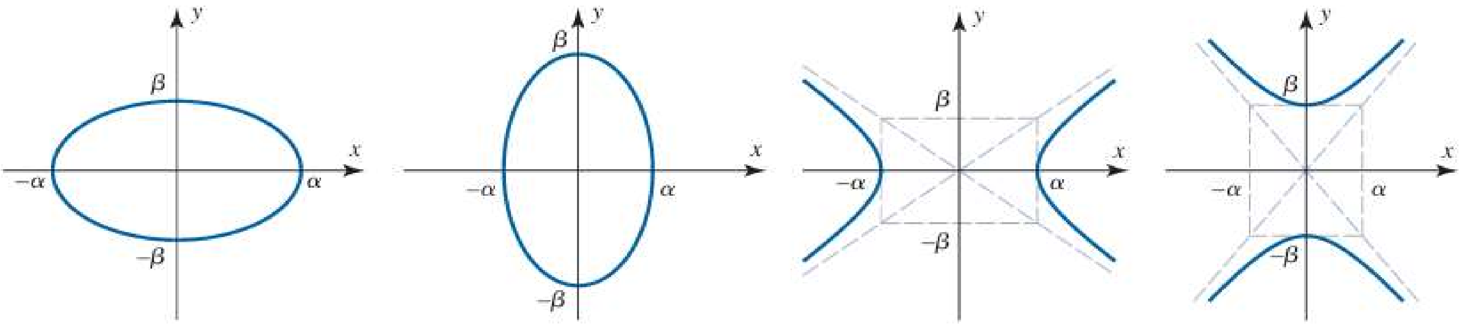
$\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ é indefinida** se existem **autovalores positivos e negativos

Seja A uma matriz 2x2 simétrica:

$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$, representa uma hipérbole** se **A for indefinida!

Formas quadráticas: Positivas, negativas e indeterminadas

Tabela 1



$\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ $(\alpha \geq \beta > 0)$	$\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ $(\beta \geq \alpha > 0)$	$\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$	$\dfrac{y^2}{\beta^2}-\dfrac{x^2}{\alpha^2}=1$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$