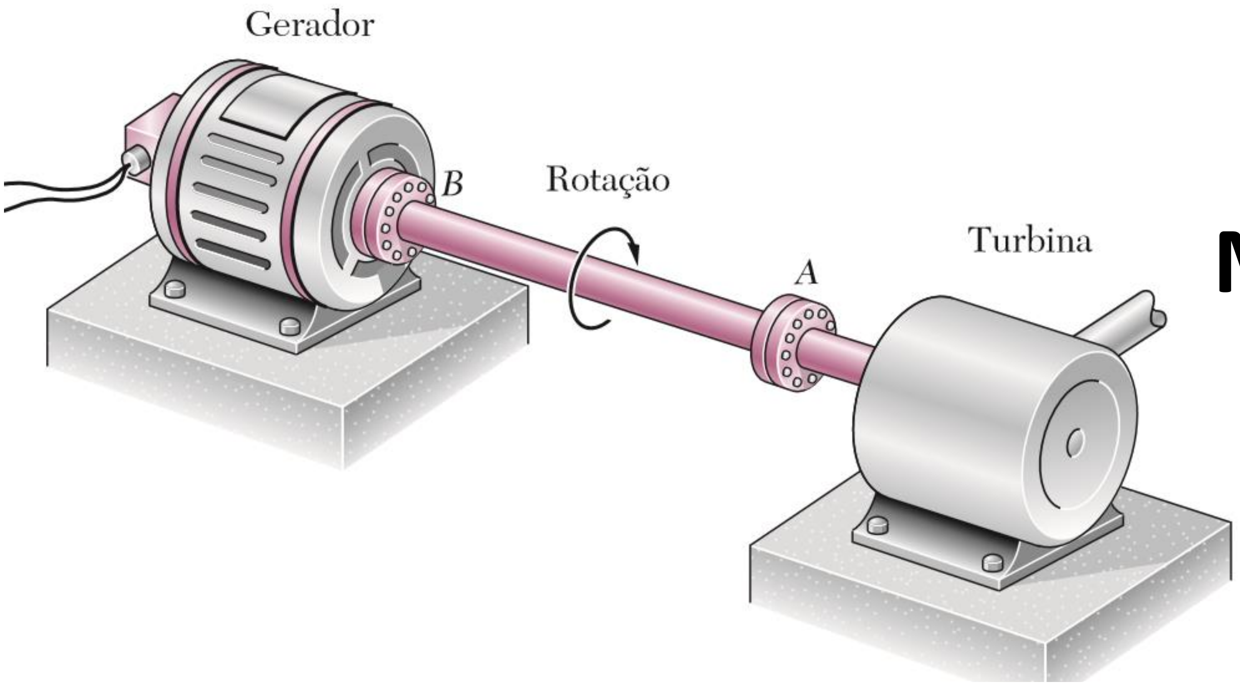
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS SERTÃO
EIXO TECNOLOGIA



Mecânica dos Sólidos II

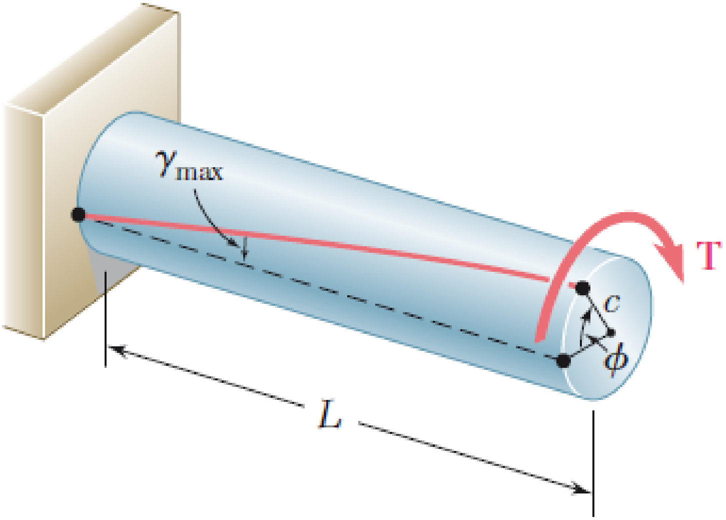
Prof. Dr. Alverlando Ricardo

Aula 11: PARTE III: TORÇÃO

Ângulo de torção no regime elástico

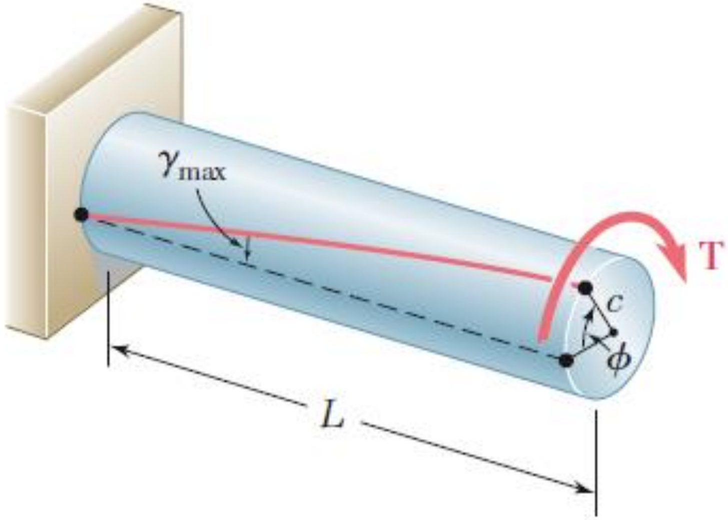
Ângulo de torção no regime elástico

- Consideremos inicialmente o caso de um eixo circular de comprimento L, com seção uniforme de raio c:



Ângulo de torção no regime elástico

- Consideremos inicialmente o caso de um eixo circular de comprimento L, com seção uniforme de raio c:



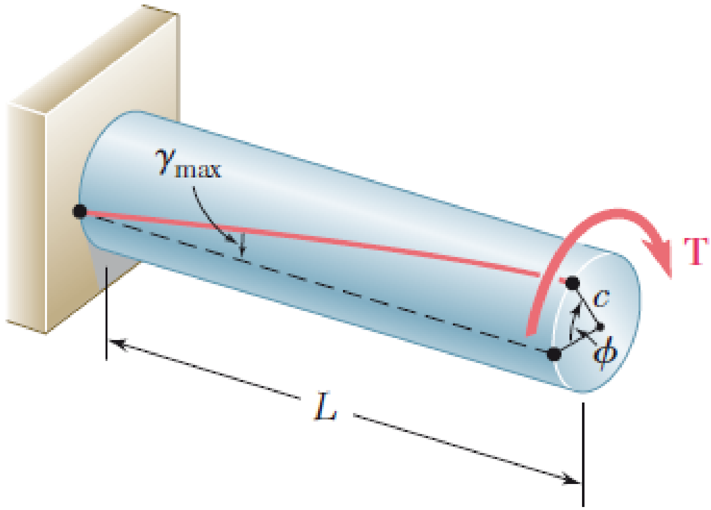
- Dentro do regime elástico, podemos aplicar a Lei de Hooke: $\gamma_{max}=\tau_{max}/G$, mas por outro lado temos que:

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

Ângulo de torção no regime elástico

- Consideremos inicialmente o caso de um eixo circular de comprimento L, com seção uniforme de raio c:



- Dentro do regime elástico, podemos aplicar a Lei de Hooke: $\gamma_{max}=\tau_{max}/G$, mas por outro lado temos que:

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{Tc}{JG} = \frac{c\phi}{L} \quad \therefore \quad \boxed{\phi = \frac{TL}{JG}}$$

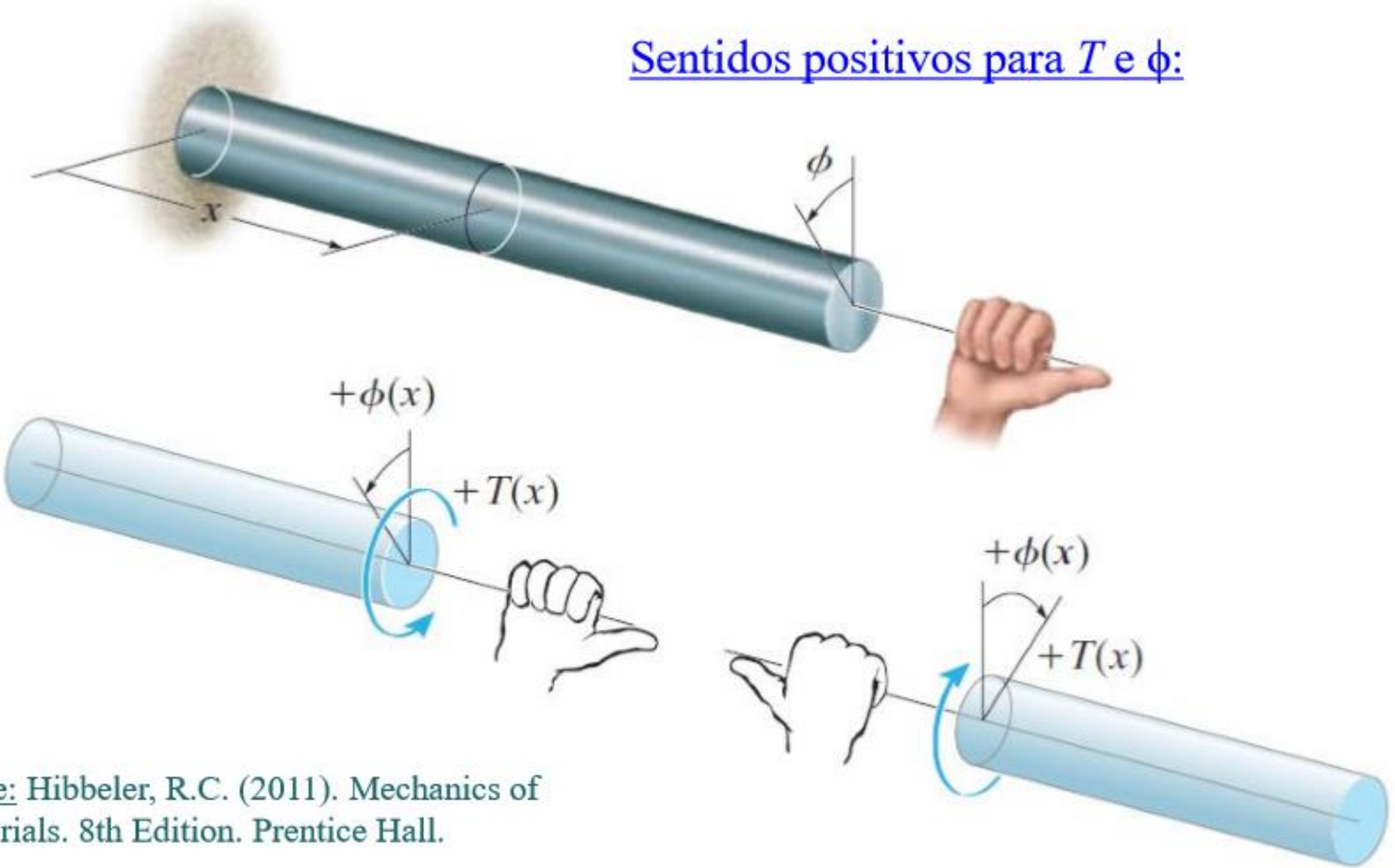
*ϕ é expresso em **radianos**.*

Ângulo de torção no regime elástico

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

O ângulo de torção ϕ é proporcional ao momento de torção **T** *aplicado ao eixo circular.*

Sentidos positivos para T e ϕ:



Fonte: Hibbeler, R.C. (2011). Mechanics of Materials. 8th Edition. Prentice Hall.

Ângulo de torção no regime elástico

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

O ângulo de torção ϕ é proporcional ao momento de torção **T** *aplicado ao eixo circular.*

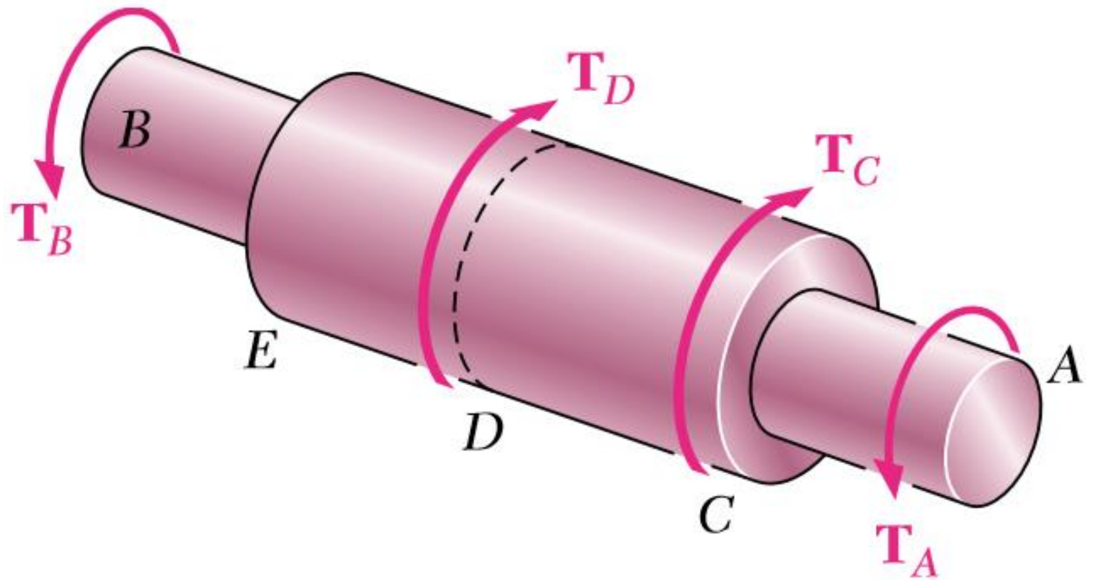
- Esta equação permite determinar de maneira conveniente o módulo de elasticidade transversal G de um certo material, utilizando uma **máquina de testes de torção**:

Ângulo de torção no regime elástico

- No caso de problemas envolvendo vários momentos de torção aplicados em vários pontos, e várias seções transversais, e/ou materiais diferentes, é necessário substituir a equação anterior por um somatório:

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

Ângulo de torção total do eixo.



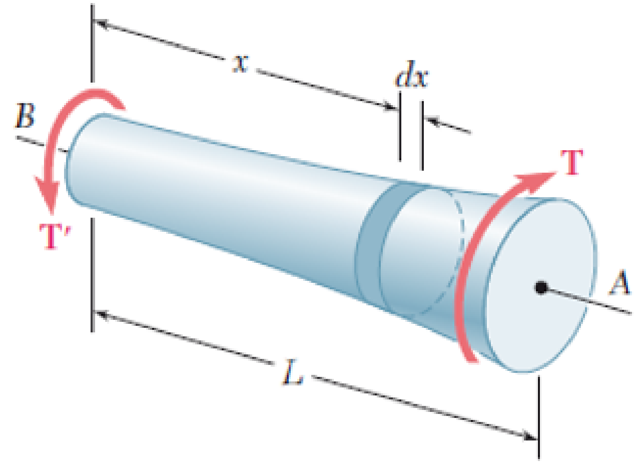
Ângulo de torção no regime elástico

- No caso de problemas envolvendo vários momentos de torção aplicados em vários pontos, e várias seções transversais, e/ou materiais diferentes, é necessário substituir a equação anterior por um somatório:

$$\underbrace{\phi}_{\text{Ângulo de torção total do eixo.}} = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

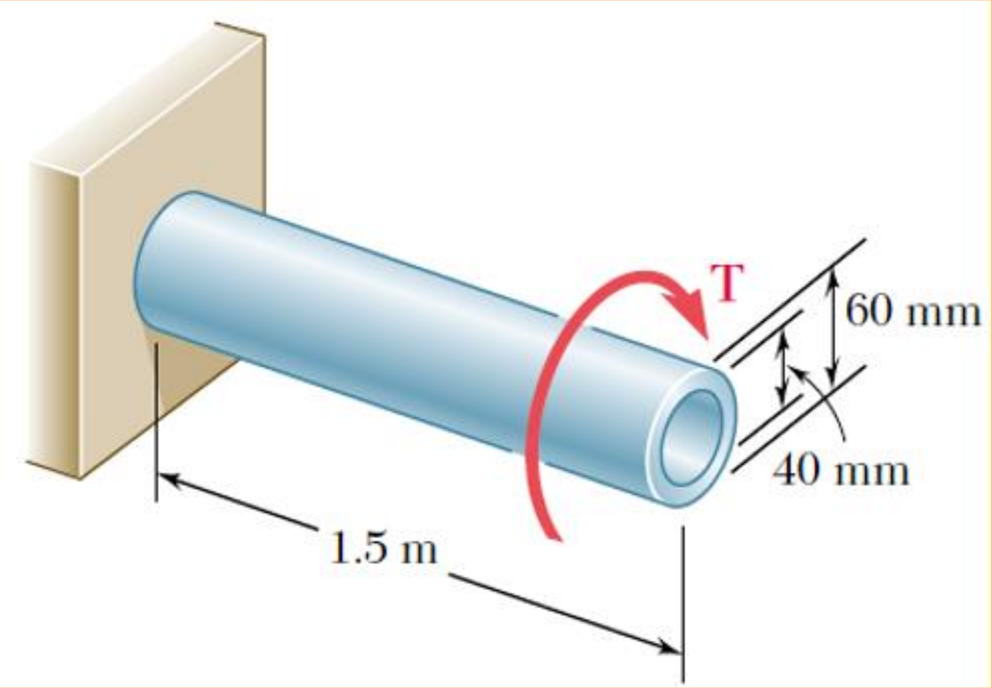
- Ao analisar o ângulo total de torção considerando comprimentos infinitesimais, o somatório acima se torna uma integral:

$$\phi = \int_0^L \frac{T\,dx}{JG}$$



Exemplo 1

- ***Que valor de momento de torção deve ser aplicado à extremidade do eixo circular abaixo de maneira que o ângulo de torção produzido seja de 2°? Considerar eixo constituído de aço, com módulo de elasticidade transversal G = 77 GPa.***

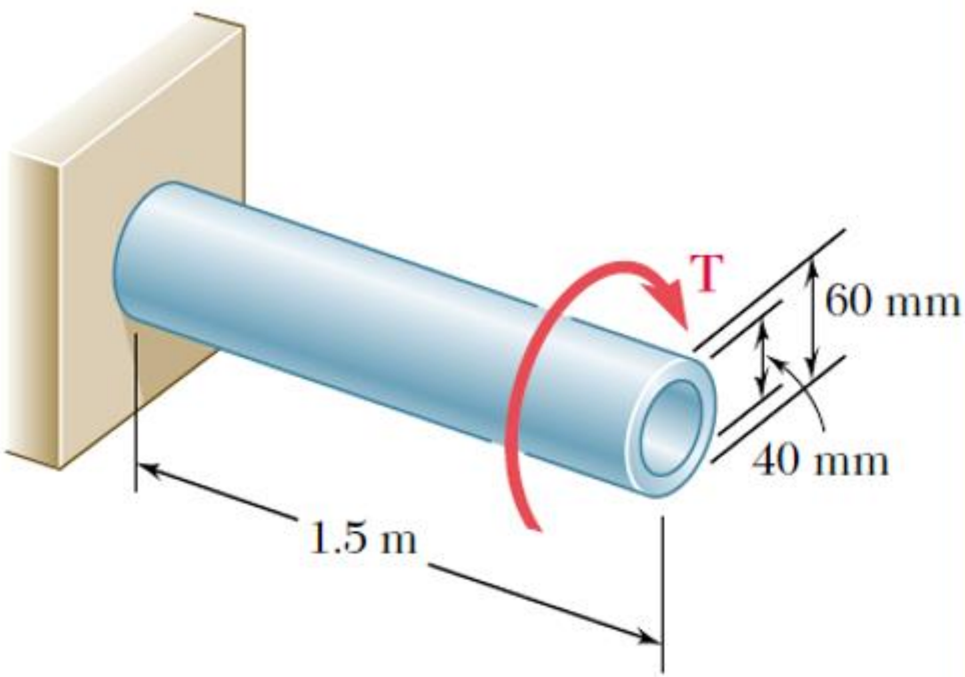


Exemplo 1

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

$$J = \frac{\pi\left(c_2^4 - c_1^4\right)}{2}$$

Seção circular vazada.

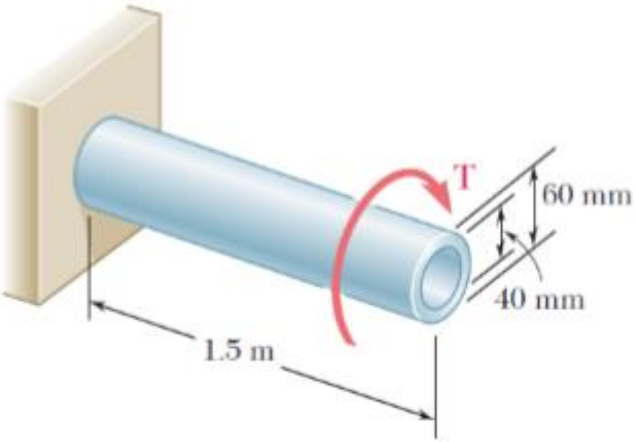


Exemplo 1

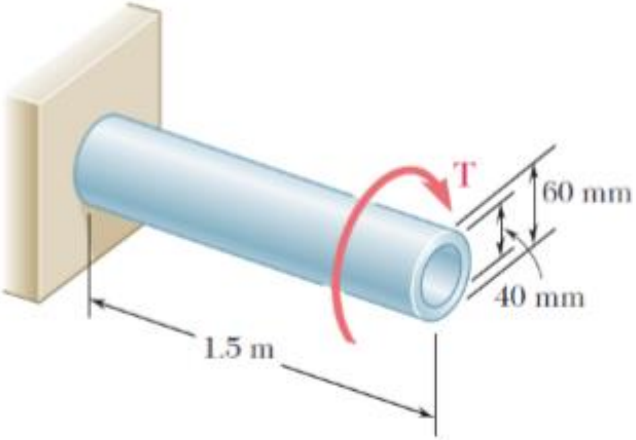
Os dados do problema são os seguintes:

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa} \qquad L = 1.5 \text{ m}$$

$$\phi = 2°\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360°}\right) = 34.9 \times 10^{-3} \text{ rad}$$



Exemplo 1



Os dados do problema são os seguintes:

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa} \qquad L = 1.5 \text{ m}$$

$$\phi = 2°\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360°}\right) = 34.9 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

E o momento de inércia polar é dado por:

$$J = \tfrac{1}{2}\pi\,(c_2^4 - c_1^4) = \tfrac{1}{2}\pi(0.03^4 - 0.02^4) = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Portanto,

$$T = \frac{JG}{L}\phi = \frac{(1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})}{1.5 \text{ m}}(34.9 \times 10^{-3} \text{ rad})$$

$$T = 1.829 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 1.829 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Estudo de eixos estaticamente indeterminados

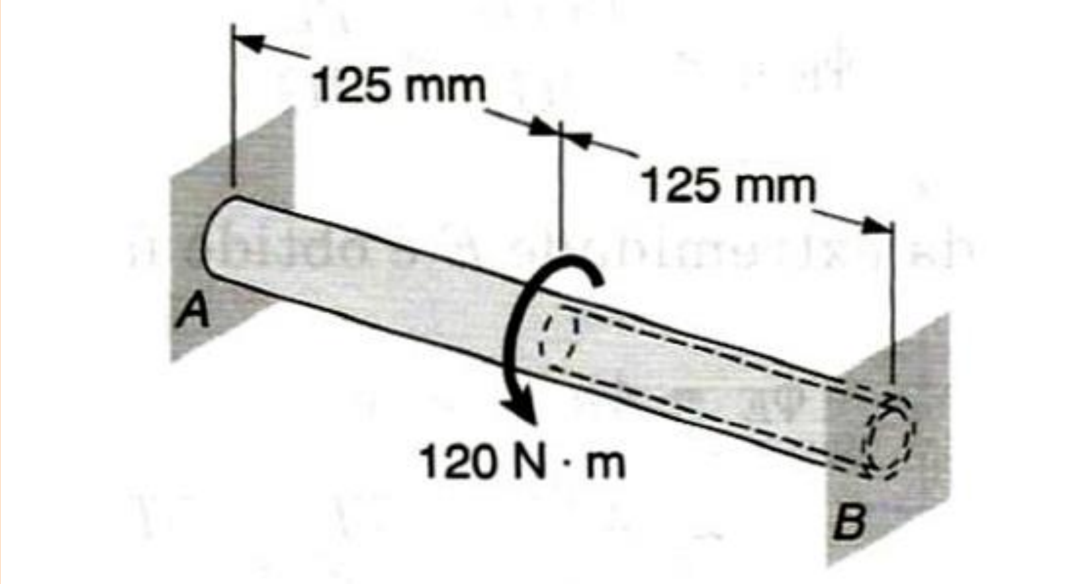
Eixos estaticamente indeterminados

Eixos estaticamente indeterminados: casos nos quais não é possível determinar esforços internos e reações de apoio utilizando apenas as equações da estática.

É necessário complementar as equações de equilíbrio com relações envolvendo deformações do eixo e restrições da geometria do problema.

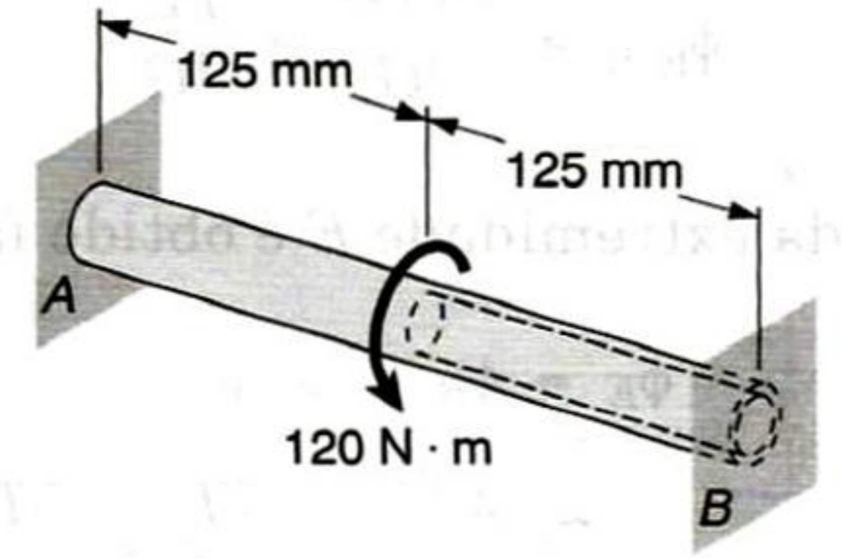
Exemplo 2

- ***Um eixo AB tem 250 mm de comprimento e 20 mm de diâmetro, tendo seção transversal circular. O eixo tem seção vazada, com diâmetro interno de 16mm, no trecho de 125mm a partir da extremidade B. O eixo é de aço, sendo engastado nas extremidades. Determinar o momento torsor que se exerce no eixo devido a cada apoio, quando um torque de 120N·m é aplicado no ponto médio de AB.***



Exemplo 2

- ***Um eixo AB tem 250 mm de comprimento e 20 mm de diâmetro, tendo seção transversal circular. O eixo tem seção vazada, com diâmetro interno de 16mm, no trecho de 125mm a partir da extremidade B. O eixo é de aço, sendo engastado nas extremidades. Determinar o momento torsor que se exerce no eixo devido a cada apoio, quando um torque de 120N·m é aplicado no ponto médio de AB.***

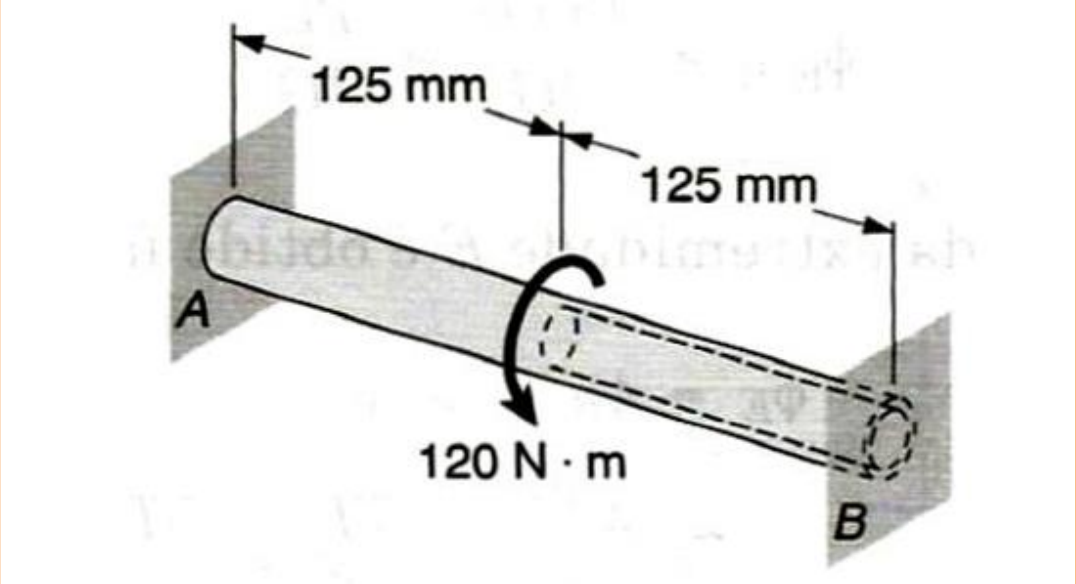


Basicamente o que se pede é para determinar as reações de apoio.

Exemplo 2

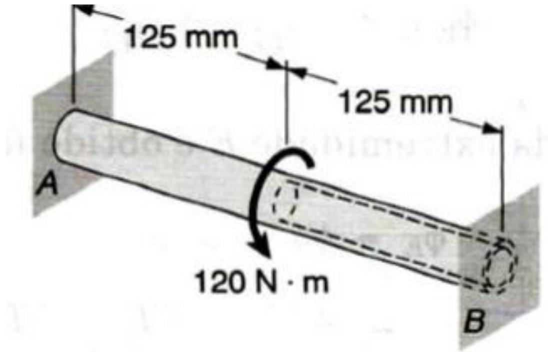
- *Um eixo AB tem 250 mm de comprimento e 20 mm de diâmetro, tendo seção transversal circular. O eixo tem seção vazada, com diâmetro interno de 16mm, no trecho de 125mm a partir da extremidade B. O eixo é de aço, sendo engastado nas extremidades. Determinar o momento torsor que se exerce no eixo devido a cada apoio, quando um torque de 120N·m é aplicado no ponto médio de AB.*

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

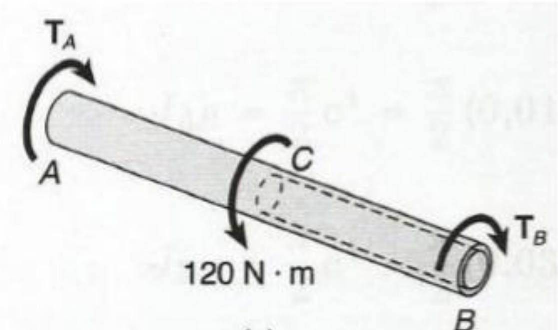


Qual reação será maior? TA ou TB?

Exemplo 2



A partir do **diagrama de corpo livre**



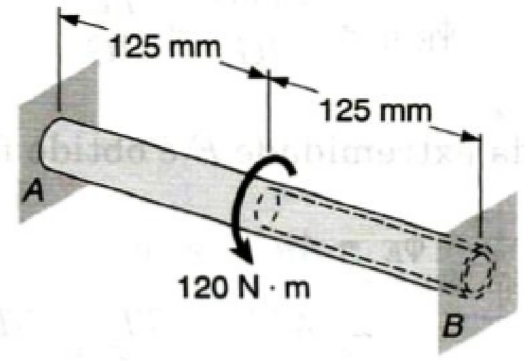
(a)

e considerando a condição de equilíbrio da estrutura, temos:

$$T_A + T_B = 120 N \cdot m$$

Problema estaticamente indeterminado!

Exemplo 2

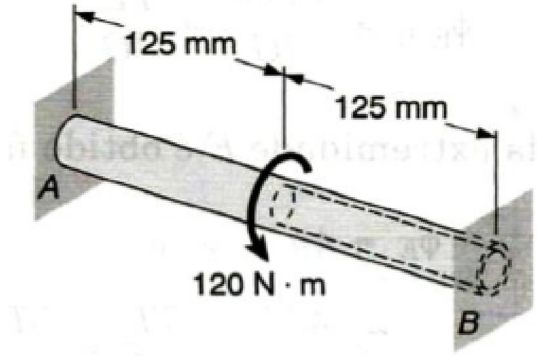


Condição extra para resolver o problema:

Podemos considerar inicialmente que a estrutura sofre deformação por conta do momento torçor aplicado, desprezando a vinculação em *B*:

$$\phi_{torçor} = \frac{T_C L_1}{J_1 G}$$

Exemplo 2



Condição extra para resolver o problema:

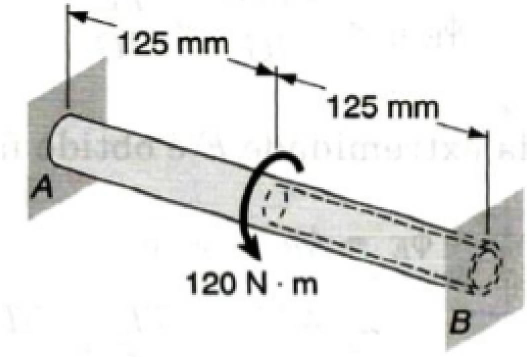
Podemos considerar inicialmente que a estrutura sofre deformação por conta do momento torçor aplicado, desprezando a vinculação em *B*:

$$\phi_{torçor} = \frac{T_C L_1}{J_1 G}$$

Logo após, para anular a deformação no ponto *B*, o momento torçor do apoio *B* deve levar a um **ângulo de torção igual (em módulo) ao provocado pelo carregamento**:

$$\phi_{T_B} = \frac{T_B L_1}{J_1 G} + \frac{T_B L_2}{J_2 G} = \frac{T_C L_1}{J_1 G}$$

Exemplo 2



Condição extra para resolver o problema:
Podemos considerar inicialmente que a estrutura sofre deformação por conta do momento torçor aplicado, desprezando a vinculação em B:

$$\phi_{torçor} = \frac{T_C L_1}{J_1 G}$$

Logo após, para anular a deformação no ponto B, o momento torçor do apoio B deve levar a um **ângulo de torção igual (em módulo) ao provocado pelo carregamento**:

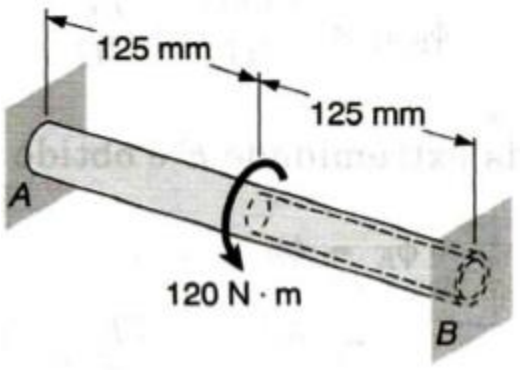
$$T_A + T_B$$

$$\phi_{T_B} = \frac{T_B L_1}{J_1 G} + \frac{T_B L_2}{J_2 G} = \frac{T_C L_1}{J_1 G}$$

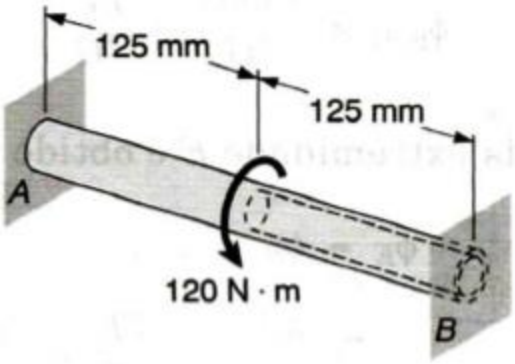
Como: $T_A + T_B = T_C$ ...

Exemplo 2

$$\frac{T_B L_1}{J_1 \cancel{G}} + \frac{T_B L_2}{J_2 \cancel{G}} = \frac{(T_A + T_B) L_1}{J_1 \cancel{G}}$$



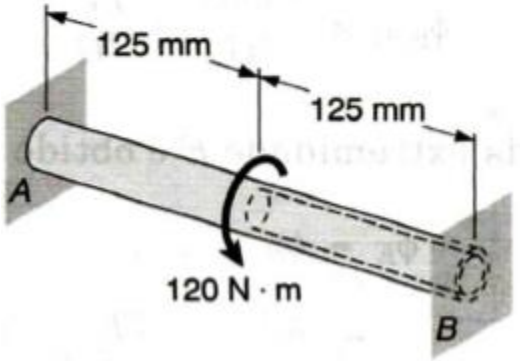
Exemplo 2



$$\frac{T_B L_1}{J_1 \cancel{G}} + \frac{T_B L_2}{J_2 \cancel{G}} = \frac{(T_A + T_B) L_1}{J_1 \cancel{G}}$$

$$\cancel{\frac{T_B L_1}{J_1}} + \frac{T_B L_2}{J_2} - \frac{T_A L_1}{J_1} - \cancel{\frac{T_B L_1}{J_1}} = 0$$

Exemplo 2

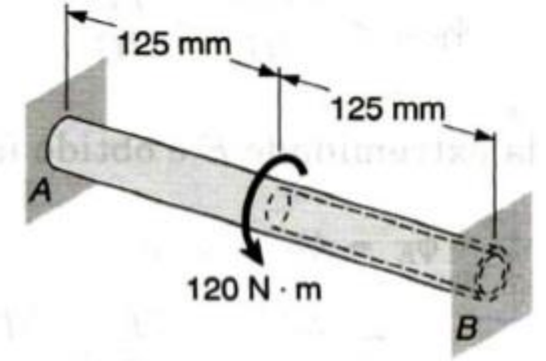


$$\frac{T_B L_1}{J_1 \cancel{G}} + \frac{T_B L_2}{J_2 \cancel{G}} = \frac{(T_A + T_B) L_1}{J_1 \cancel{G}}$$

$$\cancel{\frac{T_B L_1}{J_1}} + \frac{T_B L_2}{J_2} - \frac{T_A L_1}{J_1} - \cancel{\frac{T_B L_1}{J_1}} = 0$$

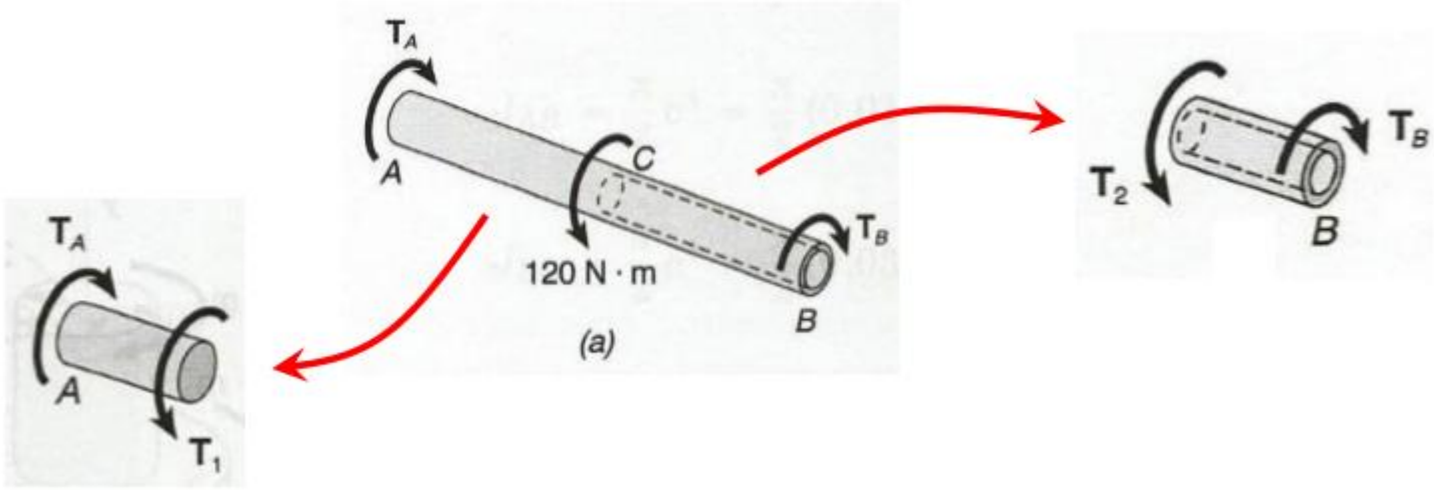
$$\frac{T_B L_2}{J_2} = \frac{T_A L_1}{J_1} \qquad \therefore \qquad \boxed{T_B = \frac{J_2 L_1}{J_1 L_2} T_A}$$

Exemplo 2



Outra forma de obter a condição extra:

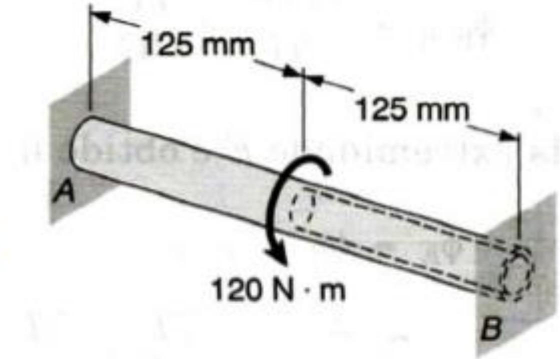
O ângulo de torção total de AB é zero, então a soma dos ângulos de AC e BC deve ser igual a zero:



$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 0$$

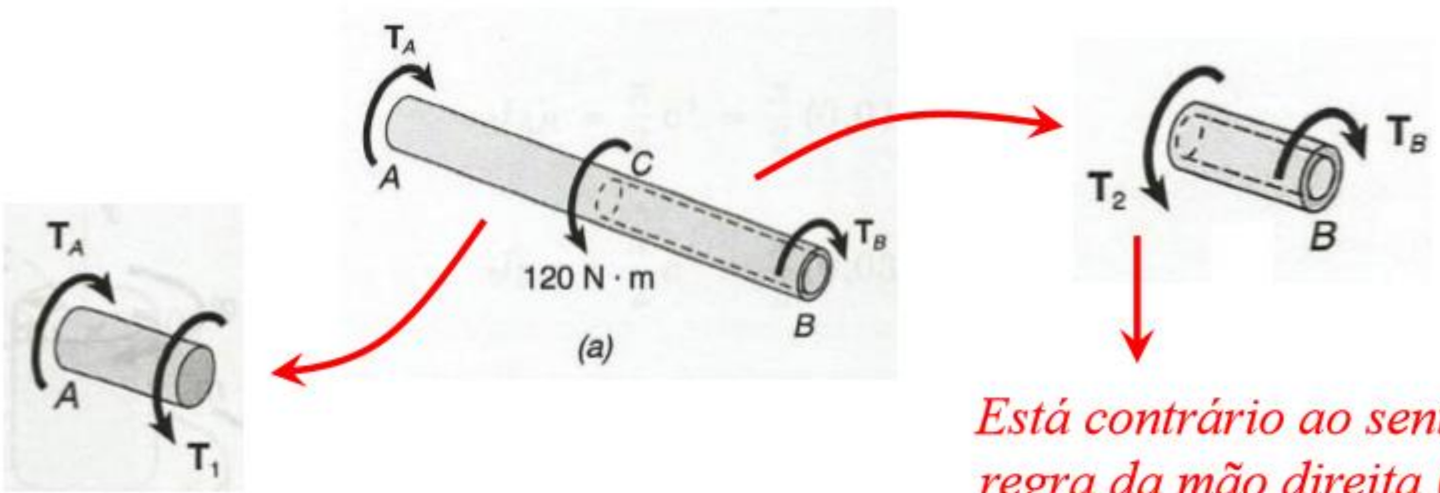
$$\therefore \frac{T_A L_1}{J_1} - \frac{T_B L_2}{J_2} = 0$$

Exemplo 2



Outra forma de obter a condição extra:

O ângulo de torção total de AB é zero, então a soma dos ângulos de AC e BC deve ser igual a zero:

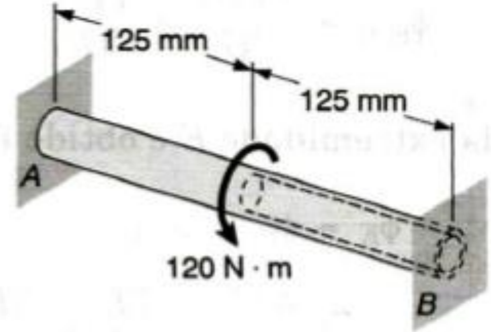


Está contrário ao sentido da regra da mão direita (com o polegar saindo da seção).

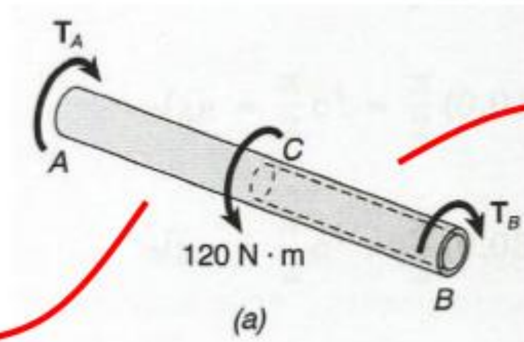
$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 0$$

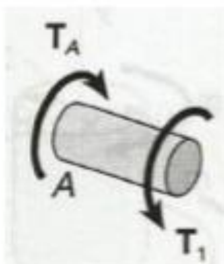
$$\therefore \frac{T_A L_1}{J_1} - \frac{T_B L_2}{J_2} = 0$$

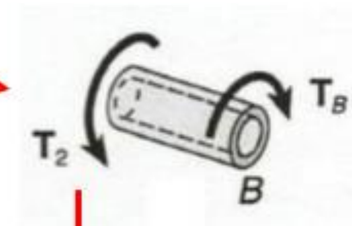
Exemplo 2



Outra forma de obter a condição extra:
O ângulo de torção total de *AB* é zero, então a soma dos ângulos de *AC* e *BC* deve ser igual a zero:







Está contrário ao sentido da regra da mão direita (com o polegar saindo da seção).

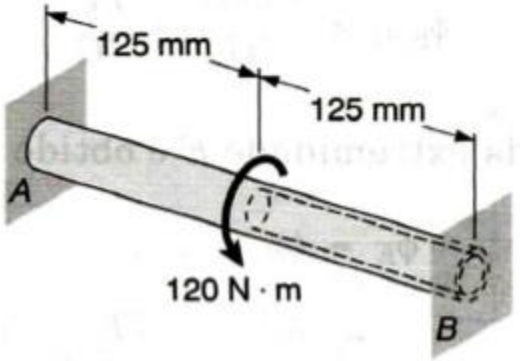
$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 0$$

$$\therefore \frac{T_A L_1}{J_1} - \frac{T_B L_2}{J_2} = 0$$

$$\frac{T_B L_2}{J_2} = \frac{T_A L_1}{J_1} \quad \therefore \quad \boxed{T_B = \frac{J_2 L_1}{J_1 L_2} T_A}$$

Exemplo 2

Substituindo os valores numéricos:



$$L_1 = L_2 = 125mm$$

$$J_1 = \frac{\pi}{2}(10mm)^4 = 15,7080 \times 10^3 mm^4$$

$$J_2 = \frac{\pi}{2}\left[(10mm)^4 - (8mm)^4\right] = 9,2740 \times 10^3 mm^4$$

Então:

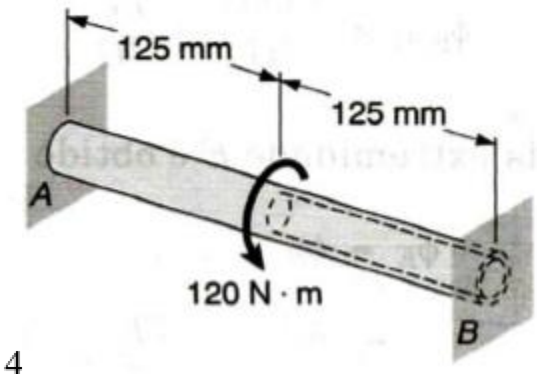
$$T_B = \frac{J_2 L_1}{J_1 L_2} T_A = 0,590 T_A$$

E, voltando à expressão inicial de equilíbrio, obtemos:

$$T_A = 75,5 N \cdot m \qquad T_B = 44,5 N \cdot m$$

Exemplo 2

Substituindo os valores numéricos:



$$L_1 = L_2 = 125mm$$

$$J_1 = \frac{\pi}{2}(10mm)^4 = 15,7080 \times 10^3 mm^4$$

$$J_2 = \frac{\pi}{2}\left[(10mm)^4 - (8mm)^4\right] = 9,2740 \times 10^3 mm^4$$

Então:

$$T_B = \frac{J_2 L_1}{J_1 L_2} T_A = 0,590 T_A$$

E, voltando à expressão inicial de equilíbrio, obtemos:

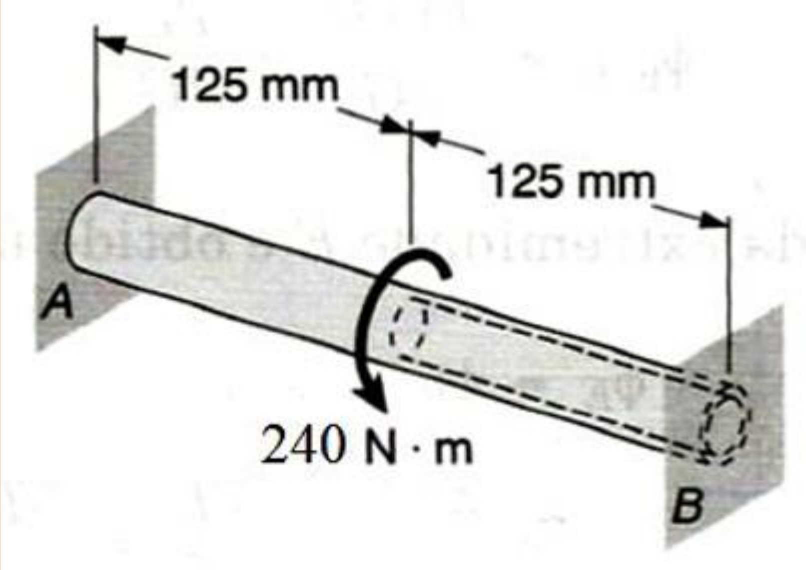
$$T_A = 75,5N \cdot m \qquad T_B = 44,5N \cdot m$$

Qual deve ser o comprimento do trecho CB para que T_A e T_B sejam iguais (considerando comprimento total da peça constante)?

$$\boxed{T_B = \frac{J_2 L_1}{J_1 L_2} T_A}$$

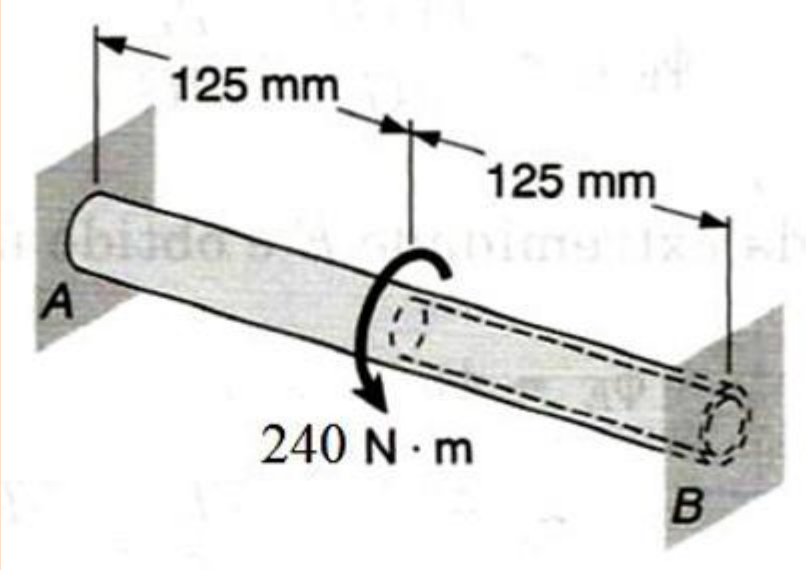
Exemplo 3

- ***Um eixo AB tem 250 mm de comprimento e 20 mm de diâmetro, tendo seção transversal circular. O eixo tem seção vazada, com diâmetro interno de 16mm, no trecho de 125mm a partir da extremidade B. O eixo é de aço, sendo engastado nas extremidades. Determinar o momento torçor que se exerce no eixo devido a cada apoio, quando um torque de 240N·m é aplicado no ponto médio de AB.***



Exemplo 3

- ***Um eixo AB tem 250 mm de comprimento e 20 mm de diâmetro, tendo seção transversal circular. O eixo tem seção vazada, com diâmetro interno de 16mm, no trecho de 125mm a partir da extremidade B. O eixo é de aço, sendo engastado nas extremidades. Determinar o momento torçor que se exerce no eixo devido a cada apoio, quando um torque de 240N·m é aplicado no ponto médio de AB.***

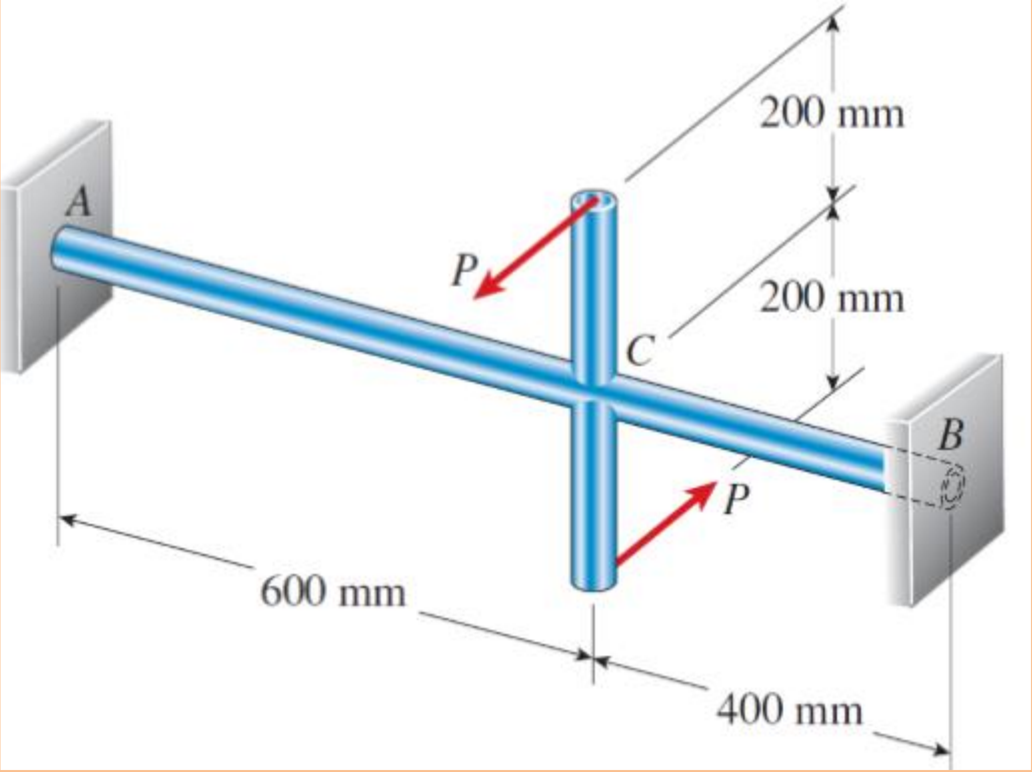


$$\begin{cases} T_B = 0{,}590 T_A \\ T_A + T_B = T_C \end{cases}$$

Basta resolver o sistema considerando T_C=240N·m.

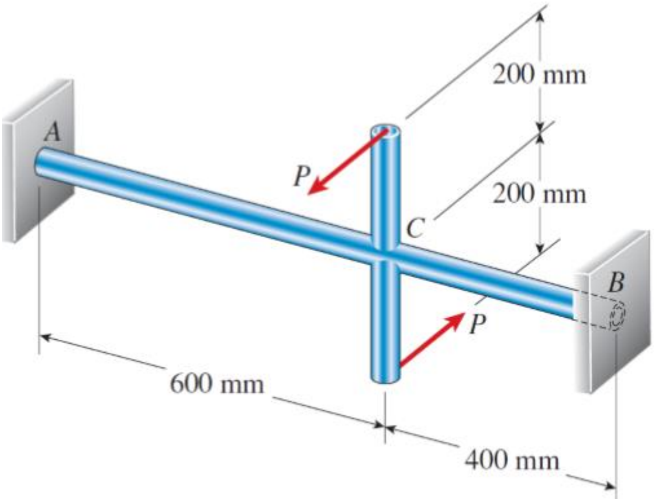
Exemplo 4 – Gere e Goodno, 2009, problema 3-8-4

- ***O eixo vazado ACB tem diâmetro externo de 50mm e diâmetro interno de 40mm e é engastado nas extremidades A e B. Forças horizontais P são aplicadas nas extremidades de um braço vertical que é soldado ao eixo no ponto C. Determine o valor admissível das forças P se a máxima tensão cisalhante admissível no eixo é de 45MPa.***



Exemplo 4 – Gere e Goodno, 2009, problema 3-8-4

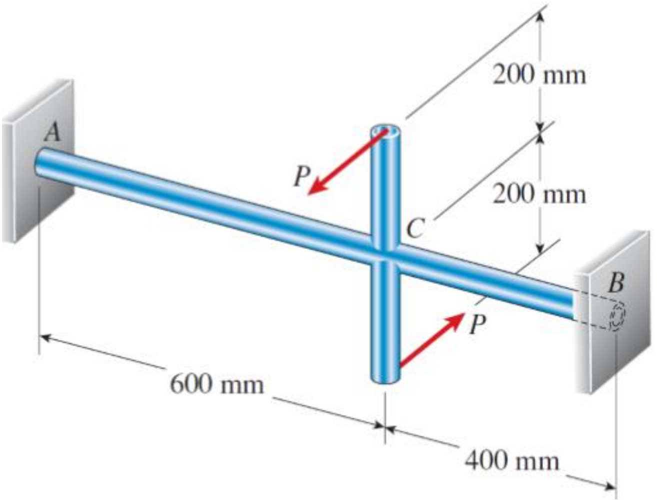
- ***O problema é resolvido de forma semelhante a resolução do problema anterior. Porém, primeiramente duas perguntas devem ser respondidas;***
  - ***Qual o valor de T_C em função de P?***
  - ***Qual é a maior reação: T_A ou T_B?***



Exemplo 4 – Gere e Goodno, 2009, problema 3-8-4

- ***Qual o valor de T_C em função de P?***

$$T_C = 0.2P + 0.2P = 0.4P$$



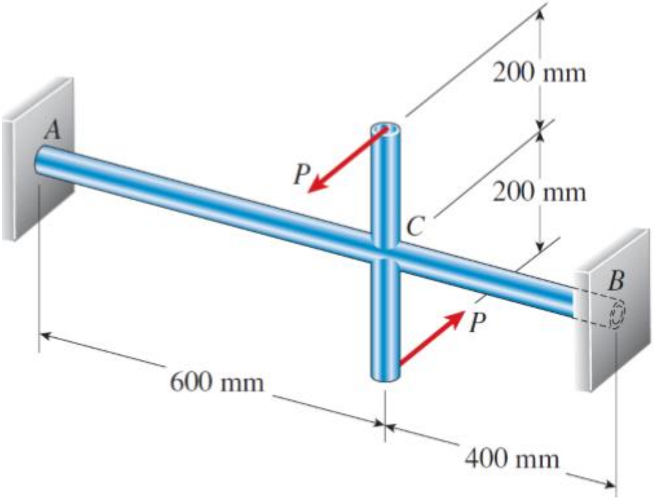
Exemplo 4 – Gere e Goodno, 2009, problema 3-8-4

- ***Qual o valor de T_C em função de P?***

$$T_C = 0.2P + 0.2P = 0.4P$$

- ***Qual é a maior reação: T_A ou T_B?***

$$\boxed{T_B = \frac{J_2 L_1}{J_1 L_2} T_A} \quad \left\{ \begin{array}{l} J_1 = J_2 = J \\ L_1 > L_2 \text{, logo:} \\ T_B > T_A \text{, logo:} \\ T_B = T_{máx} \end{array} \right.$$



Exemplo 4 – Gere e Goodno, 2009, problema 3-8-4

- ***Assim, para uma $\zeta_{máx}$ = 45 MPa?***

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}}$$

Exemplo 4 – Gere e Goodno, 2009, problema 3-8-4

- ***Assim, para uma $\zeta_{máx}$ = 45 MPa?***

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{T_{\max}(d/2)}{J} \quad T_{\max} = \frac{2\tau_{\max} J}{d}$$

Exemplo 4 – Gere e Goodno, 2009, problema 3-8-4

- ***Assim, para uma $\zeta_{máx}$ = 45 MPa?***

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{Tc}{J}} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{T_{max}(d/2)}{J} \qquad T_{max} = \frac{2\tau_{max} J}{d}$$

$$\tau_{max} = 45 \times 10^6 \mathrm{N/m^2}$$

$$J = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4) = 362.26 \times 10^{-9} \mathrm{m}^4$$

$$d = d_2 = 0.05 \text{ m}$$

Exemplo 4 – Gere e Goodno, 2009, problema 3-8-4

- ***Assim, para uma $\zeta_{máx}$ = 45 MPa?***

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{Tc}{J}} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{T_{max}(d/2)}{J} \qquad T_{max} = \frac{2\tau_{max} J}{d}$$

$$\tau_{max} = 45 \times 10^6 \text{N/m}^2$$

$$J = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4) = 362.26 \times 10^{-9} \text{m}^4$$

$$d = d_2 = 0.05 \text{ m}$$

$$\Downarrow$$

$$T_{máx} = T_B = 652.07 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Exemplo 4 – Gere e Goodno, 2009, problema 3-8-4

- ***Da questão anterior:***

$$T_B = \frac{J_2 L_1}{J_1 L_2} T_A$$

$$\boldsymbol{T_A = 434.71\ N.m}$$

Exemplo 4 – Gere e Goodno, 2009, problema 3-8-4

- ***Da questão anterior:***

$$\boxed{T_B = \frac{J_2 L_1}{J_1 L_2} T_A} \Rightarrow \boxed{T_A = 434.71 \text{ N.m}}$$

- ***Sendo:***

$$T_A + T_B = T_C$$

$$T_c = 0.4P$$

Exemplo 4 – Gere e Goodno, 2009, problema 3-8-4

- ***Da questão anterior:***

$$\boxed{T_B = \frac{J_2 L_1}{J_1 L_2} T_A} \Rightarrow \boxed{T_A = 434.71\ N.m}$$

- ***Sendo:***

$$T_A + T_B = T_C$$

$$T_c = 0.4P$$

- ***Encontra-se P:***

$$\boxed{P = 2717\ N}$$

…

CONTINUA