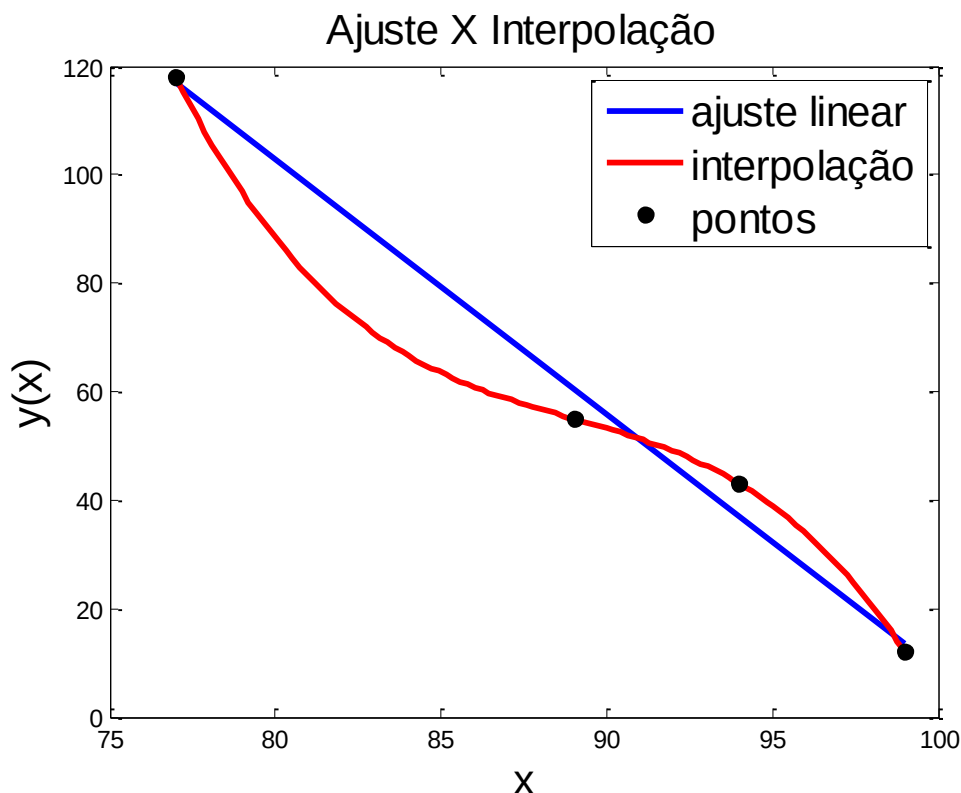




Cálculo Numérico

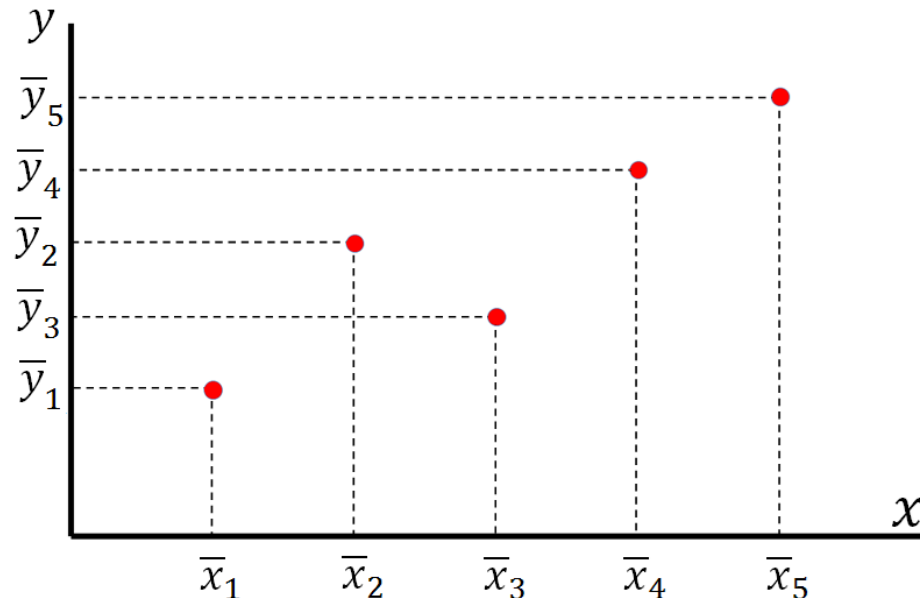
Prof. Dr. Alverlando Ricardo

Aula 8: Parte III: **INTERPOLAÇÃO**

INTERPOLAÇÃO

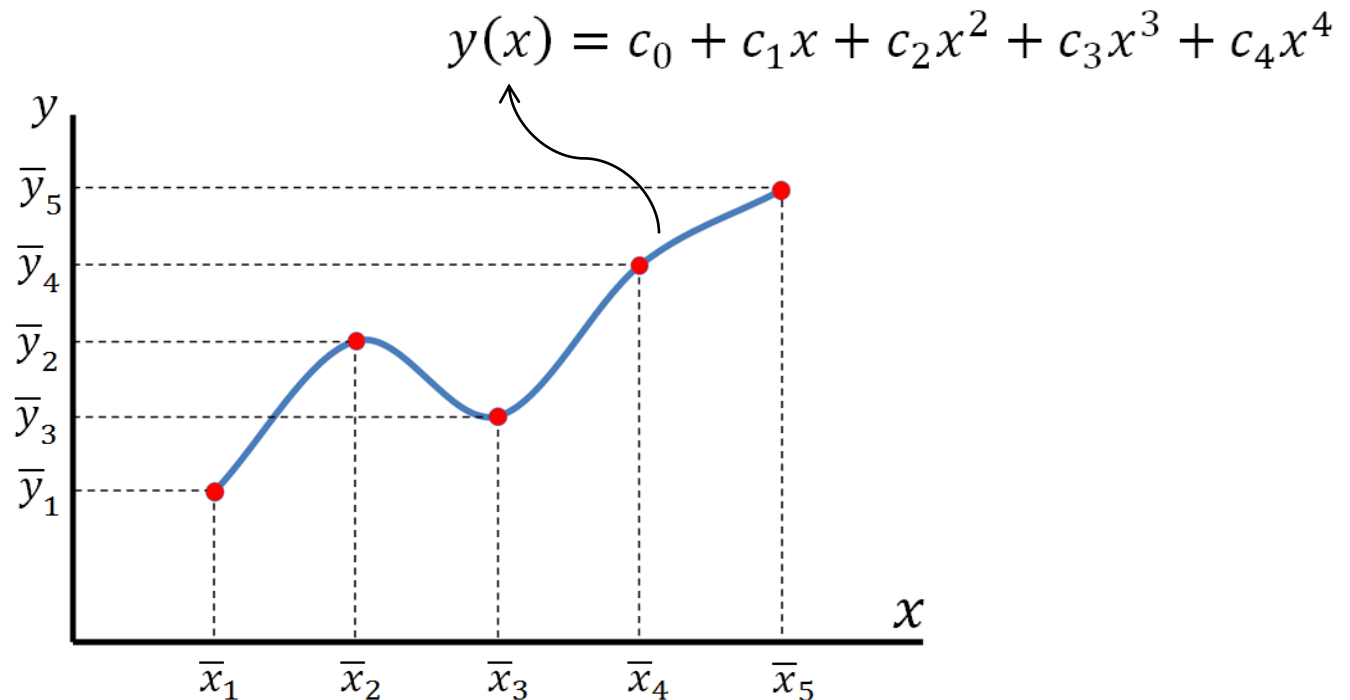
INTERPOLAÇÃO

- A **interpolação** é um procedimento empregado na *estimativa de valores entre os pontos conhecidos* de um conjunto de dados.



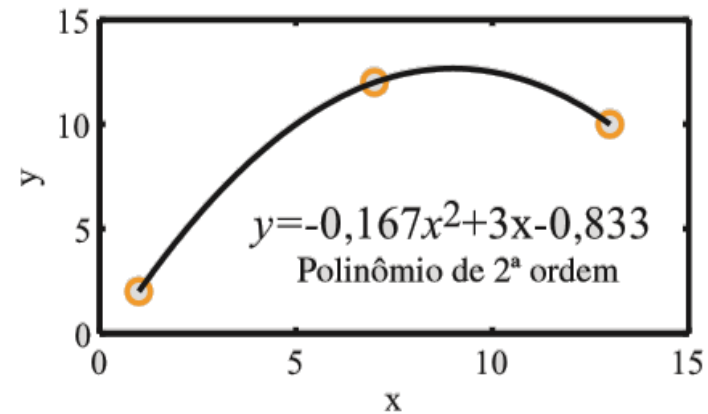
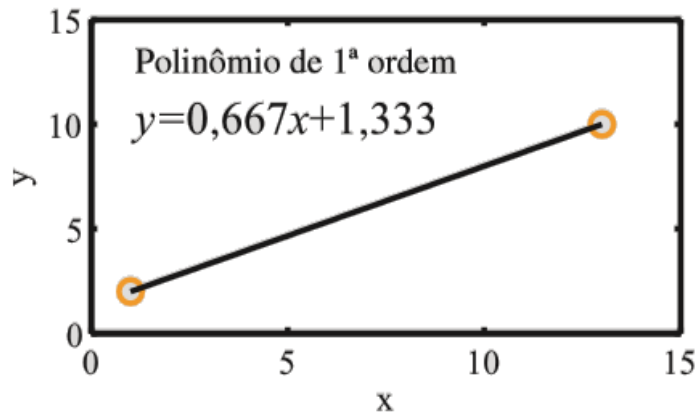
INTERPOLAÇÃO

- Ela é feita primeiramente com a *determinação de um polinômio* que forneça o *valor exato nos pontos* conhecidos, e então com o *uso desse polinômio* para *calcular valores entre esses pontos*.



INTERPOLAÇÃO

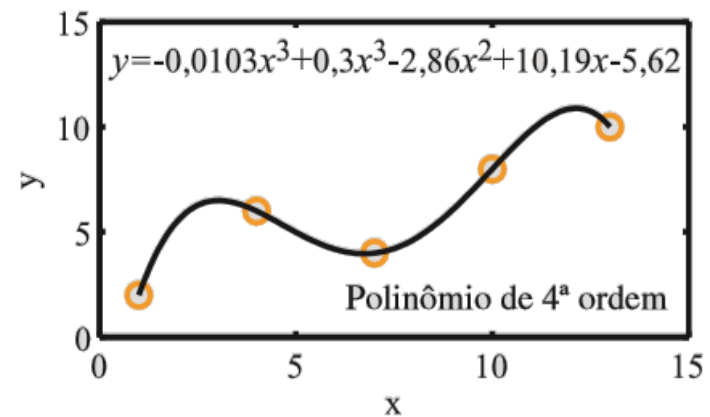
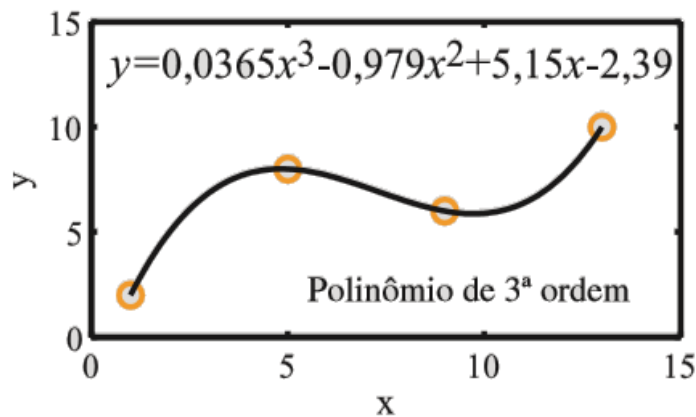
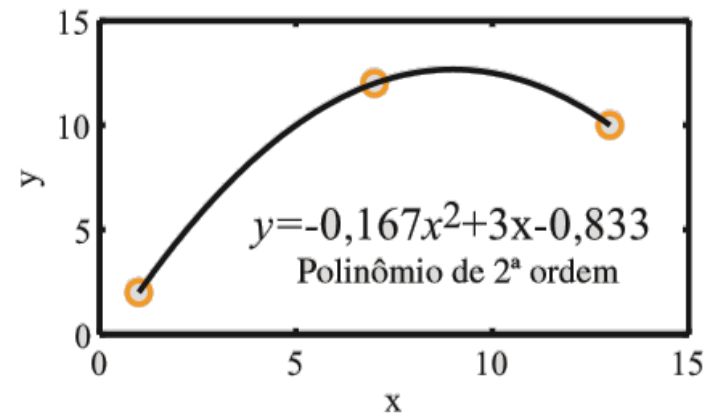
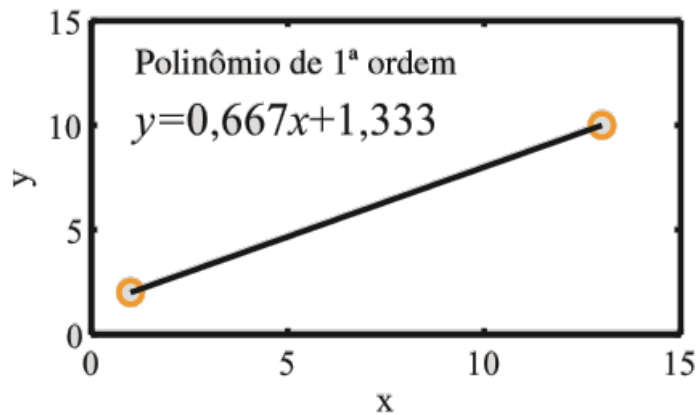
- Aqui nós estudaremos a *interpolação* empregando-se um *único polinômio*, independentemente do número de pontos envolvidos.



$$\underline{Grau = n - 1}$$

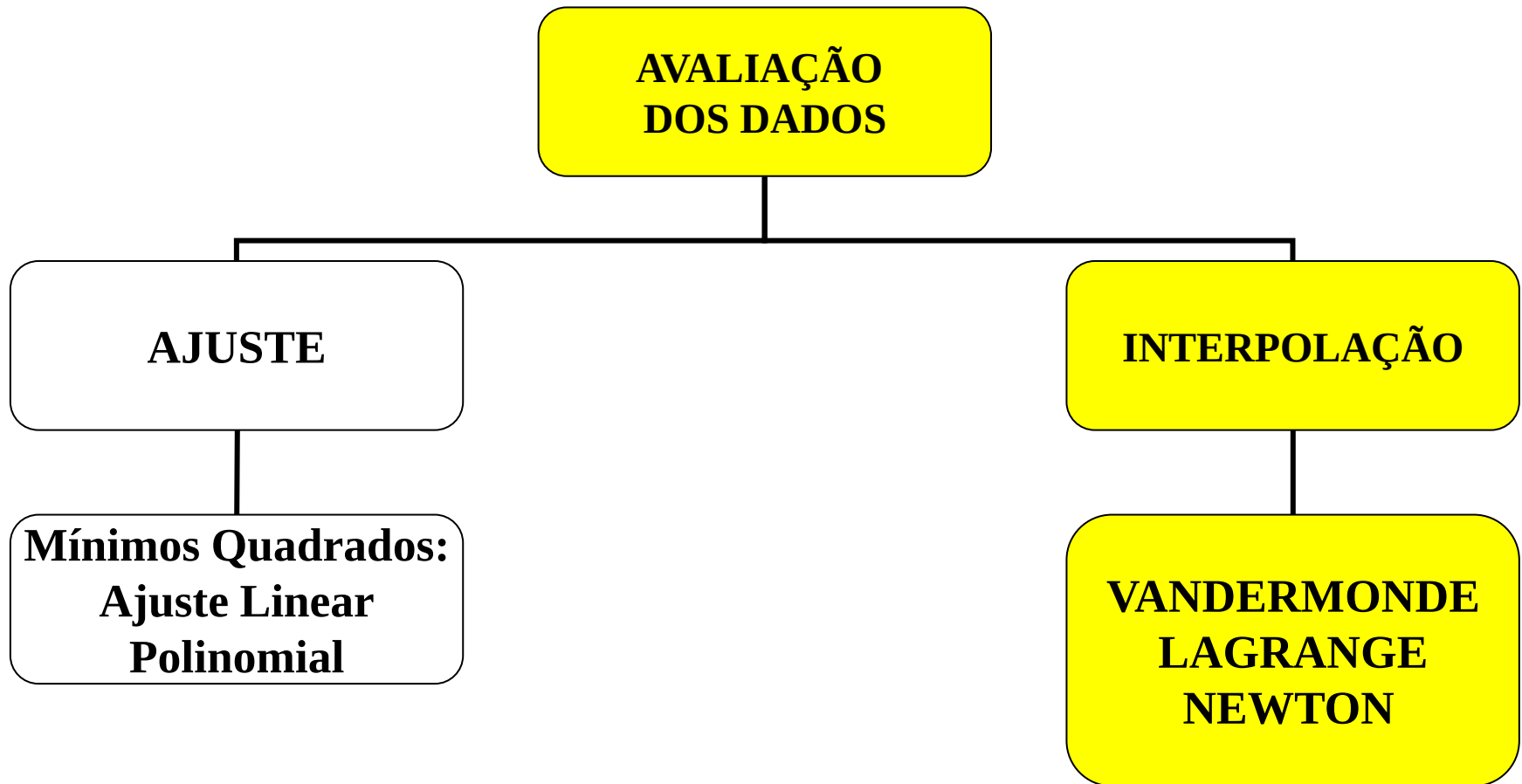
INTERPOLAÇÃO

- Aqui nós estudaremos a *interpolação* empregando-se um *único polinômio*, independentemente do número de pontos envolvidos.



Polinômios de várias ordens.

INTERPOLAÇÃO



MÉTODO DE VANDERMONDE

MÉTODO DE VANDERMONDE

Consideração básica:

O maior grau do polinômio é $(n-1)$, onde n é o número de pontos dados:

$$p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots + a_nx^{n-1}$$

Dessa forma, para:

$$x = x_1$$

$$p(x_1) = a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2 + a_4x_1^3 + \dots + a_nx_1^{n-1} = f(x_1)$$

MÉTODO DE VANDERMONDE

Estendendo para todos os pontos, chega-se à:

$$\begin{cases} a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2 + a_4x_1^3 + \dots + a_nx_1^{n-1} = f(x_1) \\ a_1 + a_2x_2 + a_3x_2^2 + a_4x_2^3 + \dots + a_nx_2^{n-1} = f(x_2) \\ a_1 + a_2x_3 + a_3x_3^2 + a_4x_3^3 + \dots + a_nx_3^{n-1} = f(x_3) \\ \vdots \\ a_1 + a_2x_n + a_3x_n^2 + a_4x_n^3 + \dots + a_nx_n^{n-1} = f(x_n) \end{cases}$$

Sistema de equações lineares com n incógnitas e n equações, onde deseja-se encontrar os coeficientes:

$$a_i, \quad i = 1, \dots, n$$

MÉTODO DE VANDERMONDE

Escrevendo o sistema de equações na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ x_3^0 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

a matriz A é a **matriz de Vandermonde**.

MÉTODO DE VANDERMONDE

Exemplo:

	x	$f(x)$
x_1	-1	4
x_2	0	1
x_3	2	-1

PASSO 1: Determinar o polinômio a ser analisado;

$$\boxed{n = 3} \longrightarrow \boxed{p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2}$$

MÉTODO DE VANDERMONDE

Exemplo:

	x	$f(x)$
x_1	-1	4
x_2	0	1
x_3	2	-1

PASSO 1: Determinar o polinômio a ser analisado;

$$n = 3 \longrightarrow p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

PASSO 2: Substituir os valores x_i no polinômio

$$x = x_1 \longrightarrow p(x_1) = f(x_1) \rightarrow a_1 - a_2 + a_3 = 4$$

$$x = x_2 \longrightarrow p(x_2) = f(x_2) \rightarrow a_1 = 1$$

$$x = x_3 \longrightarrow p(x_3) = f(x_3) \rightarrow a_1 + 2a_2 + 4a_3 = -1$$

MÉTODO DE VANDERMONDE

PASSO 3: Transformar o sistema para a forma matricial

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 = 4 \\ a_1 = 1 \\ a_1 + 2a_2 + 4a_3 = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

MÉTODO DE VANDERMONDE

PASSO 3: Transformar o sistema para a forma matricial

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 = 4 \\ a_1 = 1 \\ a_1 + 2a_2 + 4a_3 = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

PASSO 4: Resolver o sistema usando um dos métodos para resolução de sistemas lineares

$$x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad p(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

MÉTODO DE VANDERMONDE

Exercício para o lar: Obter um polinômio que interpole os pontos da tabela e calcular $p(1,05)$:

x	1.0	1.1	1.2
f(x)	2.718	3.004	3.320

Resposta:

$$p(x) = 1.508 - 0.29x + 1.5x^2$$

$$p(1.05) = 2.85725$$

MÉTODO DE VANDERMONDE

- **NOTA IMPORTANTE:**
- *Na prática, a solução de um sistema de equações não é eficiente, especialmente quando polinômios de ordem mais elevada estão envolvidos.*
- *É possível escrever o polinômio em outras formas de uso mais fácil: **LAGRANGE e NEWTON.***

MÉTODO DE LAGRANGE

MÉTODO DE LAGRANGE

Consideração básica:

$p(x)$ é um polinômio de grau $(n-1)$ com a seguinte forma:

$$p(x) = f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x)$$

ou

$$p(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i)L_i(x) \longrightarrow \textit{(Polinômio de Lagrange)}$$

onde,

$$L_i(x) = \prod_{k=1, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

MÉTODO DE LAGRANGE

Para $n = 3$:

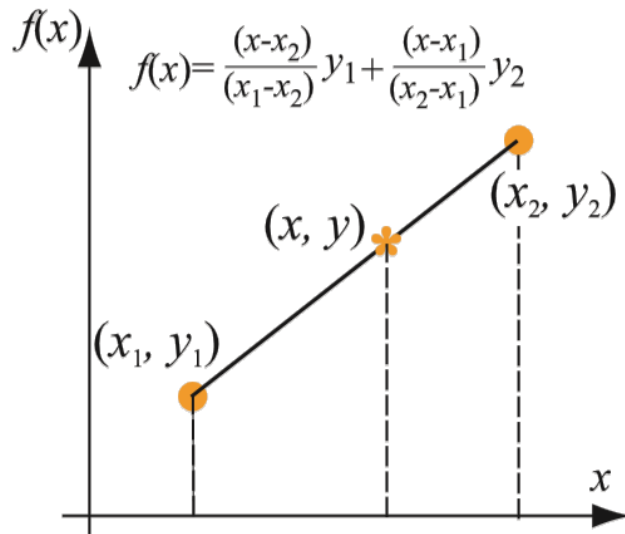
$$L_1(x) = \prod_{k=1, k \neq 1}^3 \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_2(x) = \prod_{k=1, k \neq 2}^3 \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

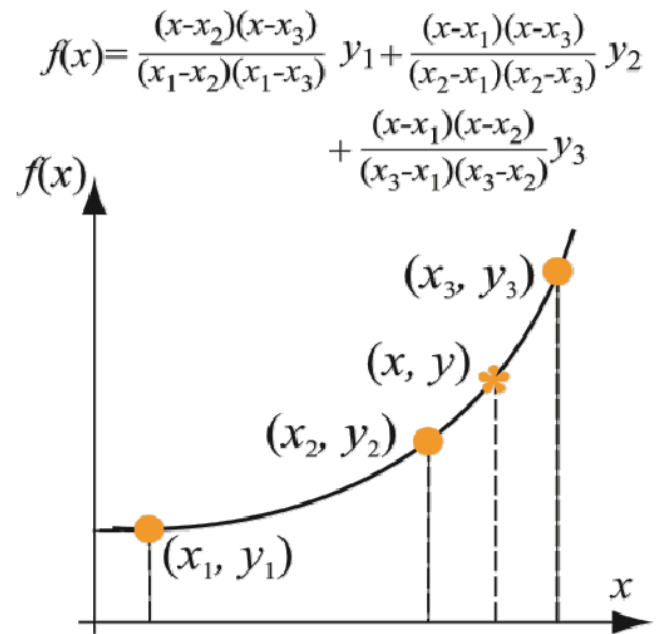
$$L_3(x) = \prod_{k=1, k \neq 3}^3 \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

MÉTODO DE LAGRANGE

As fórmulas derivam da análise gráfica dos dados, seguindo determinado algebrismo:



Polinômio de Lagrange de primeira ordem.



Polinômio de Lagrange de segunda ordem.

MÉTODO DE LAGRANGE

Exemplo:

x	$f(x)$
-1	4
0	1
2	-1

PASSO 1: Determinar o polinômio a ser analisado;

$$\boxed{n = 3} \longrightarrow p(x) = f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

MÉTODO DE LAGRANGE

PASSO 2: Calcular $L_i(x)$

$$L_1(x) = \frac{(x - 0)(x - 2)}{(-1 - 0)(-1 - 2)} = \frac{x^2 - 2x}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - (-1))(x - 2)}{(0 - (-1))(0 - 2)} = \frac{x^2 - x - 2}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - (-1))(x - 0)}{(2 - (-1))(2 - 0)} = \frac{x^2 + x}{6}$$

MÉTODO DE LAGRANGE

PASSO 3: Substituindo os $L_i(x)$ e $f(x_i)$ na equação de $p(x)$ tem-se:

$$p(x) = f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$



$$p(x) = 4 \left(\frac{x^2 - 2x}{3} \right) + 1 \left(\frac{-x^2 + x + 2}{2} \right) + (-1) \left(\frac{x^2 + x}{6} \right)$$



$$p(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

MÉTODO DE LAGRANGE

➤ NOTA IMPORTANTE:

- *Se um valor interpolado for calculado para um dado conjunto de dados e então esse conjunto de dados for ampliado para **incluir pontos adicionais**, todos os termos do **polinômio de Lagrange** devem ser calculados novamente.*
- *Isso é diferente do que ocorre nos **polinômios de Newton**, onde apenas os novos termos deverão ser calculados se mais pontos forem adicionados ao conjunto de dados. .*

MÉTODO DE NEWTON

MÉTODO DE NEWTON

Consideração básica:

$$p(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) + \cdots \\ \cdots + a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})$$

Onde a_k são os operadores diferenças divididas entre os pontos $((x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n)))$

MÉTODO DE NEWTON

➤ Os operadores diferenças divididas são dados por:

$$a_1 = f[x_1] = f(x_1)$$

$$a_2 = f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$a_3 = f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} - \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1}$$

MÉTODO DE NEWTON

➤ *De forma geral*

$$a_n = f[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] = \frac{f[x_2, x_3, \dots, x_n] - f[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_1}$$

Com isso

$$\begin{aligned} p(x) = & f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + \dots \\ & \dots + f[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n](x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

MÉTODO DE NEWTON

➤ *Método tabelar:*

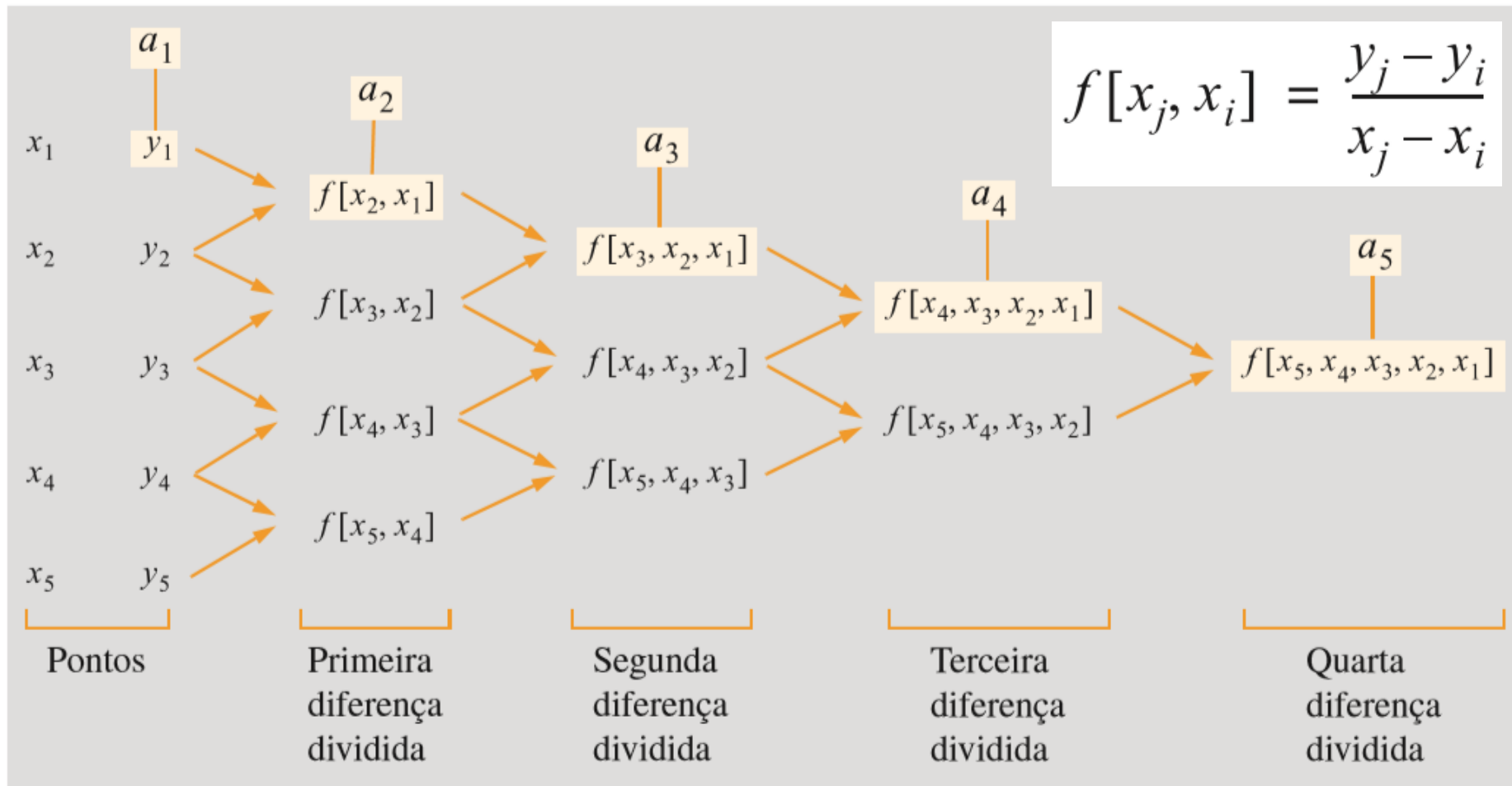


Tabela de diferenças divididas para um conjunto de dados com cinco pontos.

MÉTODO DE LAGRANGE

As fórmulas derivam da análise gráfica dos dados, seguindo determinado algebrismo :

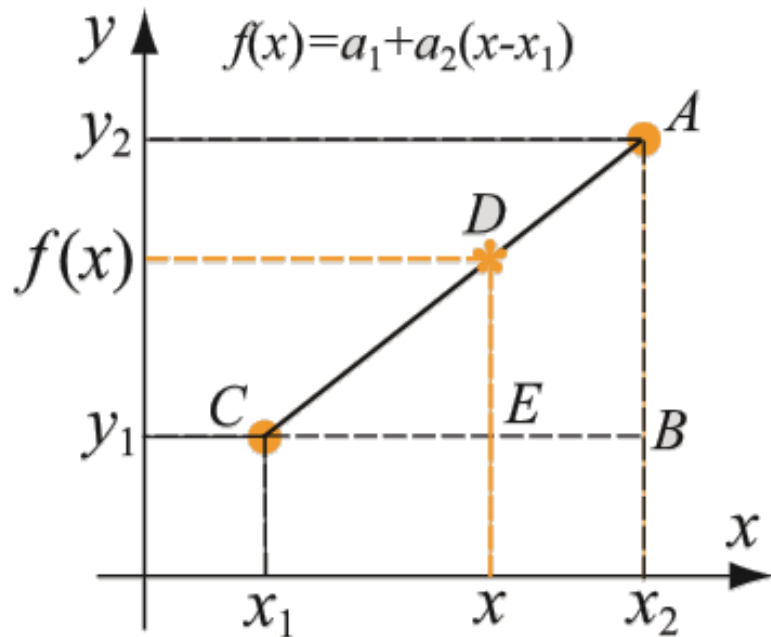


Figura Polinômio de Newton de primeira ordem.

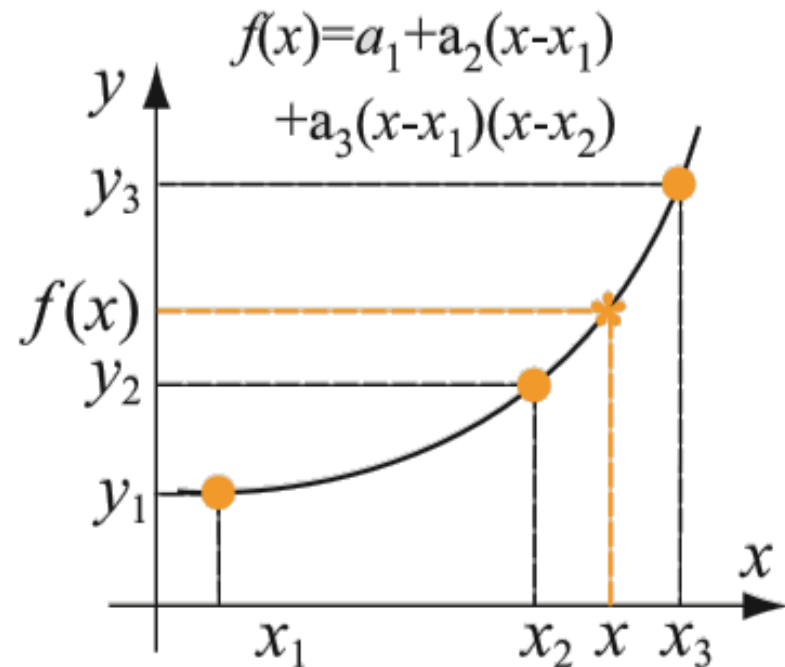


Figura Polinômio de Newton de segunda ordem.

MÉTODO DE NEWTON

Exemplo:

x	$f(x)$
-1	4
0	1
2	-1

PASSO 1: Determinar o polinômio a ser analisado;

$$\boxed{n = 3} \rightarrow$$

$$p(x) = \underbrace{f[x_1]}_{a_1} + \underbrace{f[x_1, x_2]}_{a_2}(x - x_1) + \underbrace{f[x_1, x_2, x_3]}_{a_3}(x - x_1)(x - x_2)$$

MÉTODO DE NEWTON

PASSO 2: Calcular a_i usando o método tabelar

x **y**

$$f[x_j, x_i] = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$$

-1	4
0	1
2	-1

The diagram illustrates the calculation of the divided difference a_i using the tabular method. It shows three points: $(-1, 4)$, $(0, 1)$, and $(2, -1)$. Red arrows indicate the calculation of the first-order divided differences: one arrow from $(-1, 4)$ to $(0, 1)$, and another from $(0, 1)$ to $(2, -1)$.

MÉTODO DE NEWTON

PASSO 2: Calcular a_i usando o método tabelar

x y

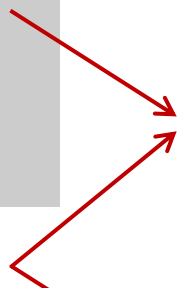
$$f[x_j, x_i] = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$$

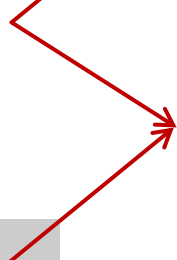
-1	4
----	---

0

1

2	-1
---	----


$$\frac{1 - 4}{0 - (-1)} = -3$$


$$\frac{-1 - 1}{2 - 0} = -1$$

MÉTODO DE NEWTON

PASSO 2: Calcular a_i usando o método tabelar

x y

$$f[x_j, x_i] = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$$

-1	4
----	---

0

1

2	-1
---	----

$$\frac{1 - 4}{0 - (-1)} = -3$$

$$\frac{-1 - 1}{2 - 0} = -1$$

$$\frac{-1 - (-3)}{2 - (-1)} = \frac{2}{3}$$

MÉTODO DE NEWTON

PASSO 2: Calcular a_i usando o método tabelar

$$f[x_j, x_i] = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$$

x y

-1	4
----	---

0 1

2	-1
---	----

$$\frac{1-4}{0-(-1)} = \overbrace{-3}^{a_2}$$

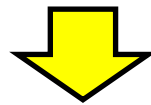
$$\frac{-1-1}{2-0} = -1$$

$$\frac{-1-(-3)}{2-(-1)} = \overbrace{\frac{2}{3}}^{a_3}$$

MÉTODO DE NEWTON

PASSO 3: Substituir os valores encontrados no polinômio

$$p(x) = \underbrace{f[x_1]}_{a_1} + \underbrace{f[x_1, x_2]}_{a_2}(x - x_1) + \underbrace{f[x_1, x_2, x_3]}_{a_3}(x - x_1)(x - x_2)$$



$$p(x) = 4 + (-3).(x - (-1)) + \frac{2}{3}.(x - (-1)).(x - 0)$$



$$p(x) = 4 - 3.(x + 1) + \frac{2}{3}.(x + 1).(x)$$

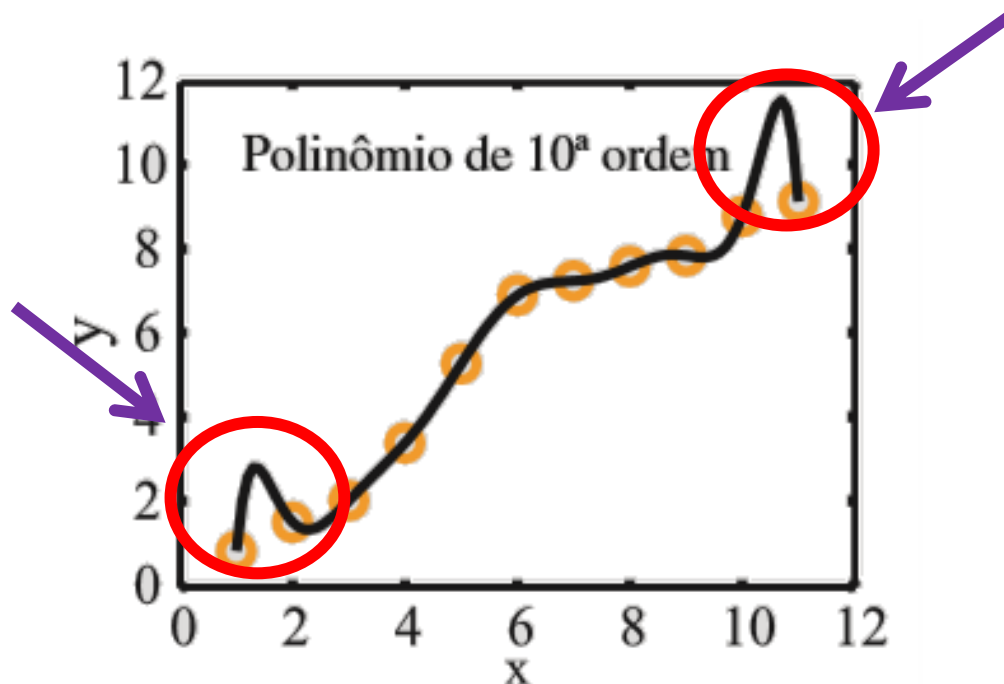


$$p(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

INTERPOLAÇÃO POR PARTES

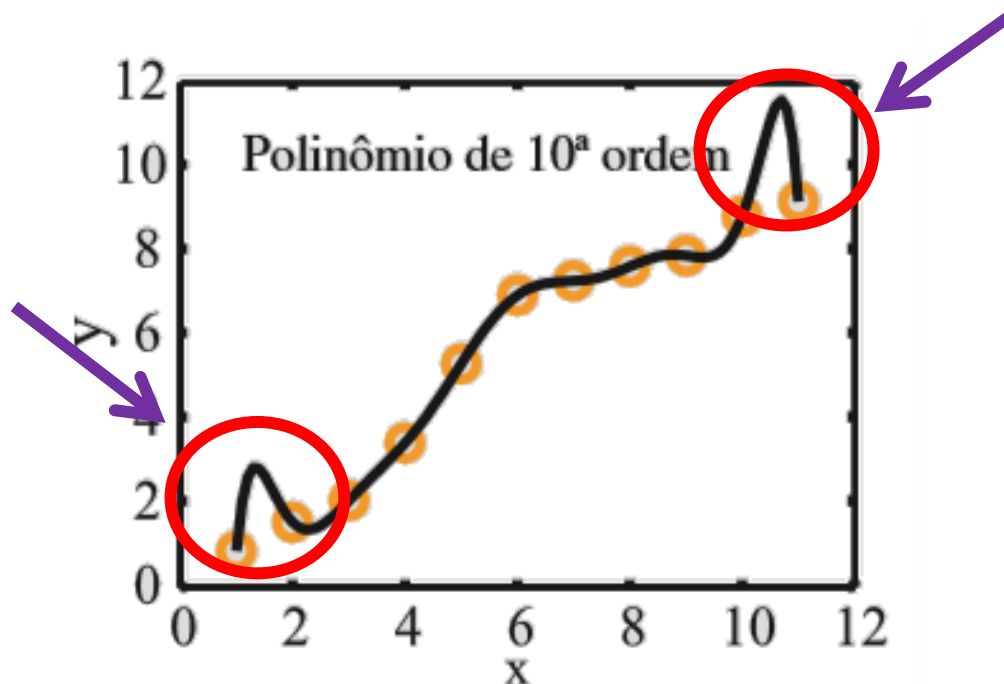
Interpolação por partes

- A interpolação usando um único polinômio fornece bons resultados apenas para um pequeno número de pontos;
- embora esse polinômio passe por todos os pontos, ele pode apresentar um desvio significativo fora deles.



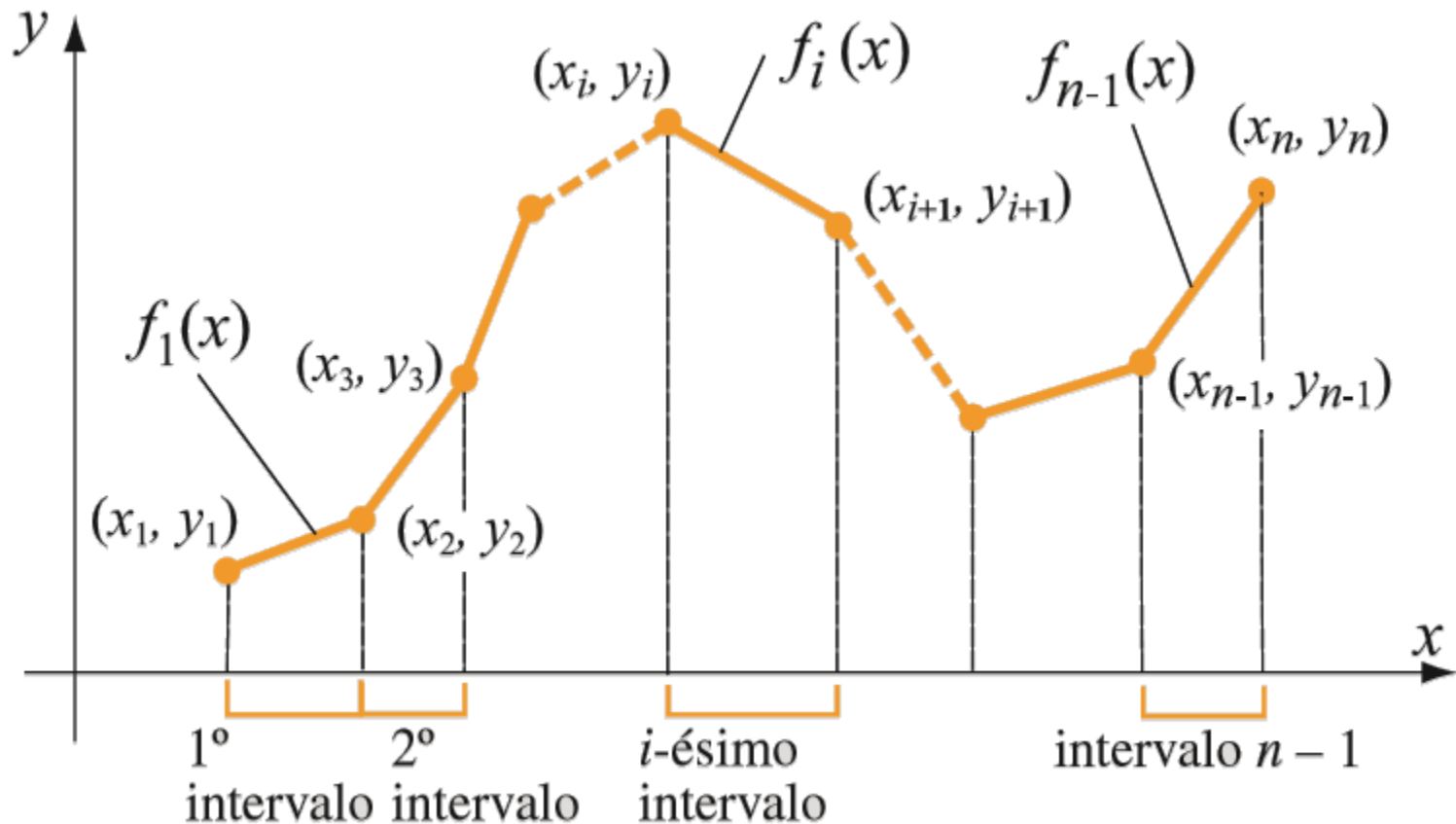
Interpolação por partes

- Neste caso específico, melhores resultados podem ser obtidos com o uso da interpolação por partes:



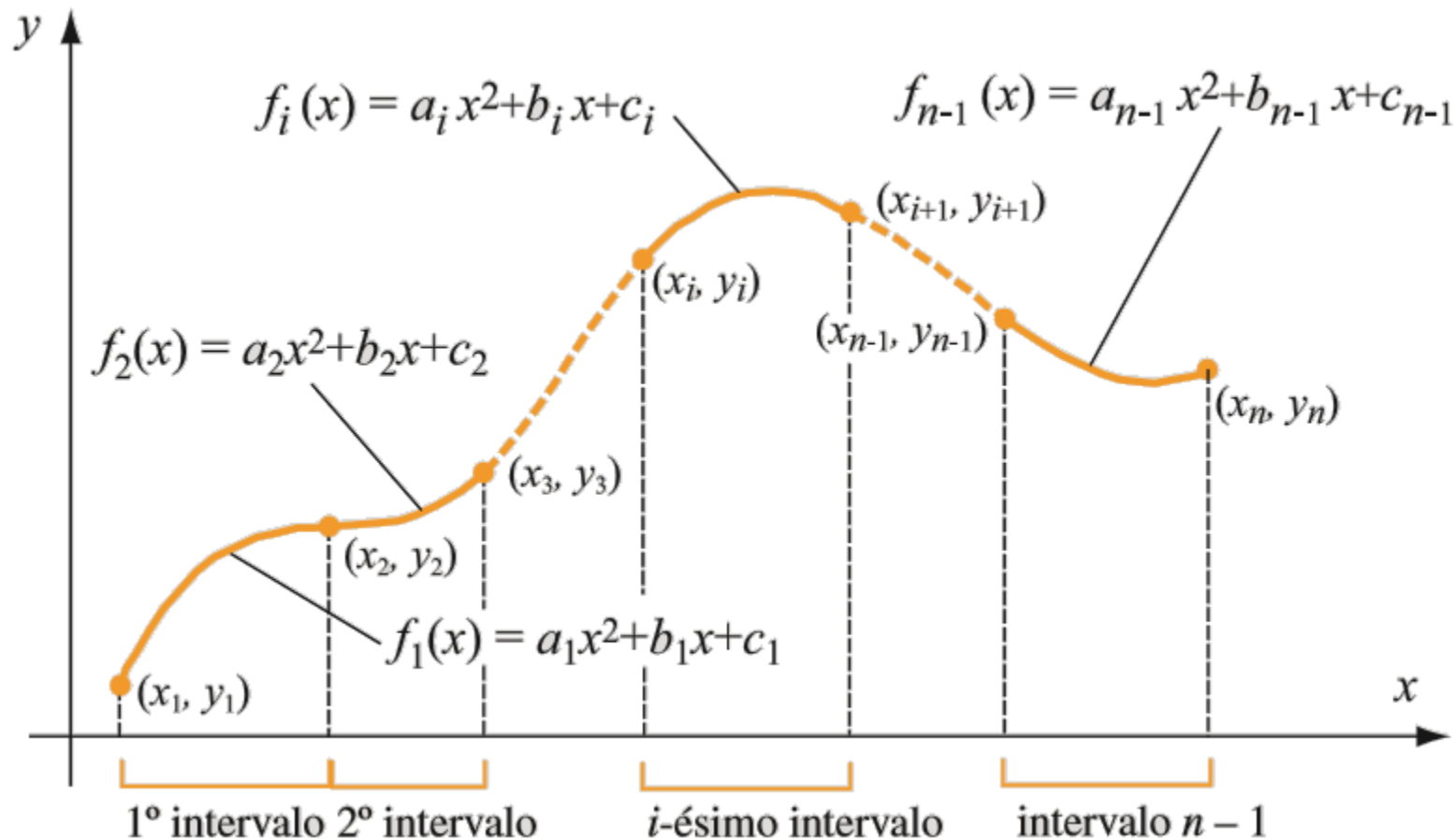
Interpolação por partes (Splines)

➤ *Splines lineares:*



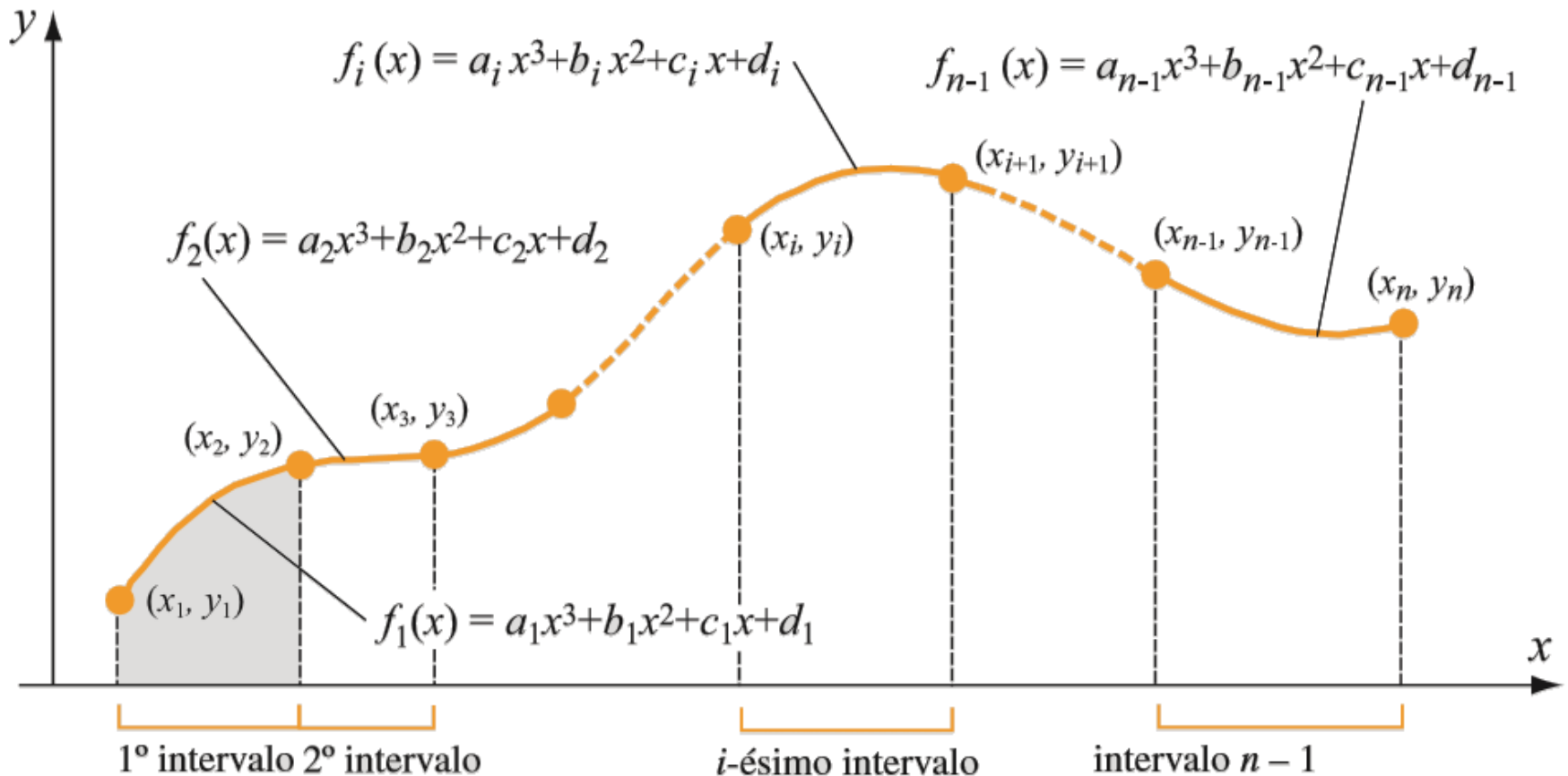
Interpolação por partes (Splines)

➤ *Splines quadráticas:*



Interpolação por partes (Splines)

➤ *Splines cúbicas:*



...CONTINUA