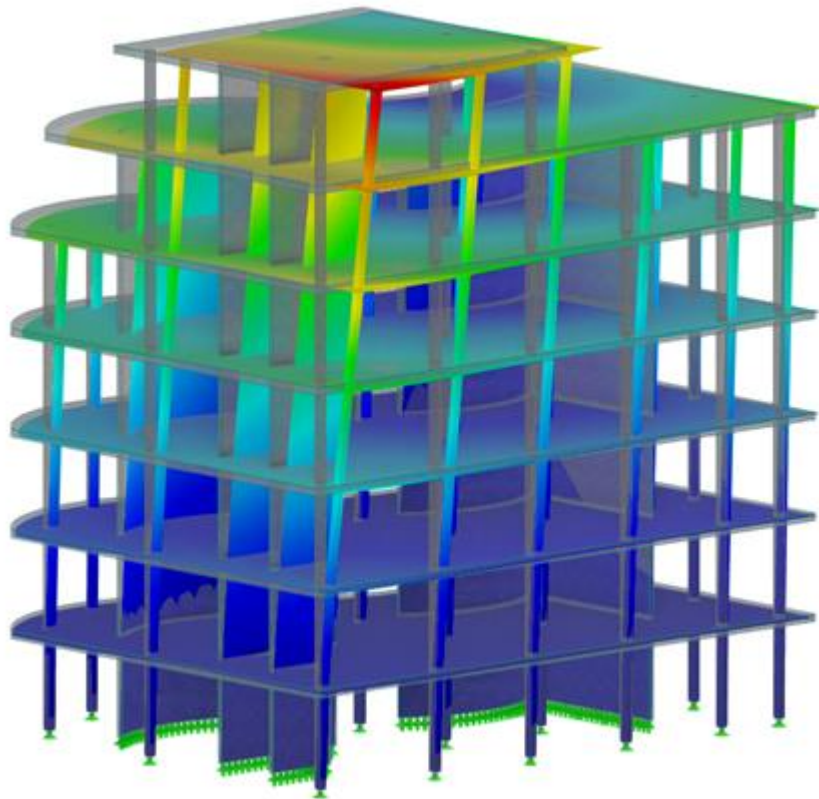




Teoria das Estruturas 2

Introdução à Análise de Estruturas



Prof. Dr. Alverlando Ricardo

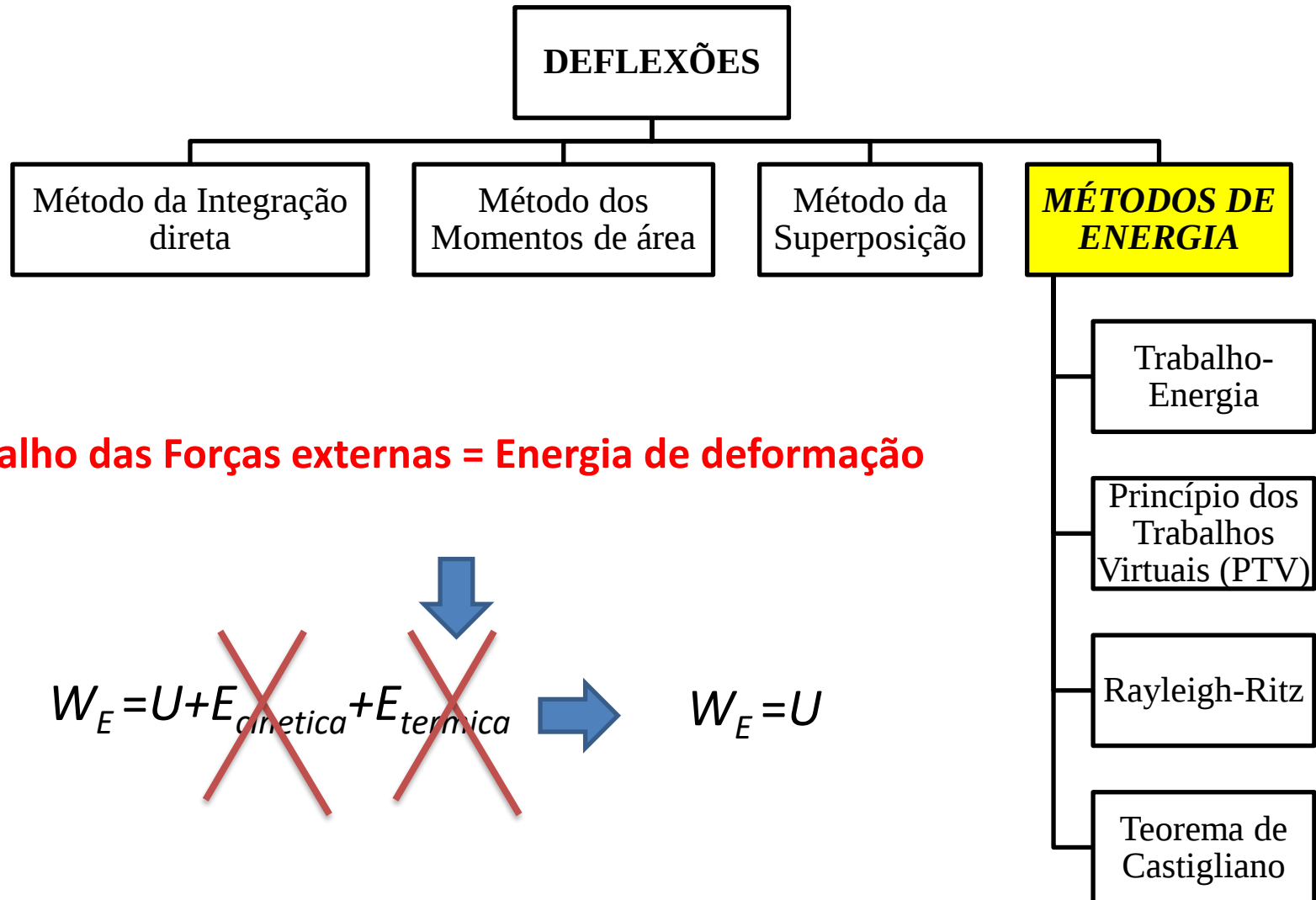
Parte 2: Métodos de Energia

**Energia de deformação e princípio da
conservação de energia**

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

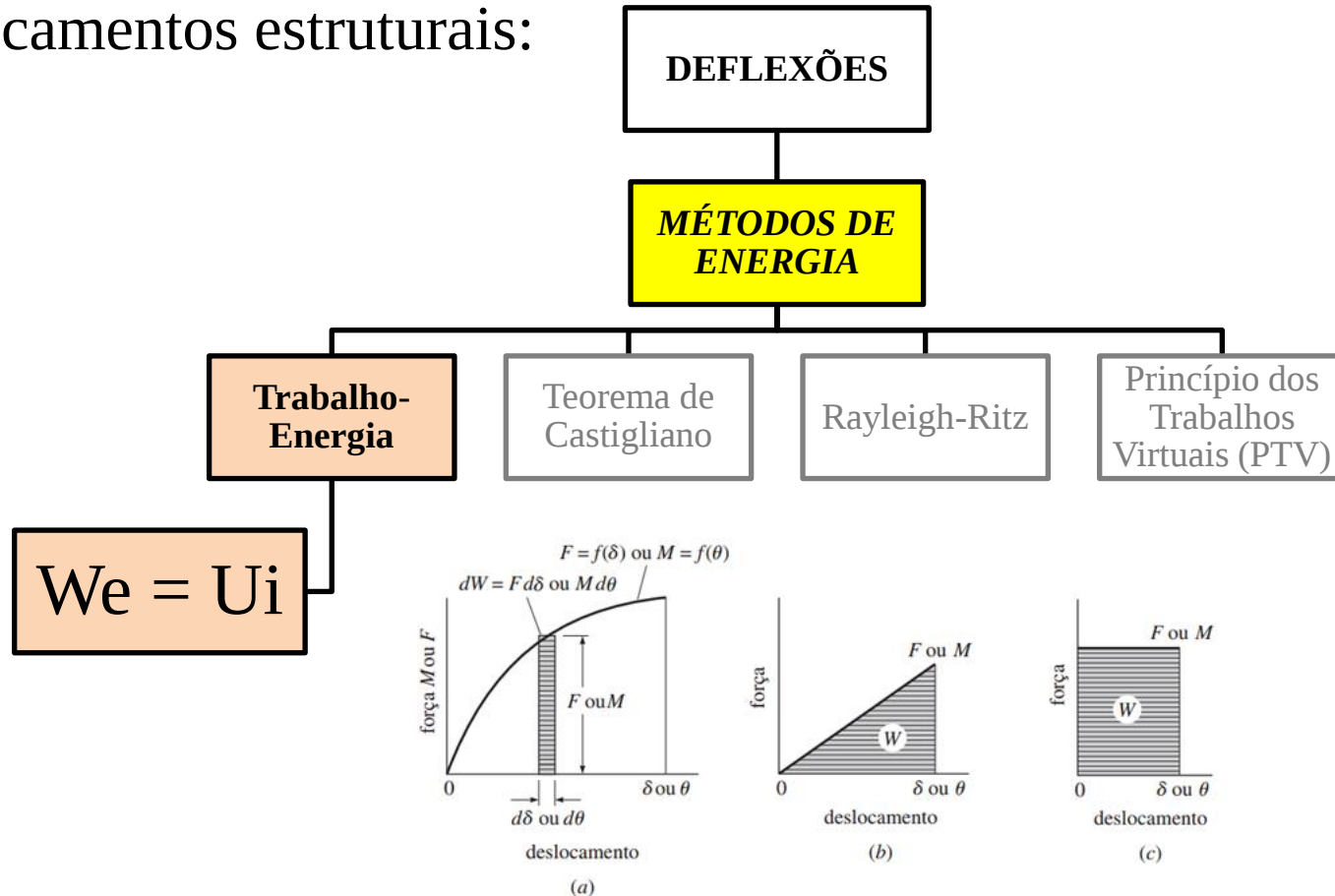
Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Em Mecânica dos Sólidos 3, estudamos métodos para o cálculo de deslocamentos estruturais:



Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Em Mecânica dos Sólidos 3, estudamos métodos para o cálculo de deslocamentos estruturais:

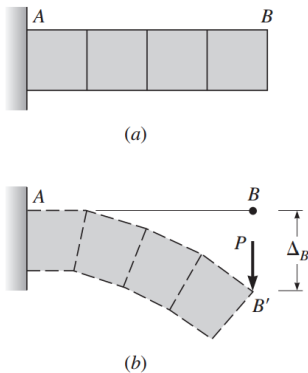
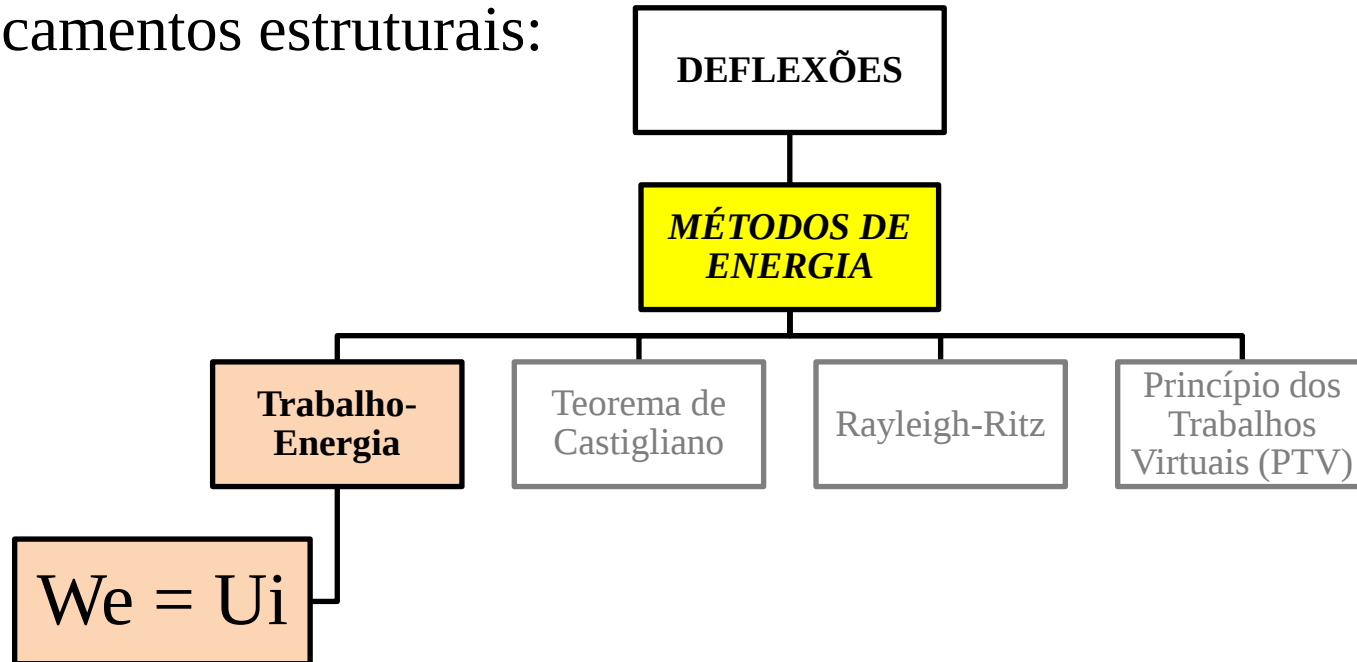


$$We = \frac{F \cdot d}{2}$$

$$Ui = \int_V^{normal} \frac{\sigma^2}{2E} dV + \int_V^{cisalhamento} \frac{\tau^2}{2G} dV + \int_V^{torção} \frac{T^2 L}{2GJ} dV$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

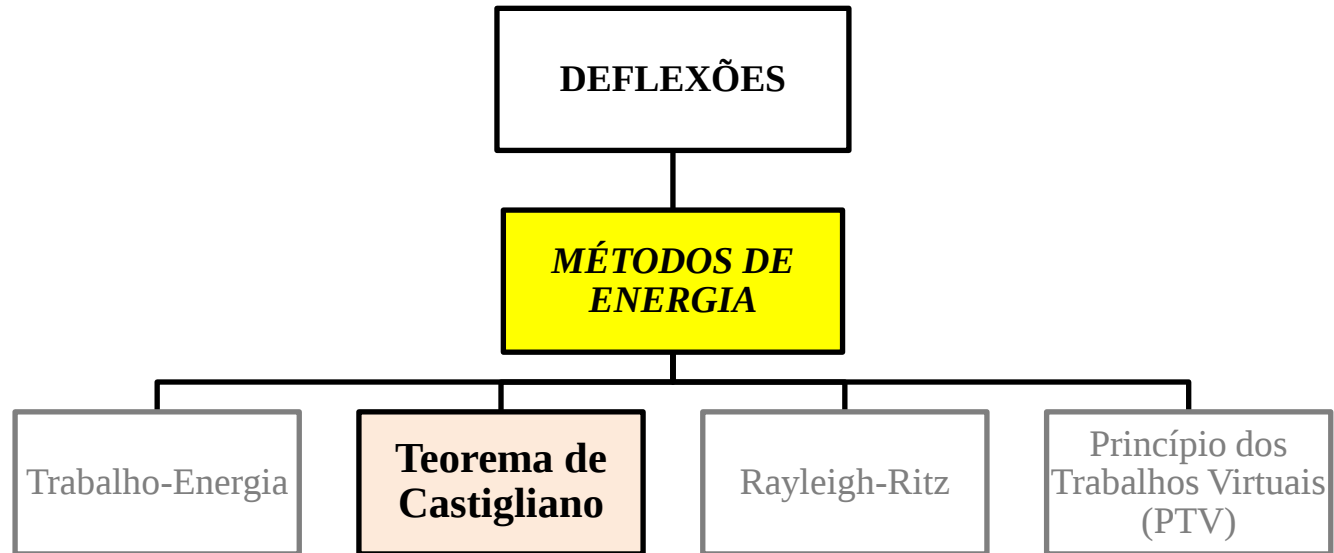
Em Mecânica dos Sólidos 3, estudamos métodos para o cálculo de deslocamentos estruturais:



Nesse método, as deflexões só podem ser calculadas em um ponto onde uma força atua e somente uma única carga concentrada pode ser aplicada na estrutura

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Em Mecânica dos Sólidos 3, estudamos métodos para o cálculo de deslocamentos estruturais:



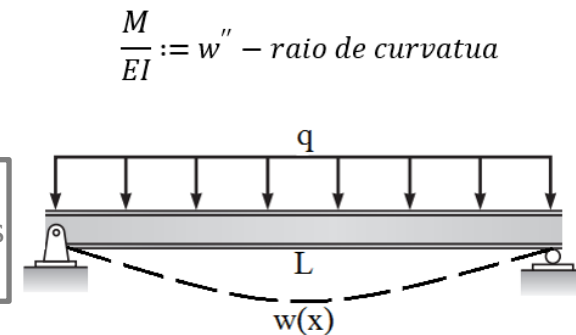
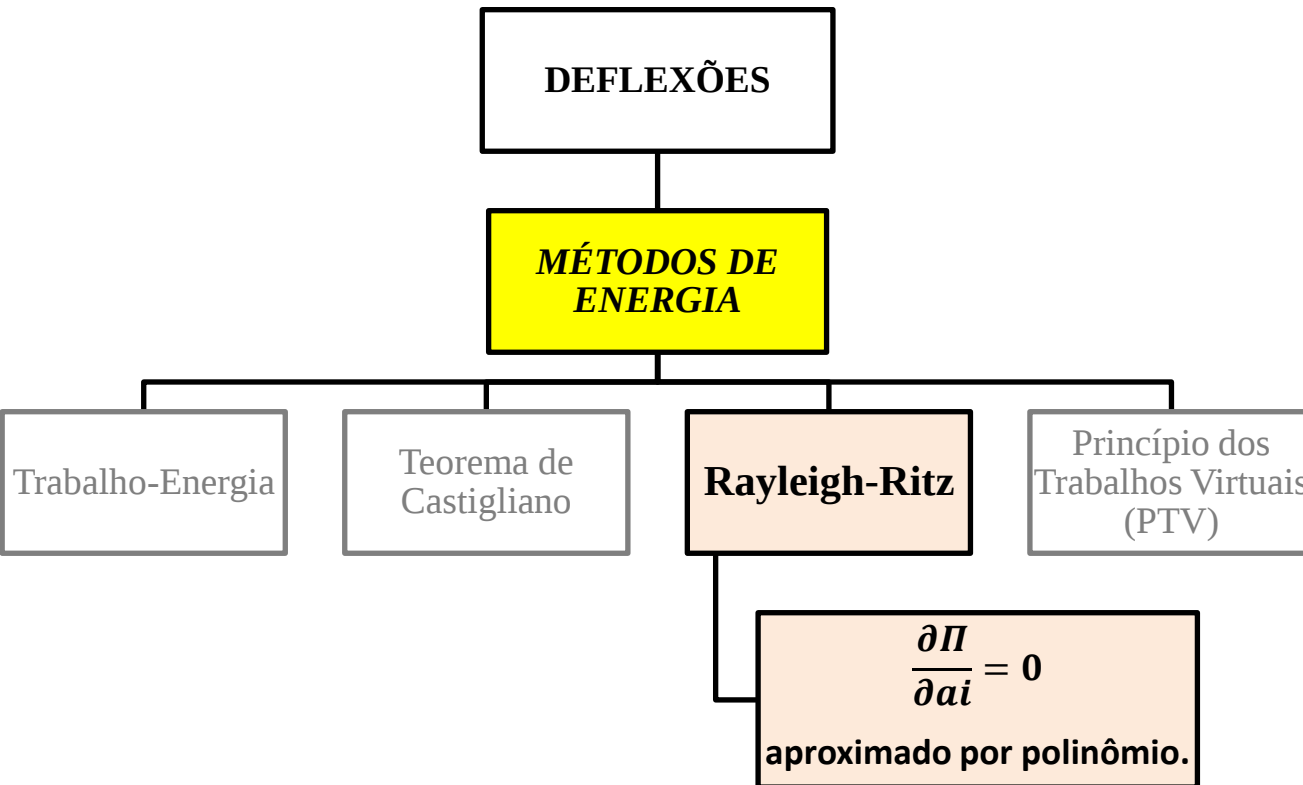
$$\delta_k = \frac{\partial U_{\text{interna}}}{\partial P_j}$$

(Temperatura constante; elástico linear)

Pode aplicar mais de uma força! Após a aplicação do teorema, iguala-se a força fictícia a zero e determina-se o deslocamento efetivo procurado.

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Em Mecânica dos Sólidos 3, estudamos métodos para o cálculo de deslocamentos estruturais:



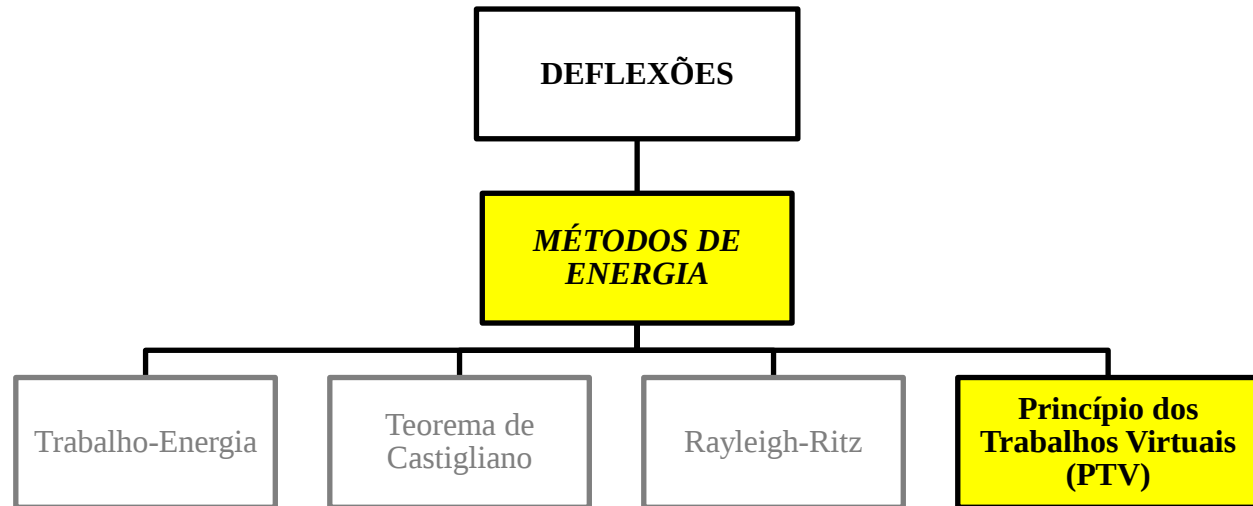
A função tentativa de quarto grau é:
 $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$

A Energia potencial é dada pela soma da Energia Interna (U_i) com a Energia Externa (W_e).

$$\Pi = U_i + W_e$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

O **PTV** é aplicável desde vigas simples a placas e cascas complexas. Além disso, o método permite incluir nos cálculos de deflexão a influência de recalques de apoio, mudança de temperatura e erros de fabricação!



Sendo:

$\overline{W}_E = \sum F_A \cdot D_B \rightarrow$ trabalho virtual das forças externas F_A com os correspondentes deslocamentos (externos) D_B ;

$\overline{U} = \int f_A \cdot d_B \rightarrow$ energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando os esforços internos f_A com os correspondentes deslocamentos relativos internos d_B .

$$1. \Delta = \int_V u \cdot dL$$

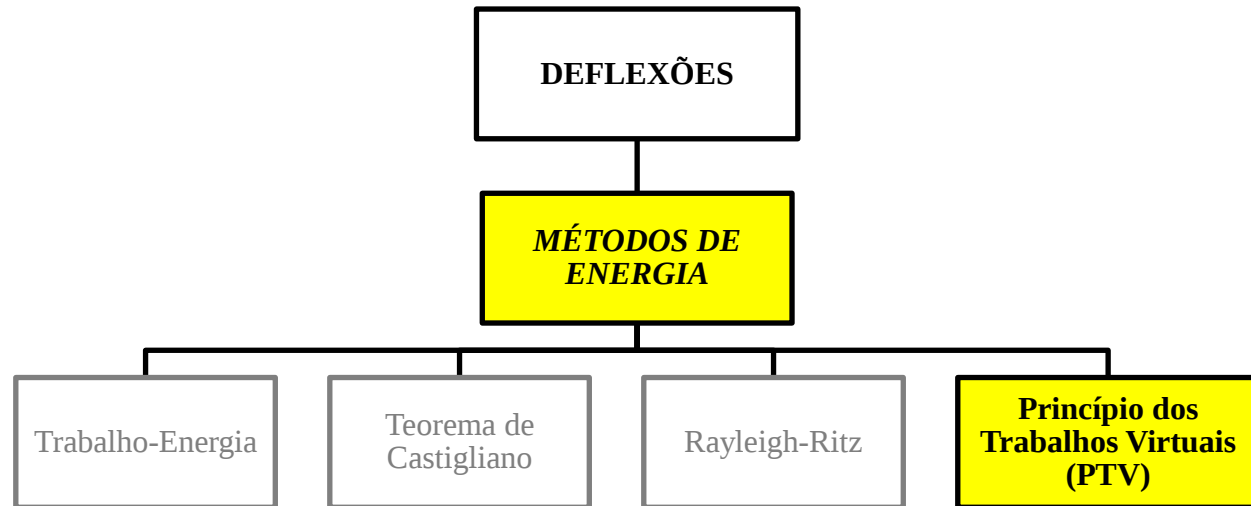
$$\overline{W}_E = \overline{U} \rightarrow \sum F_A \cdot D_B = \int f_A \cdot d_B$$

em equilíbrio

compatíveis

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

O PTV foi desenvolvido por John Bernoulli em 1717 e, como outros métodos de análise, baseia-se na conservação de energia.



Sendo:

$\overline{W}_E = \sum F_A \cdot D_B \rightarrow$ trabalho virtual das forças externas F_A com os correspondentes deslocamentos (externos) D_B ;

$\overline{U} = \int f_A \cdot d_B \rightarrow$ energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando os esforços internos f_A com os correspondentes deslocamentos relativos internos d_B .

$$1. \Delta = \int_V u \cdot dL$$

$$\overline{W}_E = \overline{U} \rightarrow \sum F_A \cdot D_B = \int f_A \cdot d_B$$

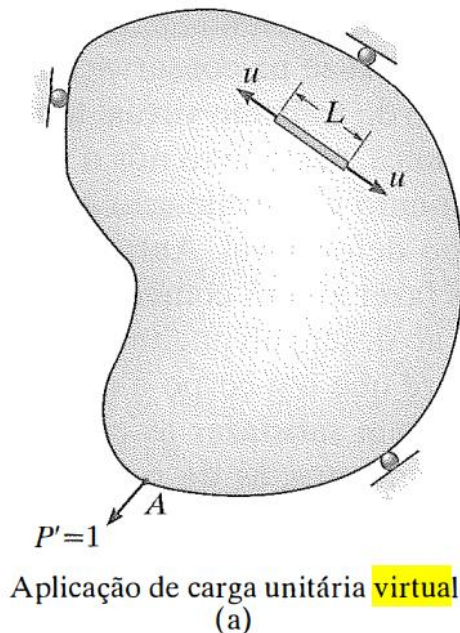
em equilíbrio

compatíveis

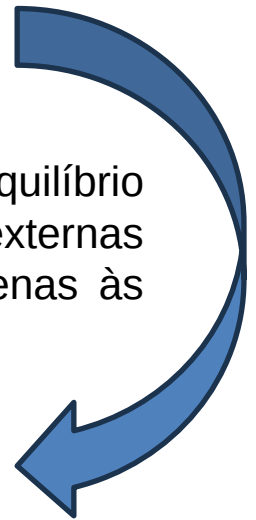
Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

O princípio consiste:

A aplicação de uma carga virtual unitária externa ($P' = 1$) na direção e no ponto no qual se deseja calcular o deslocamento (**Ponto A**), gera, automaticamente, uma carga virtual interna (u) no elemento, conforme a figura abaixo:

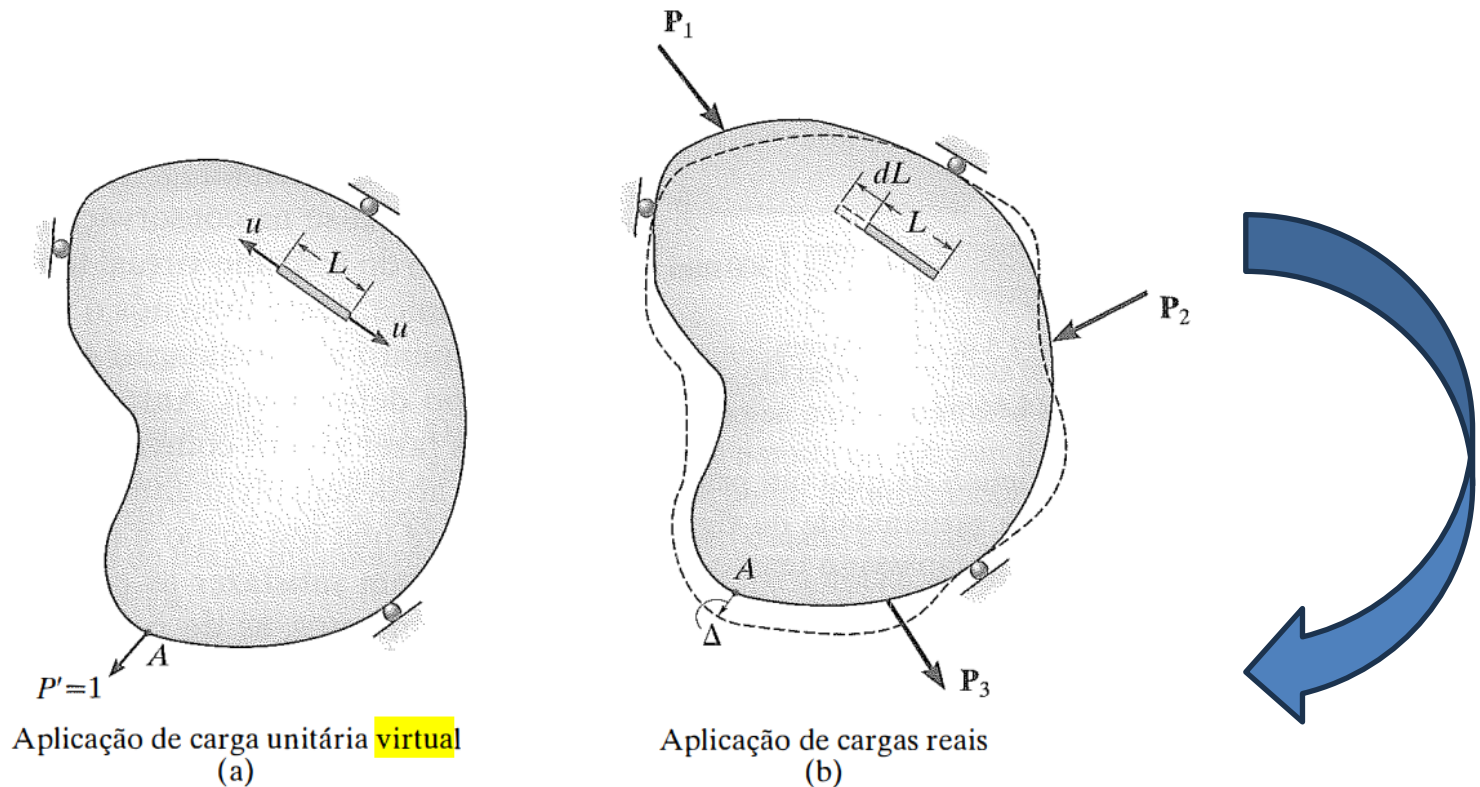


As condições de equilíbrio exigem que as cargas externas estejam relacionadas apenas às cargas internas.



Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Uma vez aplicada as cargas virtuais e o corpo seja então submetido às cargas reais ($\mathbf{P_i}$), o ponto $\mathbf{A}$ vai se deslocar uma quantidade real (Δ) que provoca uma deformação interna no elemento (dL).



As condições de compatibilidade exigem que os deslocamentos externos estejam relacionados apenas com as deformações internas.

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Assim, considerando apenas a conservação de energia virtual, pode-se escrever a equação do trabalho virtual como:

$$\bar{P} \cdot \Delta = \int_V \bar{u} \cdot dL$$

Sendo:

$\bar{P} = 1$ a carga virtual externa (atua na direção do deslocamento);

$\bar{u}$ = carga virtual interna (atua sobre o elemento infinitesimal)

Δ = Deslocamento externo provocado pelas cargas reais

dL = deformação interna provocado pelas cargas reais.

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Situação: Uma viga engastada submetida a cargas reais. Queremos saber o deslocamento de um ponto específico (Ponto A) na extremidade livre.

Força virtual: Aplicamos uma carga fictícia unitária ($P' = 1$) no Ponto A, na direção do deslocamento desejado.

Força interna virtual: Isso gera esforços internos virtuais $\bar{u}$ na viga (como momento fletor).

Deformação real: Consideramos as deformações reais dL causadas pelas cargas reais que atuam na viga.

Resultado: Usando a equação do trabalho virtual:

$$1. \Delta = \int_V \bar{u} \cdot dL$$

Calculamos o deslocamento real Δ no ponto A sem resolver todas as equações complexas da viga.

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

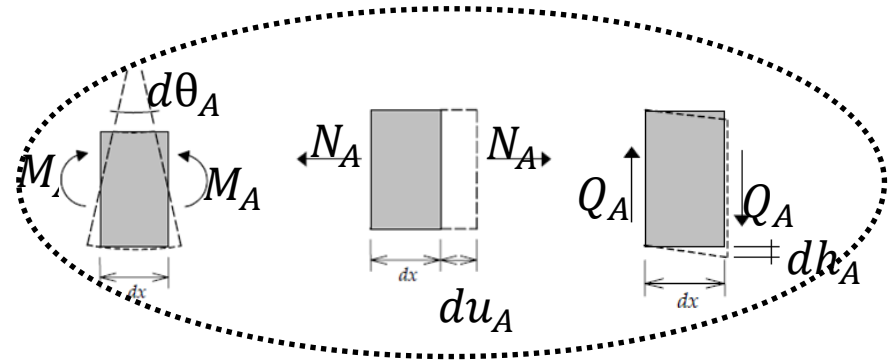
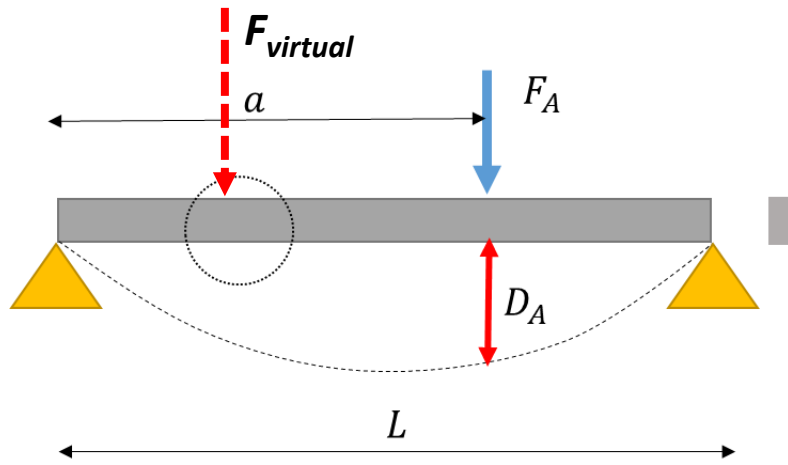
$$1. \Delta = \int_V \bar{u} \cdot dL$$

Note que o termo “ $\frac{1}{2}$ ” não aparece nem na expressão do W_e virtual nem na expressão da U_i virtual.

Antes, usávamos esse termo porque forças e deslocamentos estavam diretamente ligados (como causa e efeito). No trabalho externo virtual, as forças não causam os deslocamentos, e na energia interna virtual, os esforços internos não causam os deslocamentos internos. **Por isso, chamamos de "virtual"!**

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Supondo que o comportamento do material é **elástico-linear** e a tensão **não exceda o limite de proporcionalidade** podemos obter a expressão geral para o cálculo do deslocamento de um ponto:



$$1. \Delta = \int_L^{axial} \frac{nN}{EA} dx + \int_L^{momento} \frac{mM}{EI} dx + \int_L^{cisalhamento} \frac{fvV}{GA} dx + \int_L^{torção} \frac{tT}{GJ} dx$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Supondo que o comportamento do material é **elástico-linear** e a tensão **não exceda o limite de proporcionalidade** podemos obter a expressão geral para o cálculo do deslocamento de um ponto:

$$1. \Delta = \int_L^{axial} \frac{nN}{EA} dx + \int_L^{momento} \frac{mM}{EI} dx + \int_L^{cisalhamento} \frac{fvV}{GA} dx + \int_L^{torção} \frac{tT}{GJ} dx$$

Sendo: f o fator de forma de cisalhamento e

n = normal interna causada pela carga virtual externa;

N = normal interna causada pelas cargas reais externas;

m = momento interno causado pela carga virtual externa;

M = momentos internos causados pelas cargas reais externas;

v = cortante interna causada pela carga virtual externa;

V = cortantes internas causadas pelas cargas reais externas;

t = torsor interno causado pela carga virtual externa;

T = torsos internos causados pelas cargas reais externas;

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Para Pórticos:

$$1. \Delta = \int_V u. dL$$

$$1. \Delta = \int_L^{\text{axial}} \frac{nN}{EA} dx + \int_L^{\text{momento}} \frac{mM}{EI} dx + \int_L^{\text{cisalhamento}} \frac{fvV}{GA} dx$$

Obs.: A integral que considera o efeito de cisalhamento (cortante) tem valor pequeno em comparação com os outros termos no caso de barras longas (altura da seção transversal menor que aproximadamente $\frac{1}{4}$ do vão da barra). Nesse caso a integral é desprezada!

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Para Grelhas:

$$1. \Delta = \int_V \bar{u} \cdot dL$$

$$1. \Delta = \int_L^{\text{momento}} \frac{mM}{EI} dx + \cancel{\int_L^{\text{cisalhamento}} \frac{fvV}{GA} dx} + \int_L^{\text{torção}} \frac{tT}{GJ} dx$$

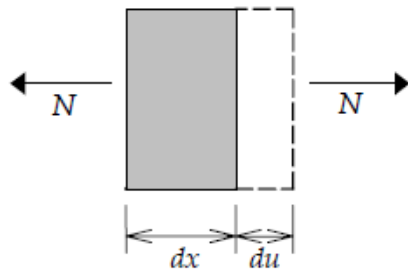
Obs.: A integral que considera o efeito de cisalhamento (cortante) tem valor pequeno em comparação com os outros termos no caso de barras longas (altura da seção transversal menor que aproximadamente $\frac{1}{4}$ do vão da barra). Nesse caso a integral é desprezada!

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Deformações internas

Hipóteses: Lei de Hooke. Pequenos deslocamentos

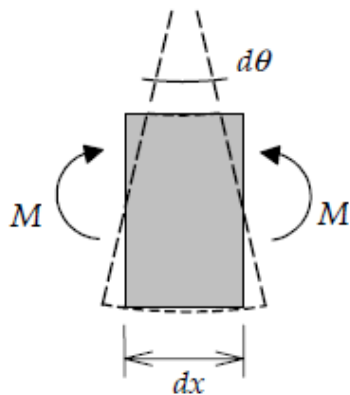
Deformação axial associada ao Esforço Normal N



$$N = \sigma_x^a \cdot A = E \cdot \varepsilon_x^a \cdot A = E \cdot \frac{du}{dx} \cdot A \rightarrow du = \frac{N}{EA} dx.$$

A área da seção transversal

Deformação angular associada ao Momento Fletor M



$$M = \int_A \sigma_x^f (-y) dA = \int_A E \varepsilon_x^f (-y) dA = \int_A E \left(-\frac{d\theta}{dx} y \right) (-y) dA \rightarrow d\theta = \frac{M}{EI} dx,$$

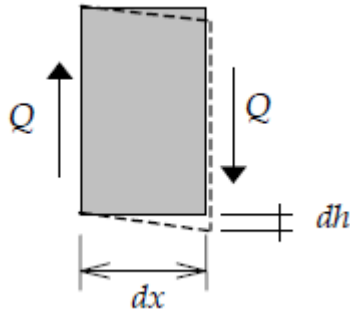
$$I = \int_A y^2 dA \rightarrow \text{momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo z.}$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Deformações internas

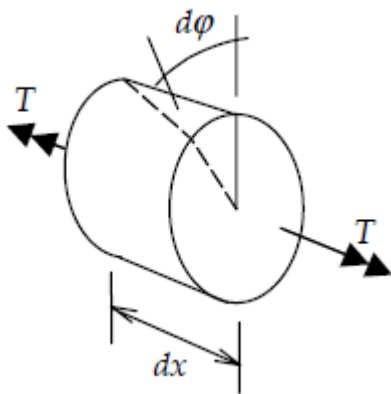
Hipóteses: Lei de Hooke. Pequenos deslocamentos

Deformação vertical associada ao Esforço Cortante Q



$$\Rightarrow Q = \tau_y^m \cdot \frac{A}{\chi} = G \cdot \gamma^c \cdot \frac{A}{\chi} = G \cdot \frac{dh}{dx} \cdot \frac{A}{\chi} \rightarrow dh = \chi \frac{Q}{GA} dx.$$

Deformação angular associada ao Torçor T

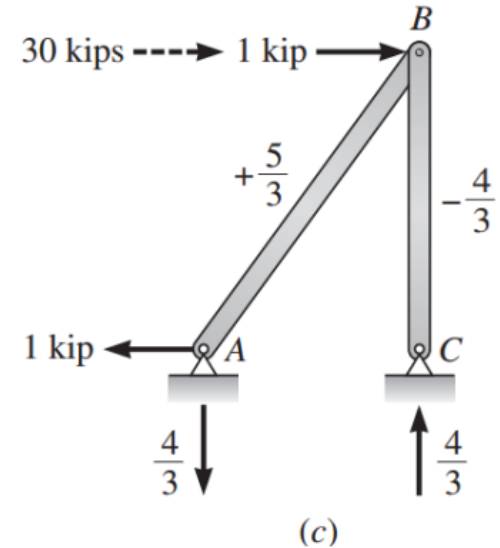
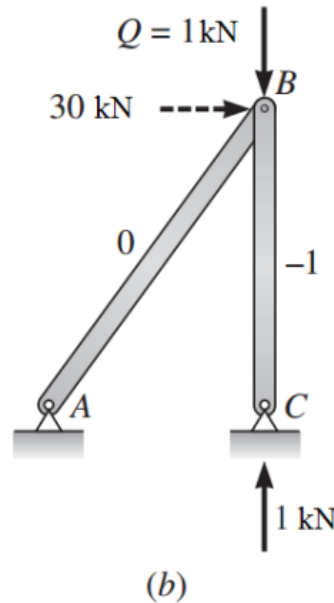
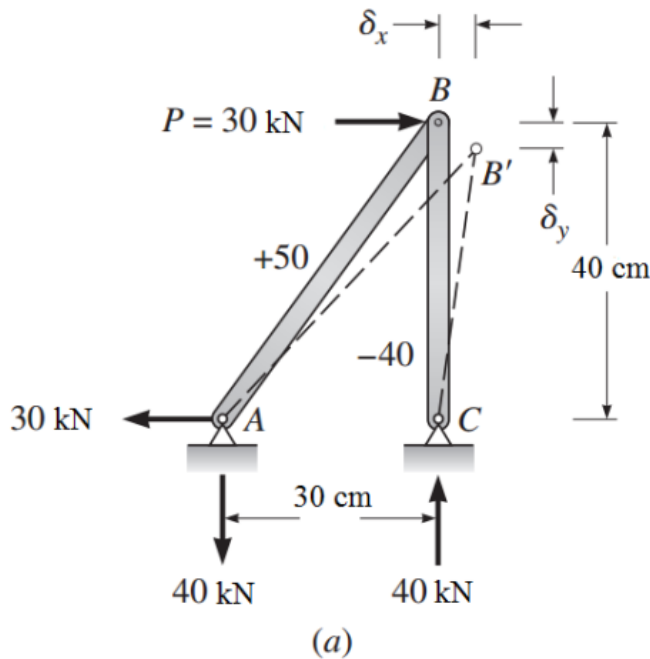


$$T = \int_A \tau^t \cdot r dA = \int_A G \gamma^t \cdot r dA = \int_A G \frac{d\phi}{dx} r \cdot r dA \rightarrow d\phi = \frac{T}{GJ_p} dx.$$

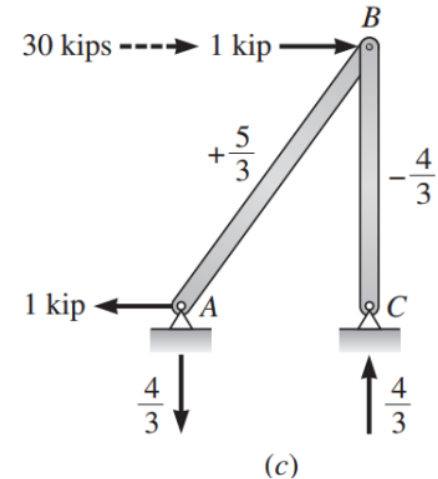
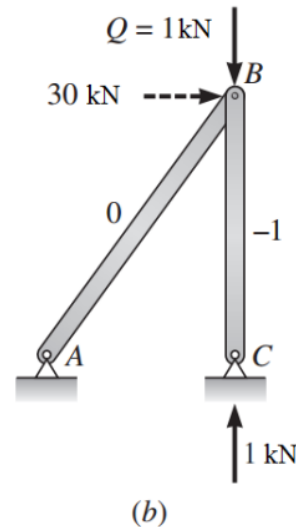
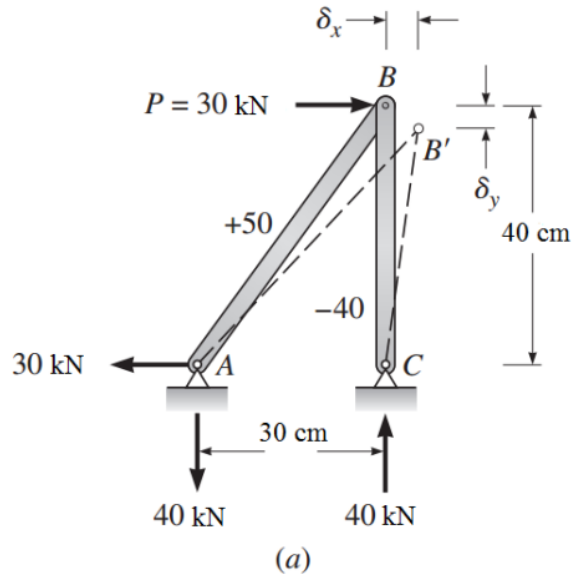
$$\Rightarrow J_p = \int_A r^2 dA \rightarrow \text{momento polar de inércia da seção transversal circular ou anelar.}$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Exemplo 1: Usando trabalho virtual, calcule as componentes (δv e δh) do deslocamento do nó B (Figura a). Para todas as barras, adotar área A e módulo de elasticidade E .



Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

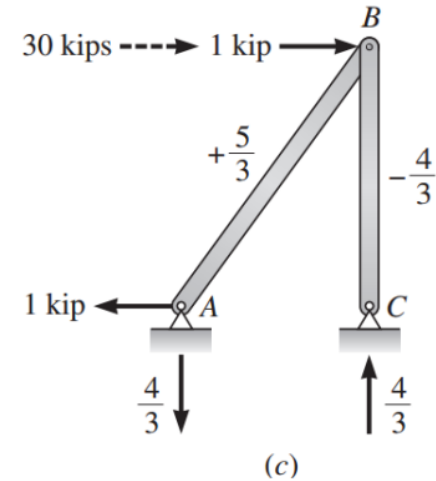
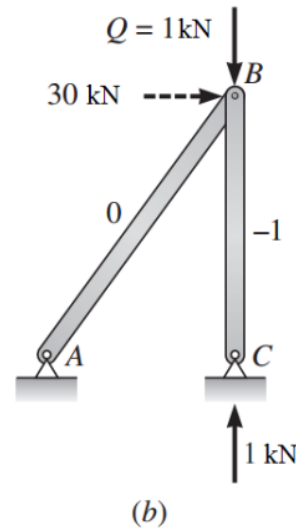
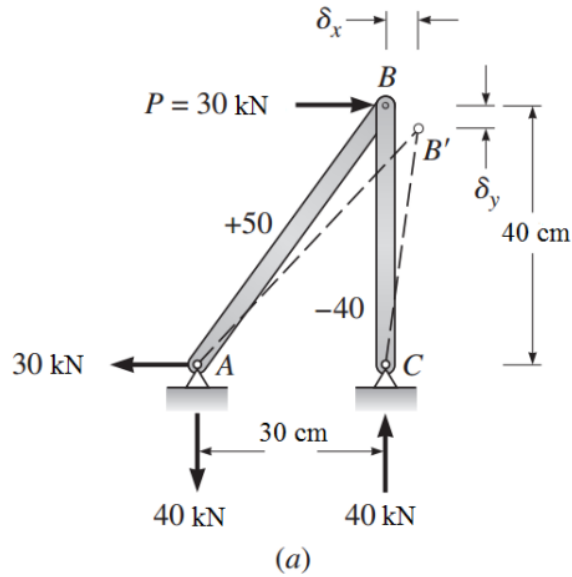


Resolução (a):

$$1. \Delta v = \int_L^{axial} \frac{nN}{EA} dx = \sum \frac{n_i \cdot N_i}{EA} L_i$$

$$\Delta v = \frac{50 \times 0}{EA} 50 + \frac{-40 \times (-1)}{EA} 40 = \frac{1600}{EA}$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)



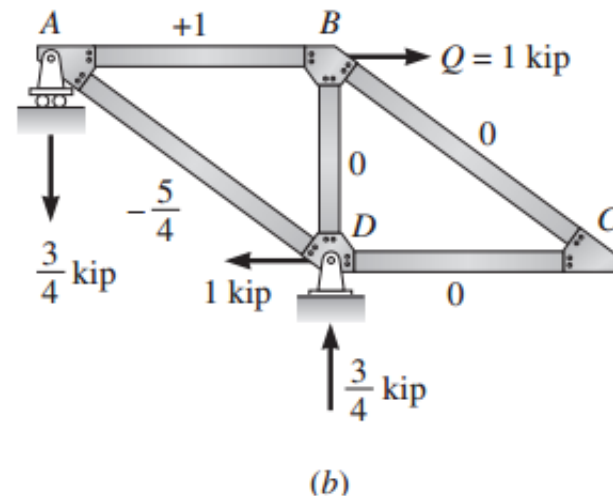
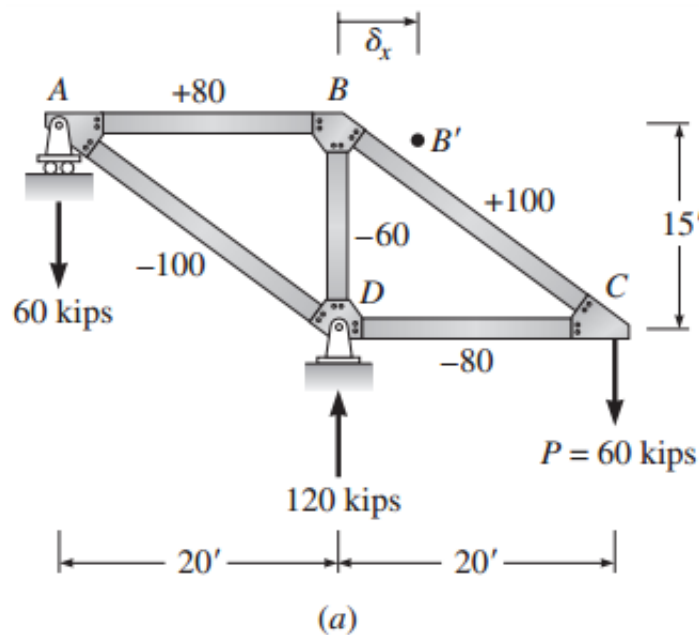
Resolução (b):

$$1. \Delta h = \int_L^{axial} \frac{nN}{EA} dx = \sum \frac{n_i \cdot N_i}{EA} L_i$$

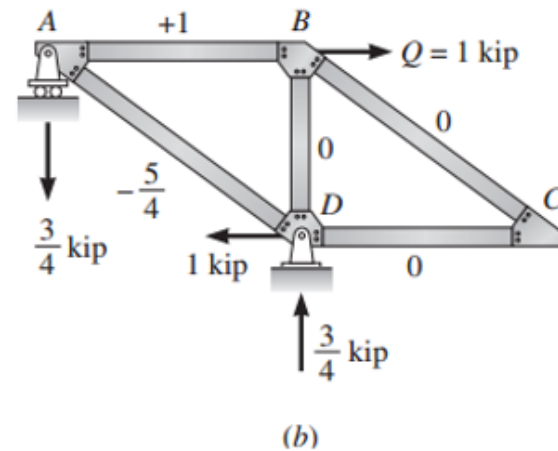
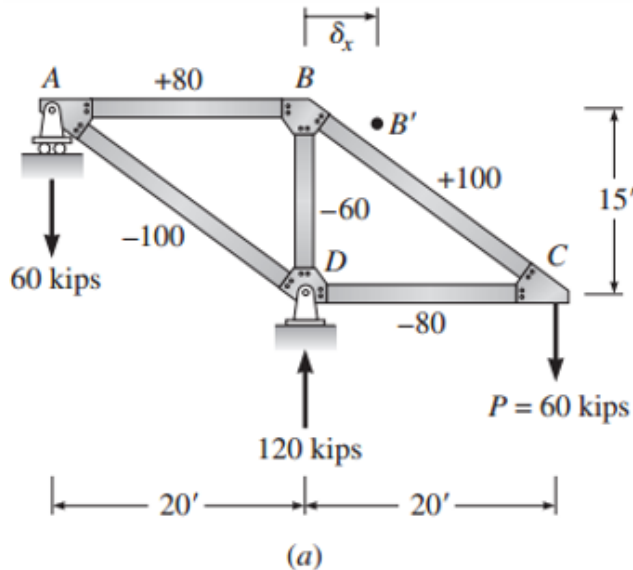
$$\Delta h = \frac{50 \times 5/3}{EA} 50 + \frac{-40 \times (-4/3)}{EA} 40 = \frac{18900}{3EA}$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Exemplo 2: Calcule o deslocamento horizontal δ_x do nó B da treliça mostrada na Figura 10.8a. Dados: $E = 30\,000$ kips/pol², área das barras AD e BC = 5 pol²; área de todas as outras barras = 4 pol².



Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)



Solução:

Barra (1)	F_{virtual} kips (2)	F_{real} kips (3)	L ft (4)	A pol ² (5)	$F_Q F_P L / A$ kips ² ·ft/pol ² (6)
AB	+1	+80	20	4	+400
BC	0	+100	25	5	0
CD	0	-80	20	4	0
AD	$-\frac{5}{4}$	-100	25	5	+625
BD	0	-60	15	4	0

$$\Sigma F_Q F_P L / A = 1025$$

$$\Sigma Q \delta_P = \Sigma F_Q \frac{F_P L}{AE} = \frac{1}{E} \Sigma F_Q \frac{F_P L}{A}$$

$$1 \text{ kip}(\delta_x) = \frac{1}{30000} (1025)(12) (\text{ft})$$

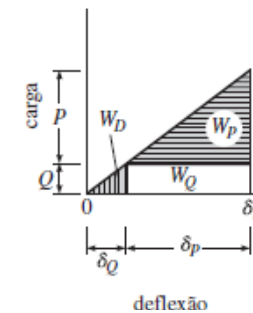
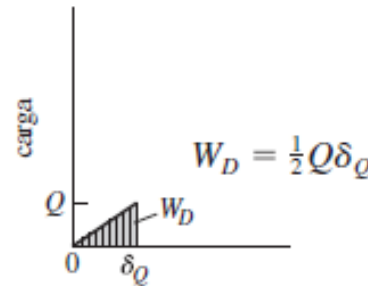
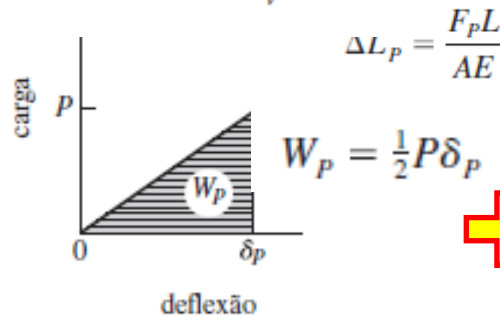
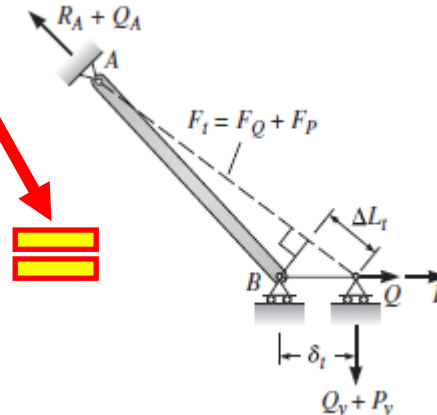
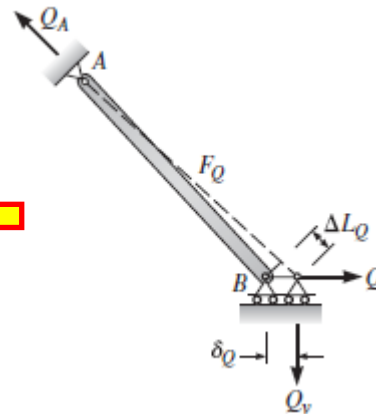
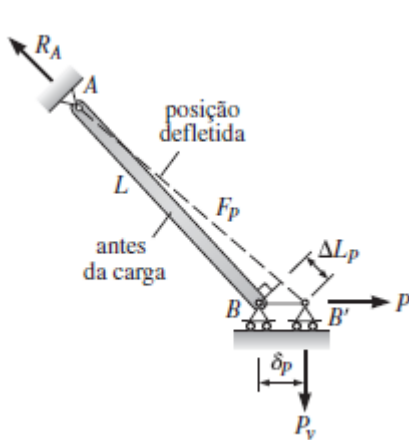
$$\delta_x = 0,41 \text{ pol} \rightarrow \text{Resp.}$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

Princípio dos trabalhos virtuais

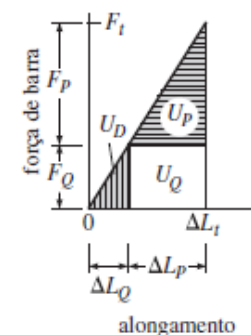
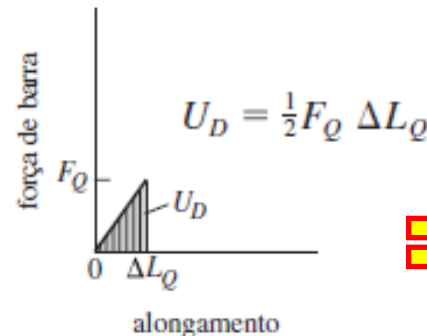
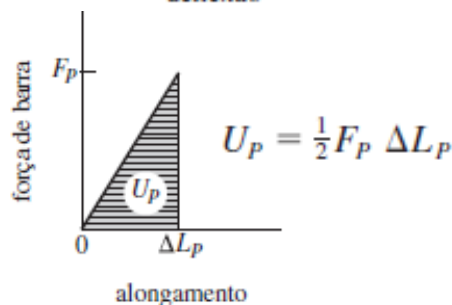
Demonstração aplicada à treliça

Princípio de superposição



$$W_D = U_D$$

$$W_t = U_t$$



$$W_p = U_p$$

Princípio das Forças Virtuais (PFV)

Para uma configuração deformada real (Δ, du) qualquer. Basta que se escolha arbitrariamente um sistema de forças $(P=1, f)$, denominado virtual, do qual se saiba que satisfaz as condições de equilíbrio. Esta versão do PTV é chamada de **Princípio das Forças Virtuais**.

De maneira análoga, o PTV pode ser utilizado para impor condições de equilíbrio a um sistema de forças $(P=1, f)$ qualquer. Basta que se escolha arbitrariamente uma configuração deformada (Δ, du) , denominada virtual, da qual se saiba que satisfaz as condições de compatibilidade. Esta versão do PTV é chamada de **Princípio dos Deslocamentos Virtuais** e será apresentada mais a frente.

Princípio das Forças Virtuais (PFV)

Princípio das Forças Virtuais (PFV)

O PFV utiliza um sistema virtual, que é completamente independente do sistema real. O sistema virtual trabalha com a mesma estrutura, mas com cargas diferentes. As cargas do sistema virtual são compostas de uma força (ou momento) escolhida arbitrariamente na direção do deslocamento (ou rotação) que se deseja calcular.

Princípio das Forças Virtuais (PFV)

Exemplo:

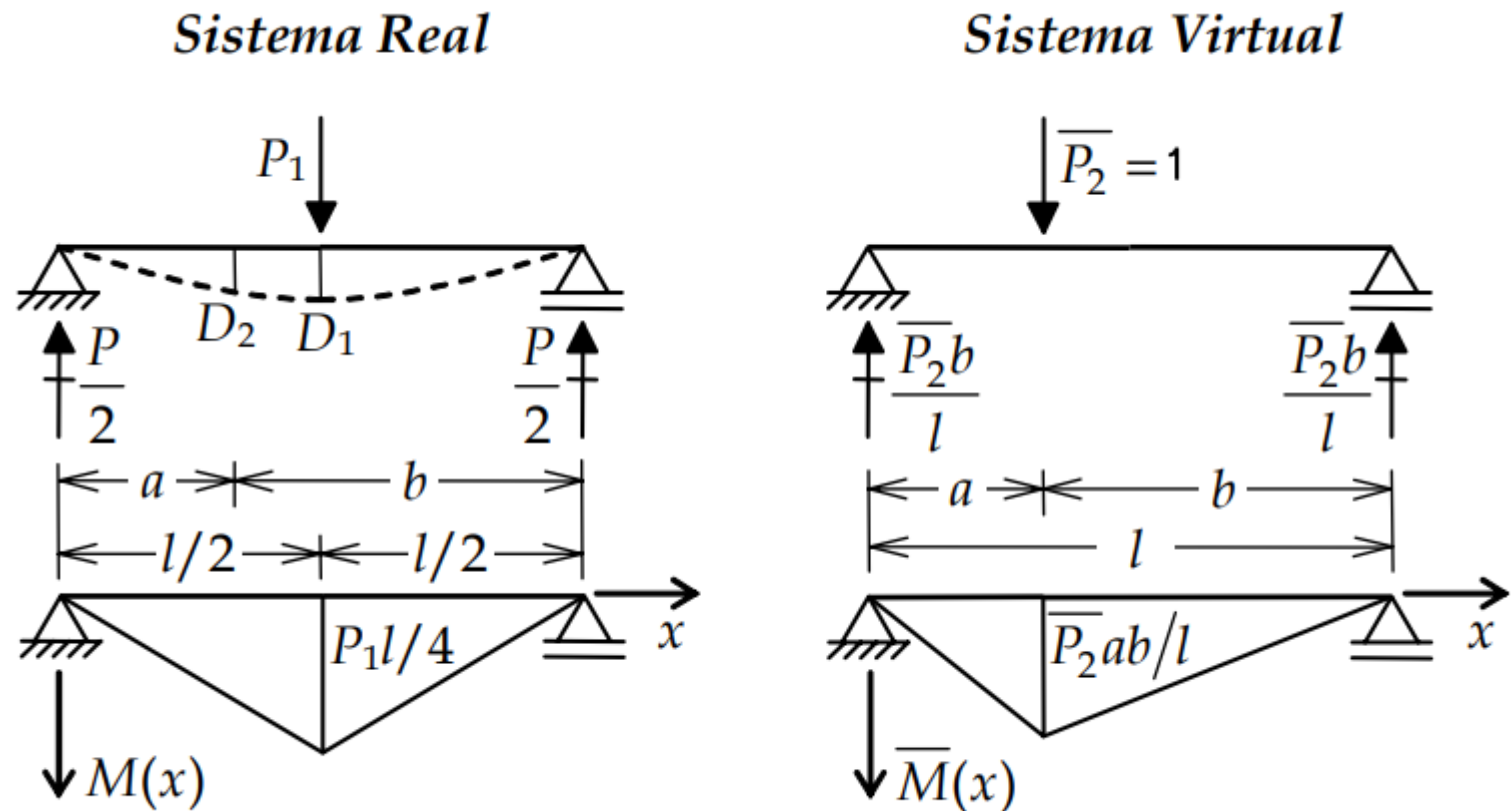


Figura 4.8 – Cálculo de deslocamento genérico em viga biapoiada com uma carga central.

Princípio das Forças Virtuais (PFV)

Exemplo:

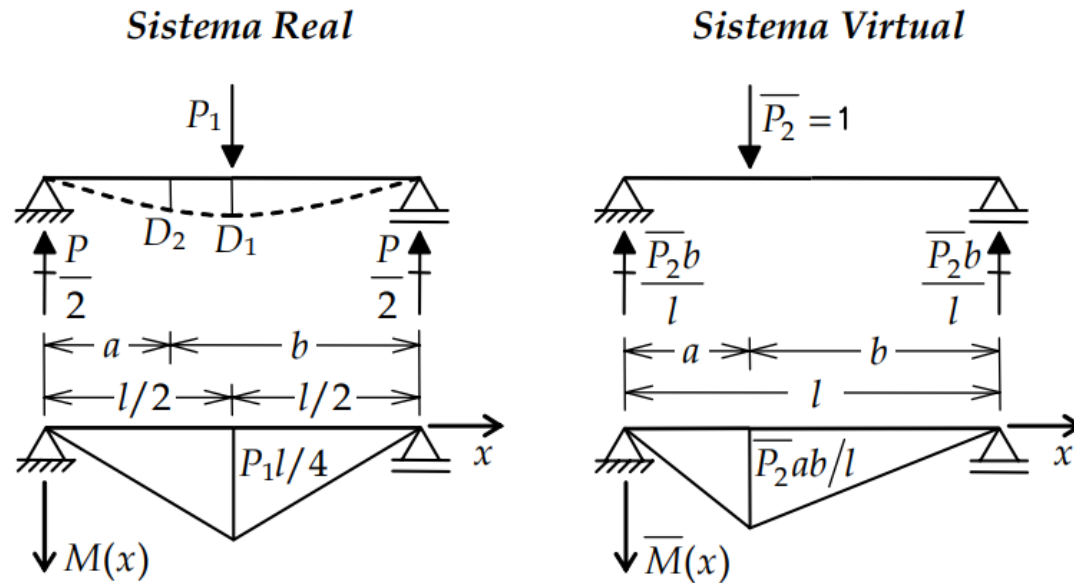


Figura 4.8 – Cálculo de deslocamento genérico em viga biapoiada com uma carga central.

(desprezando deformações provenientes do efeito cortante)

Resolução:

$$1. D_2 = \int_L^{\text{momento}} \frac{\overline{M}(x)M(x)}{EI} dx$$

Princípio das Forças Virtuais (PFV)

Exemplo:

A aplicação do PFV para o cálculo de deslocamentos que trabalham à flexão resulta no cálculo de **UMA INTEGRAL** que combina diagramas de momentos fletores nos sistemas real e virtual.

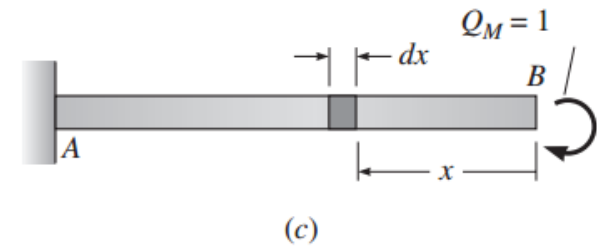
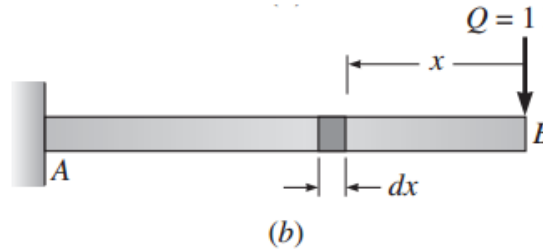
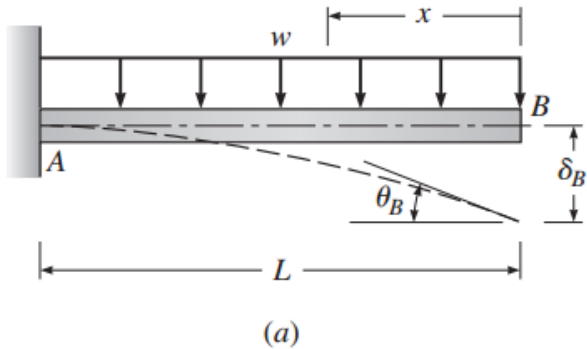
Resolução:

$$1. D_2 = \int_L^{\text{momento}} \frac{\overline{M}(x)M(x)}{EI} dx$$

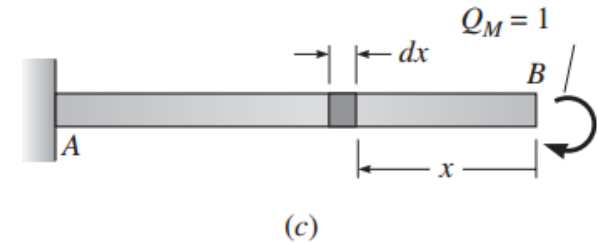
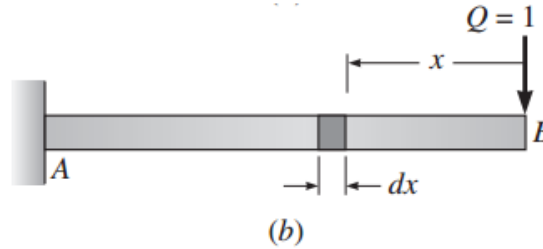
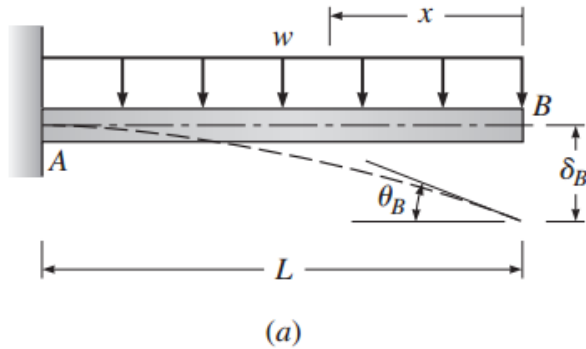


Princípio das Forças Virtuais (PFV)

Exemplo: Usando trabalho virtual, calcule (a) a deflexão δ_B e (b) a inclinação θ_B na ponta da viga em balanço uniformemente carregada da Figura 10.15a. EI é constante. Considerar a viga como sendo delgada.



Princípio das Forças Virtuais (PFV)



Resolução (a):

$$1. \delta_B = \int_L^{\text{momento}} \frac{mM}{EI} dx = \int_0^L \frac{(Qx)(wx^2/2)}{EI} dx = \int_0^L \frac{1 \cdot wx^3}{2EI} dx = \frac{wL^4}{8EI}$$

Resolução (b):

$$1. \theta_B = \int_L^{\text{momento}} \frac{mM}{EI} dx = \int_0^L \frac{(Q_M)(wx^2/2)}{EI} dx = \int_0^L \frac{1 \cdot wx^2}{2EI} dx = \frac{wL^3}{6EI}$$

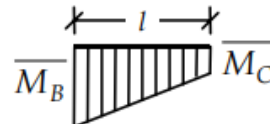
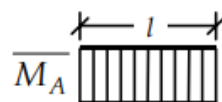
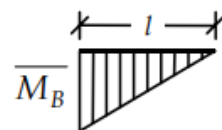
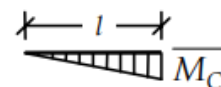
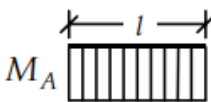
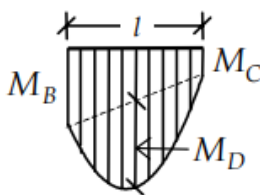
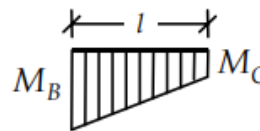
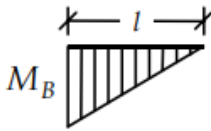
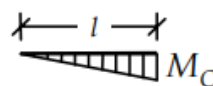
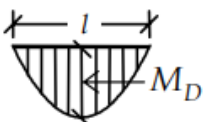
Princípio das Forças Virtuais (PFV)

Porém, existem **TABELAS** que mostram expressões para avaliar a integral para diagramas usuais em uma barra.



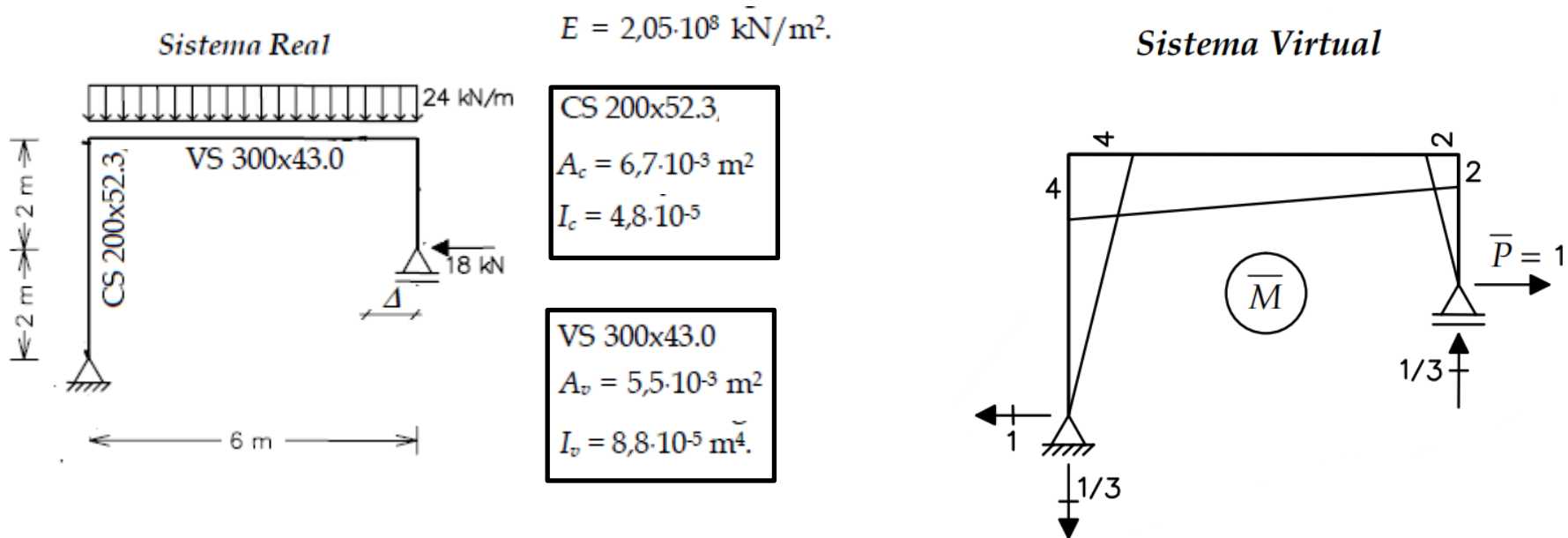
Princípio das Forças Virtuais (PFV)

Tabela 4.1 – Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.

$\int_0^l \overline{M} M dx$					
					
			$\overline{M}_A M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M}_B M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M}_C M_A l$
			$\frac{1}{2} \overline{M}_A M_B l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_B M_B l$	$\frac{1}{6} \overline{M}_C M_B l$
			$\frac{1}{2} \overline{M}_A M_C l$	$\frac{1}{6} \overline{M}_B M_C l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_C M_C l$
			$\frac{2}{3} \overline{M}_A M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_B M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_C M_D l$

Princípio das Forças Virtuais (PFV)

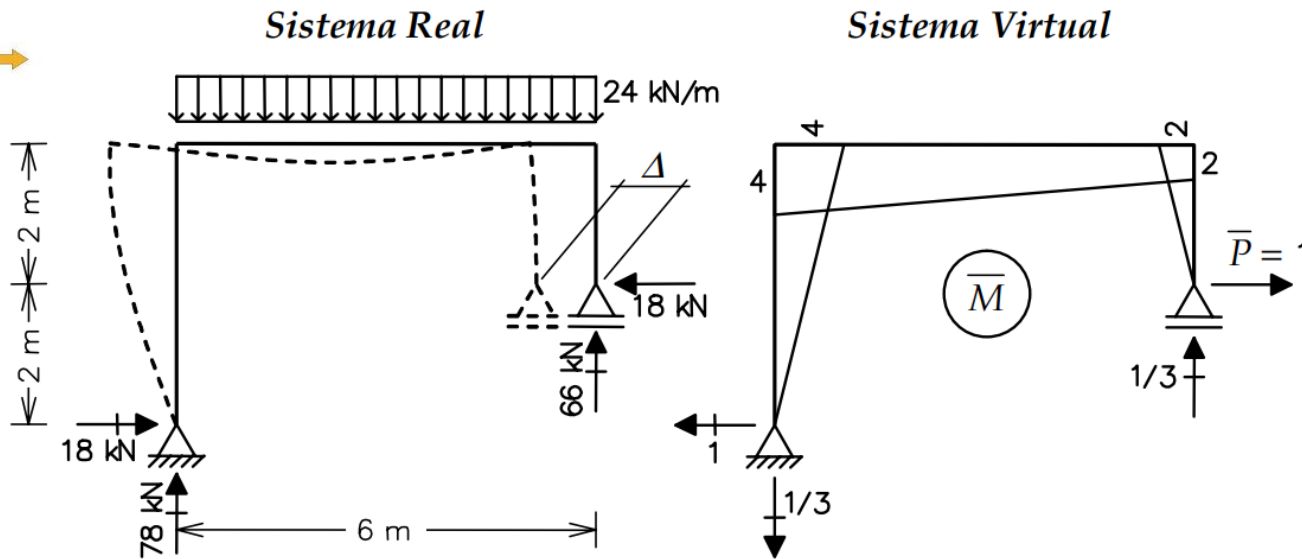
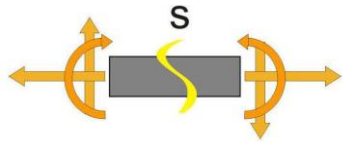
Exemplo: Calcular o deslocamento horizontal do apoio da direita do pórtico.



Para Pórticos:

$$1. \Delta = \int_L^{\text{axial}} \frac{nN}{EA} dx + \int_L^{\text{momento}} \frac{mM}{EI} dx$$

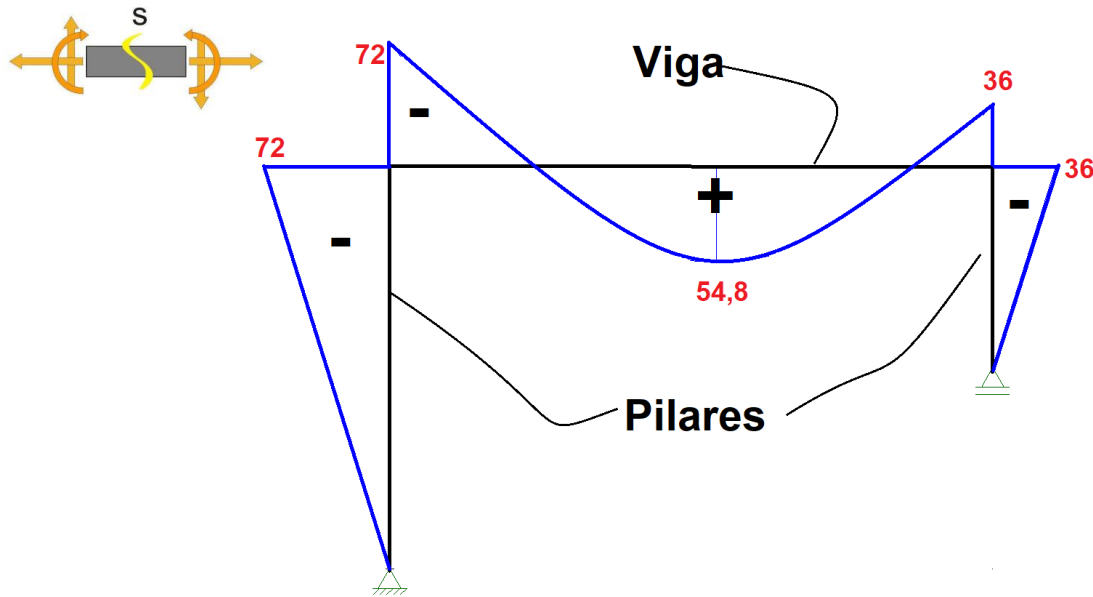
Princípio das Forças Virtuais (PFV)



$$\int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{N} \cdot N}{EA} dx = \left[\frac{(+1) \cdot (-18)}{EA_v} \cdot 6 \right] + \left[\frac{(+1/3) \cdot (-78)}{EA_c} \cdot 4 \right] + \left[\frac{(-1/3) \cdot (-66)}{EA_c} \cdot 2 \right].$$

$$\int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dx = \sum_{\text{barras}} \left[\int_{\text{barra}} \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dx \right].$$

Princípio das Forças Virtuais (PFV)



Sistema Virtual

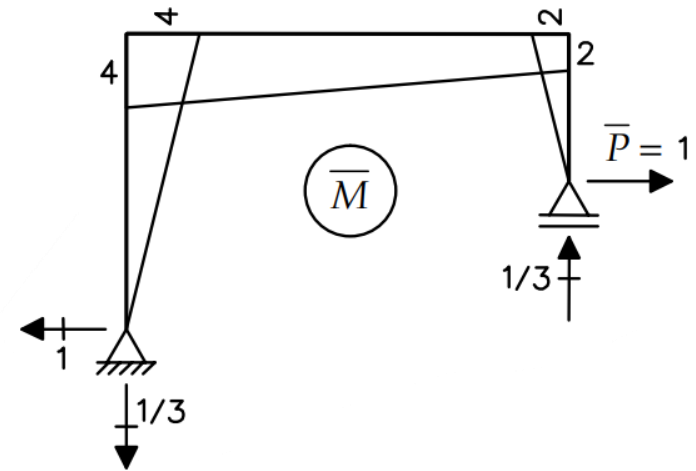


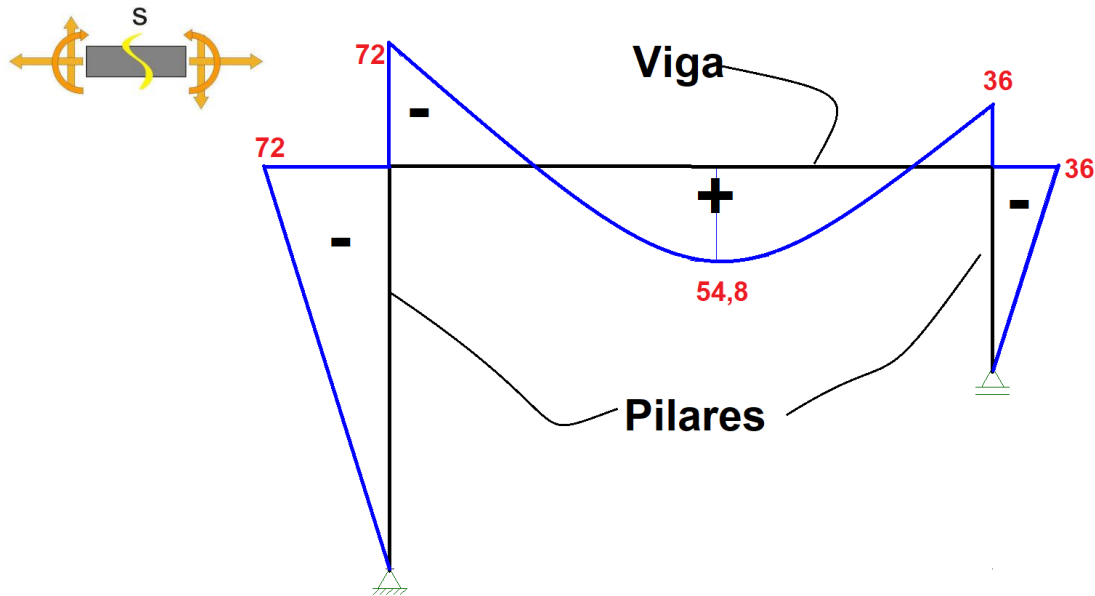
Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.

Pilar 1 $\left[\int_0^4 \frac{mM}{EI_{\text{pilar}}} dx = \frac{1}{3} m M l = -\frac{1}{3EI_{\text{pilar}}} 4 \cdot 72 \cdot 4 \right.$

Pilar 2 $\left[\int_0^2 \frac{mM}{EI_{\text{pilar}}} dx = \frac{1}{3} m M l = -\frac{1}{3EI_{\text{pilar}}} 2 \cdot 36 \cdot 2 \right.$

$\int_0^l \overline{M} M dx$		$\overline{M}_B \begin{array}{c} \xrightarrow{l} \\ \overline{M}_C \end{array}$		
		$\overline{M}_A \begin{array}{c} \xrightarrow{l} \\ \overline{M}_B \end{array}$	$\overline{M}_B \begin{array}{c} \xrightarrow{l} \\ \overline{M}_C \end{array}$	$\overline{M}_C \begin{array}{c} \xrightarrow{l} \\ \overline{M}_D \end{array}$
$\begin{array}{c} \overline{M}_B \\ \xrightarrow{l} \\ \overline{M}_C \end{array}$	$\overline{M}_A \begin{array}{c} \xrightarrow{l} \\ \overline{M}_B \end{array}$	$\overline{M}_A \overline{M}_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M}_B \overline{M}_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M}_C \overline{M}_A l$
	$\overline{M}_B \begin{array}{c} \xrightarrow{l} \\ \overline{M}_C \end{array}$	$\frac{1}{2} \overline{M}_A \overline{M}_B l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_B \overline{M}_B l$	$\frac{1}{6} \overline{M}_C \overline{M}_B l$
	$\overline{M}_C \begin{array}{c} \xrightarrow{l} \\ \overline{M}_D \end{array}$	$\frac{1}{2} \overline{M}_A \overline{M}_C l$	$\frac{1}{6} \overline{M}_B \overline{M}_C l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_C \overline{M}_C l$
$\begin{array}{c} \overline{M}_D \\ \xrightarrow{l} \\ \overline{M}_C \end{array}$	$\overline{M}_A \begin{array}{c} \xrightarrow{l} \\ \overline{M}_B \end{array}$	$\frac{2}{3} \overline{M}_A \overline{M}_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_B \overline{M}_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_C \overline{M}_D l$

Princípio das Forças Virtuais (PFV)



Sistema Virtual

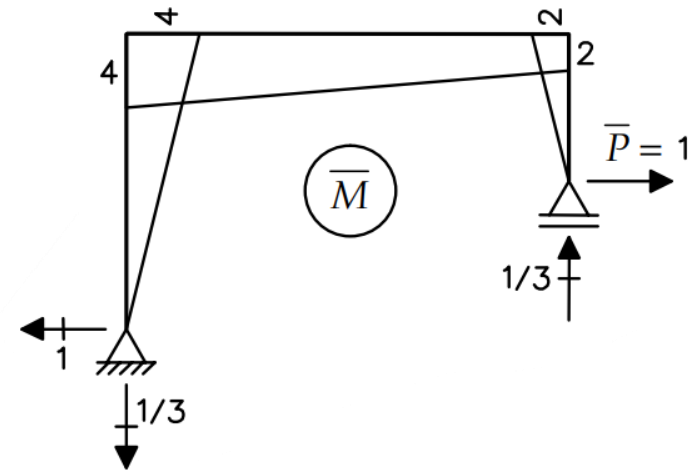
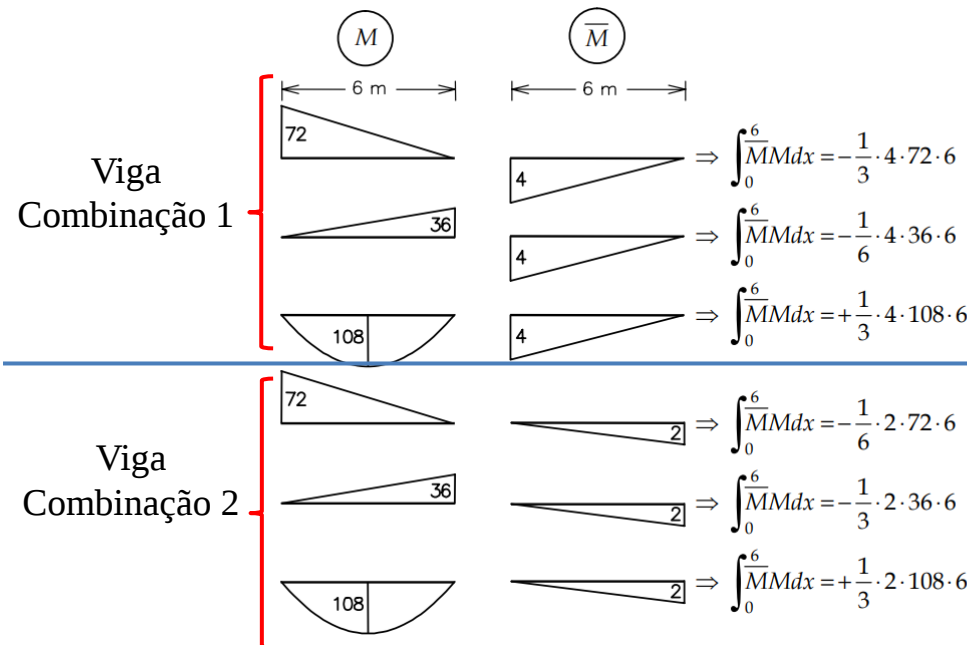


Tabela 4.1 - Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.



$\int_0^l \bar{M} M dx$		$\bar{M}_B \begin{array}{ c } \hline l \\ \hline \end{array} \bar{M}_C$		
		$\bar{M}_A \begin{array}{ c } \hline l \\ \hline \end{array}$	$\bar{M}_B \begin{array}{ c } \hline l \\ \hline \end{array}$	$\bar{M}_C \begin{array}{ c } \hline l \\ \hline \end{array}$
$\bar{M}_B \begin{array}{ c } \hline l \\ \hline \end{array} \bar{M}_C$	$\bar{M}_A \begin{array}{ c } \hline l \\ \hline \end{array}$	$\bar{M}_A \bar{M}_A l$	$\frac{1}{2} \bar{M}_B \bar{M}_A l$	$\frac{1}{2} \bar{M}_C \bar{M}_A l$
	$\bar{M}_B \begin{array}{ c } \hline l \\ \hline \end{array} \bar{M}_C$	$\frac{1}{2} \bar{M}_A \bar{M}_B l$	$\bar{M}_B \bar{M}_B l$	$\frac{1}{3} \bar{M}_C \bar{M}_B l$
	$\bar{M}_C \begin{array}{ c } \hline l \\ \hline \end{array} \bar{M}_D$	$\frac{1}{2} \bar{M}_A \bar{M}_C l$	$\frac{1}{6} \bar{M}_B \bar{M}_C l$	$\bar{M}_C \bar{M}_C l$
$\bar{M}_B \begin{array}{ c } \hline l \\ \hline \end{array} \bar{M}_D$	$\bar{M}_A \begin{array}{ c } \hline l \\ \hline \end{array}$	$\frac{2}{3} \bar{M}_A \bar{M}_D l$	$\frac{1}{3} \bar{M}_B \bar{M}_D l$	$\frac{1}{3} \bar{M}_C \bar{M}_D l$
	$\bar{M}_B \begin{array}{ c } \hline l \\ \hline \end{array} \bar{M}_C$	$\frac{1}{2} \bar{M}_A \bar{M}_B l$	$\bar{M}_B \bar{M}_B l$	$\frac{1}{3} \bar{M}_C \bar{M}_B l$
	$\bar{M}_C \begin{array}{ c } \hline l \\ \hline \end{array} \bar{M}_D$	$\frac{1}{2} \bar{M}_A \bar{M}_C l$	$\frac{1}{6} \bar{M}_B \bar{M}_C l$	$\bar{M}_C \bar{M}_C l$

Princípio das Forças Virtuais (PFV)

Com base nas Equações e nos valores dos parâmetros E , A_{viga} , I_{viga} , A_{pilar} e I_{pilar} , o deslocamento pode ser calculado:

$$\int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dx = -\frac{1}{3EI_v} \cdot 4 \cdot 72 \cdot 6 - \frac{1}{6EI_v} \cdot 4 \cdot 36 \cdot 6 + \frac{1}{3EI_v} \cdot 4 \cdot 108 \cdot 6$$
$$- \frac{1}{6EI_v} \cdot 2 \cdot 72 \cdot 6 - \frac{1}{3EI_v} \cdot 2 \cdot 36 \cdot 6 + \frac{1}{3EI_v} \cdot 2 \cdot 108 \cdot 6 - \frac{1}{3EI_c} \cdot 4 \cdot 72 \cdot 4 - \frac{1}{3EI_c} \cdot 2 \cdot 36 \cdot 2$$

$$\Delta = \frac{1}{\bar{P}} \left[\int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{N} \cdot N}{EA} dx + \int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dx \right] = -1,40 \cdot 10^{-4} - 2,79 \cdot 10^{-2} = -2,81 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

Obs.: O sinal negativo do deslocamento calculado significa que o seu sentido, da direita para a esquerda, é contrário ao sentido da carga virtual P aplicada

Princípio das Forças Virtuais (PFV)

A contribuição da parcela de energia de deformação devida ao **efeito axial** é muito menor em módulo do que a contribuição da parcela devida ao **efeito de flexão**.

Isto é usual para pórticos que trabalham à flexão e, em geral, no **cálculo manual a contribuição da energia de deformação axial é desprezada!**

$$\Delta = \frac{1}{P} \left[\int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{N} \cdot N}{EA} dx + \int_{\text{estrutura}} \frac{\bar{M} \cdot M}{EI} dx \right] = -1,49 \cdot 10^{-4} - 2,79 \cdot 10^{-2}$$

Deslocamentos provocados por variação de temperatura

Deslocamentos causados por temperatura

Variações de temperatura **não provocam** esforços em uma estrutura **isostática**. Mas, em estruturas **hiperestáticas** provocam **deformações e esforços internos** na estrutura.

Deslocamentos causados por temperatura

Exemplo simples de uma viga biapoiada que sofre um **aquecimento uniforme** de temperatura.

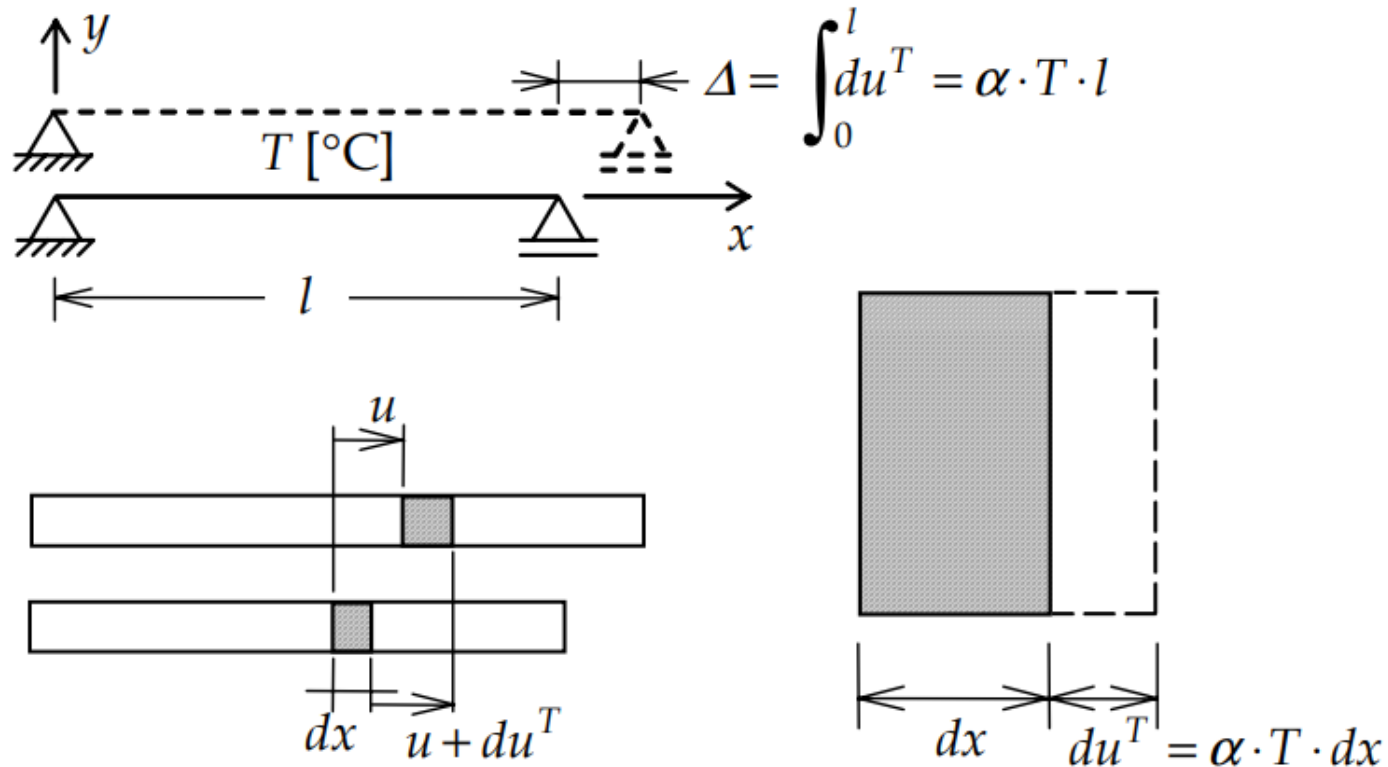


Figura 4.11 – Viga biapoiada com variação uniforme de temperatura.

Deslocamentos causados por temperatura

Exemplo de uma viga hiperestática que sofre um **aquecimento diferencial e linear** em relação as fibras superiores e inferiores.

$du^T \rightarrow$ deslocamento axial relativo interno devido à variação de temperatura;

$d\theta^T \rightarrow$ rotação relativa interna por flexão devido à variação de temperatura;

Não existe deslocamento transversal relativo devido à variação de temperatura ($dh^T = 0$).

Deslocamentos causados por temperatura

$du^T \rightarrow$ deslocamento axial relativo interno devido à variação de temperatura;

$d\theta^T \rightarrow$ rotação relativa interna por flexão devido à variação de temperatura;

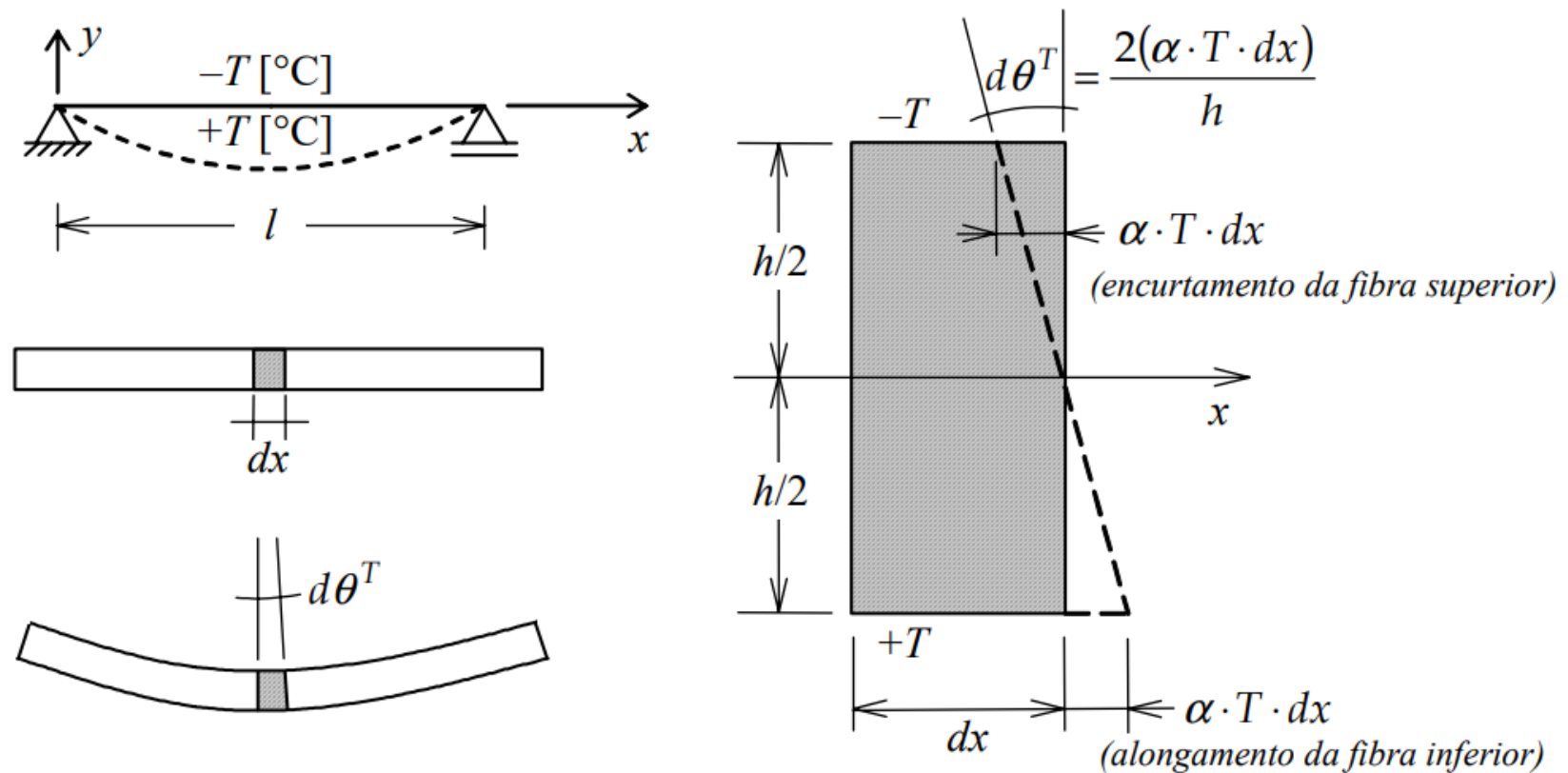


Figura 4.12 – Viga biapoada com variação transversal de temperatura.

Deslocamentos causados por temperatura

Exemplo de uma viga que sofre um **aquecimento diferencial e linear** em relação as fibras superiores e inferiores.

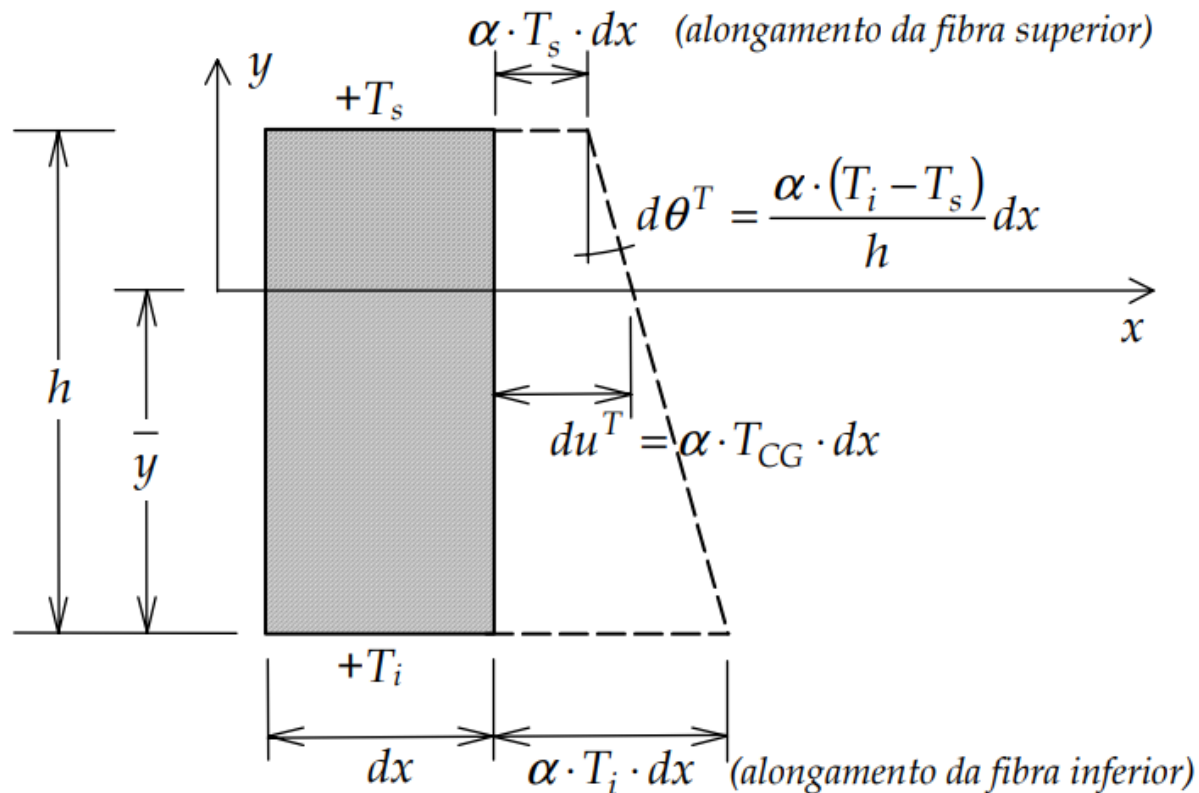


Figura 4.13 – Deformação de um elemento infinitesimal de barra por variação de temperatura.

Deslocamentos causados por temperatura

A expressão geral do PFV para o **cálculo de um deslocamento** genérico devido a uma variação de temperatura.

$$\Delta = \frac{1}{P} \left[\int_{estrutura} \bar{N} \cdot \alpha \cdot T_{CG} \cdot dx + \int_{estrutura} \frac{\bar{M} \cdot \alpha \cdot (T_i - T_s)}{h} dx \right]. \quad (4.22)$$

Sendo:

$\alpha \rightarrow$ coeficiente de dilatação térmica do material;

$h \rightarrow$ altura da seção transversal de uma barra;

$T_i \rightarrow$ variação de temperatura na fibra inferior de uma barra;

$T_s \rightarrow$ variação de temperatura na fibra superior de uma barra;

$T_{CG} \rightarrow$ variação de temperatura na fibra do centro de gravidade de uma barra.

Deslocamentos causados por temperatura

Considerando que **as barras são prismáticas**, essa equação pode ser simplificada para:

$$\Delta = \frac{1}{P} \cdot \left[\sum_{barras} \left[\alpha \cdot T_{CG} \cdot \int \bar{N} \cdot dx \right]_{barra} + \sum_{barras} \left[\frac{\alpha \cdot (T_i - T_s)}{h} \cdot \int \bar{M} \cdot dx \right]_{barra} \right]. \quad (4.23)$$

Deslocamentos causados por temperatura

EXEMPLO: Considere que a estrutura sofre um aquecimento interno de 20°C , e que também se deseja calcular o deslocamento horizontal do apoio da direita. Considere: $\alpha = 0,000012/^{\circ}\text{C}$; $h_{\text{coluna}} = 0,20 \text{ m}$ e $h_{\text{viga}} = 0,30 \text{ m}$; $T_i = +20^{\circ}\text{C}$, $T_s = 0^{\circ}\text{C}$ e $T_{\text{CG}} = +10^{\circ}\text{C}$. e **CG** no meio das alturas da viga e coluna.

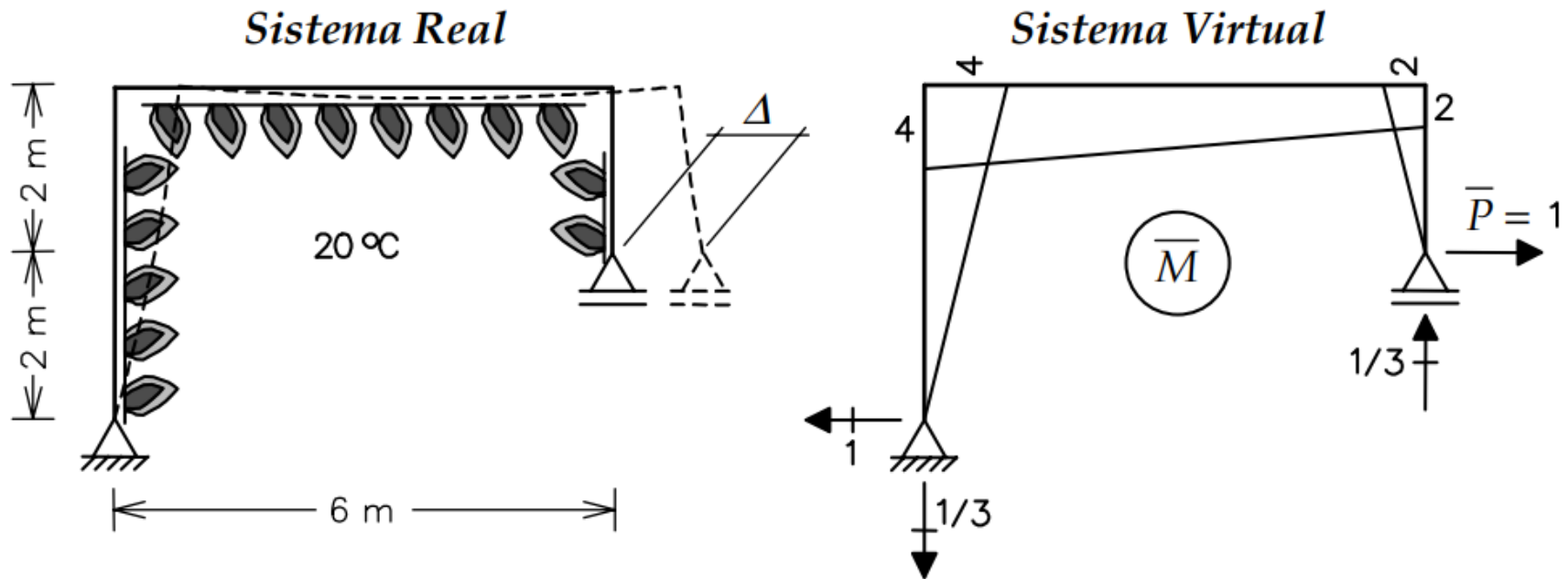


Figura 4.14 – Cálculo de deslocamento devido a uma variação de temperatura pelo PFV.

Deslocamentos causados por temperatura

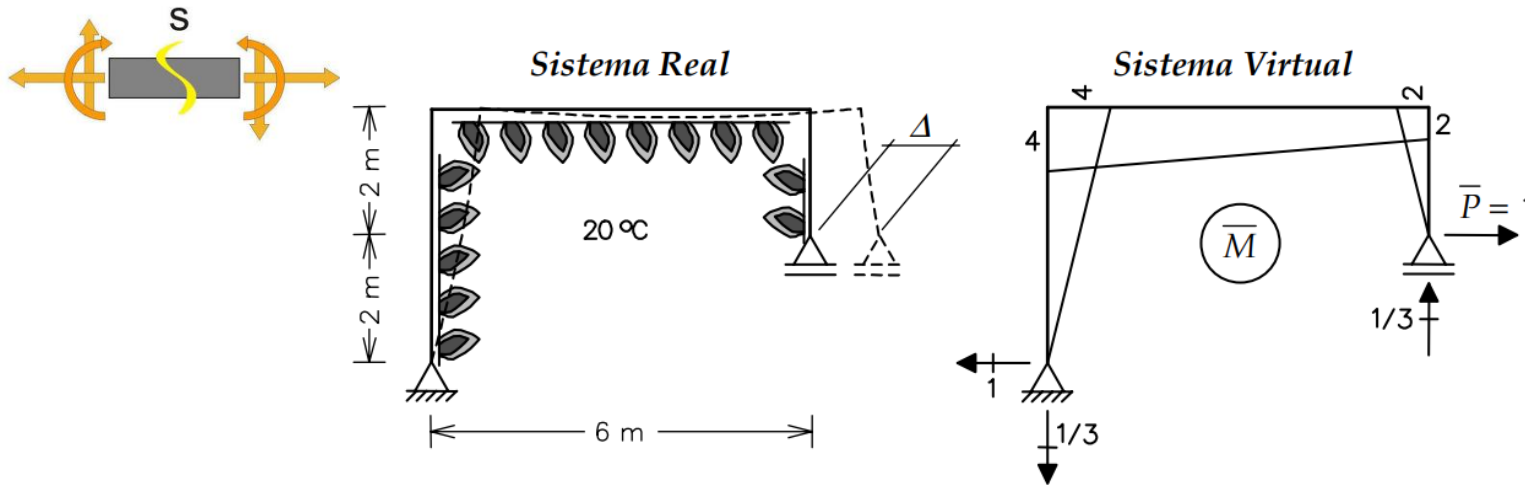


Figura 4.14 – Cálculo de deslocamento devido a uma variação de temperatura pelo PFV.

$$\Delta = \frac{1}{\bar{P}} \cdot \left[\sum_{\text{barras}} \left[\alpha \cdot T_{CG} \cdot \int \bar{N} \cdot dx \right]_{\text{barra}} + \sum_{\text{barras}} \left[\frac{\alpha \cdot (T_i - T_s)}{h} \cdot \int \bar{M} \cdot dx \right]_{\text{barra}} \right]. \quad (4.23)$$

$$\Delta = \frac{1}{1} \sum \alpha T_{CG} \left(\int_0^4 \frac{1}{3} \cdot dx + \int_0^6 1 \cdot dx + \int_0^2 -\frac{1}{3} \cdot dx \right) + \sum \frac{\alpha(T_i - T_s)}{h \text{ ou } hc} \left(\int_0^4 1x \cdot dx + \int_0^6 \left(\frac{1x}{3} + 2 \right) dx + \int_0^2 1x \cdot dx + \right)$$

Deslocamentos causados por temperatura

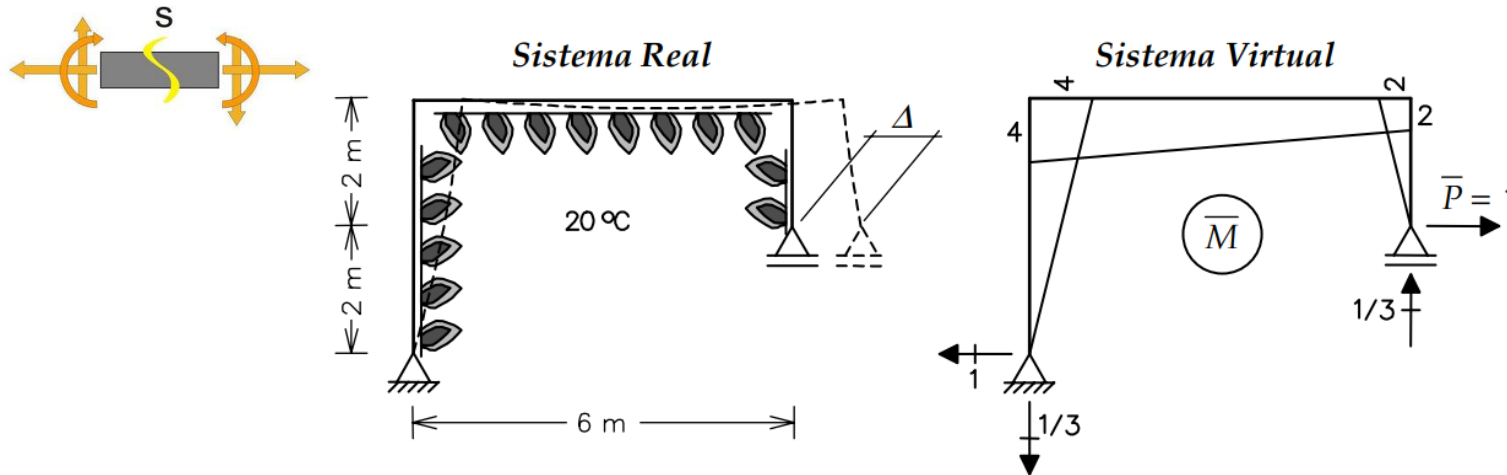


Figura 4.14 – Cálculo de deslocamento devido a uma variação de temperatura pelo PFV.

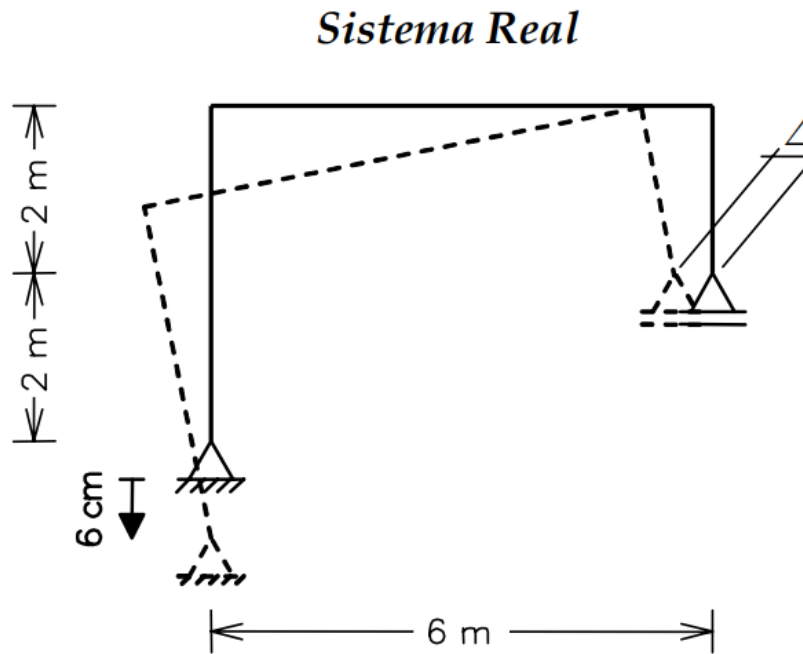
$$\Delta = \left[\alpha \cdot T_{CG} \cdot (+6) + \alpha \cdot T_{CG} \cdot \left(+\frac{4}{3} \right) + \alpha \cdot T_{CG} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \right] + \left[\frac{\alpha \cdot (T_i - T_s)}{h_v} \cdot (+18) + \frac{\alpha \cdot (T_i - T_s)}{h_c} \cdot (+8) + \frac{\alpha \cdot (T_i - T_s)}{h_c} \cdot (+2) \right]$$

$$\Delta = \left[+0,08 \cdot 10^{-2} \right] + \left[+2,64 \cdot 10^{-2} \right] = +2,72 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

**Deslocamentos provocados por recalques
de apoio**

Deslocamentos causados por Recalque

Recalques de apoio, pequenos em relação as dimensões da estrutura, **não provocam** esforços em uma estrutura **isostática**. Mas, em estruturas **hiperestáticas** provocam **deformações e esforços internos** na estrutura.



Deslocamentos causados por Recalque

O mesmo pórtico adotado anteriormente é considerado como exemplo para o cálculo de deslocamento. No exemplo, o apoio da esquerda da estrutura sofre um recalque vertical (para baixo) $\rho = 0,06$ m.

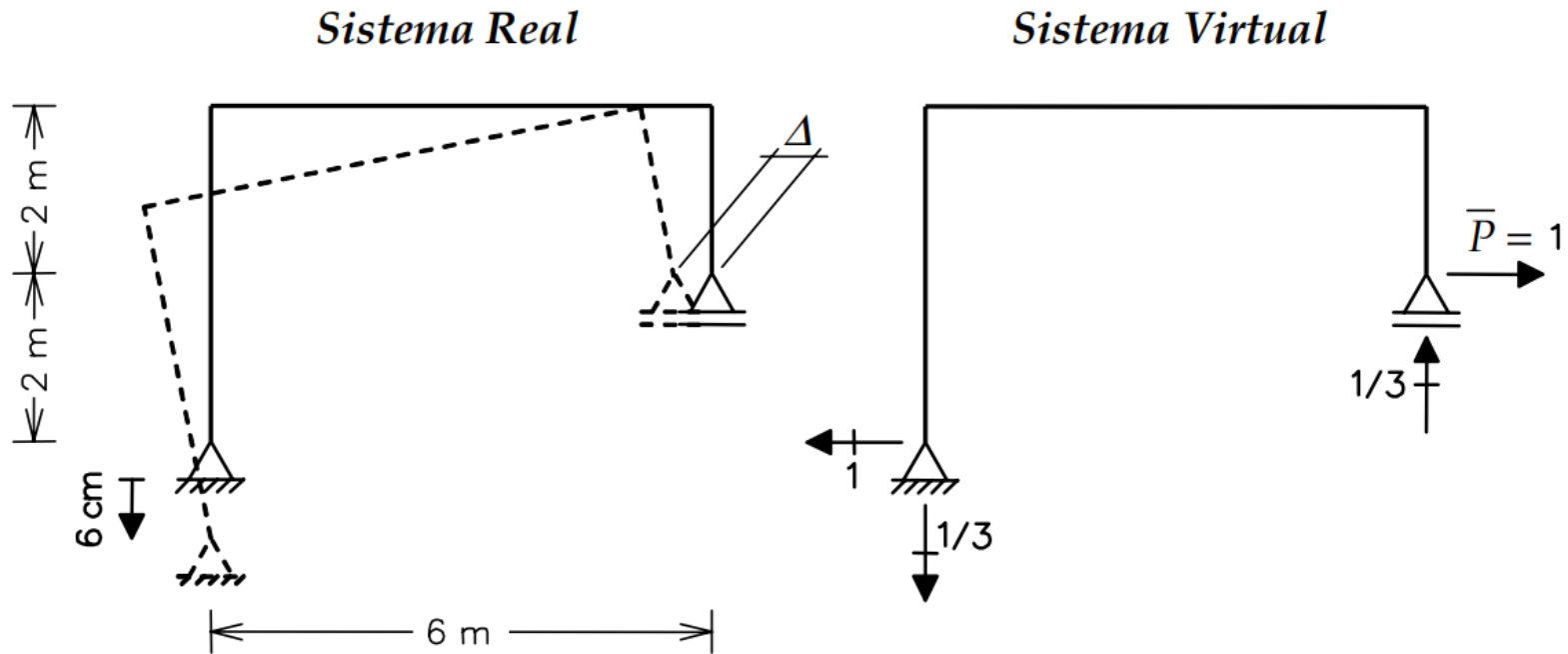


Figura 4.15 – Cálculo de deslocamento devido a um recalque de apoio pelo PFV.

Deslocamentos causados por Recalque

Observa-se na linha elástica indicada que o quadro isostático sofreu um **movimento de corpo rígido** devido ao recalque. Isto é, as barras permanecem retas (sem deformação). Portanto, a energia de **deformação interna virtual é nula: $U = 0$** .

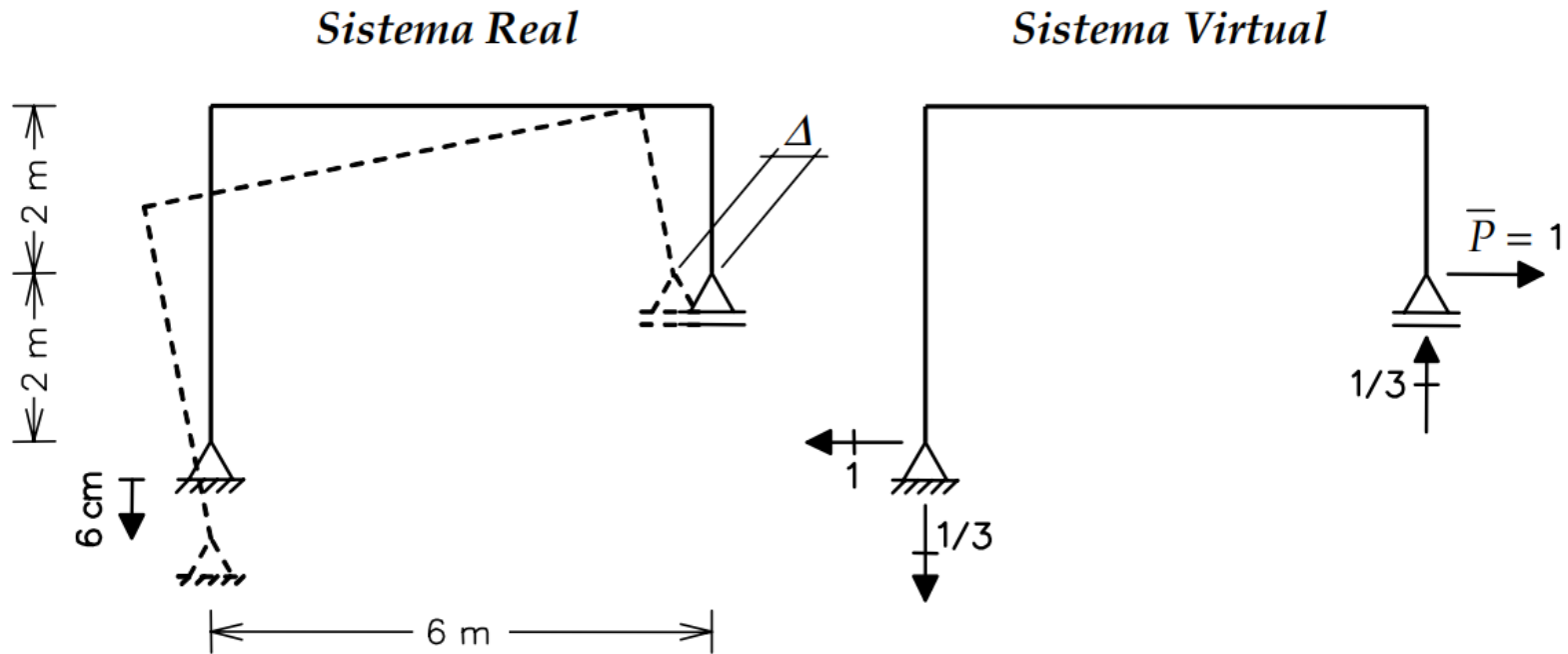


Figura 4.15 – Cálculo de deslocamento devido a um recalque de apoio pelo PDV.

Deslocamentos causados por Recalque

Por outro lado, o trabalho virtual das forças externas agora recebe a contribuição da reação de apoio do sistema virtual com o correspondente deslocamento (recalque) de apoio real:

$$\overline{W}_E = \overline{P} \cdot \Delta + (-1/3) \cdot (-\rho).$$

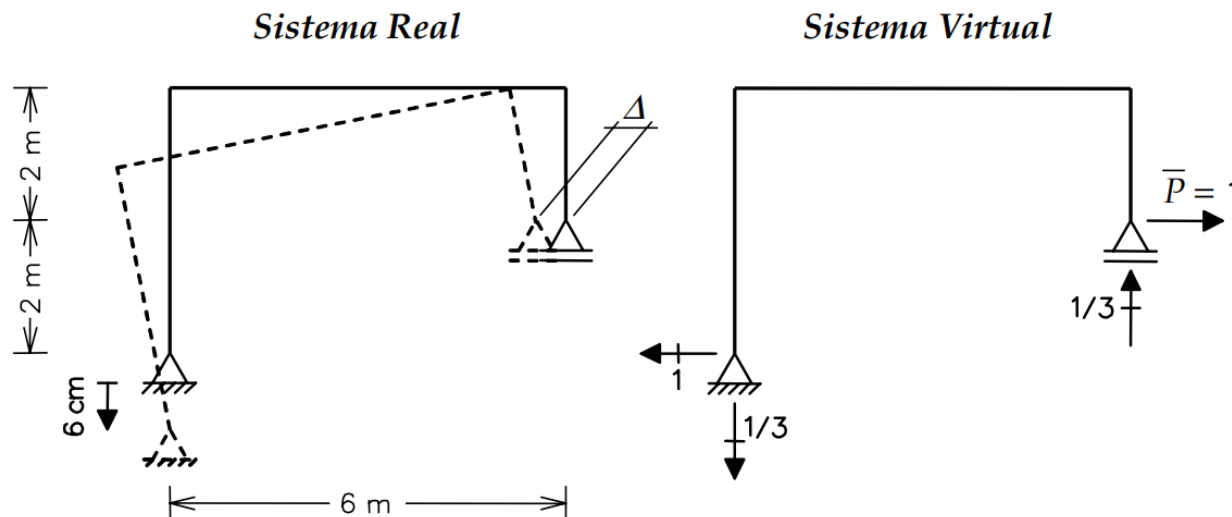


Figura 4.15 – Cálculo de deslocamento devido a um recalque de apoio pelo PFV.

Deslocamentos causados por Recalque

Por outro lado, o trabalho virtual das forças externas agora recebe a contribuição da reação de apoio do sistema virtual com o correspondente deslocamento (recalque) de apoio real:

$$\overline{W}_E = \overline{P} \cdot \Delta + (-1/3) \cdot (-\rho).$$

$$(\overline{W}_E = \overline{U})$$

$$\overline{W}_E = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{1}{\overline{P}} [-(-1/3) \cdot (-\rho)] \rightarrow \Delta = -2,00 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

Deslocamentos causados por Recalque

A expressão geral do PFV para o cálculo de um deslocamento genérico devido a recalques de apoio em um quadro isostático é obtida considerando que $U = 0$:

$$\Delta = -\frac{1}{P} \sum_{\text{recalques}} [\bar{R} \cdot \rho]. \quad (4.25)$$

Sendo:

$\rho \rightarrow$ recalque de apoio genérico na estrutura real;

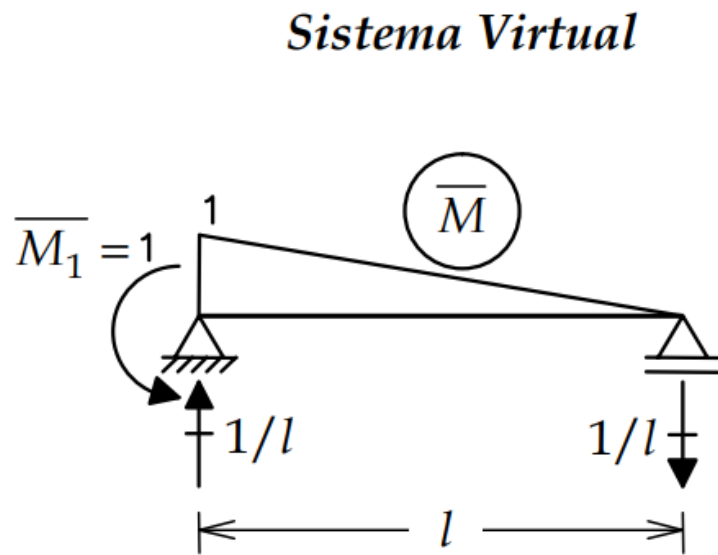
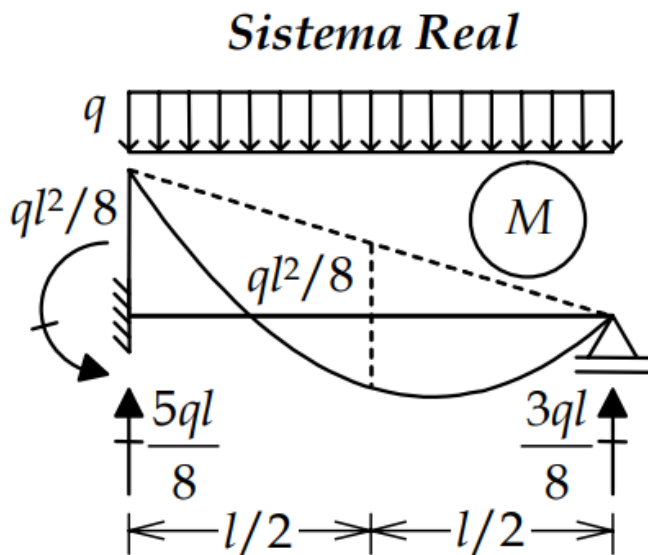
$\bar{R} \rightarrow$ reação de apoio no sistema virtual correspondente ao recalque real ρ .

Os sinais das reações e recalques na Equação (4.25) devem ser consistentes.

**Verificação de atendimento à condição de
compatibilidade**

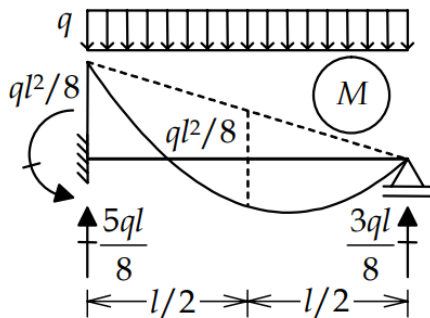
Atendimento à compatibilidade

Embora os exemplos mostrados nas seções anteriores tenham tratado de estruturas isostáticas, o PFV também pode ser aplicado para estruturas hiperestáticas.

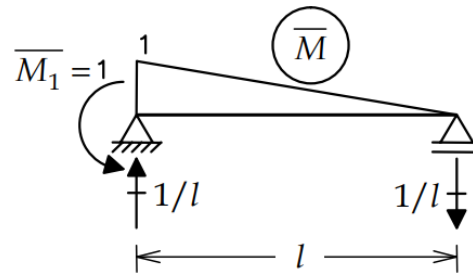


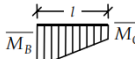
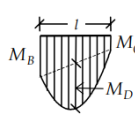
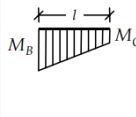
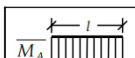
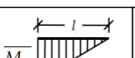
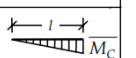
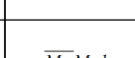
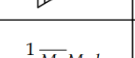
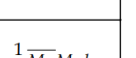
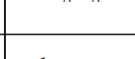
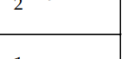
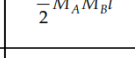
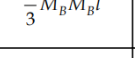
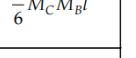
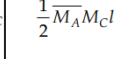
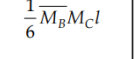
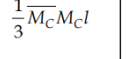
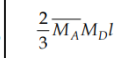
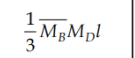
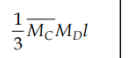
Atendimento à compatibilidade

Sistema Real



Sistema Virtual



$\int_0^l \bar{M} M dx$		$\bar{M}_B$ 		
				
		$\bar{M}_A$ 	$\bar{M}_B$ 	$\bar{M}_C$ 
		$\bar{M}_A$ 	$\bar{M}_B$ 	$\bar{M}_C$ 
		$\bar{M}_B$ 	$\bar{M}_B$ 	$\bar{M}_C$ 
		$\bar{M}_C$ 	$\bar{M}_B$ 	$\bar{M}_C$ 
		$\bar{M}_D$ 	$\bar{M}_B$ 	$\bar{M}_C$ 
		$\bar{M}_D$ 	$\bar{M}_B$ 	$\bar{M}_C$ 

**Viga
Combinação 1**

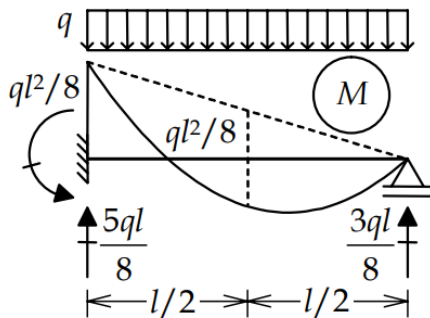
$$\begin{array}{c} \triangle \\ ql^2/8 \end{array} \quad \bar{M}_1 \begin{array}{c} \triangle \\ 1/l \end{array} \Rightarrow \int_0^l \bar{M} M dx = + \frac{1}{3} \bar{M}_1 \frac{ql^2}{8} l$$

**Viga
Combinação 2**

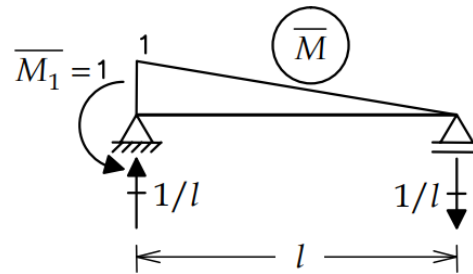
$$\begin{array}{c} \bigcirc \\ ql^2/8 \end{array} \quad \bar{M}_1 \begin{array}{c} \triangle \\ 1/l \end{array} \Rightarrow \int_0^l \bar{M} M dx = - \frac{1}{3} \bar{M}_1 \frac{ql^2}{8} l$$

Atendimento à compatibilidade

Sistema Real



Sistema Virtual



$\int_0^l \overline{M} M dx$	$\overline{M}_B \begin{array}{c} \text{---} l \text{---} \\ \text{---} \end{array} M_C$		
	$\overline{M}_A \begin{array}{c} \text{---} l \text{---} \\ \text{---} \end{array}$	$\overline{M}_B \begin{array}{c} \text{---} l \text{---} \\ \text{---} \end{array}$	$\overline{M}_C \begin{array}{c} \text{---} l \text{---} \\ \text{---} \end{array}$
$M_A \begin{array}{c} \text{---} l \text{---} \\ \text{---} \end{array}$	$\overline{M}_A M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M}_B M_A l$	$\frac{1}{2} \overline{M}_C M_A l$
$M_B \begin{array}{c} \text{---} l \text{---} \\ \text{---} \end{array}$	$\frac{1}{2} \overline{M}_A M_B l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_B M_B l$	$\frac{1}{6} \overline{M}_C M_B l$
$M_C \begin{array}{c} \text{---} l \text{---} \\ \text{---} \end{array}$	$\frac{1}{2} \overline{M}_A M_C l$	$\frac{1}{6} \overline{M}_B M_C l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_C M_C l$
$M_D \begin{array}{c} \text{---} l \text{---} \\ \text{---} \end{array}$	$\frac{2}{3} \overline{M}_A M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_B M_D l$	$\frac{1}{3} \overline{M}_C M_D l$

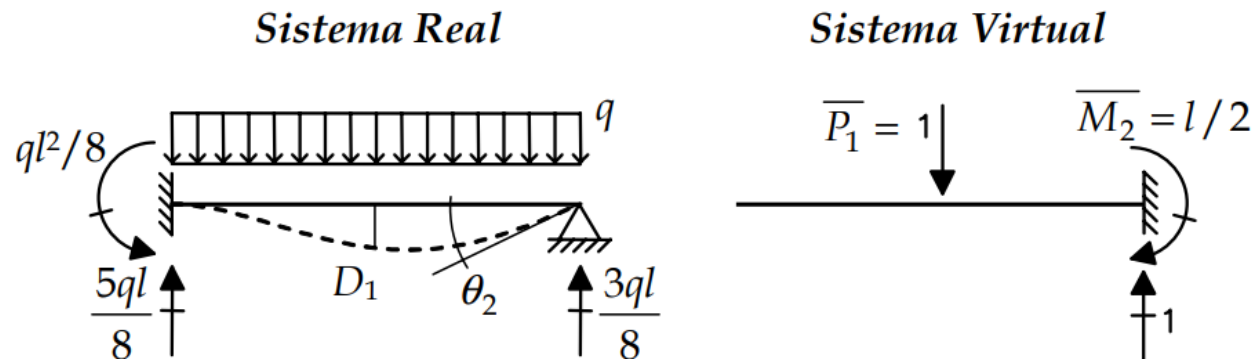
Viga
Combinação 1

Viga
Combinação 2

$$\theta_1 = \frac{1}{\overline{M}_1} \cdot \int_0^l \frac{\overline{M}(x) M(x)}{EI} dx = + \frac{1}{3} \frac{ql^2}{8} \frac{l}{EI} - \frac{1}{3} \frac{ql^2}{8} \frac{l}{EI} = 0.$$

Atendimento à compatibilidade

ATENÇÃO na escolha do sistema virtual: a estrutura adotada no sistema virtual **NUNCA** deve adicionar um vínculo em relação à estrutura real.



Atendimento à compatibilidade

Considere como exemplo a estrutura abaixo, da qual se deseja calcular o deslocamento D_1 no ponto central. Note que a estrutura real é hiperestática e a estrutura virtual é isostática. Entretanto, a estrutura virtual tem um vínculo adicional na extremidade direita (engaste) que não existe na estrutura real.

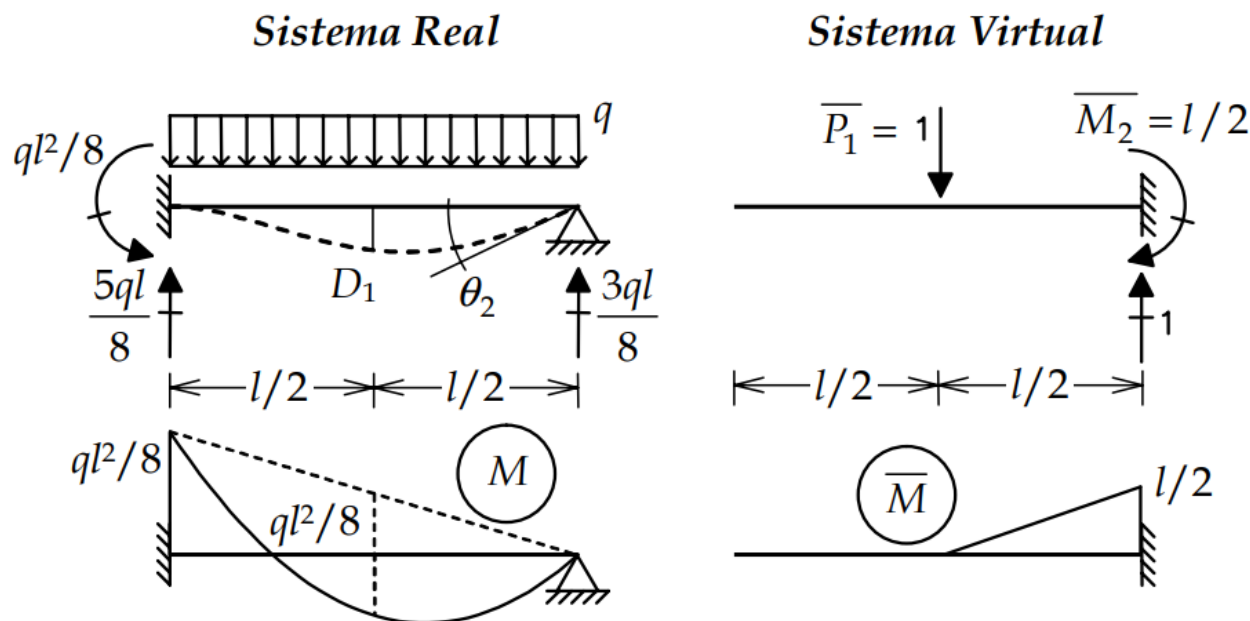


Figura 4.17 – Sistema virtual com vínculo adicional em relação à estrutura real.

Atendimento à compatibilidade

Isto impede a determinação do deslocamento D_1 pois na expressão do PFV aparecem duas incógnitas, D_1 e θ_2 :

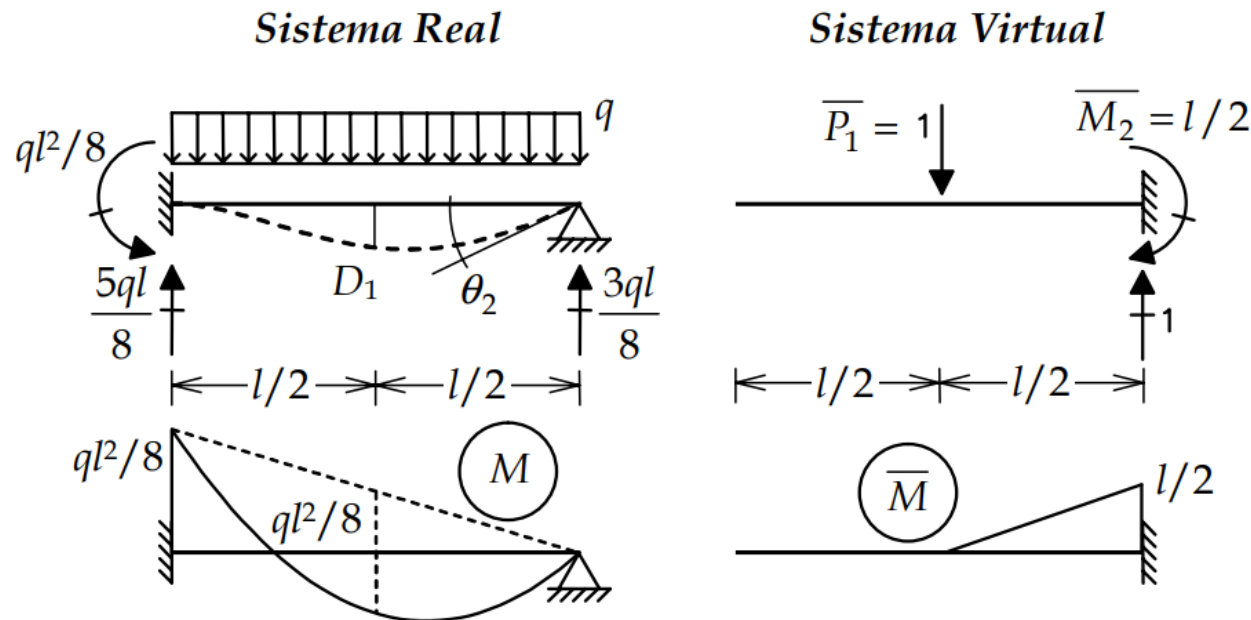


Figura 4.17 – Sistema virtual com vínculo adicional em relação à estrutura real.

$$\bar{W}_E = \bar{U} \rightarrow \bar{P}_1 \cdot D_1 - \bar{M}_2 \cdot \theta_2 = \int_0^l \frac{\bar{M}M}{EI} dx .$$

Princípio dos Deslocamentos Virtuais

Semelhante ao PTV

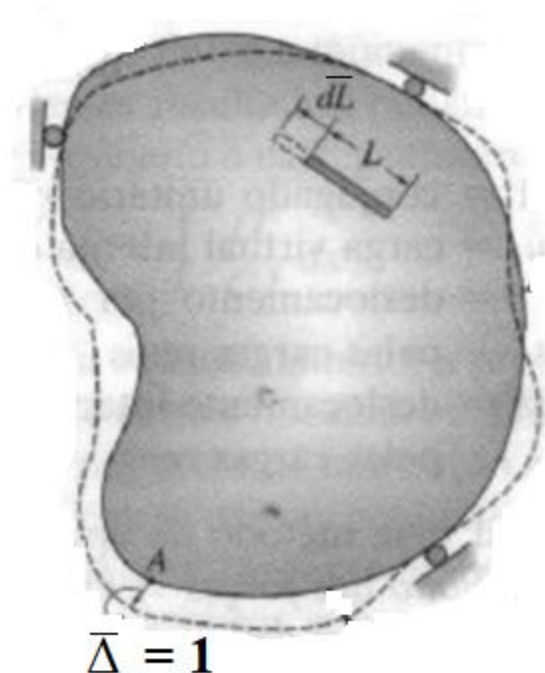
Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV)

O Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV) é uma das principais ferramentas para a determinação de forças (e momentos):

Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV)

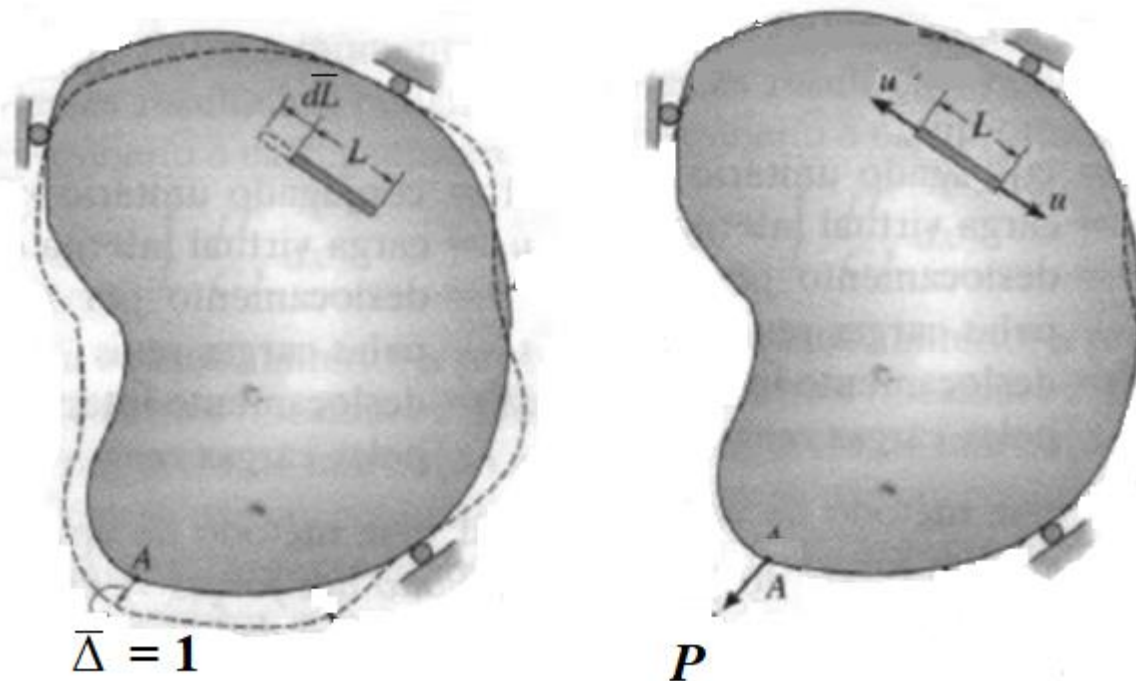
O princípio consiste:

A aplicação de um deslocamento virtual unitário externo ($\bar{\Delta} = 1$) na direção e no ponto no qual se deseja calcular a força/momento (**Ponto A**), gera, automaticamente, um deslocamento virtual interno ($\bar{dL}$) no elemento, conforme a figura abaixo:



Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV)

A aplicação do carregamento reais gera, automaticamente, uma carga real interna (u) no elemento, conforme a figura abaixo:



Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV)

Assim, considerando apenas a conservação de energia virtual, pode-se escrever a equação do trabalho virtual como:

$$\bar{\Delta} \cdot P = \int_V u \cdot \bar{dL}$$

Sendo:

P = carga real externa (atua na direção do deslocamento);

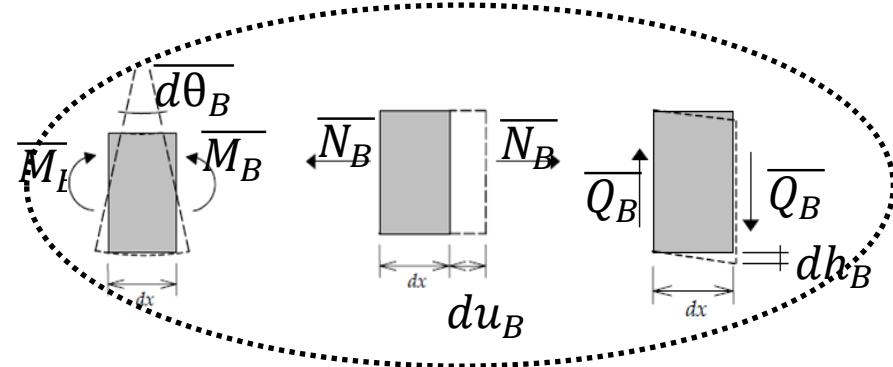
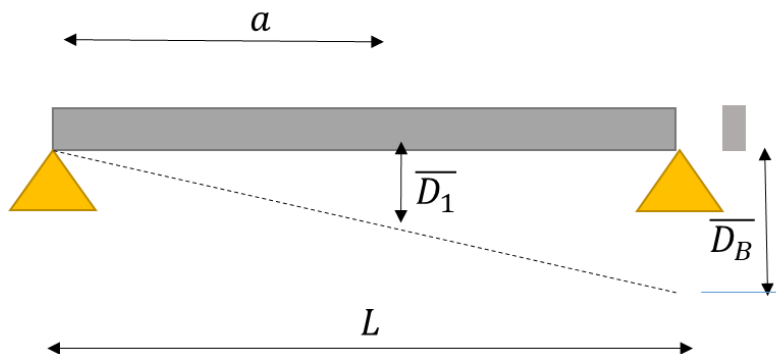
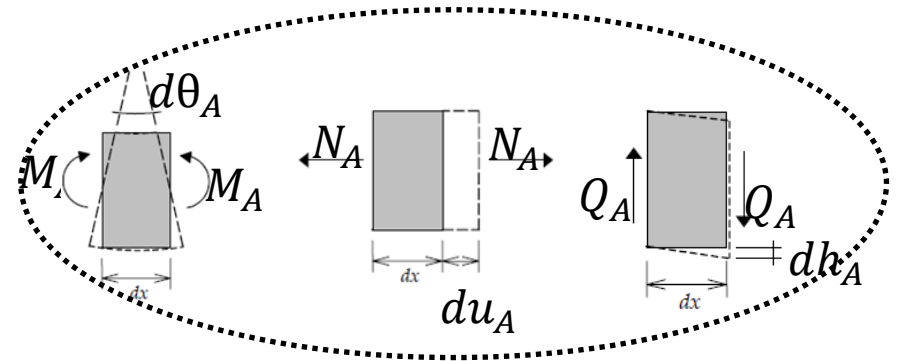
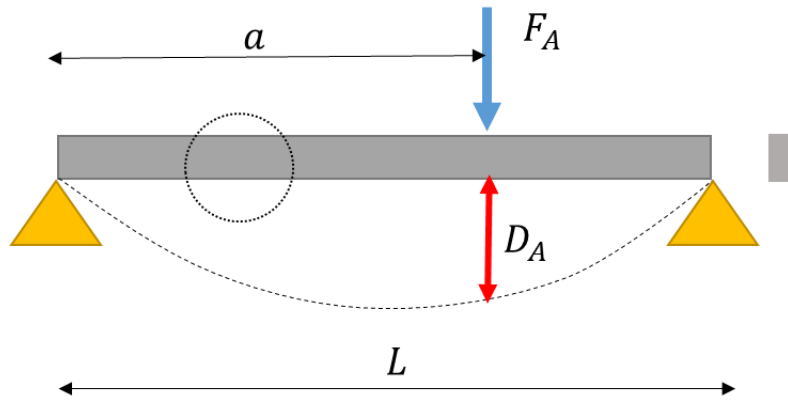
$\bar{\Delta}$ = deslocamento virtual unitário;

u = carregamento interno gerado pela força real externa;

$\bar{dL}$ = deformação interna provocado pelo deslocamento virtual.

Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV)

Supondo que o comportamento do material é **elástico-linear** e a tensão **não exceda o limite de proporcionalidade** podemos obter a expressão geral para o cálculo do deslocamento de um ponto:



Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV)

Para Pórticos:

$$\overline{W}_E = \overline{U} \Rightarrow P = \frac{1}{\Delta} \left[\int_{\text{estrutura}} N \cdot \overline{du} + \int_{\text{estrutura}} M \cdot \overline{d\theta} \right].$$

Para Grelhas:

$$\overline{W}_E = \overline{U} \Rightarrow P = \frac{1}{\Delta} \left[\int_{\text{estrutura}} M \cdot \overline{d\theta} + \int_{\text{estrutura}} T \cdot \overline{d\varphi} \right].$$

Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV)

Para Pórticos:

$$\overline{W}_E = \overline{U} \Rightarrow P = \frac{1}{\overline{\Delta}} \left[\int_{\text{estrutura}} N \cdot \overline{du} + \int_{\text{estrutura}} M \cdot \overline{d\theta} \right].$$

Sendo:

$P \rightarrow$ força externa genérica a ser calculada no sistema real;

$N \rightarrow$ esforço normal no sistema real;

$M \rightarrow$ momento fletor no sistema real;

$\overline{\Delta} \rightarrow$ deslocamento externo virtual no ponto da força genérica a ser calculada;

$\overline{du} \rightarrow$ deslocamento axial relativo interno no sistema virtual;

$\overline{d\theta} \rightarrow$ rotação relativa interna por flexão no sistema virtual.

Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV)

Para pórticos com carregamentos externos e recalques de apoio:

$$P = \frac{1}{\Delta} \left[\int_{\text{estrutura}} EA \frac{du}{dx} \cdot \frac{d\bar{u}}{dx} dx + \int_{\text{estrutura}} EI \frac{d^2v}{dx^2} \cdot \frac{d^2\bar{v}}{dx^2} dx \right].$$

Para Grelhas:

$$P = \frac{1}{\Delta} \left[\int_{\text{estrutura}} EI \frac{d^2v}{dx^2} \cdot \frac{d^2\bar{v}}{dx^2} dx + \int_{\text{estrutura}} GJ_t \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\bar{\varphi}}{dx} dx \right].$$

Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV)

Para pórticos com carregamentos externos e recalques de apoio:

$$P = \frac{1}{\Delta} \left[\int_{\text{estrutura}} EA \frac{du}{dx} \cdot \frac{d\bar{u}}{dx} dx + \int_{\text{estrutura}} EI \frac{d^2v}{dx^2} \cdot \frac{d^2\bar{v}}{dx^2} dx \right].$$

Sendo:

$EA \rightarrow$ parâmetro de rigidez axial, sendo E o módulo de elasticidade do material e A a área da seção transversal;

$u(x) \rightarrow$ deslocamento axial no sistema real;

$\bar{u}(x) \rightarrow$ deslocamento axial no sistema virtual;

$EI \rightarrow$ parâmetro de rigidez transversal por flexão, sendo I o momento de inércia da seção transversal;

$v(x) \rightarrow$ deslocamento transversal no sistema real;

$\bar{v}(x) \rightarrow$ deslocamento transversal no sistema virtual.

Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV)

PDV para solicitações de variação de temperatura :

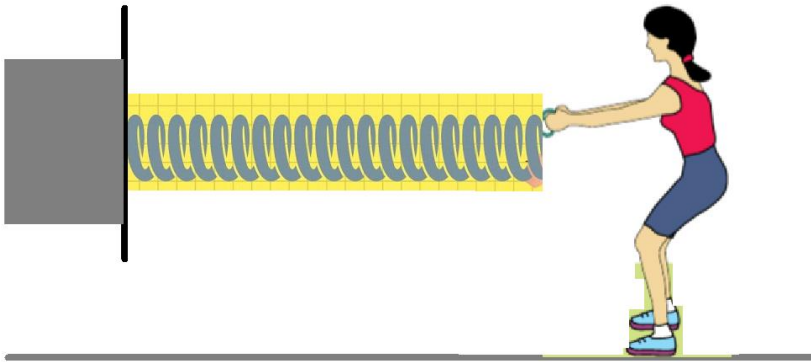
$$P = \frac{1}{\Delta} \left[\int_{\text{estrutura}} \left[EA \left(\frac{du}{dx} - \frac{du^T}{dx} \right) \right] \cdot \frac{\overline{du}}{dx} dx + \int_{\text{estrutura}} \left[EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{d\theta^T}{dx} \right) \right] \cdot \frac{d^2 \overline{v}}{dx^2} dx \right].$$

Teorema de Betti e Teorema de Maxwell

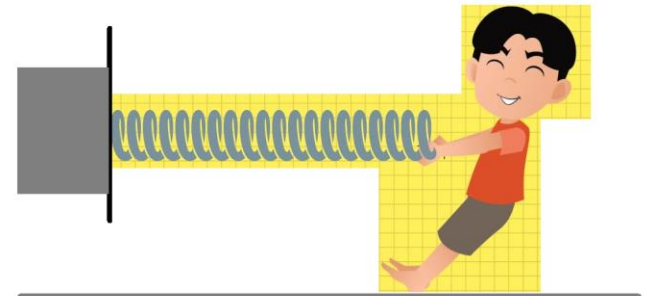
Teorema de Betti

A energia elástica de trabalho feita por um sistema de forças "A" nos deslocamentos causados por outro sistema de forças "B" é igual ao trabalho feito pelo sistema de forças "B" nos deslocamentos causados pelo sistema de forças "A".

Sistema A:



Sistema B:

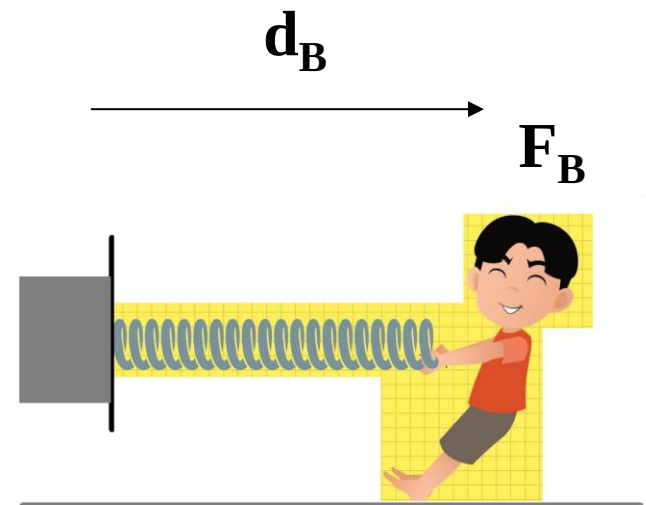
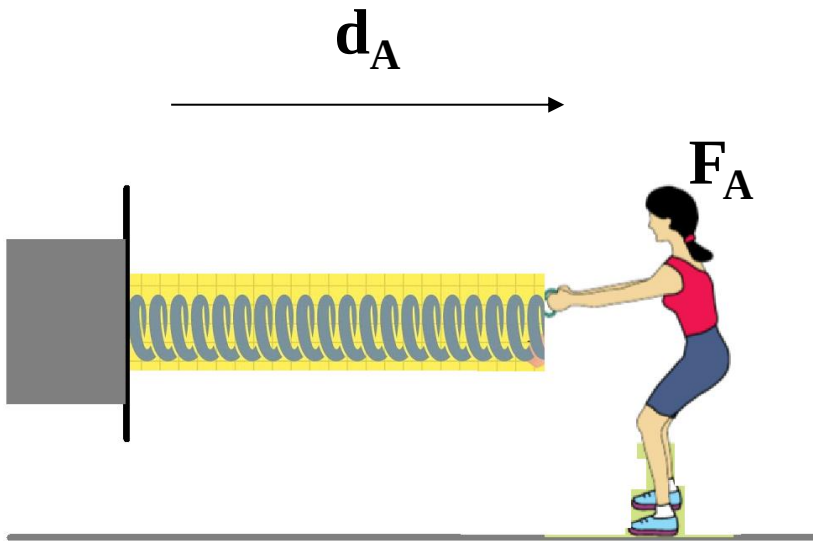


Teorema de Betti

Sistema A:

Sistema B:

$$F_B \cdot d_A = F_A \cdot d_B$$



Teorema de Maxwell

Em uma estrutura linear elástica, se você aplicar uma força unitária no ponto i , isso causará um certo deslocamento no ponto j . Agora, se você fizer o contrário — aplicar a mesma força unitária no ponto j — o deslocamento no ponto i será exatamente o mesmo. O mesmo vale para deslocamentos:

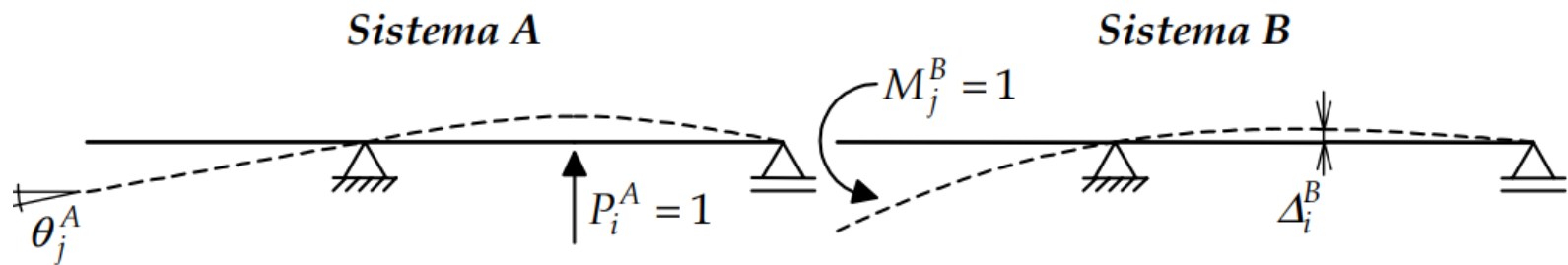


Figura 4.21 – Teorema de Maxwell para forças generalizadas unitárias.

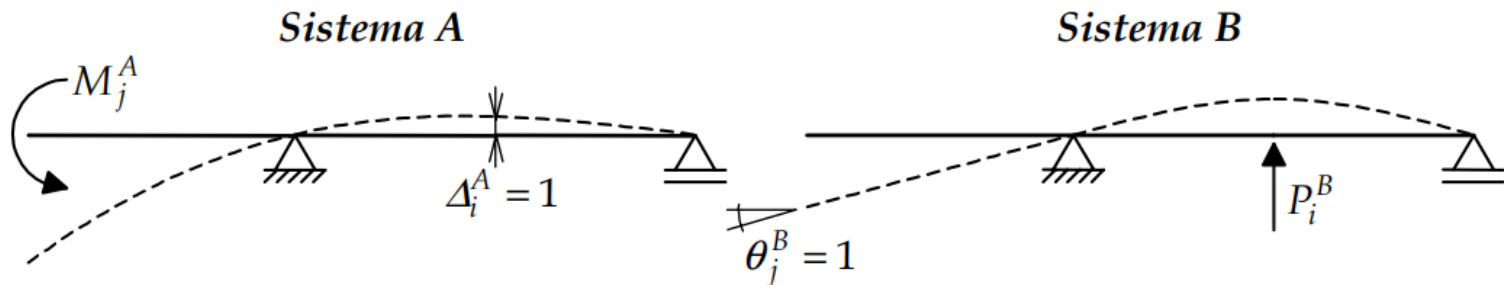


Figura 4.22 – Teorema de Maxwell para deslocamentos generalizados unitários.

...

CONTINUA na Próxima Parte