UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS SERTÃO
EIXO TECNOLOGIA

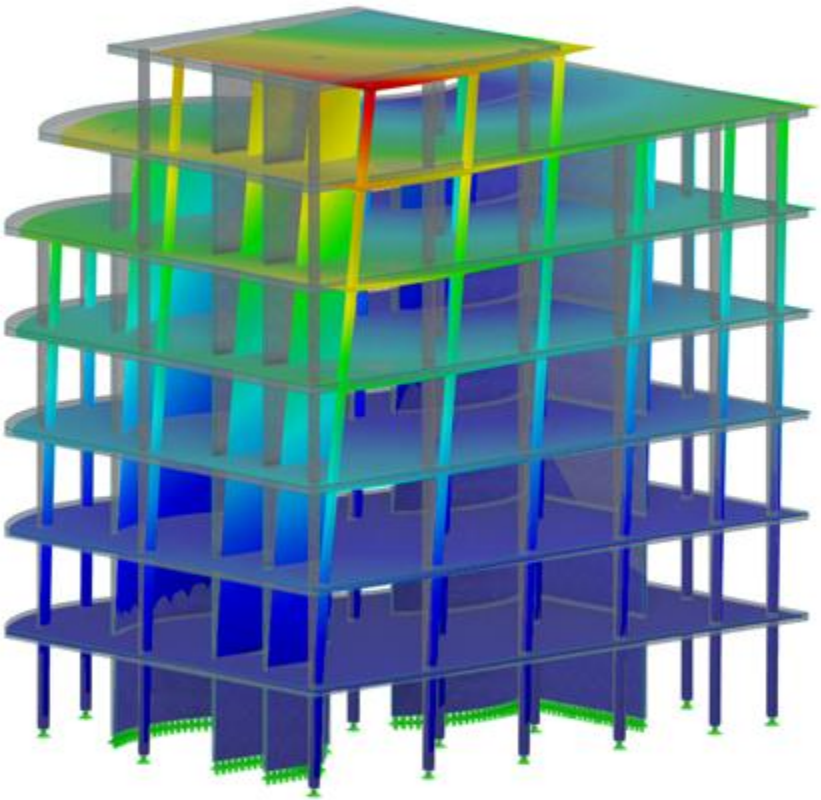


Imagem: https://www.dlubal.com/pt/solucoes/areas-de-aplicacao/analise-de-elementos-finitos

Teoria das Estruturas 2

Introdução à Análise de Estruturas

Prof. Dr. Alverlando Ricardo

Visão Geral: Introdução e Contextualização

A DISCIPLINA: Teoria das Estruturas 2

Informações gerais:

Ano/Semestre:	**2024.2**		
Disciplina:	**Teoria das Estruturas 2**	**Horário:**	**Quinta-feira 14h20 – 17h00**
Natureza:	**Obrigatória**	**7º Período**	
aula/semana:	**03 (três)**	**aula/total:**	**54h**
Docente:	**Alverlando Ricardo**	**E-mail:**	**alverlando.ricardo@delmiro.ufal.br**

- **Plano de curso;**
- *http://www.ufal.edu.br/estudante/graduacao/normas*

- https://alverlandoricardo.wixsite.com/professor

A DISCIPLINA: Teoria das Estruturas 2

➢ **REFERENCIAS BÁSICAS**

MÉTODOS BÁSICOS DA ANÁLISE DE ESTRUTURAS

Luiz Fernando Martha

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio
Departamento de Engenharia Civil
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea
CEP 22453-900 – Rio de Janeiro, RJ
Tel.: (21) 3114-1190 – Fax: (21) 3114-1195

E-mail: lfm@tecgraf.puc-rio.br
URL: http://www.tecgraf.puc-rio.br/~lfm

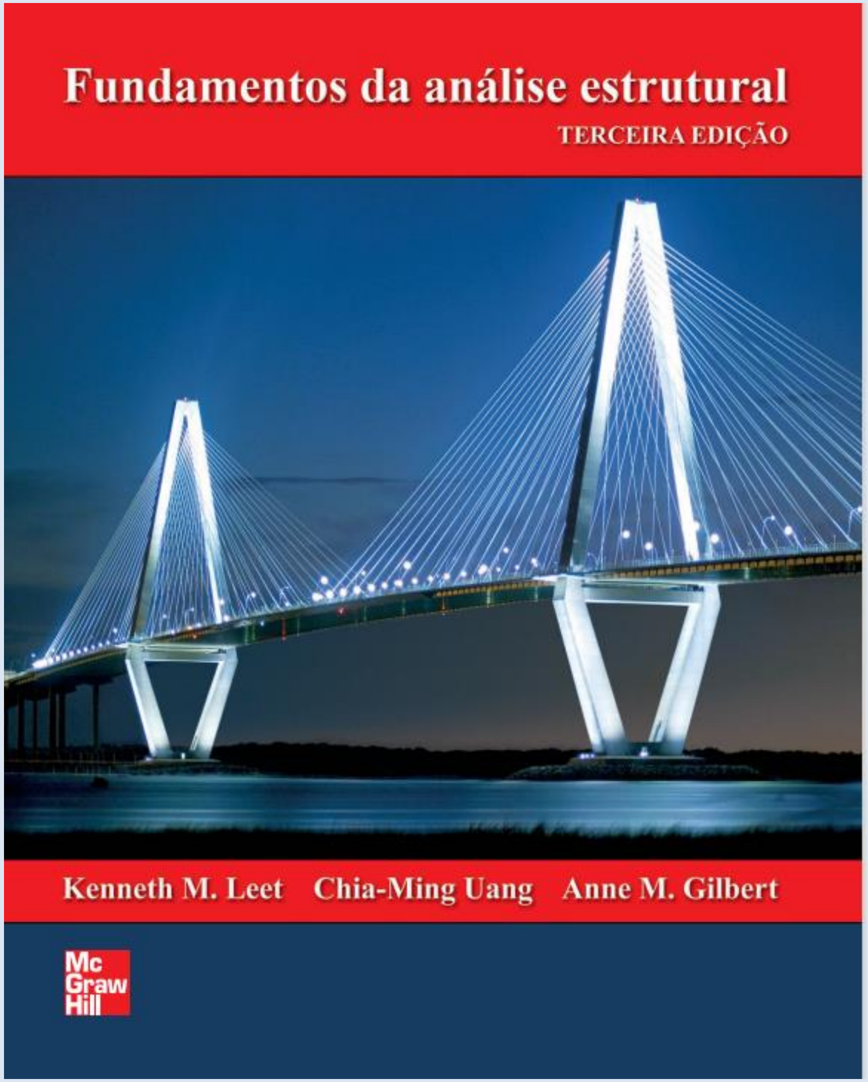
Métodos Básicos da Análise de Estruturas

Luiz Fernando Martha

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio

A DISCIPLINA: Teoria das Estruturas 2

➢ **REFERENCIAS BÁSICAS**



Fundamentos da Análise Estrutural

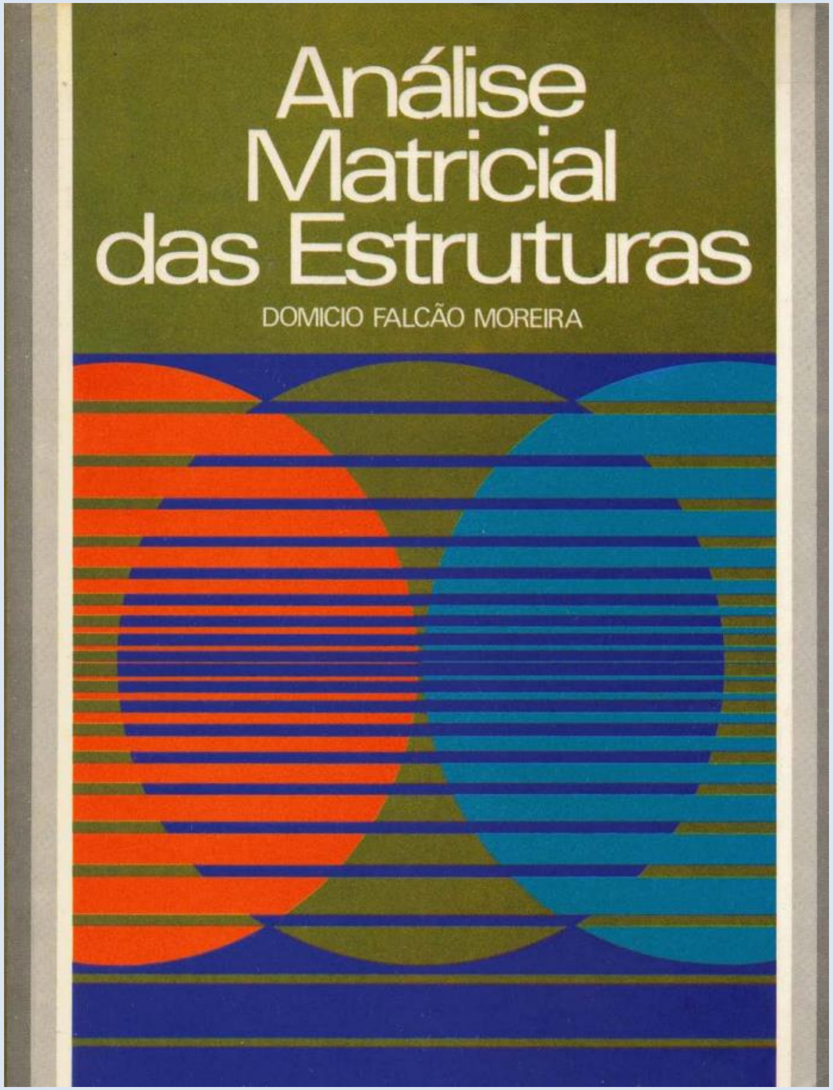
Kenneth M. Leet, Chia-Ming Uang, Anne M. Gilbert

Tradução: João Eduardo Nóbrega Tortello - 3ª ed.

ISBN 978-85-63308-34-4

A DISCIPLINA: Teoria das Estruturas 2

➢ REFERENCIAS BÁSICAS



Análise Matricial das Estruturas

Domício Falcão Moreira

Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos;

São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1977

Introdução

Mais alguns passos em direção à análise e projeto de estruturas:

1º semestre: -
2º semestre: -
3º semestre: Mecânica dos Sólidos 1
4º semestre: Teoria das Estruturas 1
5º semestre: Mecânica dos Sólidos 2
6º semestre: Mecânica dos Sólidos 3
7º semestre: Teoria das Estruturas 2
Estruturas de Concreto 1
Estruturas de Aço
8º semestre: Estruturas de Concreto 2
Estruturas de Madeira
9º semestre: Fundações 2
10º semestre: -

Introdução

Mais alguns passos em direção à análise e projeto de estruturas:

1º semestre: -
2º semestre: -
3º semestre: Mecânica dos Sólidos 1
4º semestre: Teoria das Estruturas 1
5º semestre: Mecânica dos Sólidos 2
6º semestre: Mecânica dos Sólidos 3
7º semestre: Teoria das Estruturas 2
Estruturas de Concreto 1
Estruturas de Aço
8º semestre: Estruturas de Concreto 2
Estruturas de Madeira
9º semestre: Fundações 2
10º semestre: -

- **Mecânica dos Sólidos 1:** Estuda o equilíbrio de forças, além das propriedades geométricas das seções transversais

- **Teoria das Estruturas 1**: Introduz os princípios básicos da análise estrutural, focando em estruturas isostáticas.

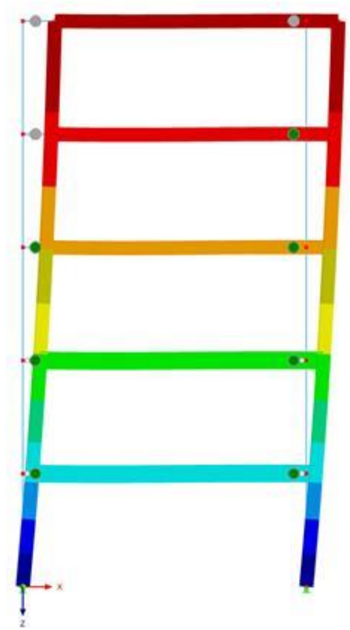
- **Mecânica dos Sólidos 2**: Estuda a resistência dos materiais, abordando tensões e deformações.

- **Mecânica dos Sólidos 3**: Estuda flexão, aplica métodos de energia na análise estrutural e abordar a instabilidade elástica.

Introdução

Mais alguns passos em direção à análise e projeto de estruturas:

1º semestre: -
2º semestre: -
3º semestre: Mecânica dos Sólidos 1
4º semestre: Teoria das Estruturas 1
5º semestre: Mecânica dos Sólidos 2
6º semestre: Mecânica dos Sólidos 3
7º semestre: Teoria das Estruturas 2
Estruturas de Concreto 1
Estruturas de Aço
8º semestre: Estruturas de Concreto 2
Estruturas de Madeira
9º semestre: Fundações 2
10º semestre: -

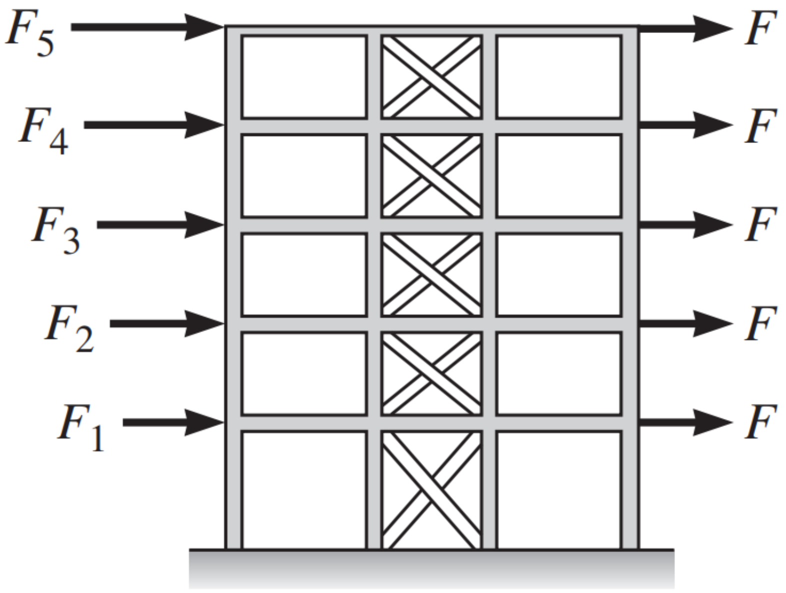


Teoria das Estruturas 2: Foca na análise de ***estruturas reticulares hiperestáticas*** usando métodos dos **deslocamentos** e das **forças**.

Teoria das Estruturas 2

A disciplina aborda os métodos básicos da análise Estrutural:

O objetivo é a determinação de esforços internos e externos (resultantes e reações de apoio), das tensões, dos deslocamentos e deformações da estrutura reticular hiperestática que está sendo projetada.



Teoria das Estruturas 2

OBJETIVOS:

- Determinar os DESLOCAMENTOS;
- Determinar as REAÇÕES DE APOIO;
- Determinar os ESFORÇOS INTERNOS.

As estruturas que não podem ter seus esforços determinados apenas pelas condições de equilíbrio são chamadas de Estruturas Hiperestáticas:

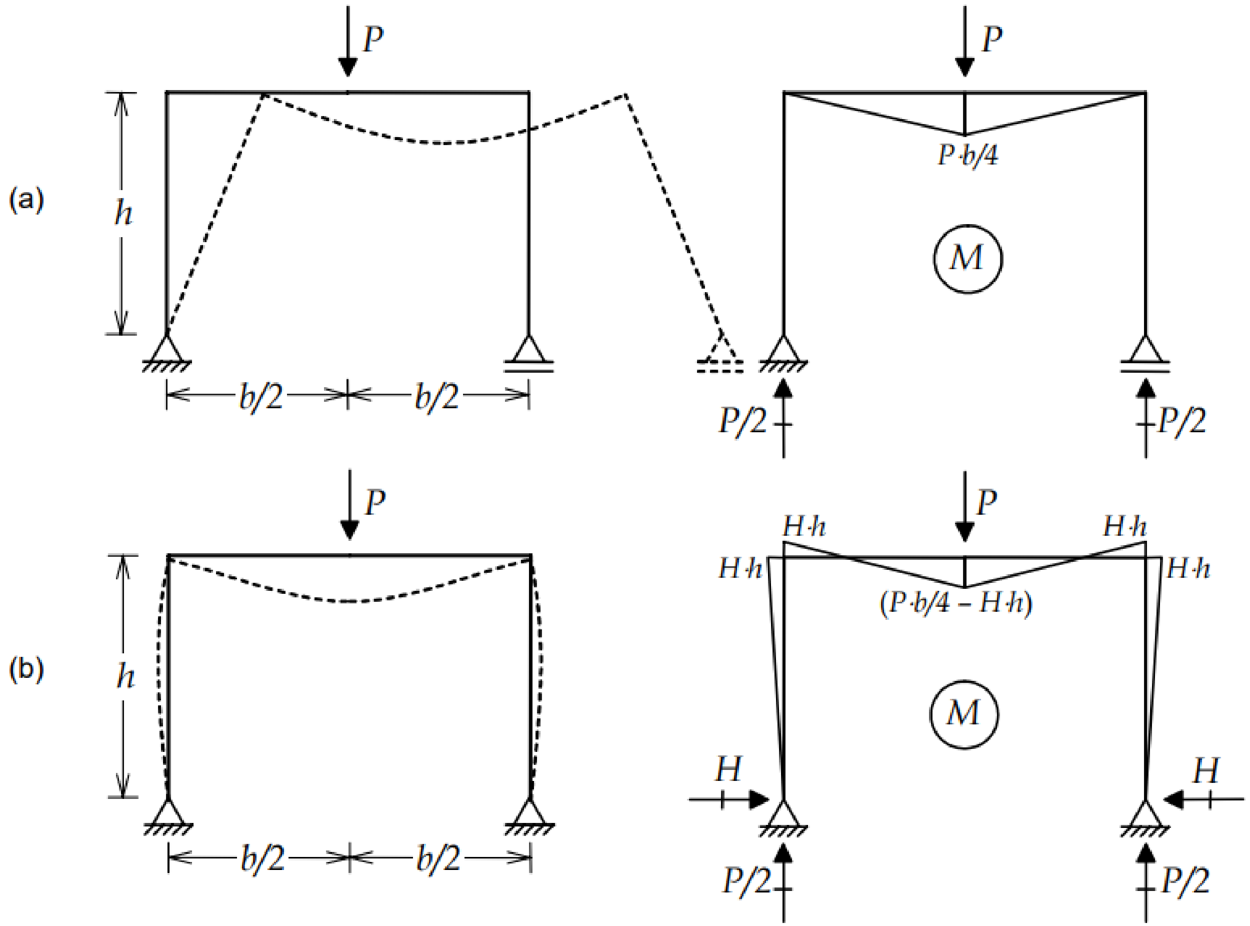


Figura 2.17 – Quadros isostático (a) e hiperestático (b), configurações deformadas, reações de apoio e diagramas de momentos fletores.[1]

Teoria das Estruturas 2

- Uma estrutura hiperestática os vínculos excedentes podem induzir uma segurança adicional;

- Porém, um movimento de apoio pode induzir deformações nas barras da estrutura, provocando esforços.

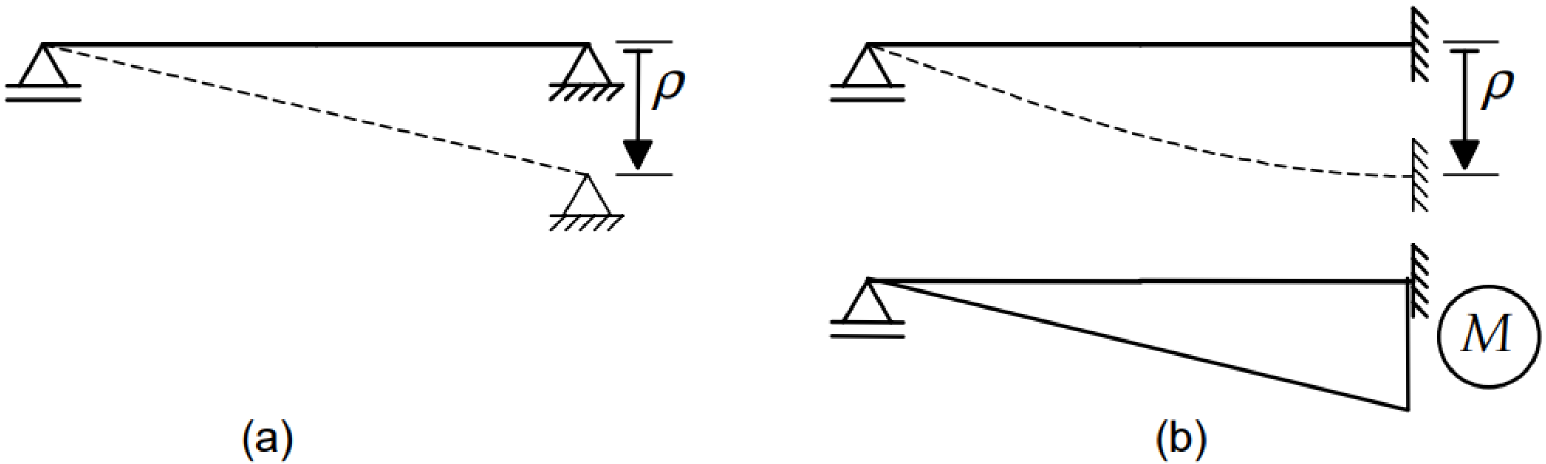


Figura 2.20 – Recalque de apoio em viga isostática e em viga hiperestática.

Teoria das Estruturas 2

Métodos de Análise de Estruturas Hiperestáticas

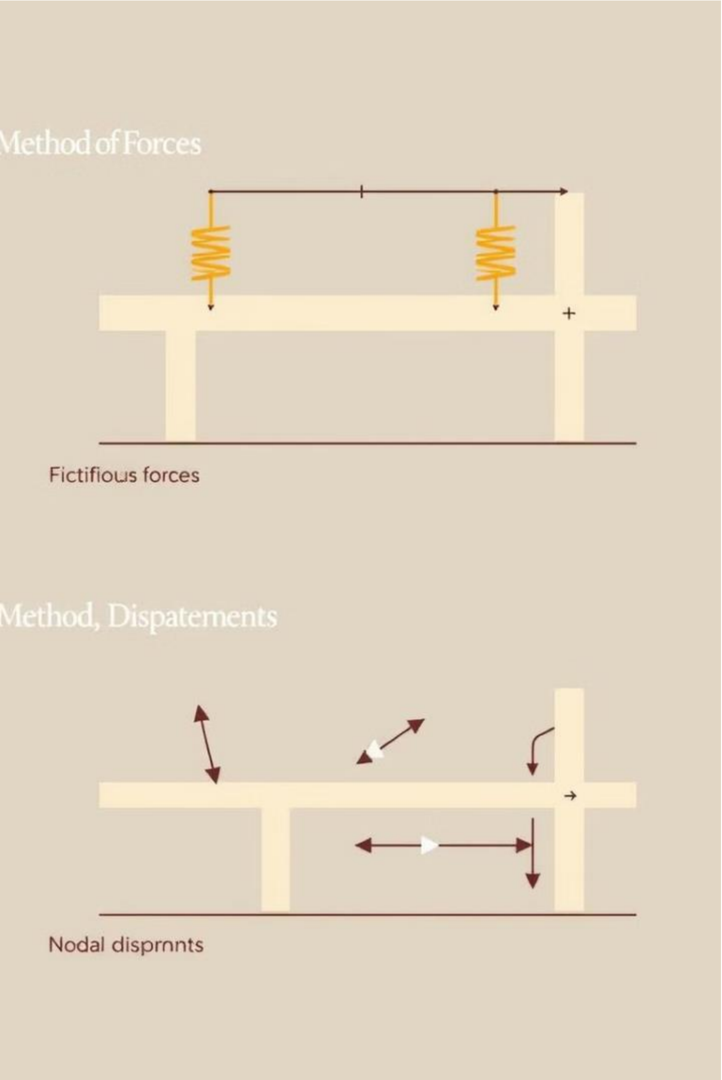
Estruturas hiperestáticas são estruturas que têm mais restrições do que as necessárias para o equilíbrio estático. Essas estruturas são mais complexas de analisar, exigindo métodos específicos para determinar os esforços internos e os deslocamentos.

Método das Forças

O método das forças se baseia na introdução de forças fictícias para eliminar os graus de liberdade redundantes da estrutura.

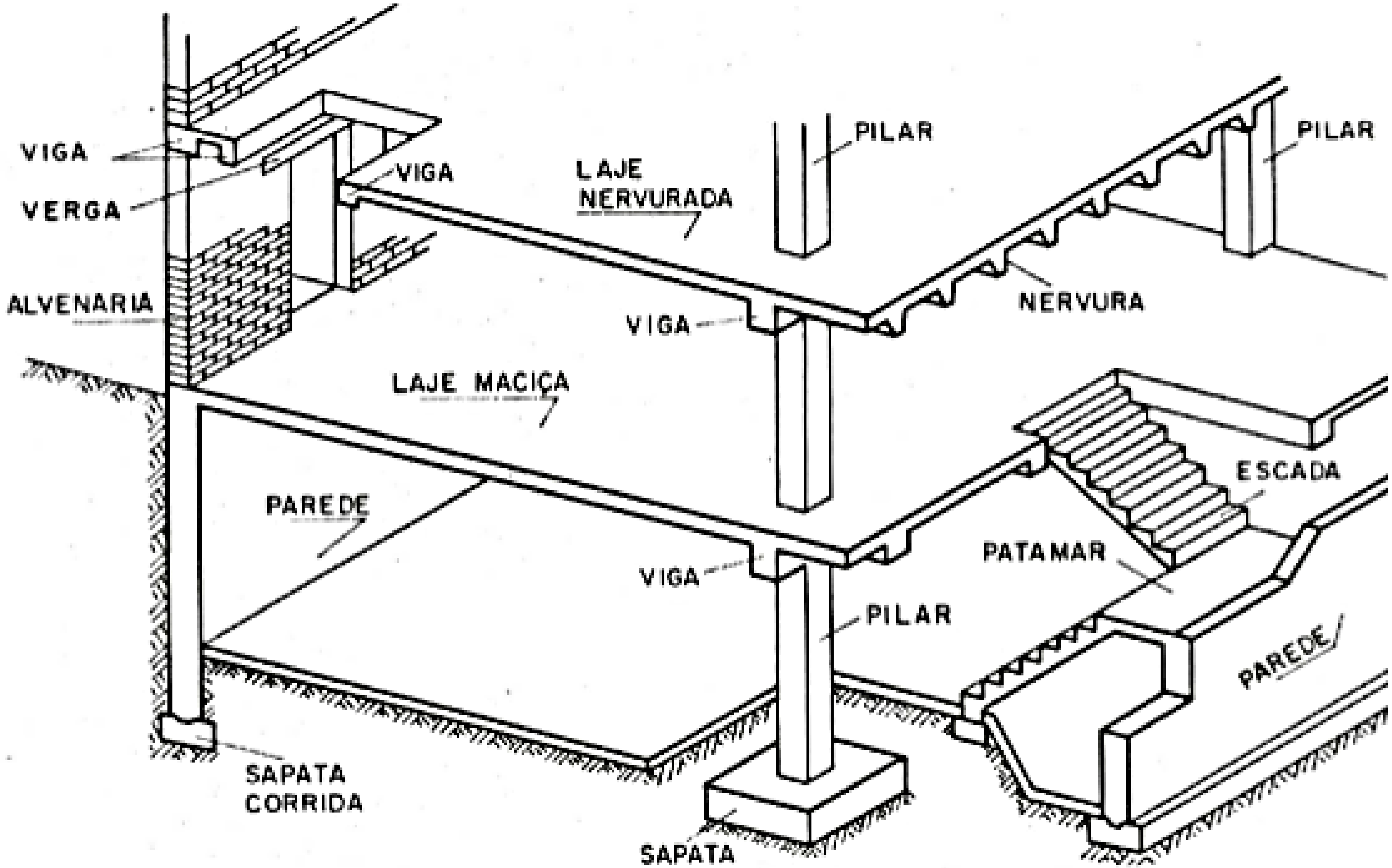
Método dos Deslocamentos Deslocamentos

O método dos deslocamentos se baseia na determinação dos deslocamentos nodais da estrutura, levando em conta a rigidez dos elementos estruturais.

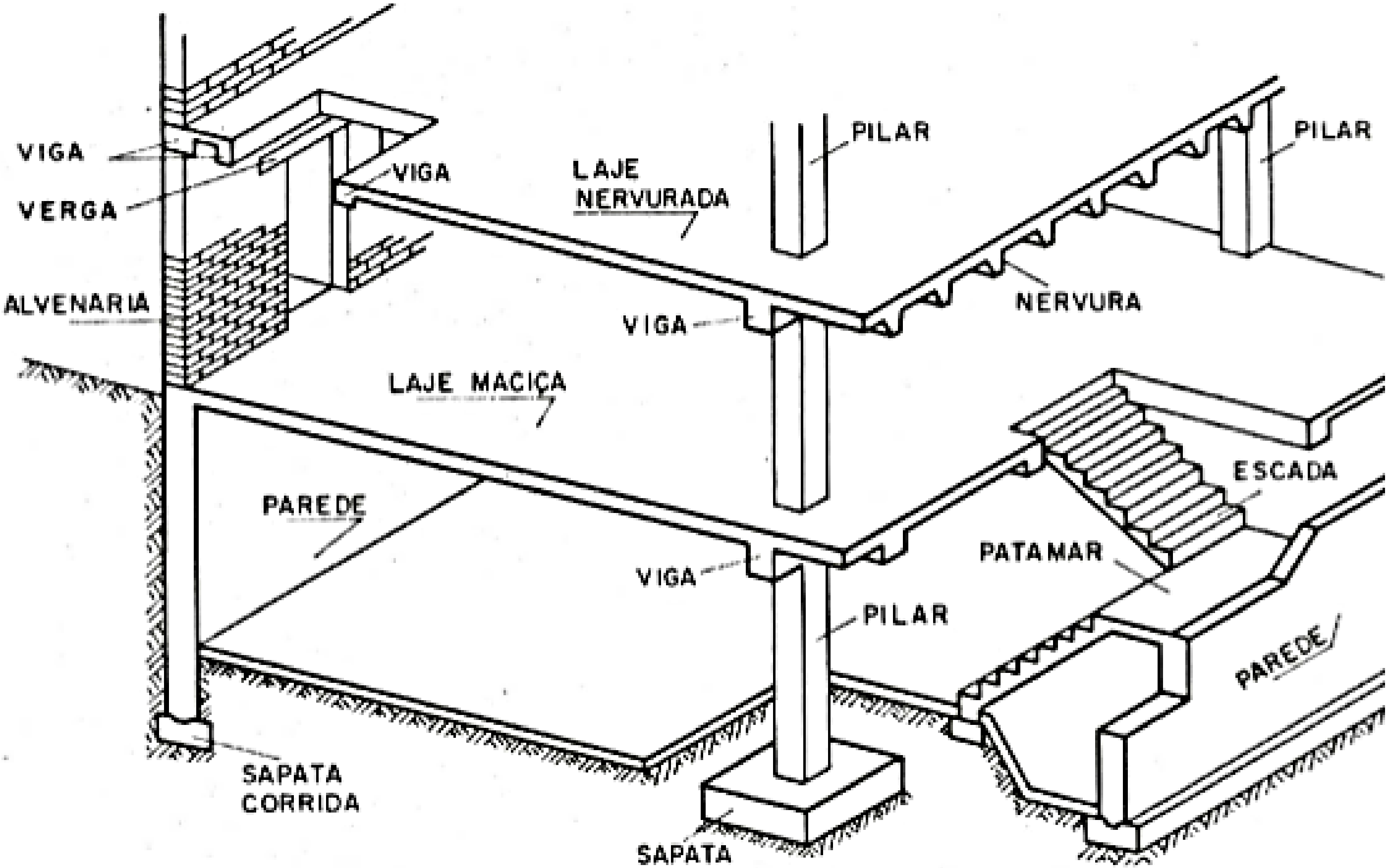


1. CONCEITOS IMPORTANTES

O que é Estrutura?



O que é Estrutura?



É a parte ou o ***conjunto das partes*** de uma construção que se destina a ***resistir a cargas e transmiti-las ao solo***.

A Geometria dos Elementos Estruturais

BARRAS OU FIOS:

São elementos estruturais que apresentam uma de suas dimensões predominando sobre as outras duas.

A Geometria dos Elementos Estruturais

FOLHAS:

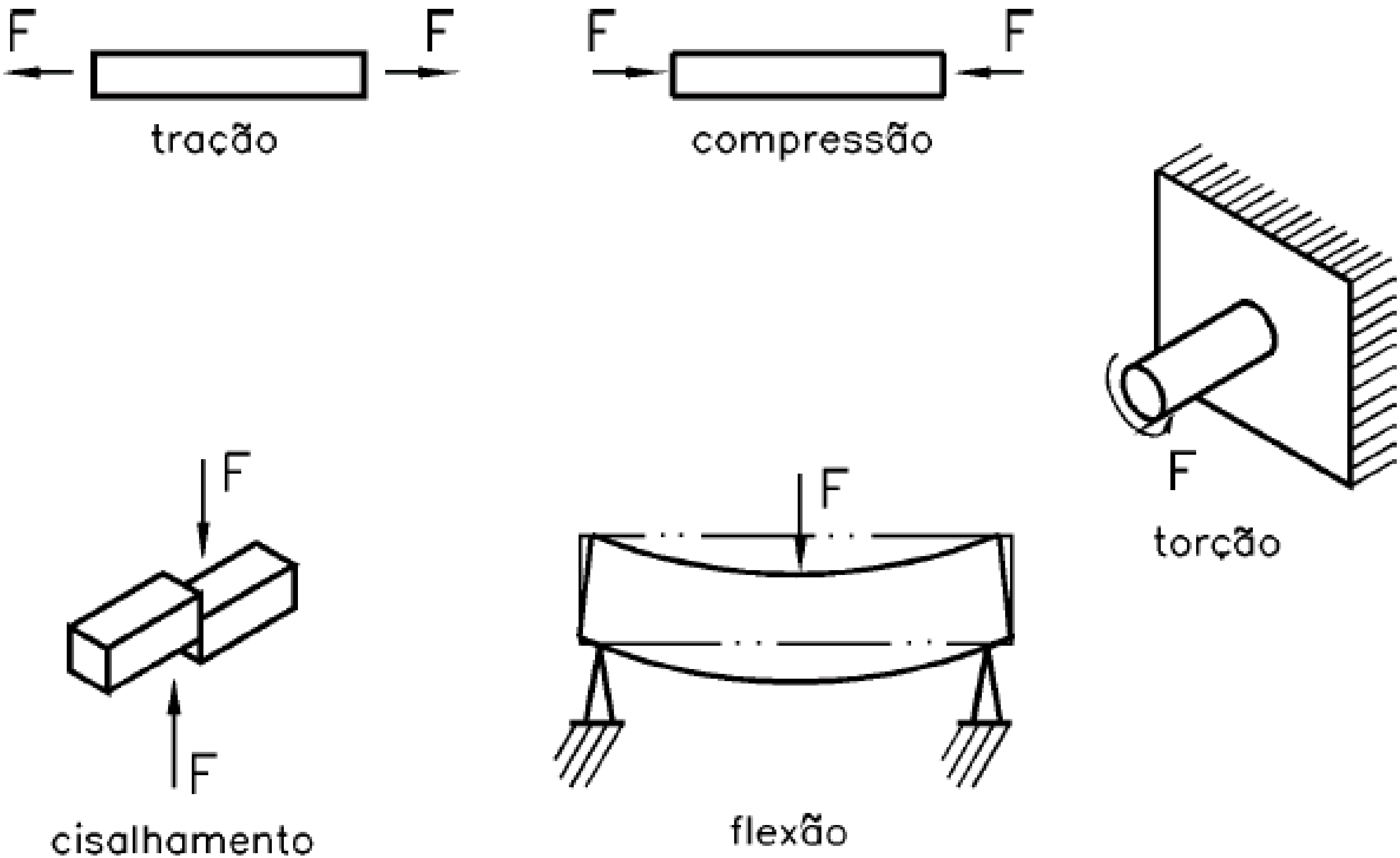
São elementos estruturais que apresentam duas de suas dimensões predominando sobre a terceira.

A Geometria dos Elementos Estruturais

BLOCOS:

São elementos estruturais que apresentam as três dimensões na mesma ordem de grandeza.

Tipos de Solicitações



- ESFORÇOS
  - Externos
    - Ativos (cargas aplicadas)
    - Reativos (reações nos apoios
  - Internos
    - Tensões
      - Tensões Normais (σ)
      - Tensões Tangenciais (τ)
    - Resultantes
      - Força Normal (N)
      - Força Cortante (Q)
      - Momento Fletor (M)
      - Momento Torçor (T)

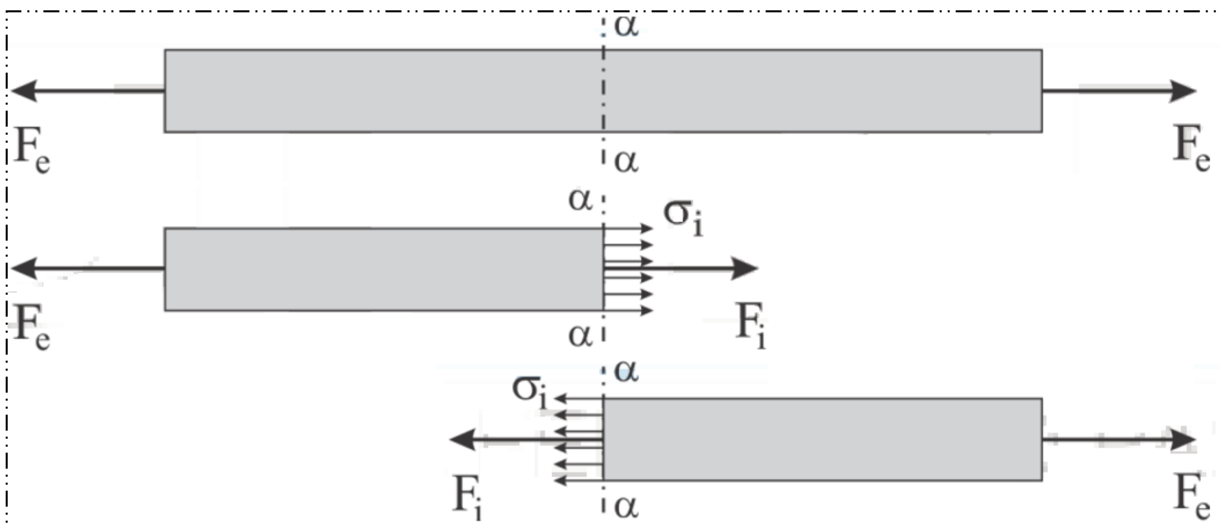


Diagrama de corpo livre ilustrando as tensões internas e os esforços internos normais.

Hipóteses Básicas/Simplificadoras

- **estruturas reticuladas**;
- **estaticamente indeterminadas:** Hiperestáticas;
- **cargas estáticas**;

- **Linearidade geométrica:** (Pequenas deformações e pequenos deslocamentos)
- **Linearidade física:** (Relação linear entre tensão e deformação)

2. Introdução à Análise Estrutural

Análise Estrutural

- A Modelagem Estrutural é a etapa do projeto estrutural na qual é feita uma previsão do comportamento da estrutura.

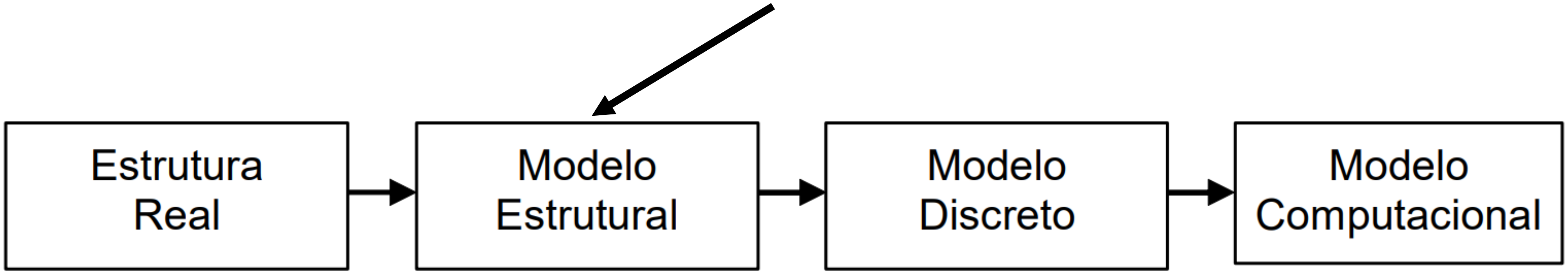


Figura 1.1 – Quatro níveis de abstração para uma estrutura na análise estrutural.

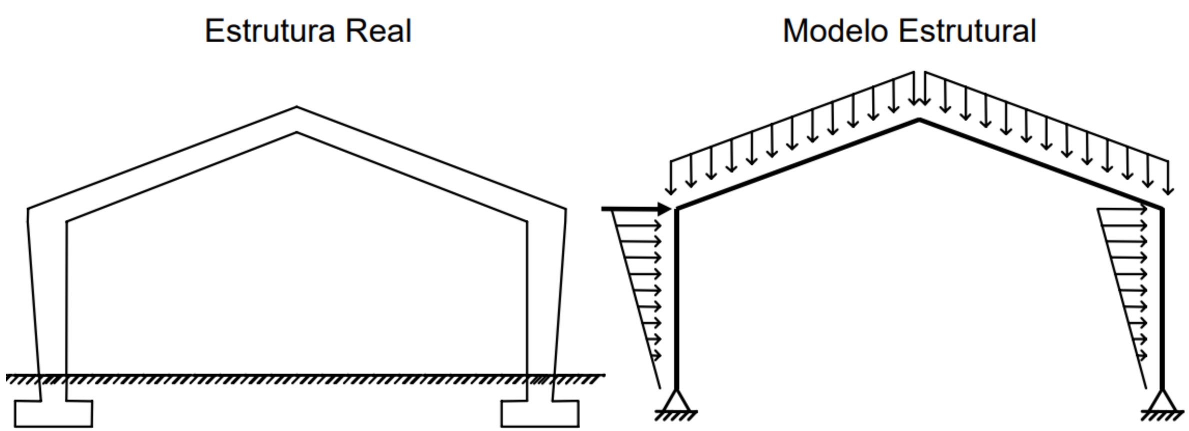


Figura 1.2 – Estrutura real e o seu modelo estrutural.

Análise Estrutural

O modelo Estrutural: Representa matematicamente a estrutura.

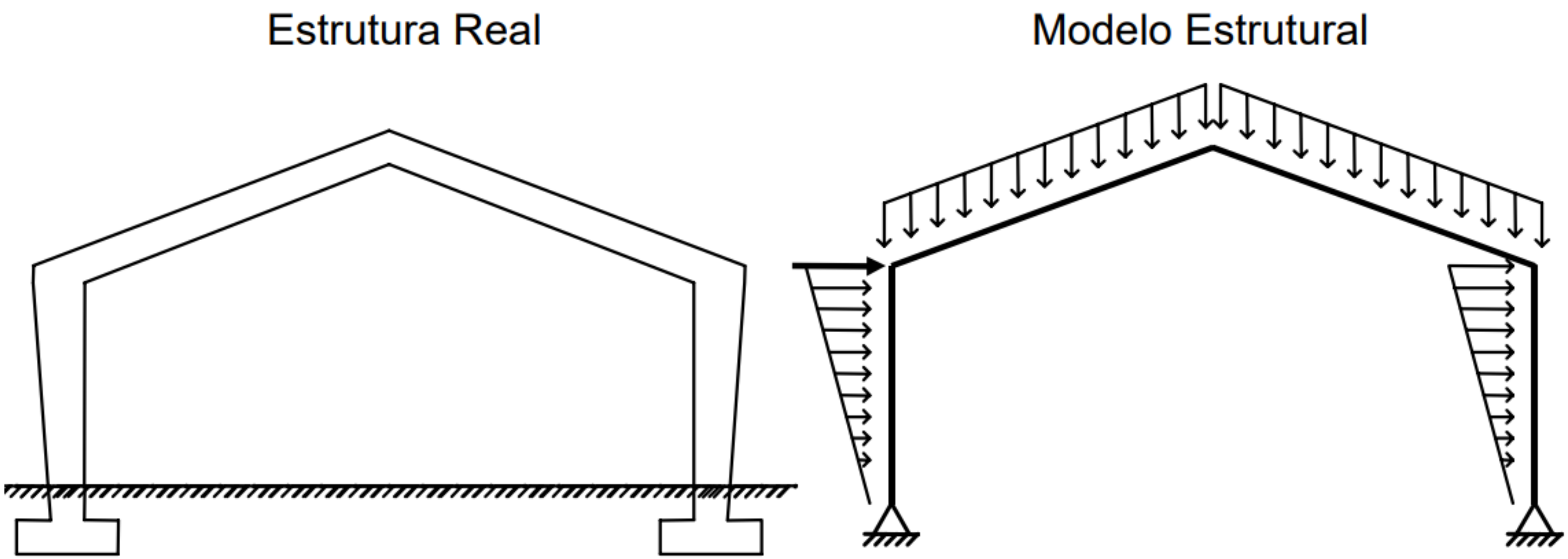


Figura 1.2 – Estrutura real e o seu modelo estrutural.

Esse modelo incorpora teorias e hipóteses sobre o comportamento da estrutura sob diversas solicitações, baseadas em leis físicas como equilíbrio de forças, relações de compatibilidade ($\epsilon = d/L$) entre deslocamentos e deformações, e leis constitutivas dos materiais (lei de hooke).

Análise Estrutural

Relações de Compatibilidade: condições que garantem que os deslocamentos e deformações em uma estrutura sejam consistentes e contínuos, sem rupturas ou sobreposições ($\epsilon = d/L$);

Leis constitutivas dos materiais: Expressa a relação entre tensões e deformações (*lei de Hooke*).

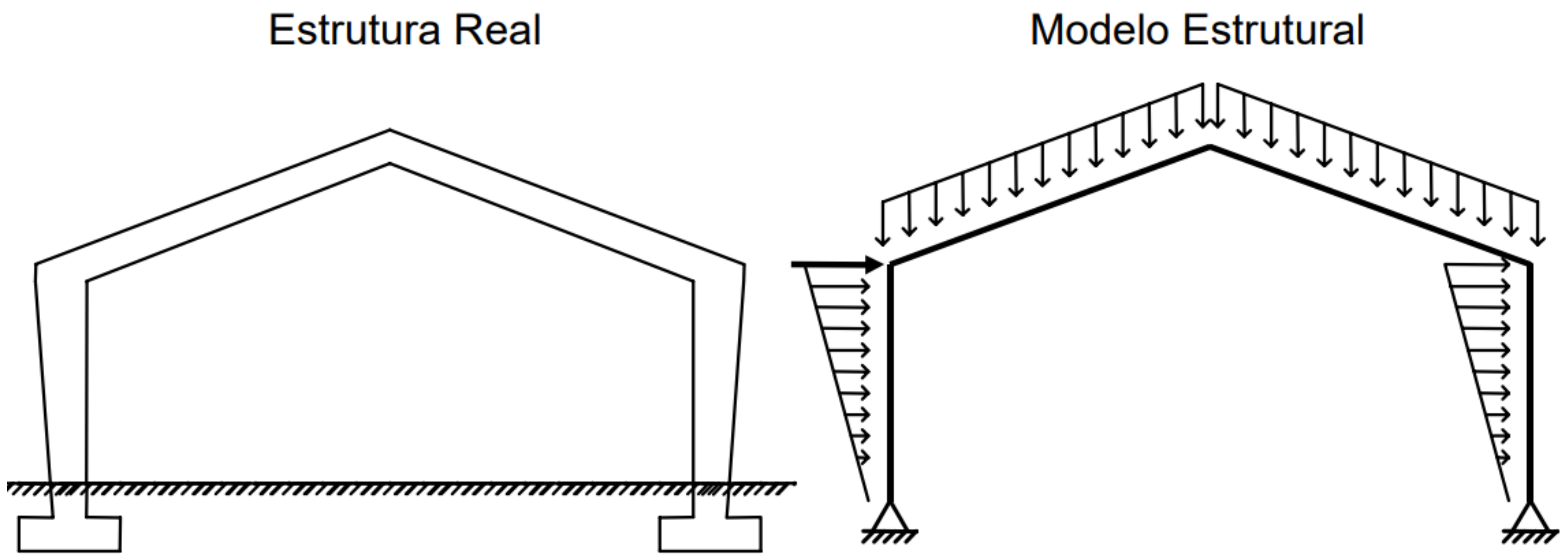
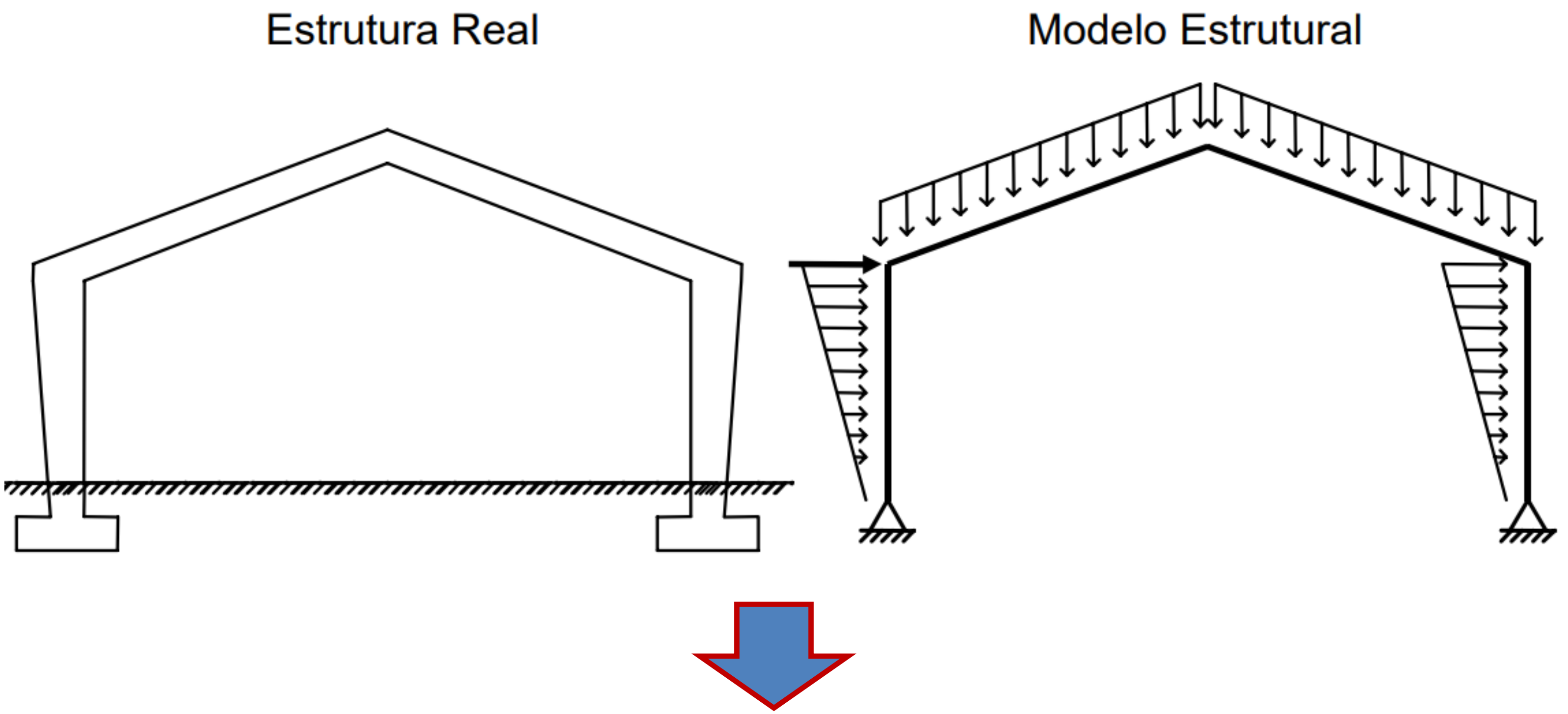


Figura 1.2 – Estrutura real e o seu modelo estrutural.

Análise Estrutural

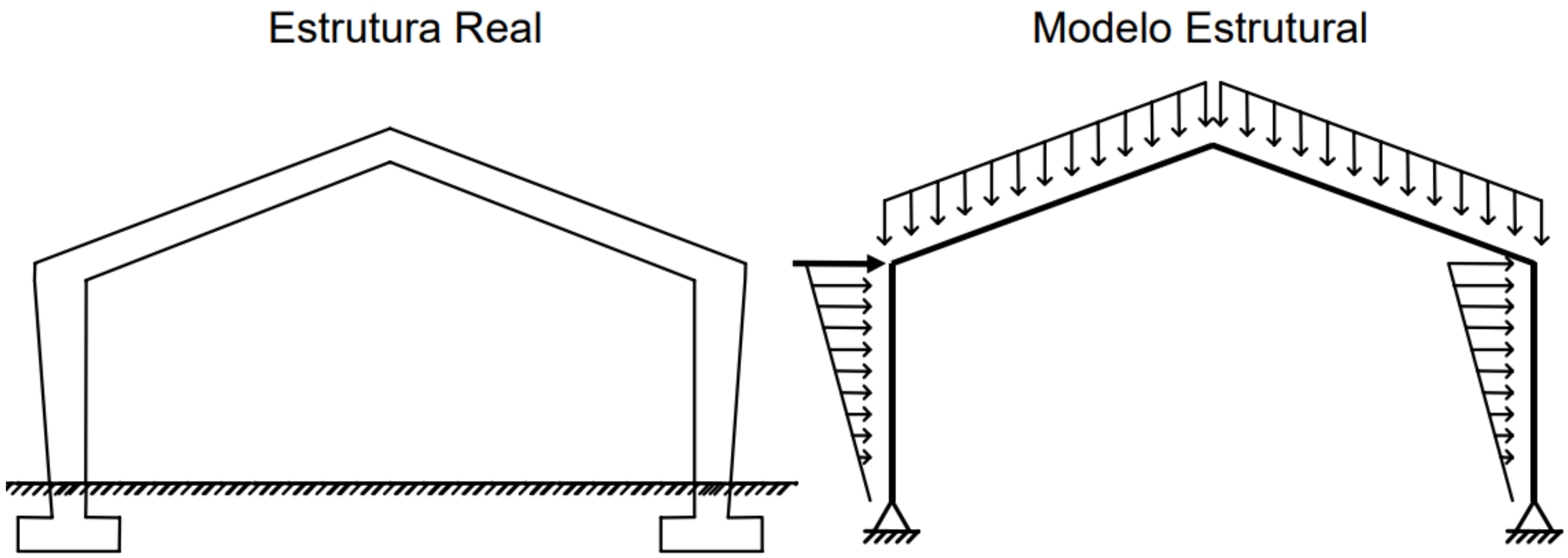
O modelo Estrutural: Representa matematicamente a estrutura.



Hipóteses considerada no modelo: $\epsilon = d/L$; *lei de Hooke; carga permanente, carga variável;* condições de apoio: *segundo gênero;* etc.

Análise Estrutural

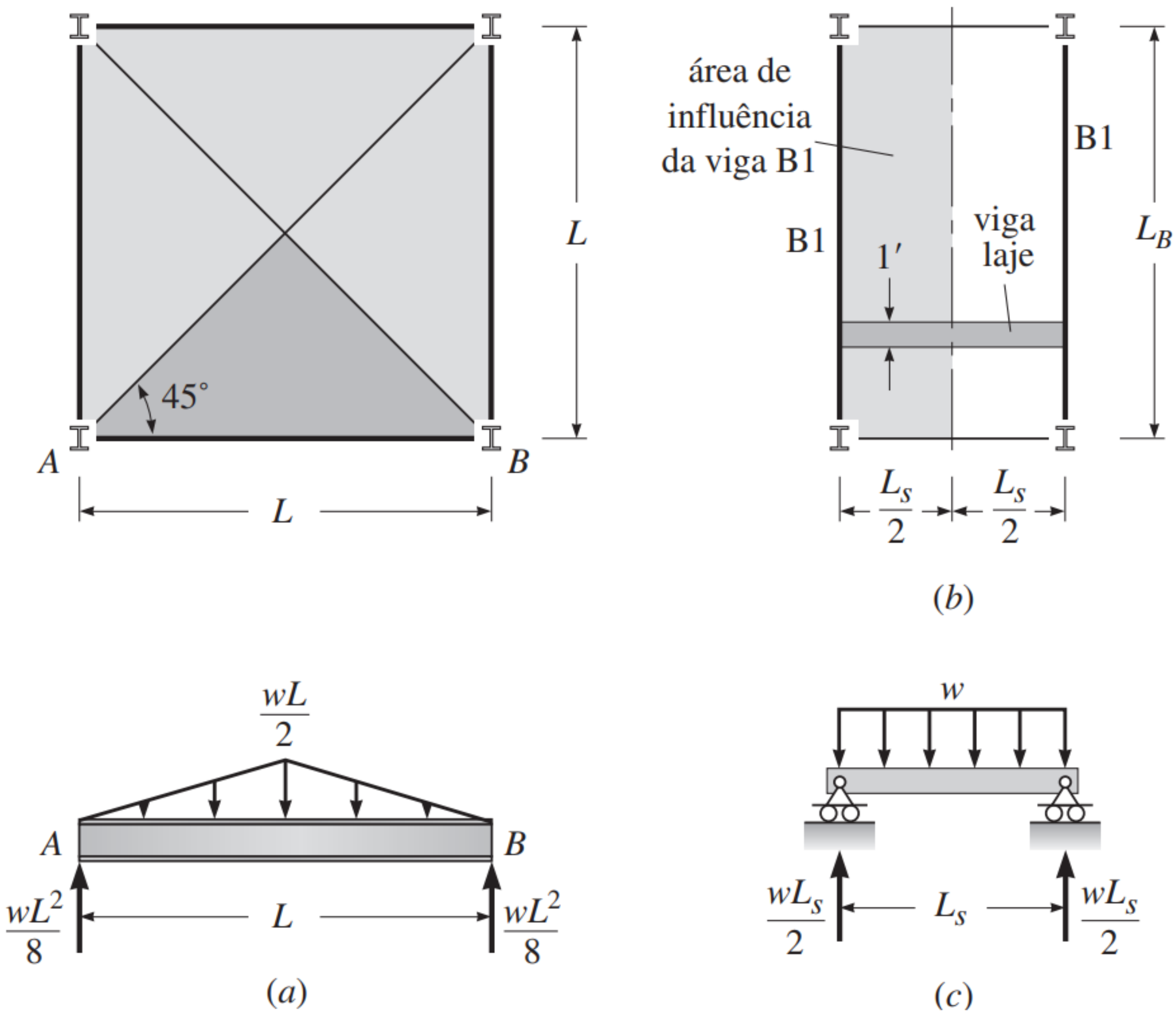
Atenção: Embora a **concepção do modelo estrutural** seja importante na análise estrutural, não é objetivo da disciplina abordar esse assunto. Na disciplina, o modelo estrutural completo vai ser sempre fornecido para a análise.



Esses assuntos, em geral, são abordados em disciplinas que tratam das etapas de dimensionamento e detalhamento dentro do projeto estrutural (Estruturas de Aço, Concreto ou Madeira).

Análise Estrutural

Figura 2.1: Conceito de área de influência: (a) laje quadrada, todas as vigas de borda suportam uma área triangular; (b) duas vigas de borda dividem a carga igualmente; (c) carga em uma largura de 1 pé da laje da Figura b.



Análise Estrutural

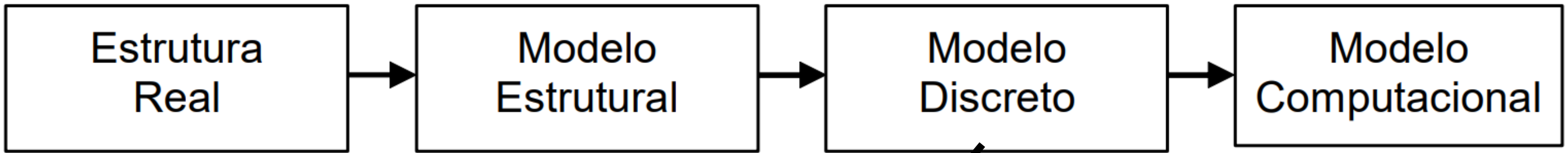


Figura 1.1 – Quatro níveis de abstração para uma estrutura na análise estrutural.

O Modelo Discreto: o comportamento do modelo estrutural é substituído por um comportamento discreto (superposição de soluções), em que soluções subdivididas (discretização).

Análise Estrutural

O Modelo Discreto: o comportamento do modelo estrutural é substituído por um comportamento discreto (superposição de soluções), onde o problema é subdividido (discretização).

(amplificada de forma exagerada)

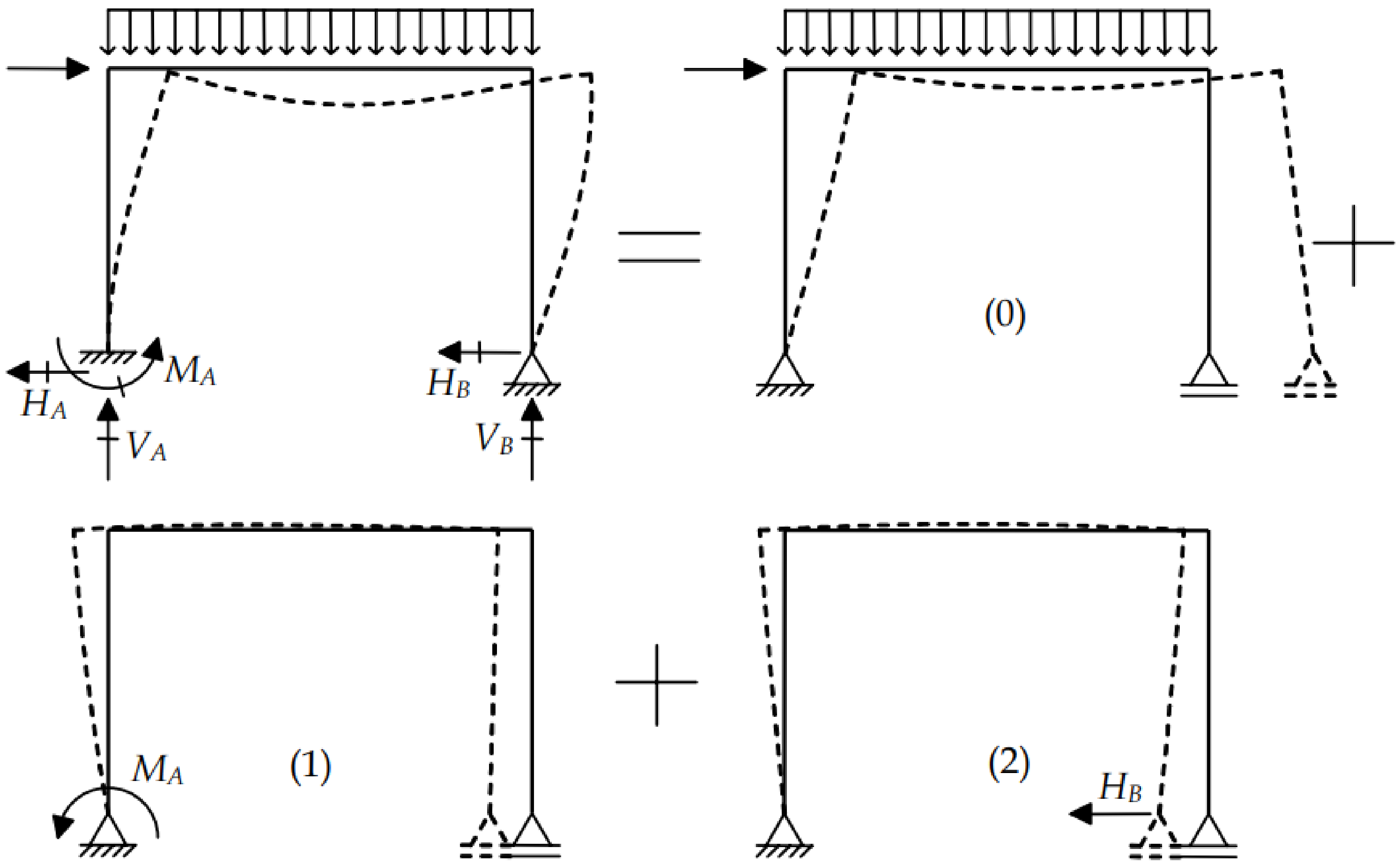


Figura 1.3 – Superposição de soluções básicas no Método das Forças.

Análise Estrutural

Na solução pelo Método dos Deslocamentos para estruturas reticuladas, a solução discreta é representada por valores de deslocamentos e rotações nos nós (deslocabilidades).

(amplificada de forma exagerada)

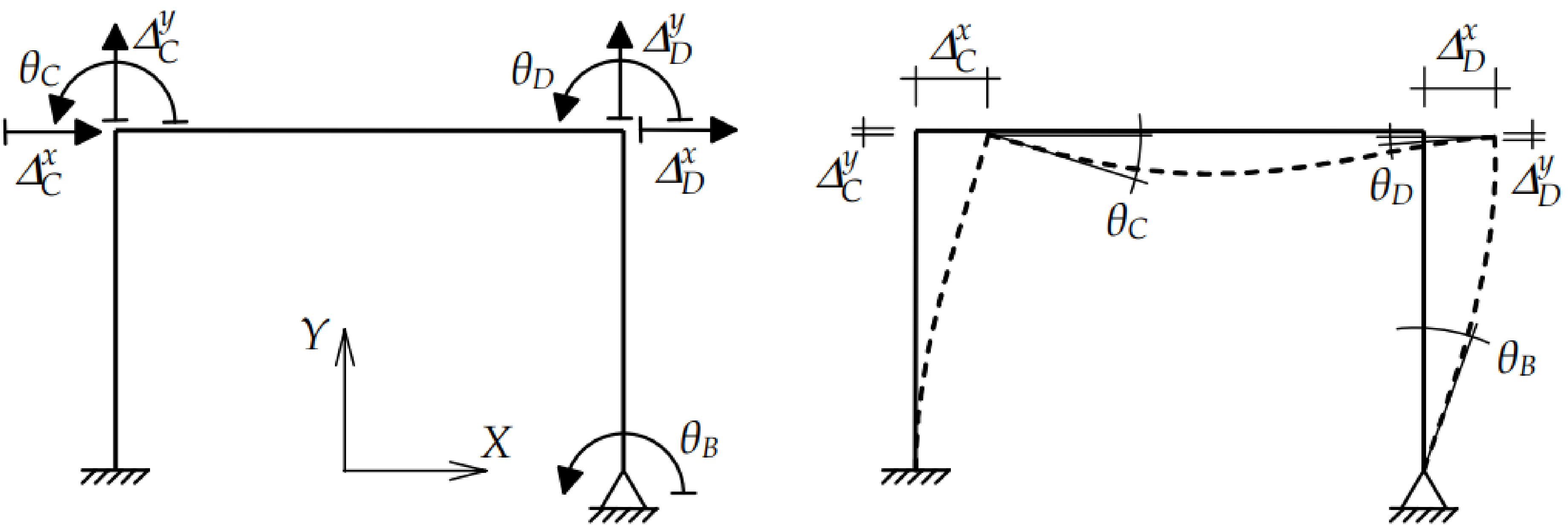
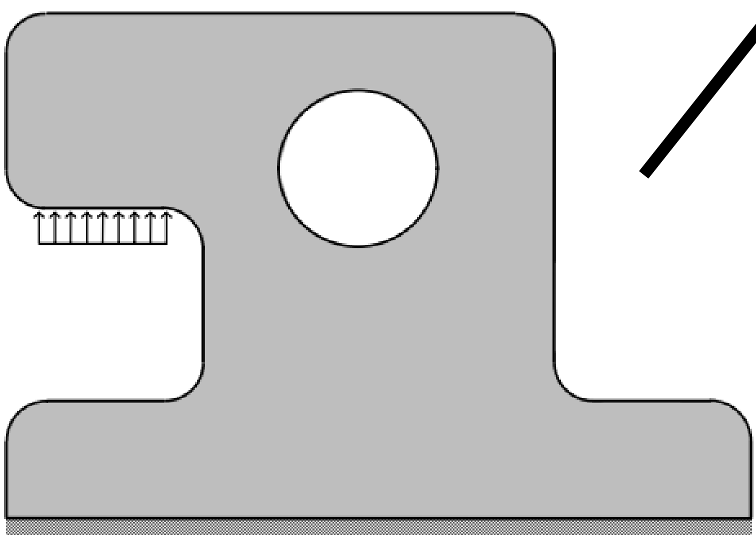


Figura 1.4 – Parâmetros nodais utilizados na discretização pelo Método dos Deslocamentos.

Análise Estrutural

No caso de estruturas contínuas (não reticulares), o método comumente utilizado na análise estrutural é uma formulação em deslocamentos do Método dos Elementos Finitos.



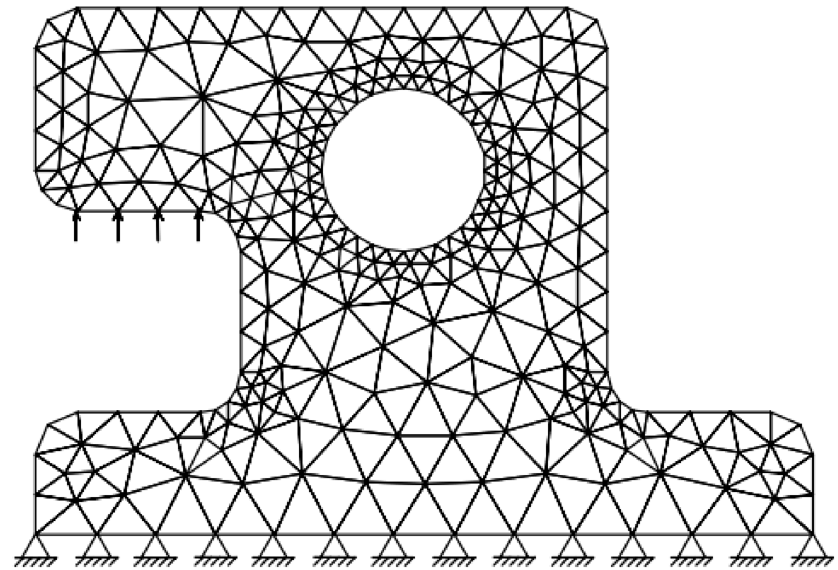


Figura 1.5 – Discretização pelo Método dos Elementos Finitos para uma estrutura contínua.

Os Elementos finitos (usualmente triângulos ou quadriláteros), formando uma malha onde os deslocamentos são calculados nos nós. A malha simplifica a idealização matemática, resultando em uma aproximação da solução real.

Análise Estrutural

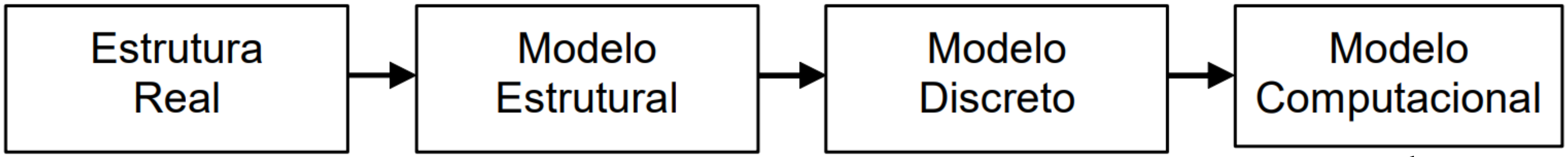


Figura 1.1 – Quatro níveis de abstração para uma estrutura na análise estrutural.

A análise de estruturas pode ser vista atualmente como uma simulação computacional do comportamento de estruturas.

ATENÇÃO: não se concebe atualmente executar as tarefas de análise estrutural, mesmo para o caso de estruturas reticuladas, sem o uso de uma ferramenta computacional (por exemplo ***ftool***).

Análise Estrutural

Estrutura Real → Modelo Estrutural → Modelo Discreto → Modelo Computacional

Figura 1.1 – Quatro níveis de abstração para uma estrutura na análise estrutural.

O Método dos Elementos Finitos abordam a implementação computacional do Método da Rigidez Direta (Método dos Deslocamentos direcionado para uma implementação computacional).

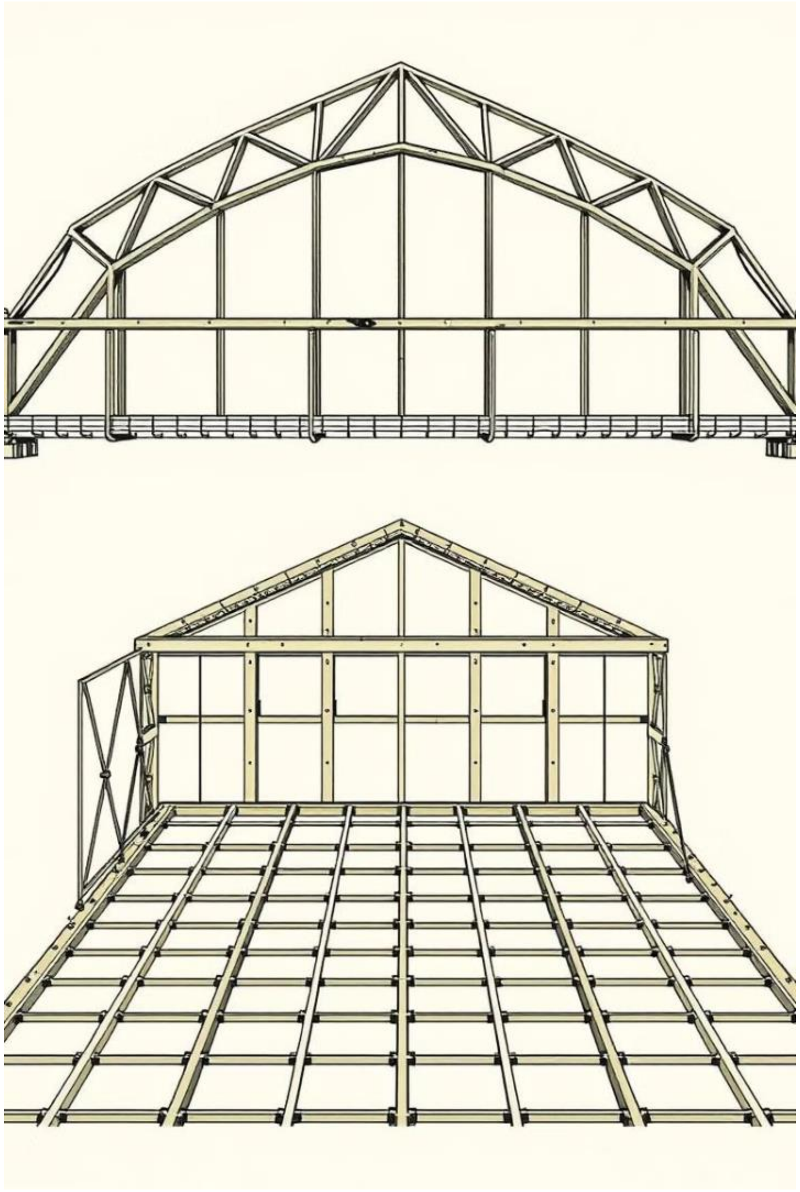
ATENÇÃO: O Método das Forças tem uma metodologia que não é conveniente para ser implementada computacionalmente.

2.1. Classificação de modelos de estruturas reticuladas

Teoria das Estruturas 2

A disciplina descreve o comportamento de estruturas bidimensionais reticuladas hiperestáticas:

Estruturas reticuladas são formadas por barras, elementos estruturais com um eixo claramente definido. Essas estruturas são usadas em uma variedade de aplicações, incluindo coberturas e estruturas de edifícios.



1. **Treliças**

   Treliças são estruturas com barras articuladas em suas extremidades, usadas em pontes e coberturas.

2. **Pórticos**

   Pórticos são estruturas planas ou espaciais que usam colunas e vigas para suportar cargas, frequentemente usadas em edifícios.

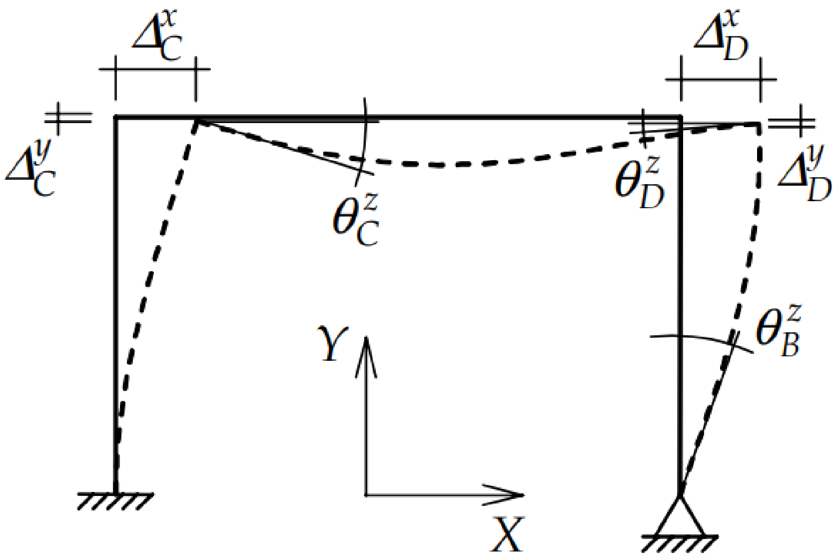
3. **Grelhas**

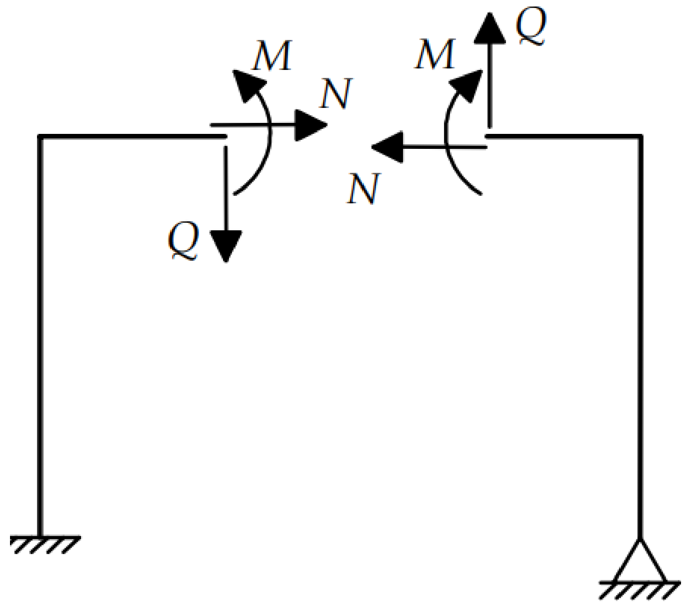
   Grelhas são estruturas planas que suportam cargas fora do plano, usadas em lajes e pisos.

Mesmo em casos de estruturas nas quais nem todos os elementos estruturais podem ser considerados como barras (como é o caso de edifícios de concreto armado), é comum analisar o comportamento global ou parcial da estrutura utilizando-se um modelo de barras.

Classificação de Modelos

➢ Quadros Planos:





Esforços internos são integrais de tensões ao longo de uma seção transversal de uma barra.

$\Delta^x \rightarrow$ deslocamento na direção do eixo global X;

$\Delta^y \rightarrow$ deslocamento na direção do eixo global Y;

$\theta^z \rightarrow$ rotação em torno do eixo global Z.

- quadros planos é que não existem deslocamentos na direção ***Z***.
- ***As ligações entre as barras são consideradas perfeitas (ligações rígidas)***

Classificação de Modelos

- **Treliças**:

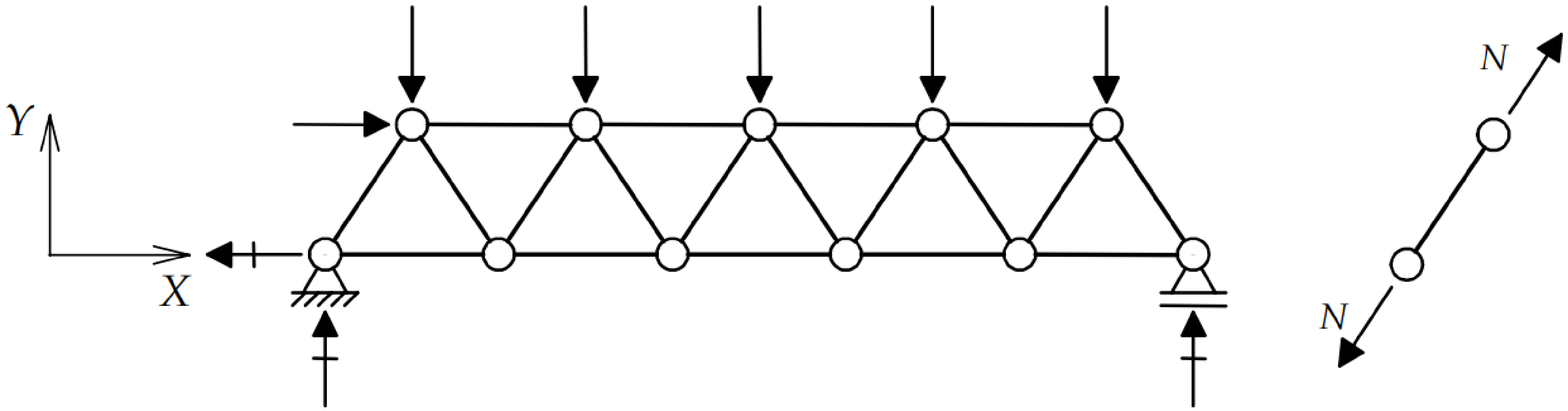


Figura 2.3 – Eixos globais, cargas, reações e esforço interno normal de uma treliça plana.

- ***Ligações Articuladas (as barras podem girar independentemente nas ligações).***

- ***esforços cortantes e momentos fletores são pequenos em relação aos esforços normais.***

- A hipótese de ligações articuladas é uma simplificação para o comportamento de uma treliça, pois muitas vezes não existem articulações nos nós.

Classificação de Modelos

- **Grelhas**:

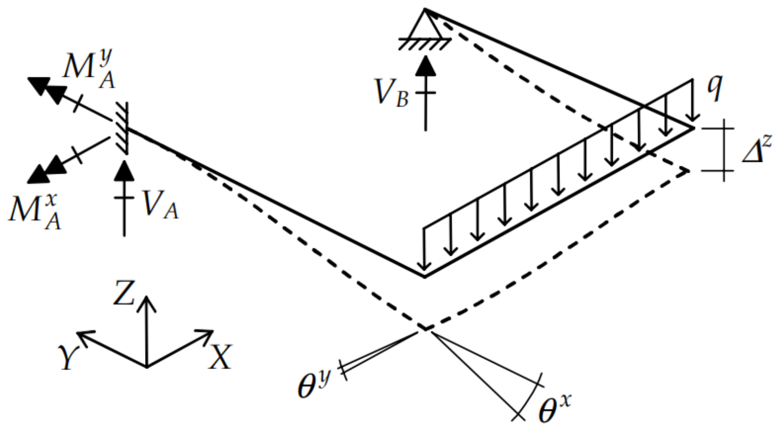
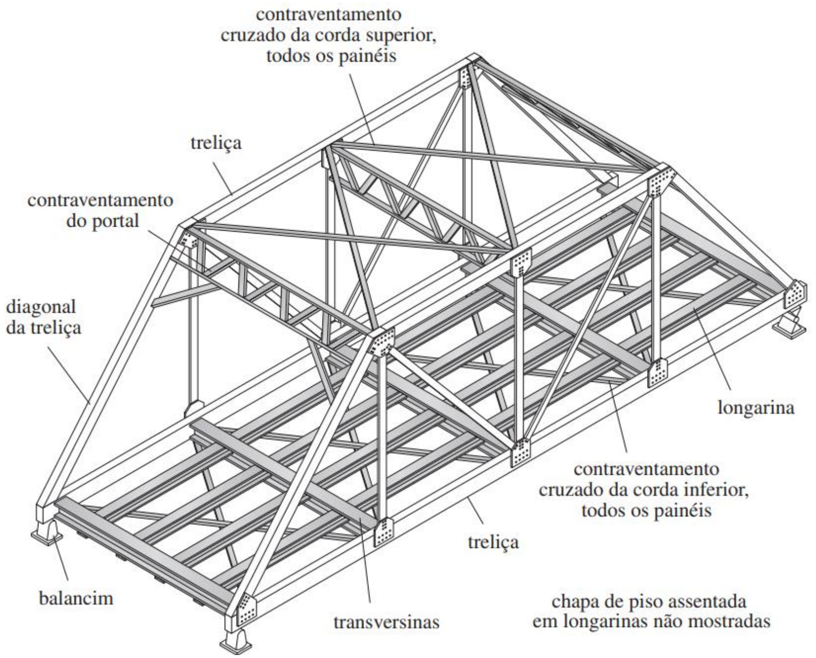


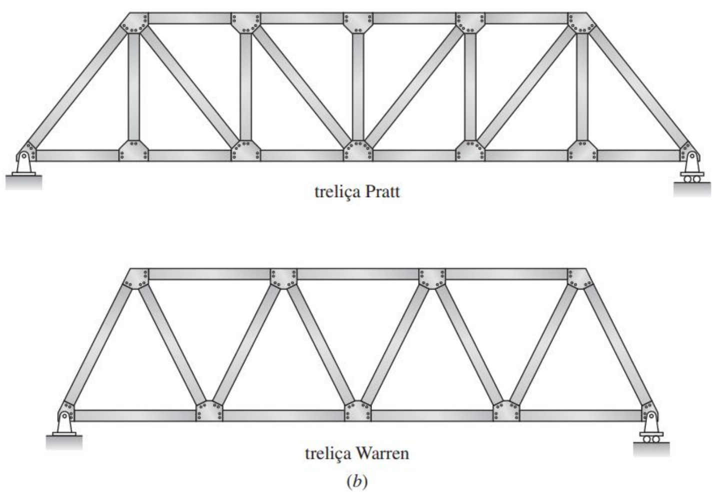
Tabela 2.1 – Comparação entre quadro plano e grelha.

	Quadro Plano	Grelha
Deslocamento em X	Δ^x	$\Delta^x = 0$
Deslocamento em Y	Δ^y	$\Delta^y = 0$
Deslocamento em Z	$\Delta^z = 0$	Δ^z
Rotação em torno de X	$\theta^x = 0$	θ^x
Rotação em torno de Y	$\theta^y = 0$	θ^y
Rotação em torno de Z	θ^z	$\theta^z = 0$
Esforço normal	$N = N^x$ (x local)	$N = 0$
Esforço cortante	$Q = Q^y$ (y local)	$Q = Q^z$ (z local)
Momento fletor	$M = M^z$ (z local)	$M = M^y$ (y local)
Momento torçor	$T = 0$	$T = T^x$ (x local)

Hipóteses Básicas/Simplificadoras

A maioria das estruturas tridimensionais, normalmente pode ser simplificada a análise da estrutura real, subdividindo-a em subsistemas bidimensionais menores.





2.2. Condições básicas da análise estrutural

Condições básicas: Exemplo Simples

- **2.2.1. Condições de equilíbrio**: Considera a geometria original (indeformada) da estrutura (pequenas deformações/deslocamentos: Chamada análise de 1ª Ordem).

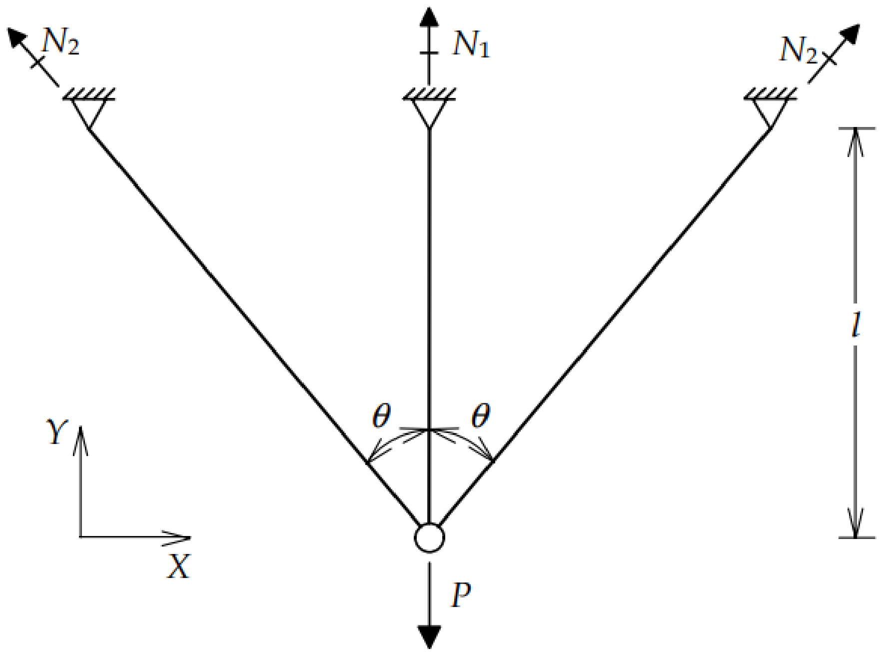


Figura 2.7 – Estrutura com três barras articuladas.

- Hiperestático:
  - Necessita de outras condições
  - Requer a resolução de um sistema de quatro equações a quatro incógnitas.

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow N_1 + 2 \cdot N_2 \cdot \cos\theta = P$$

Condições básicas: Exemplo Simples

- **2.2.2. Condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações**: condições geométricas que devem ser satisfeitas para garantir que a estrutura, ao se deformar, permaneça contínua (sem vazios ou sobreposição de pontos) e compatível com seus vínculos externos.

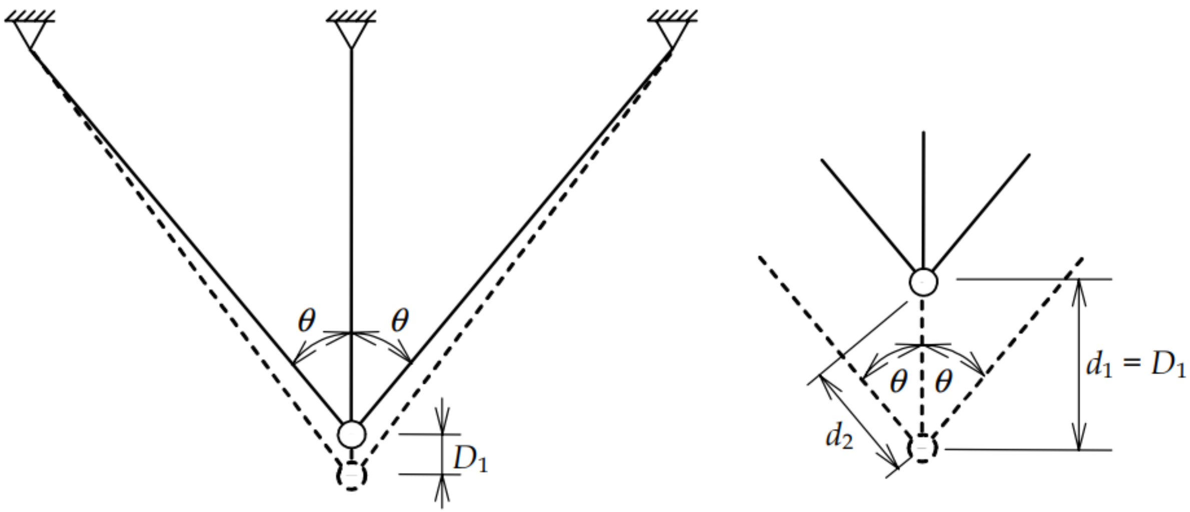


Figura 2.8 – Configuração deformada da estrutura com três barras articuladas.

Condições básicas: Exemplo Simples

- **2.2.2. Condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações**:

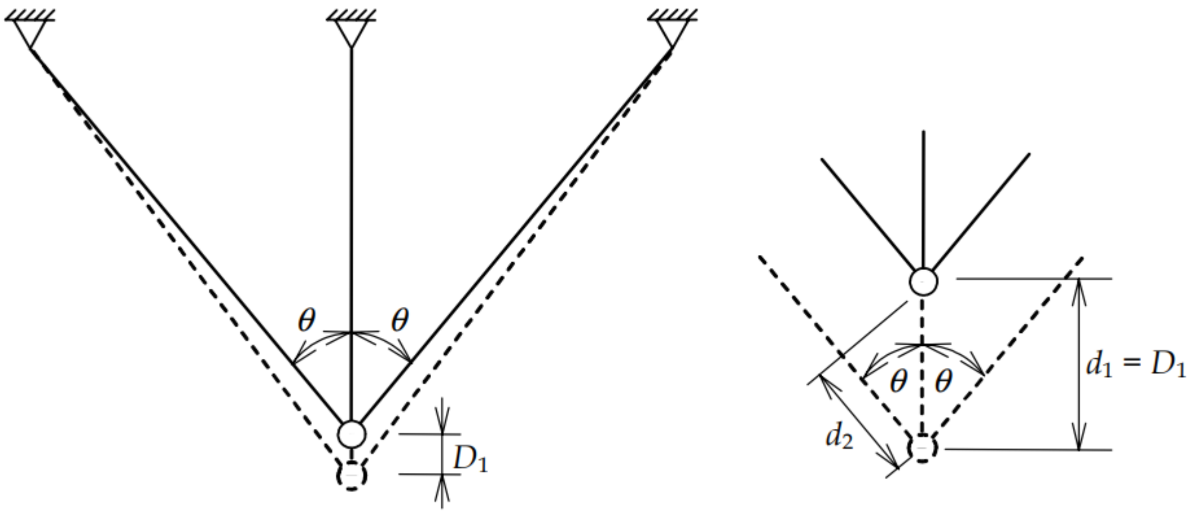


Figura 2.8 – Configuração deformada da estrutura com três barras articuladas.

As condições de compatibilidade devem garantir que: as três barras permaneçam ligadas. Considerando pequenos deslocamentos, o ângulo entre as barras após a deformação da estrutura não se altera.

Condições básicas: Exemplo Simples

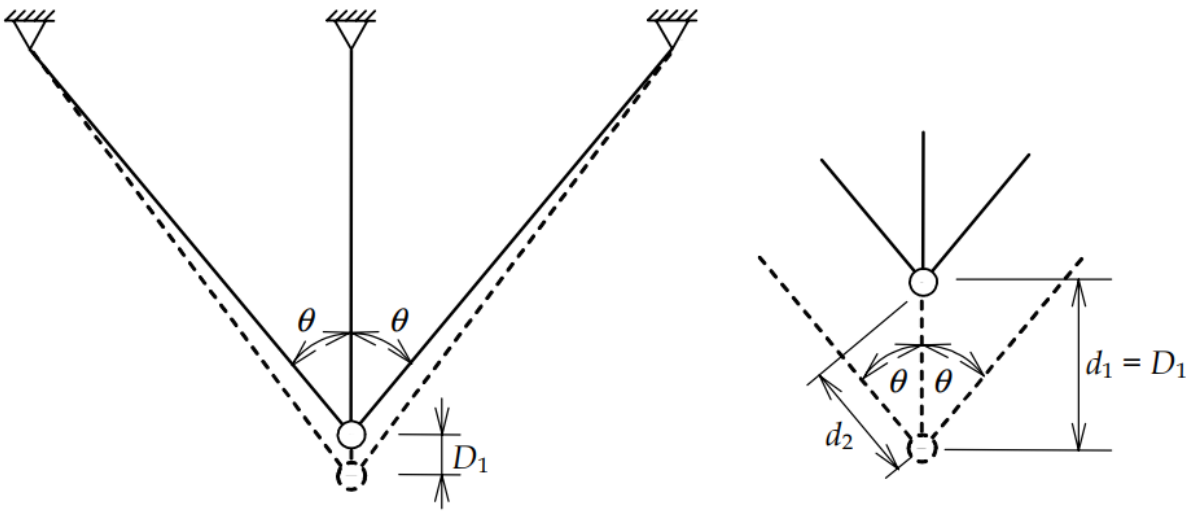


Figura 2.8 – Configuração deformada da estrutura com três barras articuladas.

$D_1 \rightarrow$ deslocamento vertical do nó inferior;

$d_1 \rightarrow$ alongamento da barra vertical;

$d_2 \rightarrow$ alongamento das barras inclinadas.

Isto resulta na seguinte equação de compatibilidade entre os alongamentos das barras:

$$d_2 = d_1 \cdot \cos\theta \; . \qquad (2.2)$$

Condições básicas: Exemplo Simples

- **2.2.3. Leis constitutivas dos materiais:** modelo matemático do comportamento dos materiais, expresso por um conjunto de relações matemáticas entre tensões e deformações.

A lei constitutiva que relaciona tensões normais e deformações normais é a conhecida Lei de Hooke.

$$\sigma_x = E\varepsilon_x ,$$

$$\frac{N_1}{A} = E\frac{d_1}{l} ,$$

$$\frac{N_2}{A} = E\frac{d_2}{l/\cos\theta} .$$

Condições básicas: Exemplo Simples

ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

Leis constitutivas | **Cond. Compatibilidade** | **Eq. Equilíbrio**

$$\sigma_x = E\varepsilon_x ,$$

$$\frac{N_1}{A} = E\frac{d_1}{l} ,$$

$$\frac{N_2}{A} = E\frac{d_2}{l/\cos\theta} .$$

$+$

$$d_2 = d_1 \cdot \cos\theta .$$

$+$

$$N_1 + 2 \cdot N_2 \cdot \cos\theta = P$$

METODOLOGIA PARA SOLUÇÃO

Método das Forças

Método dos Deslocamentos

Metodologias para a solução de estruturas hiperestáticas:

Método das Forças X Método dos Deslocamentos

Método das Forças

Método das Forças

- No chamado Método das Forças as incógnitas principais do problema são forças e momentos (Reações de apoio/Esforços).

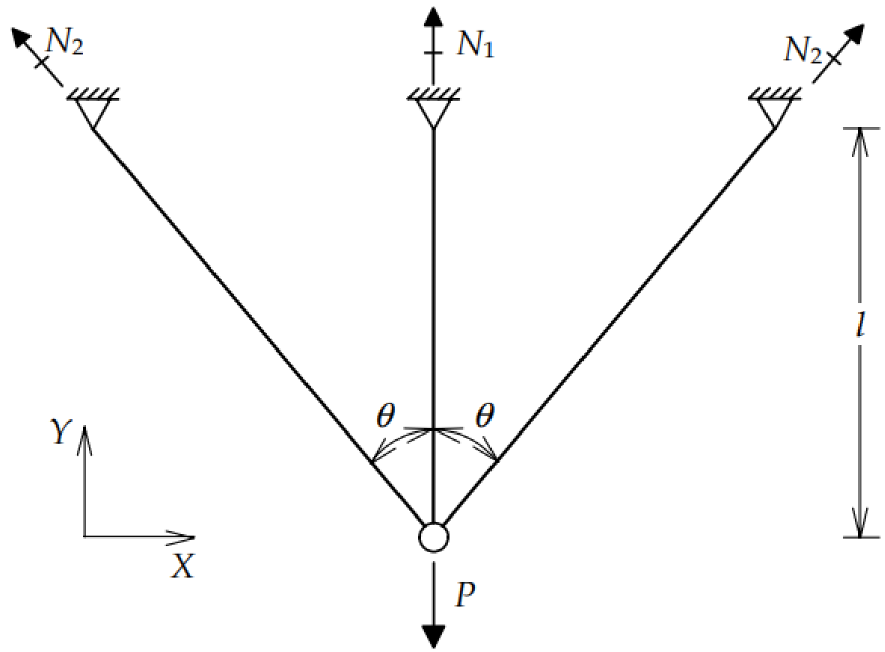


Figura 2.7 – Estrutura com três barras articuladas.

Método das Forças

- No chamado Método das Forças as incógnitas principais do problema são forças e momentos.

Sequência de introdução das condições básicas do problema

1º Eq. Equilíbrio **2º Leis constitutivas** **3º Compatibilidade**

$$N_1 + 2 \cdot N_2 \cdot \cos\theta = P$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \, ,$$

$$\frac{N_1}{A} = E\frac{d_1}{l} \, ,$$

$$\frac{N_2}{A} = E\frac{d_2}{l/\cos\theta} \, .$$

$$d_2 = d_1 \cdot \cos\theta \, .$$

Método das Forças

- No chamado Método das Forças as incógnitas principais do problema são forças e momentos.

Sequência de introdução das condições básicas do problema

1º Eq. Equilíbrio

N2 em Função de N1

$$N_2 = \frac{P - N_1}{2 \cdot \cos\theta}$$

2º Leis constitutivas

d1 e d2 em função de N1 e N2

$$\left(\frac{l}{EA} + \frac{l}{2 \cdot EA \cdot (\cos\theta)^3}\right) \cdot N_1 = \frac{P \cdot l}{2 \cdot EA \cdot (\cos\theta)^3}$$

3º Compatibilidade

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cdot (\cos\theta)^3};$$

$$N_2 = \frac{P \cdot (\cos\theta)^2}{1 + 2 \cdot (\cos\theta)^3}.$$

Método das Forças

- No chamado Método das Forças as incógnitas principais do problema são forças e momentos.

Sequência de introdução das condições básicas do problema

1º Eq. Equilíbrio

N2 em Função de N1

$$N_2 = \frac{P - N_1}{2 \cdot \cos\theta}$$

2º Leis constitutivas

d1 e d2 em função de N1 e N2

$$\left(\frac{l}{EA} + \frac{l}{2 \cdot EA \cdot (\cos\theta)^3}\right) \cdot N_1 = \frac{P \cdot l}{2 \cdot EA \cdot (\cos\theta)^3}$$

3º Compatibilidade

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cdot (\cos\theta)^3} \; ;$$

$$N_2 = \frac{P \cdot (\cos\theta)^2}{1 + 2 \cdot (\cos\theta)^3} \, .$$

INVIÁVEL PARA PROBLEMAS COMPLEXOS:

A metodologia adotada na prática faz uma parametrização (discretização)

Método das Forças

A ideia básica é tornar a estrutura indeterminada em uma estrutura determinadamente estável, removendo restrições, como apoios ou barras, que tornam a estrutura indeterminada.

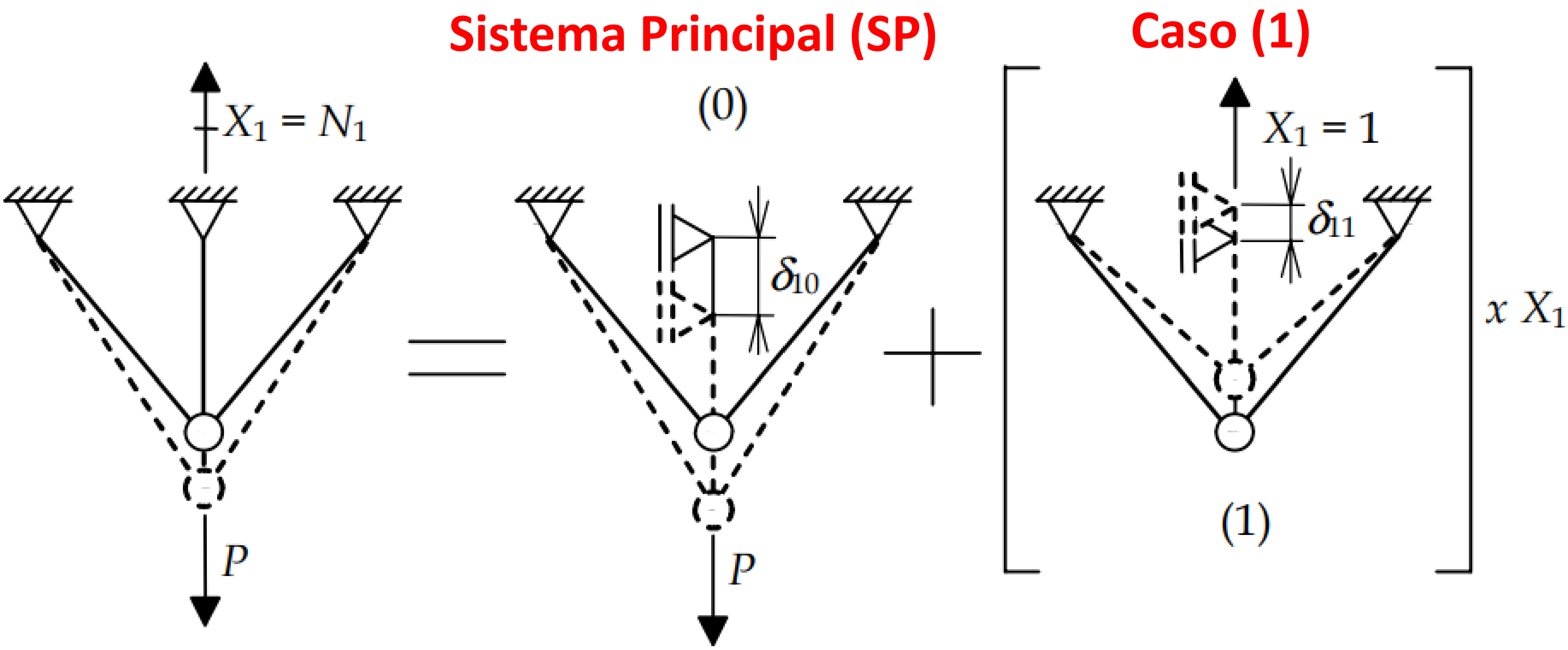
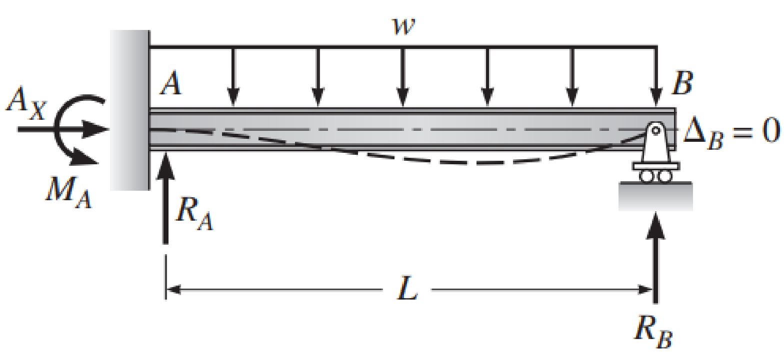


Figura 2.9 – Superposição de soluções básicas do Método das Forças.

Método das Forças

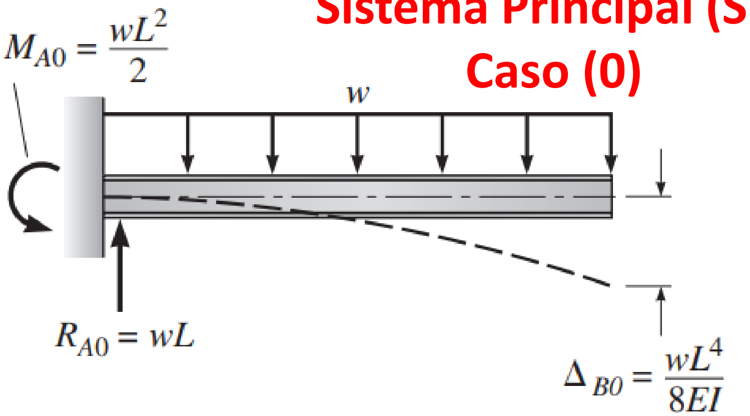
Em resumo, o Método das Forças transforma estruturas indeterminadas em determinadas e usa equações de compatibilidade para encontrar as forças desconhecidas.



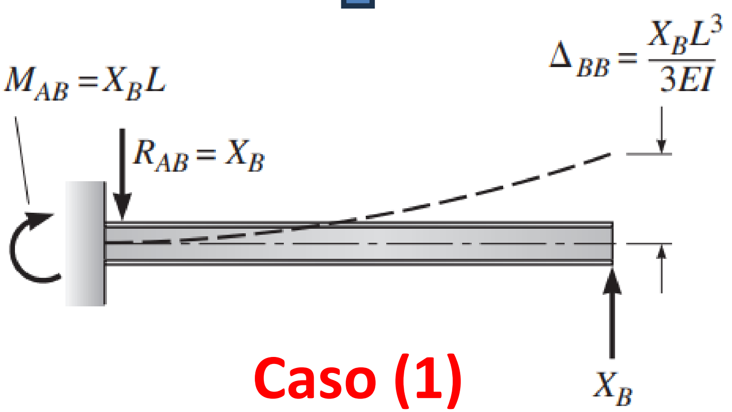
=

Sistema Principal (SP)

Caso (0)



+



Caso (1)

Método das Forças

A metodologia de cálculo do determina o valor que o hiperestático deve ter para recompor o vínculo eliminado no SP.

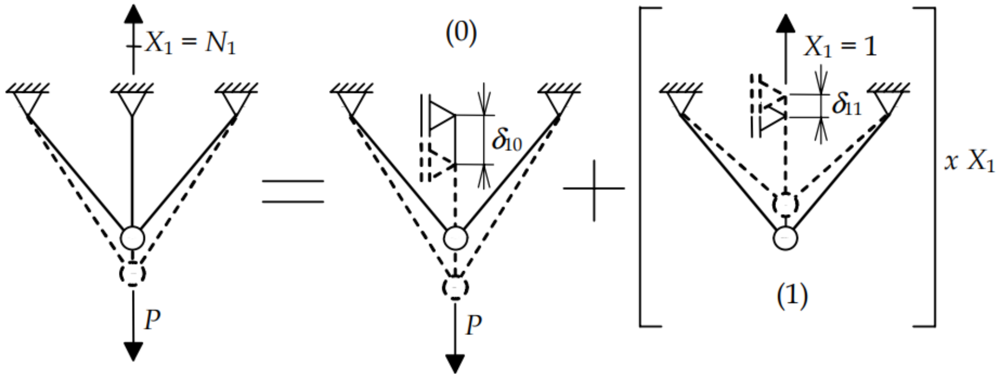


Figura 2.9 – Superposição de soluções básicas do Método das Forças.

Método das Forças

Essa condição pode ser expressa matematicamente por uma equação de compatibilidade que superpõe os **deslocamentos no vínculo eliminado** de cada caso básico:

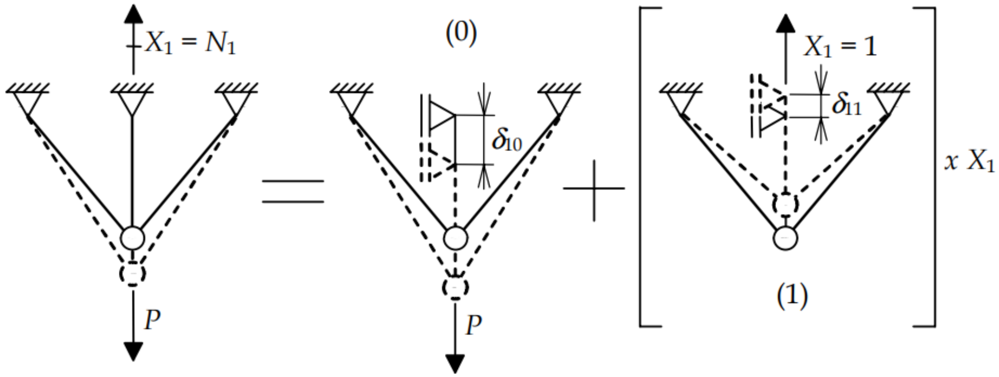


Figura 2.9 – Superposição de soluções básicas do Método das Forças.

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0\,. \qquad (2.9)$$

Nessa equação:

$\delta_{10} \rightarrow$ *termo de carga*: deslocamento vertical no ponto do vínculo eliminado no caso (0);

$\delta_{11} \rightarrow$ *coeficiente de flexibilidade*: deslocamento vertical no ponto do vínculo eliminado devido a um valor unitário do hiperestático aplicado isoladamente.

Método das Forças

Essa metodologia será formalizada detalhadamente mais a frente. A metodologia está baseada na validade do Princípio da Superposição de Efeitos e serve para resolver qualquer estrutura hiperestática reticulada com comportamento linear.

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \,. \tag{2.9}$$

Nessa equação:

$\delta_{10} \rightarrow$ *termo de carga*: deslocamento vertical no ponto do vínculo eliminado no caso (0);

$\delta_{11} \rightarrow$ *coeficiente de flexibilidade*: deslocamento vertical no ponto do vínculo eliminado devido a um valor unitário do hiperestático aplicado isoladamente.

Método dos Deslocamentos

Método dos Deslocamentos

- Nesse método as incógnitas principais do problema são deslocamentos e rotações.

Sequência de introdução das condições básicas do problema

1º Compatibilidade **2º Leis constitutivas** **3º Eq. Equilíbrio**

$$d_2 = d_1 \cdot \cos\theta \,.$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \,,$$

$$\frac{N_1}{A} = E\frac{d_1}{l} \,,$$

$$\frac{N_2}{A} = E\frac{d_2}{l/\cos\theta} \,.$$

$$N_1 + 2 \cdot N_2 \cdot \cos\theta = P$$

Método dos Deslocamentos

- Nesse método as incógnitas principais do problema são deslocamentos e rotações.

Sequência de introdução das condições básicas do problema

1º Compatibilidade **2º Leis constitutivas** **3º Eq. Equilíbrio**

$$d_2 = d_1 \cdot \cos\theta .$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x ,$$

$$\frac{N_1}{A} = E\frac{d_1}{l} ,$$

$$\frac{N_2}{A} = E\frac{d_2}{l/\cos\theta} .$$

$$N_1 + 2 \cdot N_2 \cdot \cos\theta = P$$

INVIÁVEL PARA PROBLEMAS COMPLEXOS:

A metodologia adotada na prática faz uma parametrização (discretização)

Método dos Deslocamentos

As variáveis são os parâmetros que definem completamente a configuração deformada da estrutura, que são chamados de deslocabilidades.

Método dos Deslocamentos

Para o exemplo, devido à simetria da estrutura, está sendo considerado que o nó inferior não se desloca lateralmente. Portanto, só existe uma deslocabilidade, que é o deslocamento vertical.

Sistema Hipergeométrico (SH)
Caso (0)

Caso (1)

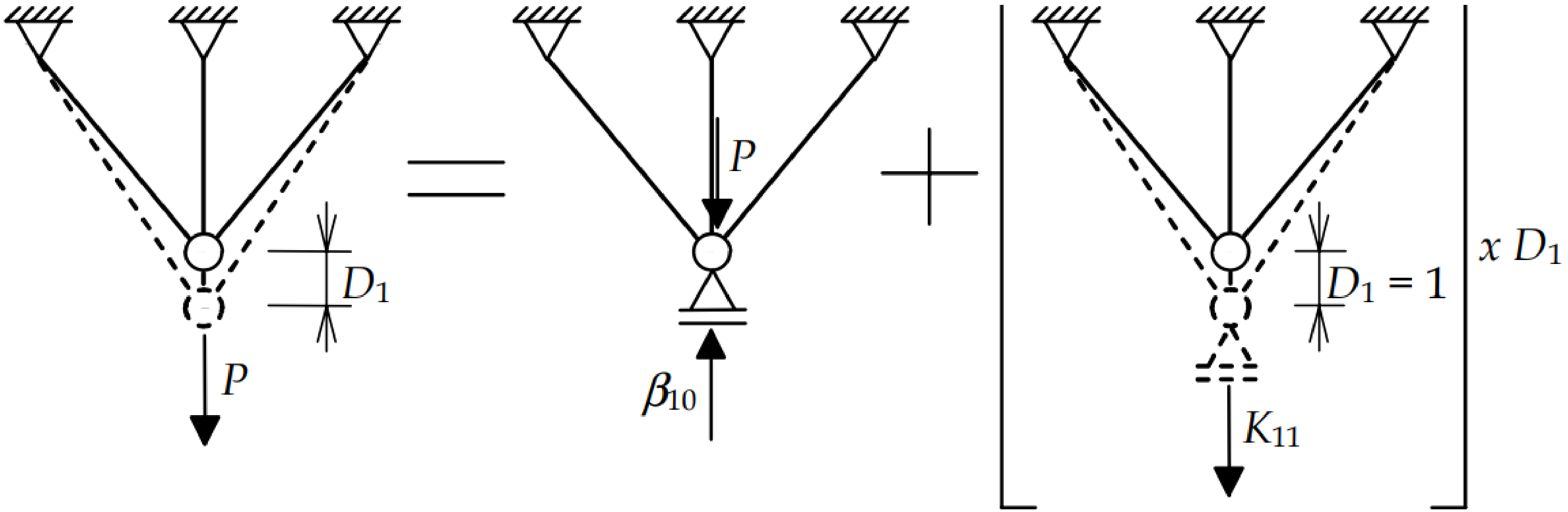


Figura 2.10 – Superposição de soluções básicas do Método dos Deslocamentos.

Método dos Deslocamentos

Essa condição pode ser expressa matematicamente por uma equação de Equilibrio que superpõe as **reações no apoio fictício do SH** de cada caso básico:

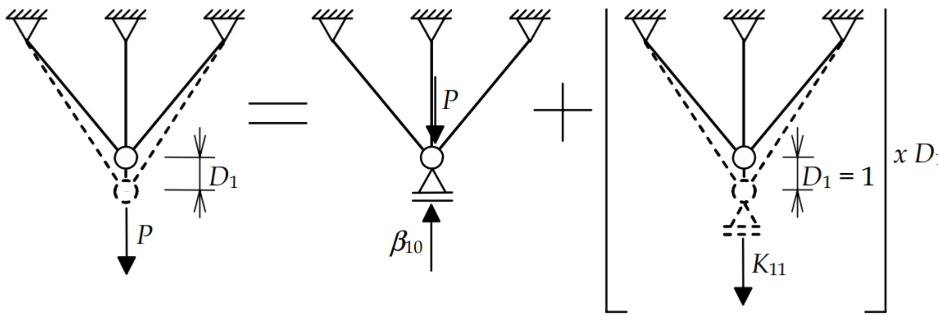


Figura 2.10 – Superposição de soluções básicas do Método dos Deslocamentos.

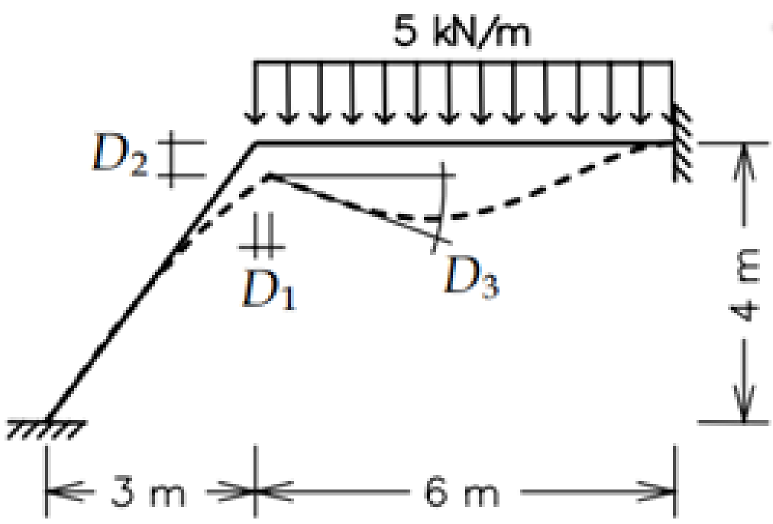
$$\beta_{10} + K_{11} \cdot D_1 = 0\,. \qquad (2.11)$$

Nessa equação:

β_{10} → *termo de carga*: força (reação) vertical no apoio fictício do caso (0);

K_{11} → *coeficiente de rigidez*: força vertical no apoio fictício do SH necessária para impor uma configuração deformada tal que a deslocabilidade D_1 tenha um valor unitário.

Método dos Deslocamentos



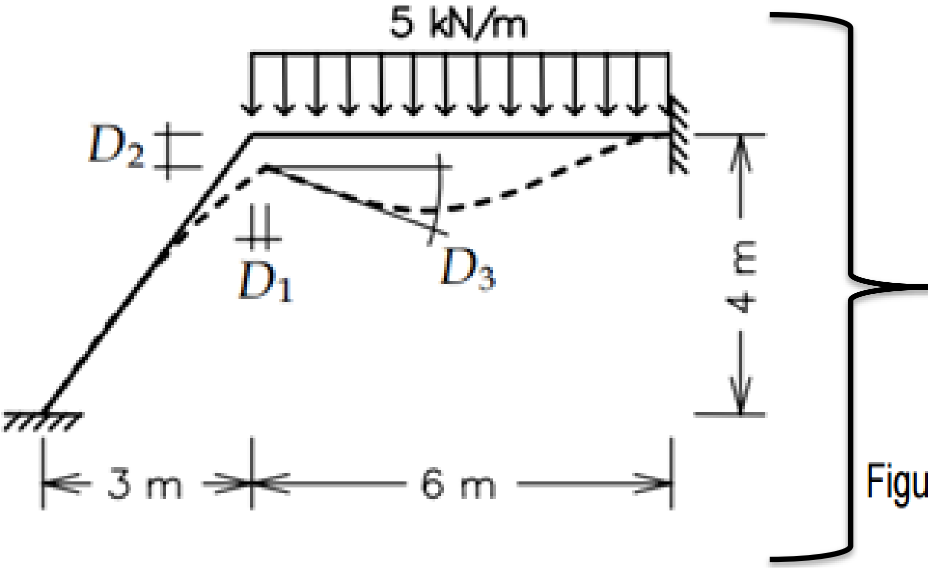
Passo 1: Deslocabilidades e Sistema Hipergeométrico (SH);

PASSO 2: Restabelecimento das condições de equilibrio;

PASSO 3: Determinação dos esforços internos.

Método dos Deslocamentos

No exemplo em estudo, existem g = 3 deslocabilidades, consequentemente existirão g + 1 = 4 casos básicos – casos (0), (1), (2) e (3) – conforme descrito a seguir.



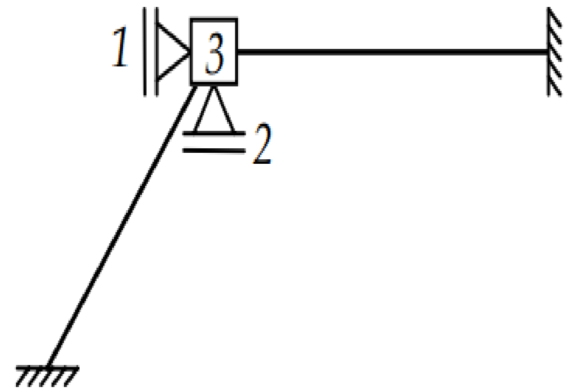


Figura 6.4 – Sistema Hipergeométrico da estrutura da Figura 6.3.

Método dos Deslocamentos

(i) – Caso (0): Solicitação externa (carregamento)

O caso básico (0) isola o efeito da solicitação externa (carregamento aplicado) no SH.

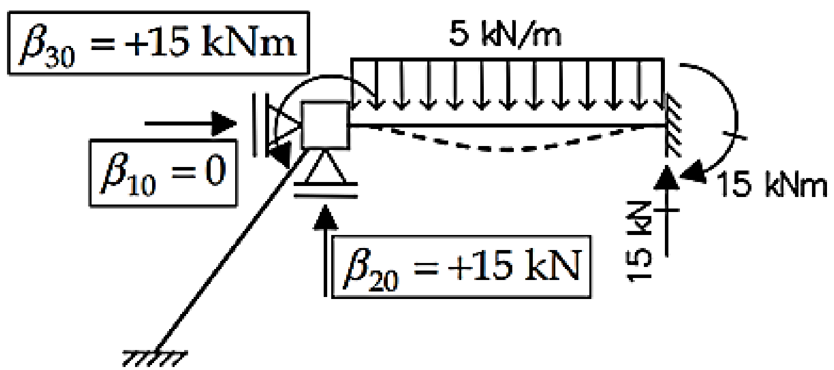


Figura 6.5 – Solicitação externa isolada no SH da estrutura da Figura 6.3.

Nesse caso, ***as forças e os momentos*** que aparecem nos apoios fictícios do SH são chamados de ***termos de carga*** $\boldsymbol{\beta_{i0}}$.

Um termo de carga é o valor da reação no apoio fictício associado à deslocabilidade D_i.

Método dos Deslocamentos

(ii) – Caso (1): Deslocabilidade D1 isolada no SH

Mantém nulos os valores das deslocabilidades D2 e D3. Conforme indicado nessa figura, considera-se um valor unitário para D1.

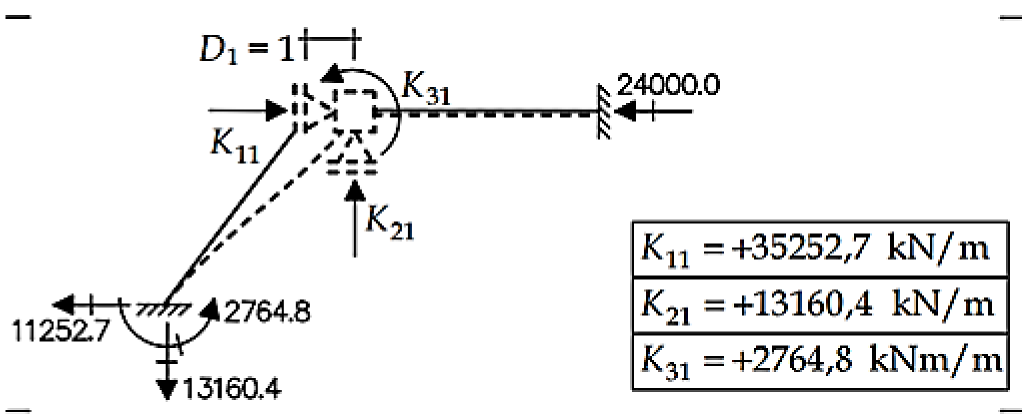


Figura 6.6 – Deslocabilidade D_1 isolada no SH da estrutura da Figura 6.3.

As forças e momentos que aparecem nos apoios fictícios do SH quando é imposta uma configuração onde D1 = 1 são chamados de coeficientes de **rigidez globais Kij**.

Método dos Deslocamentos

(iii) – *Caso (2): Deslocabilidade D2 isolada no SH*

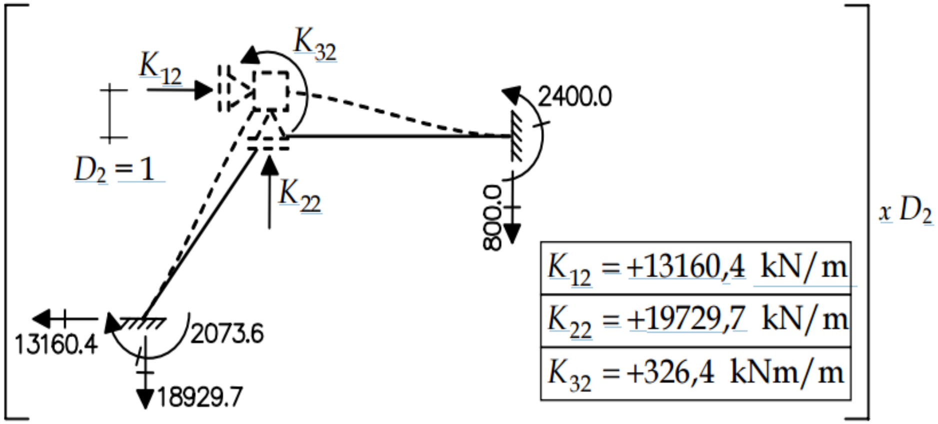


Figura 6.7 – Deslocabilidade D_2 isolada no SH da estrutura da Figura 6.3.

(iv) – *Caso (3): Deslocabilidade D3 isolada no SH*

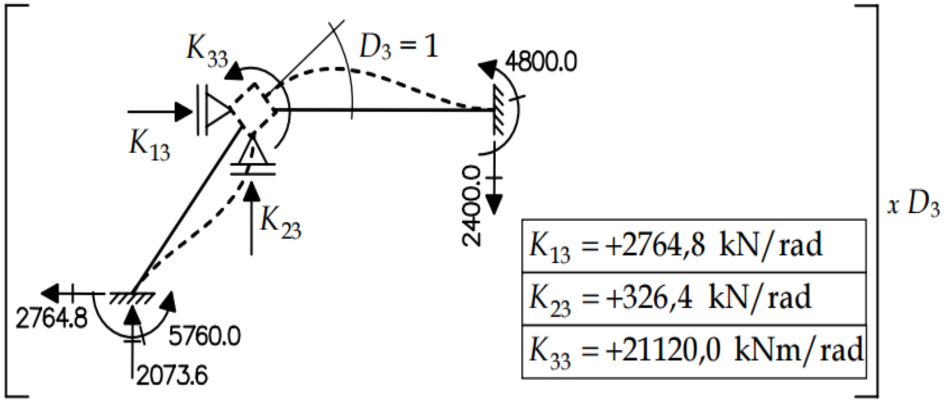


Figura 6.8 – Deslocabilidade D_3 isolada no SH da estrutura da Figura 6.3.

Método dos Deslocamentos

(v) - Restabelecimento das condições de equilíbrio sem o apoio fictício do SH

Utiliza-se a superposição dos casos para restabelecer as condições de equilíbrio do nó. A resultante de forças e momentos externos neste nó deve ser nula, tal como feito a seguir.

- Somatório das forças externas horizontais que atuam no nó interior:

$$\beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + K_{13}D_3 = 0$$

- Somatório das forças externas verticais que atuam no nó interior:

$$\beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + K_{23}D_3 = 0$$

- Somatório dos momentos externos que atuam no nó interior:

$$\beta_{30} + K_{31}D_1 + K_{32}D_2 + K_{33}D_3 = 0$$

Método dos Deslocamentos

(v) - Restabelecimento das condições de equilíbrio sem o apoio fictício do SH.

$$\begin{cases} \beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + K_{13}D_3 = 0 \\ \beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + K_{23}D_3 = 0 \\ \beta_{30} + K_{31}D_1 + K_{32}D_2 + K_{33}D_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \\ \beta_{30} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No caso geral de uma estrutura com n deslocabilidades, pode-se escrever:

$$\{\beta_0\} + [K]\{D\} = \{0\}.$$

Sendo:

$\{\beta_0\} \rightarrow$ vetor dos termos de carga;

$[K] \rightarrow$ matriz de rigidez global;

$\{D\} \rightarrow$ vetor das deslocabilidades.

D1 = +0,45.10^{-3} m; D2 = − 1,05.10^{-3} m; D3 = − 0,75.10^{-3} rad.

Método dos Deslocamentos

Essa metodologia será formalizada detalhadamente mais a frente. A metodologia também está baseada na validade do Princípio da Superposição de Efeitos e serve para resolver qualquer estrutura hiperestática reticulada com comportamento linear.

Comparação

Método das Forças	Método dos Deslocamentos
Idéia básica: Determinar, dentro do conjunto de soluções em forças que satisfazem as condições de equilíbrio, qual a solução que faz com que as condições de compatibilidade também sejam satisfeitas.	***Idéia básica:*** Determinar, dentro do conjunto de soluções em deslocamentos que satisfazem as condições de compatibilidade, qual a solução que faz com que as condições de equilíbrio também sejam satisfeitas.
Metodologia: Superpor uma série de soluções estaticamente determinadas (isostáticas) que satisfazem as condições de equilíbrio da estrutura para obter uma solução final que também satisfaz as condições de compatibilidade.	***Metodologia:*** Superpor uma série de soluções cinematicamente determinadas (configurações deformadas conhecidas) que satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura para obter uma solução final que também satisfaz as condições de equilíbrio.
Incógnitas: Hiperestáticos: forças e momentos associados a vínculos excedentes à determinação estática da estrutura.	***Incógnitas:*** Deslocabilidades: componentes de deslocamentos e rotações nodais que definem a configuração deformada da estrutura.
Número de incógnitas: É o número de incógnitas excedentes das equações de equilíbrio, denominado *grau de hiperestaticidade*.	***Número de incógnitas:*** É o número de incógnitas excedentes das equações de compatibilidade, denominado *grau de hipergeometria*.

Comparação

Estrutura auxiliar utilizada nas soluções básicas: Sistema Principal (SP): estrutura estaticamente determinada (isostática) obtida da estrutura original pela eliminação dos vínculos excedentes associados aos hiperestáticos. Essa estrutura auxiliar viola condições de compatibilidade da estrutura original.	***Estrutura auxiliar utilizada nas soluções básicas:*** Sistema Hipergeométrico (SH): estrutura cinematicamente determinada (estrutura com configuração deformada conhecida) obtida da estrutura original pela adição dos vínculos necessários para impedir as deslocabilidades. Essa estrutura auxiliar viola condições de equilíbrio da estrutura original.
Equações finais: São equações de compatibilidade expressas em termos dos hiperestáticos. Essas equações recompõem as condições de compatibilidade violadas nas soluções básicas.	***Equações finais:*** São equações de equilíbrio expressas em termos das deslocabilidades. Essas equações recompõem as condições de equilíbrio violadas nas soluções básicas.
Termos de carga das equações finais: Deslocamentos e rotações nos pontos dos vínculos liberados no SP devidos à solicitação externa (carregamento).	***Termos de carga das equações finais:*** Forças e momentos (reações) nos vínculos adicionados no SH devidos à solicitação externa (carregamento)
Coeficientes das equações finais: Coeficientes de flexibilidade: deslocamentos e rotações nos pontos dos vínculos liberados no SP devidos a hiperestáticos com valores unitários atuando isoladamente.	***Coeficientes das equações finais:*** Coeficientes de rigidez: forças e momentos nos vínculos adicionados no SH para impor configurações deformadas com deslocabilidades isoladas com valores unitários.

Análise Estrutural

Atenção: Para que se possa utilizar o princípio da superposição de efeitos é necessário que a estrutura tenha um comportamento elástico-linear e pequenos deslocamentos.

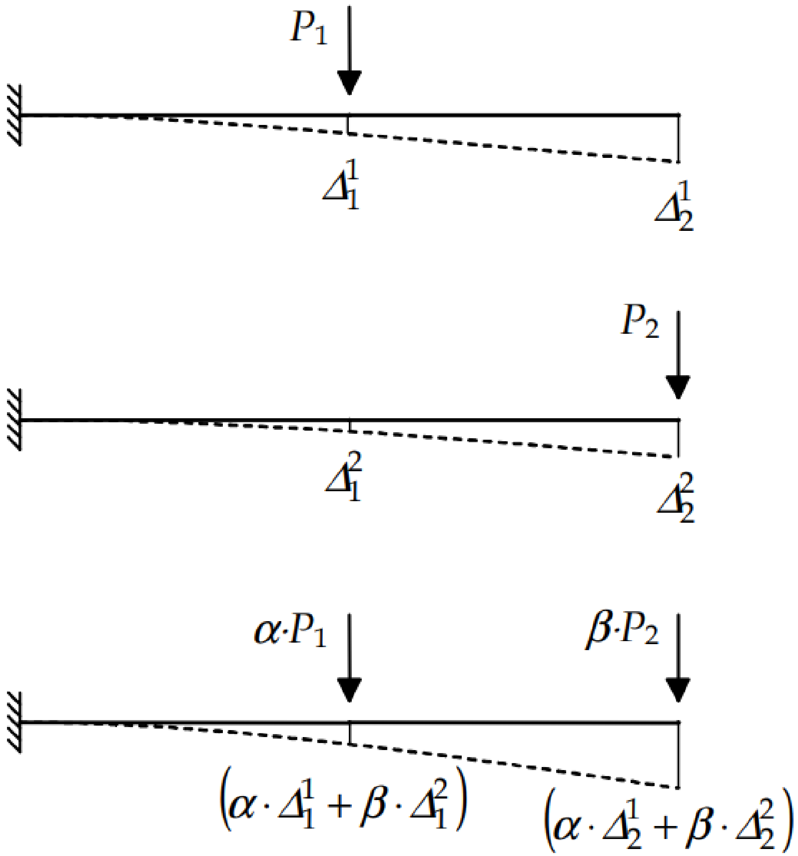


Figura 2.11 – Combinação linear de duas forças e os correspondentes deslocamentos.

Determinação do Grau de Hiperestaticidade

Grau de Hiperestaticidade

Atenção: O grau de hiperestaticidade (g) pode ser definido da seguinte maneira:

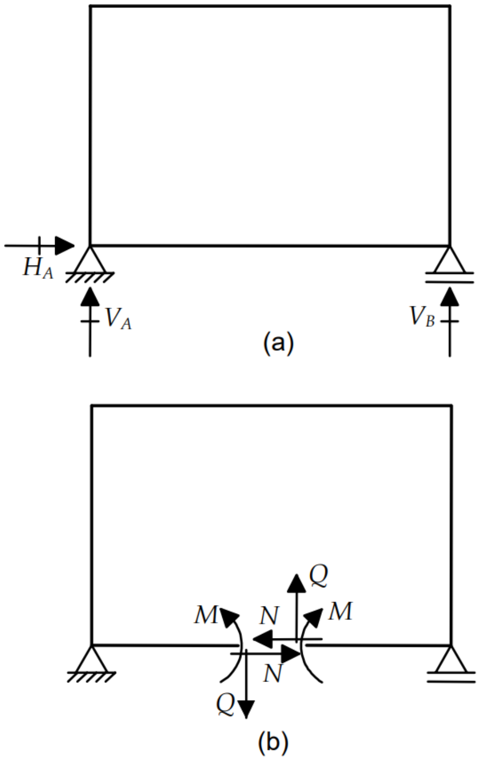
$$g = (n^\circ\, de\ incógnitas\ do\ problema\ estático) - (n^\circ\, de\ equações\ de\ equilíbrio).$$

Grau de Hiperestaticidade

Atenção: O grau de hiperestaticidade (g) pode ser definido da seguinte maneira:

$$g = (n^{\circ}\, de\ incógnitas\ do\ problema\ estático) - (n^{\circ}\, de\ equações\ de\ equilíbrio).$$

As incógnitas do problema dependem dos apoios da estrutura, da existência de rótulas e da existência de ciclos fechados (**aqui chamados de anéis**). Cada anel de um quadro plano aumenta em três unidades o grau de hiperestaticidade.

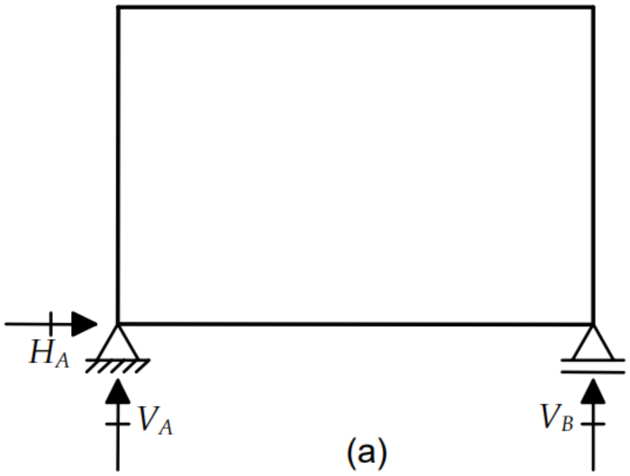


Grau de Hiperestaticidade

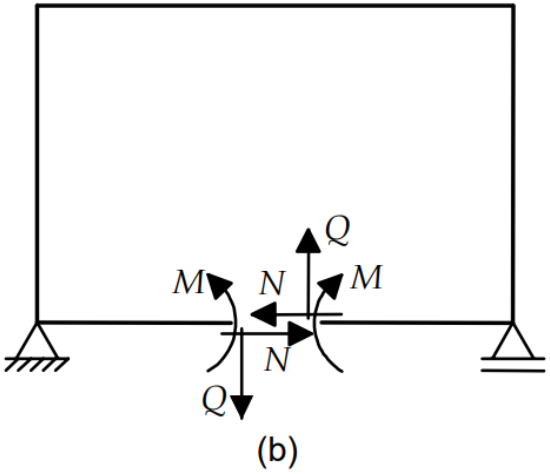
Atenção: O grau de hiperestaticidade (g) pode ser definido da seguinte maneira:

Apesar de ser possível determinar as reações de apoio do quadro da utilizando apenas equações de equilíbrio, não é possível determinar os esforços internos nas barras da estrutura só com base em equilíbrio.

Isto porque ao se seccionar a estrutura em qualquer seção de uma barra não se divide a estrutura em duas porções!



(a)



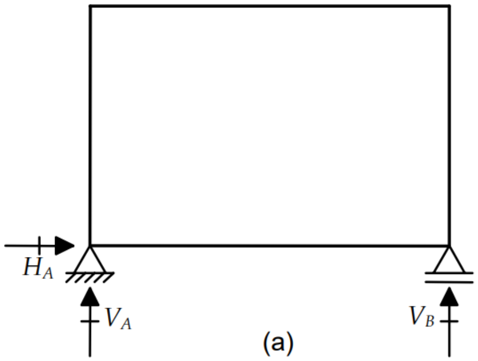
(b)

Grau de Hiperestaticidade

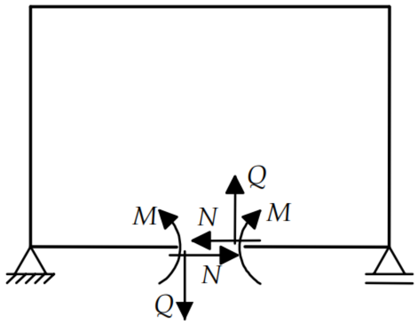
Atenção: O grau de hiperestaticidade (g) pode ser definido da seguinte maneira:

$$g = (n^\circ \textit{ de incógnitas do problema estático}) - (n^\circ \textit{ de equações de equilíbrio}).$$

$$(n^\circ \textit{ de componentes de reação de apoio}) + 3 \cdot (n^\circ \textit{ de anéis}).$$



(a)



(b)

Grau de Hiperestaticidade

Atenção: O grau de hiperestaticidade (g) pode ser definido da seguinte maneira:

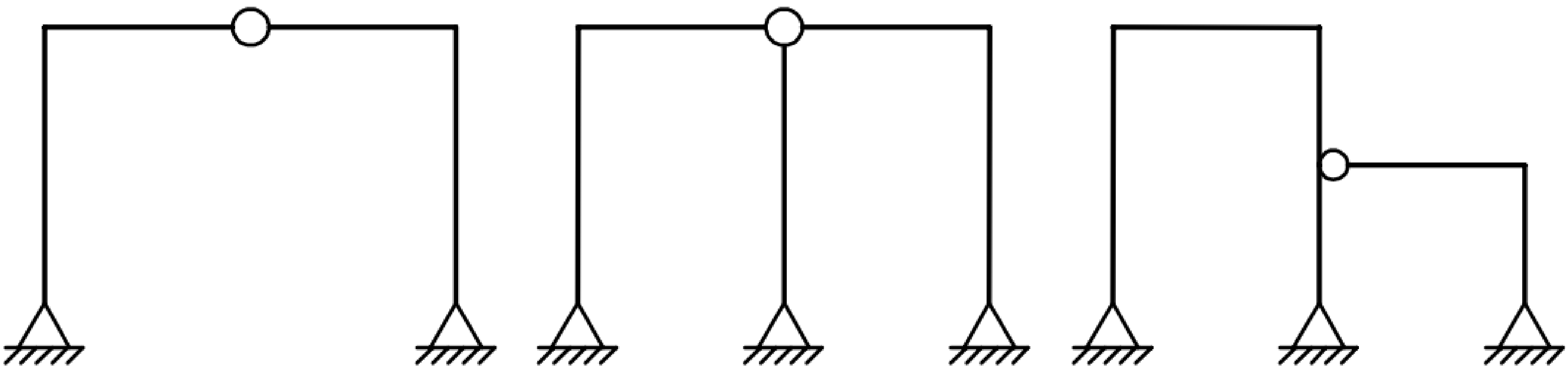
$$g = (n^{\circ}\ de\ incógnitas\ do\ problema\ estático) - (n^{\circ}\ de\ equações\ de\ equilíbrio).$$

$$(n^{\circ}\ de\ componentes\ de\ reação\ de\ apoio) + 3 \cdot (n^{\circ}\ de\ anéis).$$

$$(3\ equações\ do\ equilíbrio\ global) + (n^{\circ}\ de\ equações\ vindas\ de\ articulações\ internas).$$

Grau de Hiperestaticidade

$$g = [(n^{\circ}\,de\ componentes\ de\ reação\ de\ apoio) + 3 \cdot (n^{\circ}\,de\ anéis)] - [\,3 + (n^{\circ}\,de\ equações\ vindas\ de\ articulações\ internas)].$$

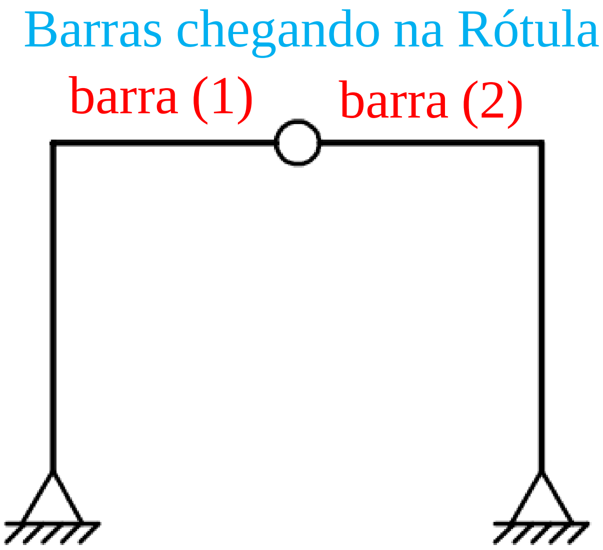


(a) (b) (c)

Figura 2.22 – Pórticos planos com articulações internas:
(a) rótula simples (duas barras convergindo na articulação);
(b) rótula com três barras convergindo;
(c) nó com três barras convergindo, mas apenas uma barra articulada.

Grau de Hiperestaticidade

$$g = [(n^{\circ}\,\textit{de componentes de reação de apoio}) + 3 \cdot (n^{\circ}\,\textit{de anéis})] - [3 + (n^{\circ}\,\textit{de equações vindas de articulações internas})].$$



(a)

n° de componentes de reação de apoio = 4

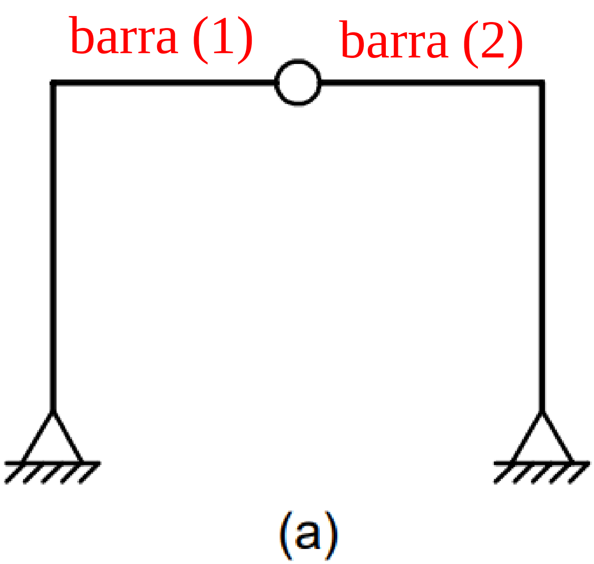
n° de anéis = 0

n° de equações vindas de articulações = nº barras na rótula -1 = 1

Grau de Hiperestaticidade

$$g = [(n^\circ \textit{ de componentes de reação de apoio}) + 3 \cdot (n^\circ \textit{ de anéis})] - [3 + (n^\circ \textit{ de equações vindas de articulações internas})].$$

Barras chegando na Rótula



$g = [4 + 3.(0)] – [3 + (1)]$

$g = 0$

ISOSTÁTICA

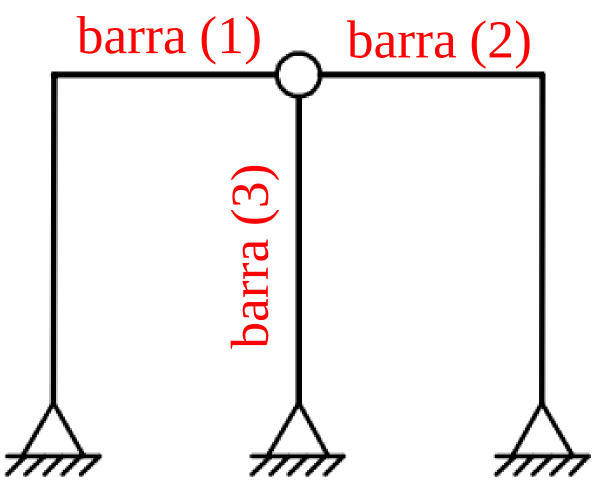
n° de componentes de reação de apoio = 4

n° de anéis = 0

n° de equações vindas de articulações = nº barras na rótula -1 = 1

Grau de Hiperestaticidade

$$g = [(n^\circ \, de\ componentes\ de\ reação\ de\ apoio) + 3 \cdot (n^\circ \, de\ anéis)] - [\,3 + (n^\circ \, de\ equações\ vindas\ de\ articulações\ internas)].$$



(b)

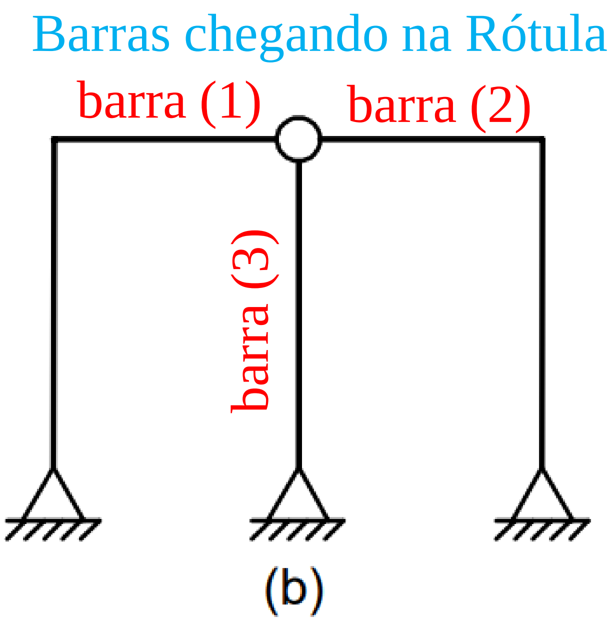
n° de componentes de reação de apoio = 6

n° de anéis = 0

n° de equações vindas de articulações = nº barras na rótula -1 = 2

Grau de Hiperestaticidade

g = [(n° de componentes de reação de apoio) + 3 · (n° de anéis)] – [3 + (n° de equações vindas de articulações internas)].



$g = [6 + 3.(0)] – [3 + (2)]$

$g = 1$

HIPERESTÁTICA

n° de componentes de reação de apoio = 6

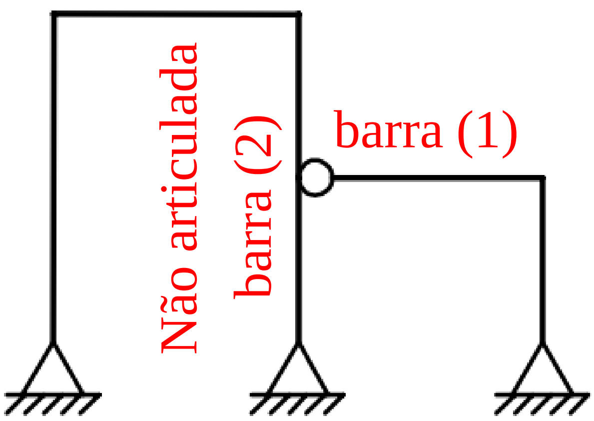
n° de anéis = 0

n° de equações vindas de articulações = nº barras na rótula -1 = 2

Grau de Hiperestaticidade

$$g = [(n^\circ \, de \; componentes \; de \; reação \; de \; apoio) + 3 \cdot (n^\circ \, de \; anéis)] - [\,3 + (n^\circ \, de \; equações \; vindas \; de \; articulações \; internas)].$$

Barras chegando na Rótula



(c)

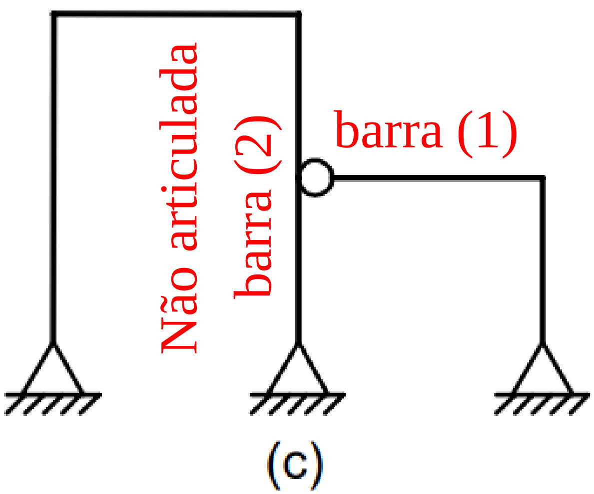
n° de componentes de reação de apoio = 6

n° de anéis = 0

n° de equações vindas de articulações = nº barras na rótula -1 = 1

Grau de Hiperestaticidade

$$g = [(n°\,de\ componentes\ de\ reação\ de\ apoio) + 3 \cdot (n°\,de\ anéis)] - [\,3 + (n°\,de\ equações\ vindas\ de\ articulações\ internas)].$$



$g = [6 + 3.(0)] – [3 + (1)]$

$g = 2$

HIPERESTÁTICA

n° de componentes de reação de apoio = 6

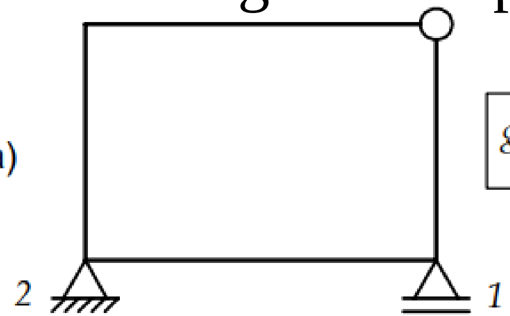
n° de anéis = 0

n° de equações vindas de articulações = nº barras na rótula -1 = 1

Grau de Hiperestaticidade

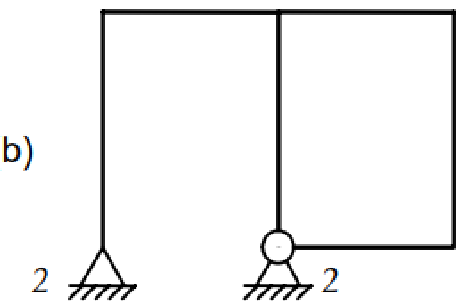
Exemplos de cálculo do grau de hiperestacidade:

(a)



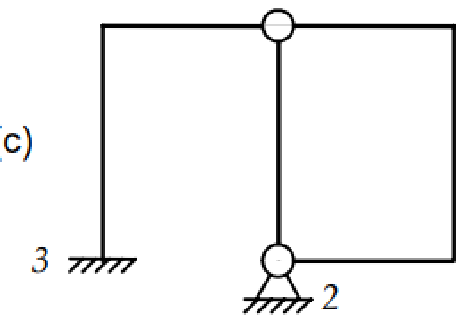
$$g = [(3) + 3\cdot(1)] - [3 + (1)] = 2$$

(b)



$$g = [(4) + 3\cdot(1)] - [3 + (1)] = 3$$

(c)



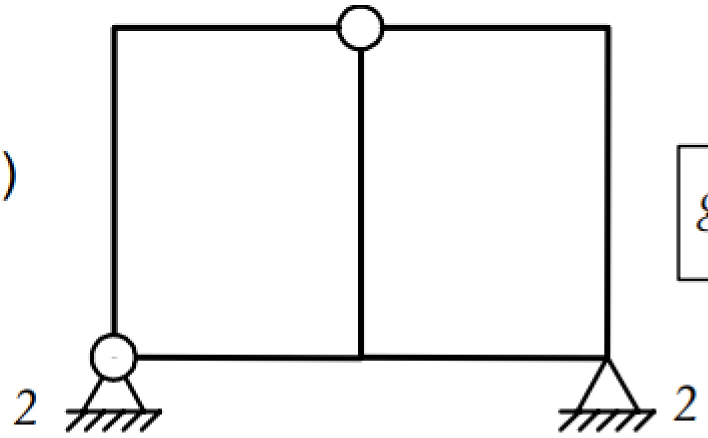
$$g = [(5) + 3\cdot(1)] - [3 + (1+2)] = 2$$

g = [(n° *de componentes de reação de apoio*) + 3 · (n° *de anéis*)] –
[3 + (n° *de equações vindas de articulações internas*)].

Grau de Hiperestaticidade

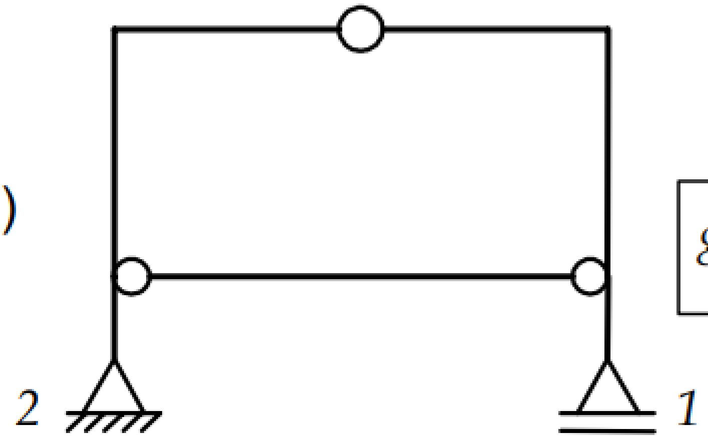
Exemplos de cálculo do grau de hiperestacidade:

(d)



$$g = [(4) + 3\cdot(2)] - [3 + (1+2)] = 4$$

(e)

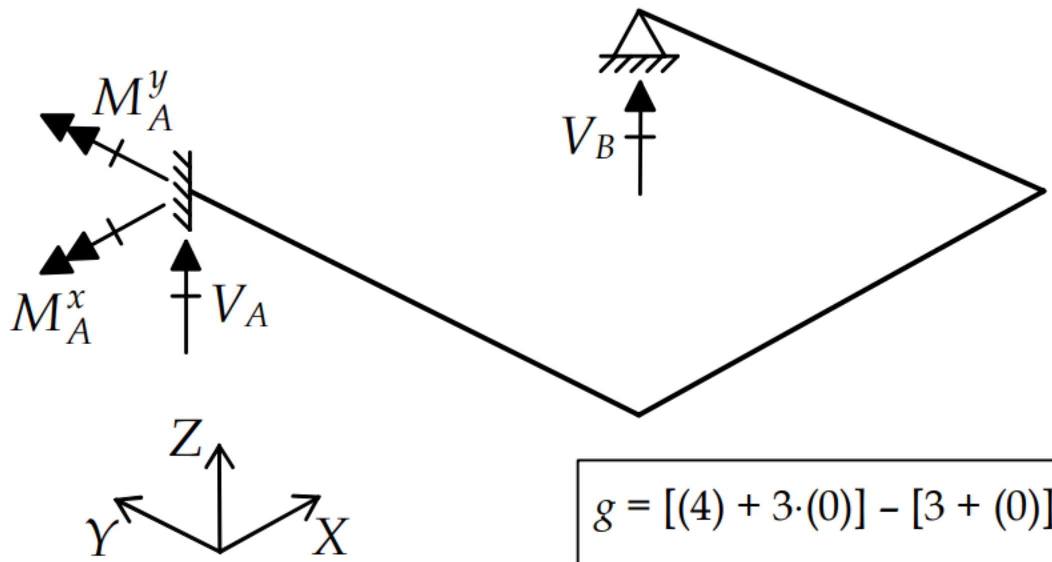


$$g = [(3) + 3\cdot(1)] - [3 + (1+1+1)] = 0$$

g = [(*n° de componentes de reação de apoio*) + 3 · (*n° de anéis*)] – [3 + (*n° de equações vindas de articulações internas*)].

Grau de Hiperestaticidade

Atenção: para grelhas, não há distinção quanto ao número de componentes de reação entre os apoios do 1° e do 2° gênero, posto que em grelhas só existem reações força na direção Z.



$$g = [(4) + 3 \cdot (0)] - [3 + (0)] = 1$$

Figura 2.24 – Exemplo de determinação do grau de hiperestaticidade de grelha.

$$g = [(n^{\circ}\,de\ componentes\ de\ reação\ de\ apoio) + 3 \cdot (n^{\circ}\,de\ anéis)] - [\,3 + (n^{\circ}\,de\ equações\ vindas\ de\ articulações\ internas)].$$

3. Traçado do diagrama de momentos fletores

diagrama de momentos fletores

Para realizar os métodos de análise tratados na disciplina é necessário um conhecimento adequado do traçado de diagramas de esforços internos.

diagrama de momentos fletores

Para realizar os métodos de análise tratados na disciplina é necessário um conhecimento adequado do traçado de diagramas de esforços internos.

Aqui apenas são salientados alguns aspectos importantes no traçado do diagrama de momentos fletores.

diagrama de momentos fletores

Para realizar os métodos de análise tratados na disciplina é necessário um conhecimento adequado do traçado de diagramas de esforços internos.

Aqui apenas são salientados alguns aspectos importantes no traçado do diagrama de momentos fletores.

A convenção adotada é que o diagrama é traçado sempre do lado da fibra tracionada da barra.

diagrama de momentos fletores

Para realizar os métodos de análise tratados na disciplina é necessário um conhecimento adequado do traçado de diagramas de esforços internos.

Aqui apenas são salientados alguns aspectos importantes no traçado do diagrama de momentos fletores.

A convenção adotada é que o diagrama é traçado sempre do lado da fibra tracionada da barra.

O traçado é feito por superposição de efeitos em cada barra, sempre partindo dos valores dos momentos fletores nas extremidades da barra.

diagrama de momentos fletores

Considere, como exemplo, a viga biapoiada com balanços mostrada na Figura.

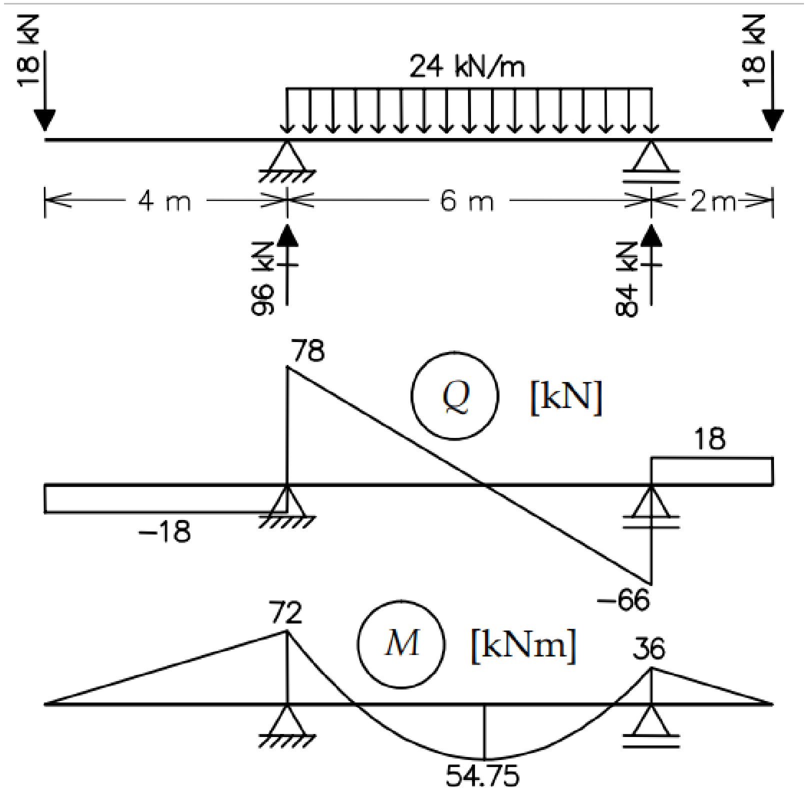


Figura 4.1 – Viga biapoiada com balanços.

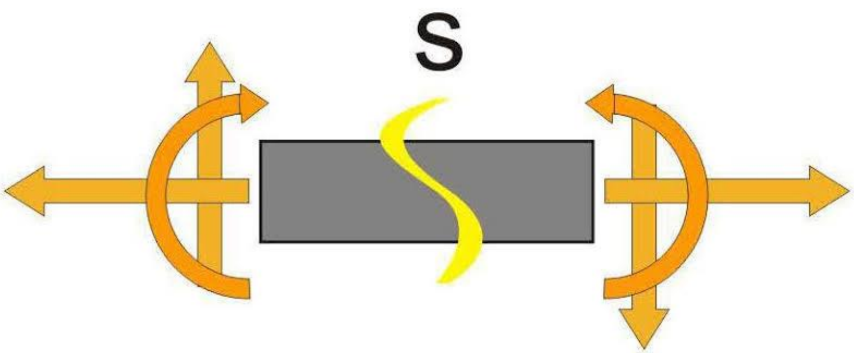


diagrama de momentos fletores

Considere, como exemplo, a viga biapoiada com balanços mostrada na Figura.

Revisar estudo em vídeo sobre diagramas

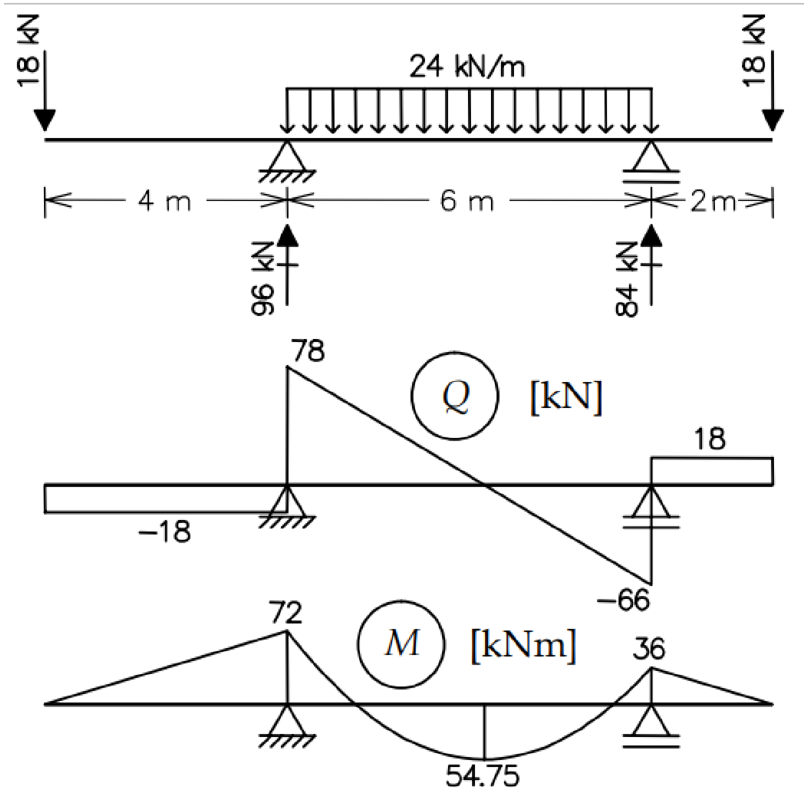


Figura 4.1 – Viga biapoiada com balanços.

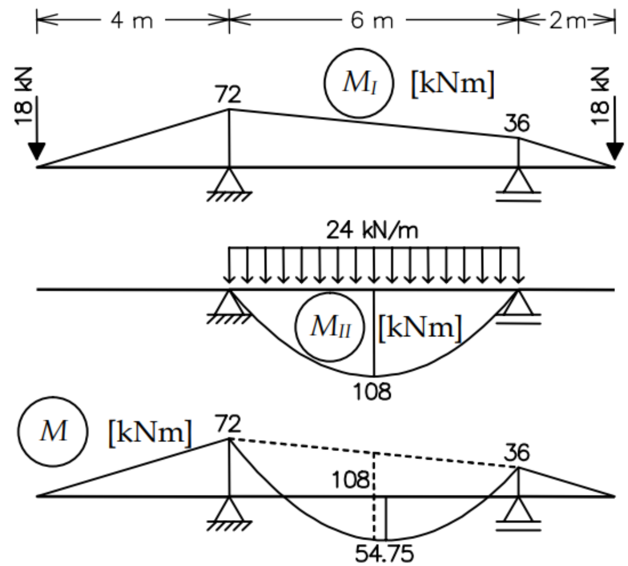


Figura 4.2 – Superposição de efeitos para compor o diagrama de momentos fletores da Figura 4.1.

diagrama de momentos fletores

Outros exemplos:

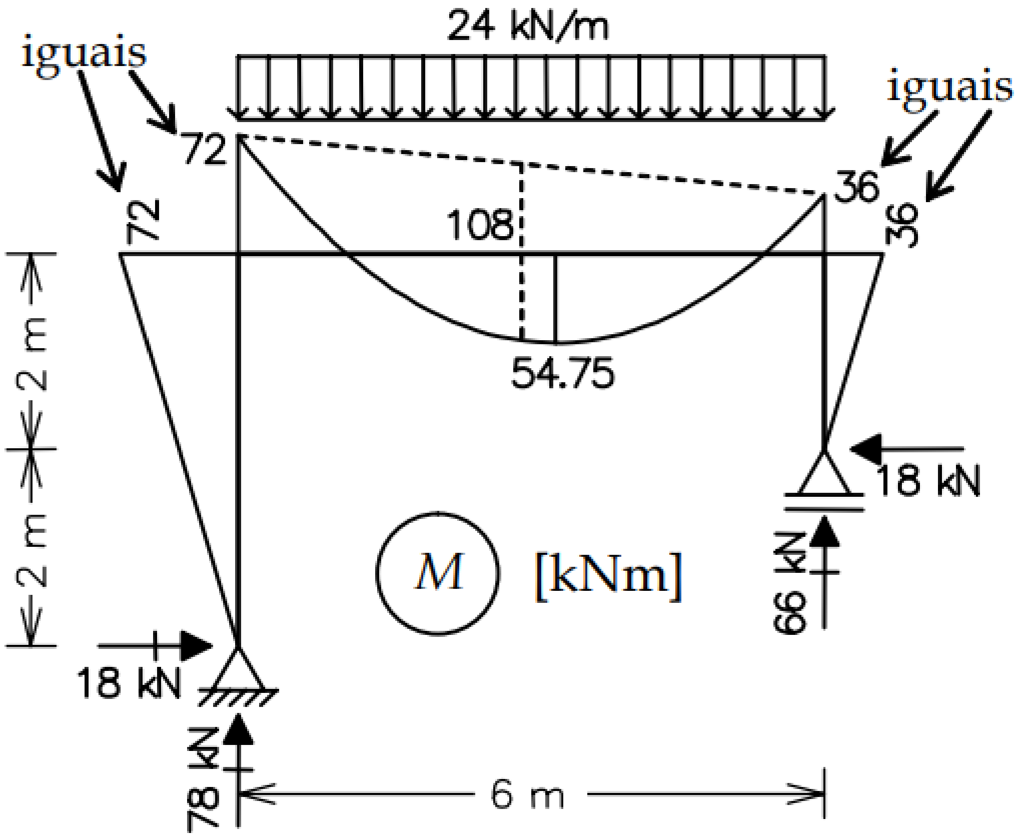


Figura 4.3 – Traçado de diagrama de momentos fletores em um pórtico plano.

diagrama de momentos fletores

Outros exemplos:

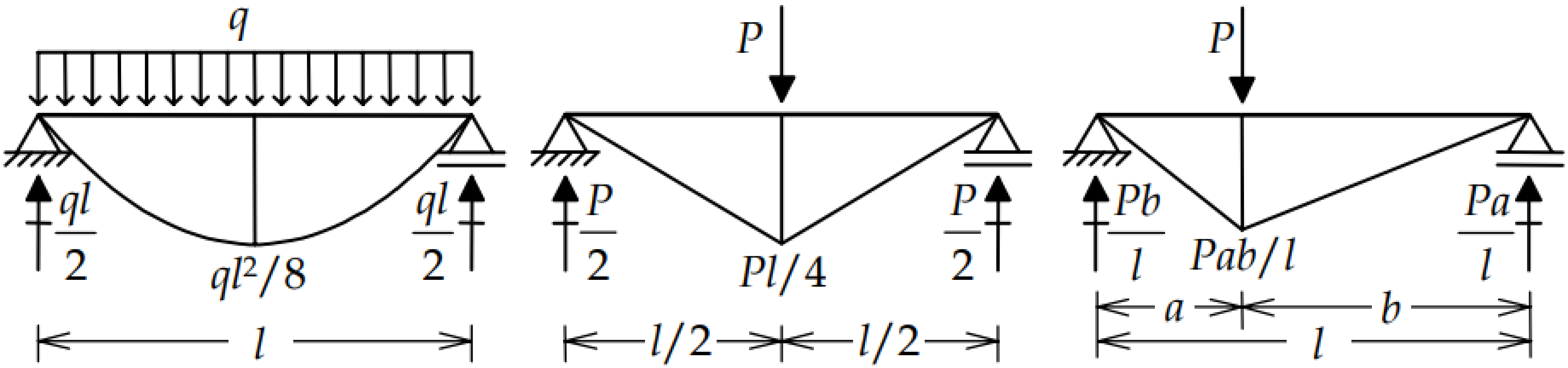


Figura 4.4 – Diagramas de momentos fletores para vigas biapoiadas.

diagrama de momentos fletores

Outros exemplos:

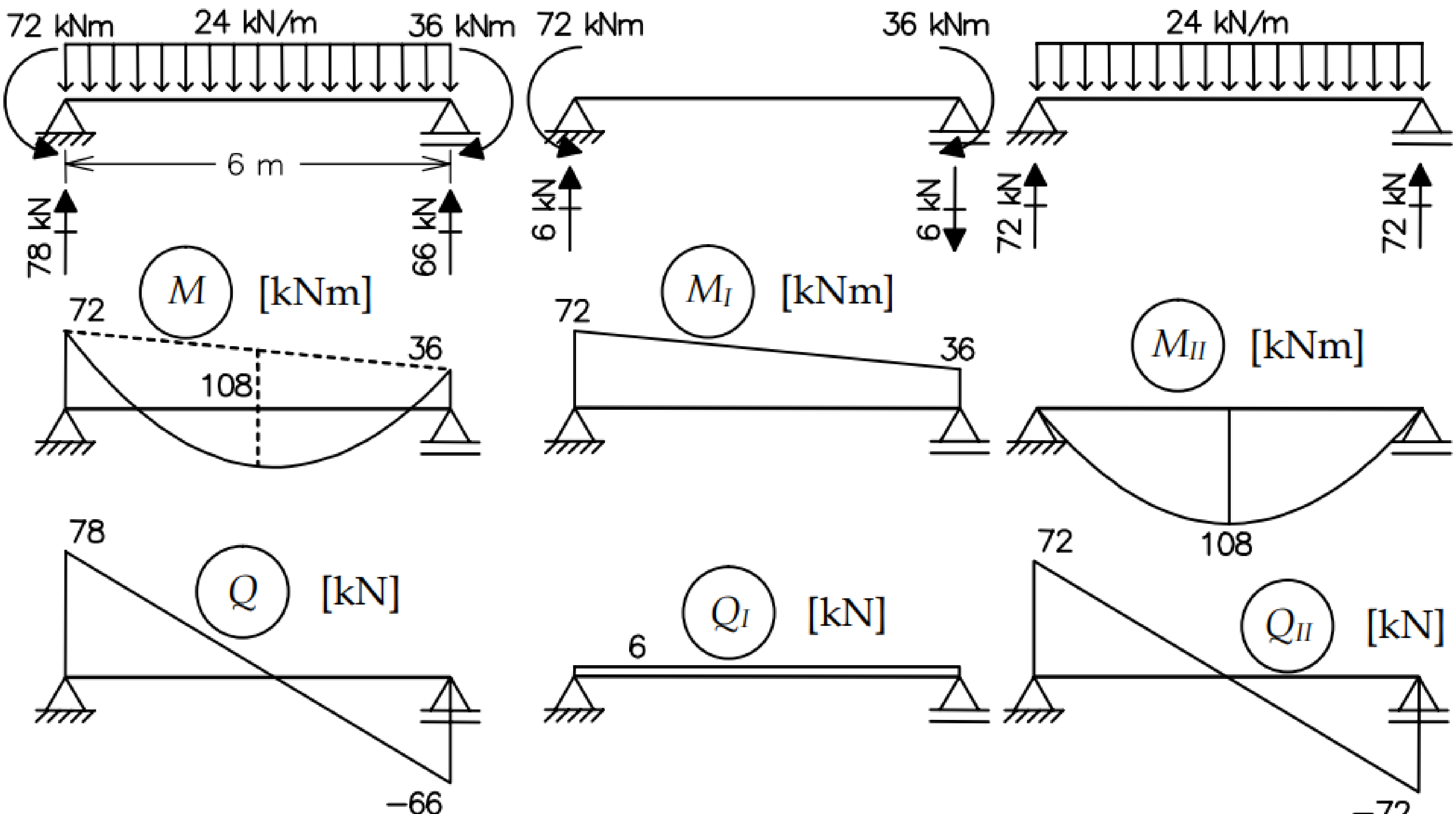


Figura 4.5 – Traçado do diagrama de esforços cortantes a partir do diagrama de momentos fletores.

diagrama de momentos fletores

- Embora os exemplos utilizados tenham sido isostáticos, os mesmos procedimentos se aplicam para estruturas hiperestáticas.

- O traçado de diagramas de momentos fletores é muito importante também dentro da metodologia do Método das Forças!

ATENÇÃO!

KEEP
CALM

BECAUSE

RAPADURA É DOCE
MAS NÃO É MOLE NÃO

NUNCA DESISTA

LUTE!

...

CONTINUA na Próxima Parte