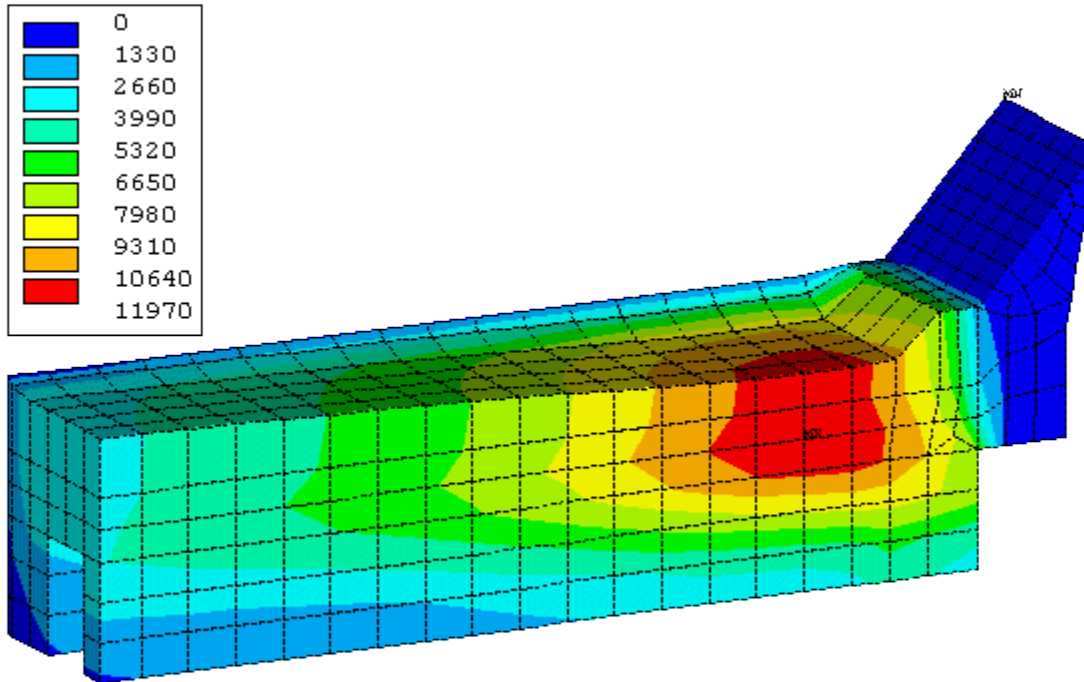




Mecânica dos Sólidos II

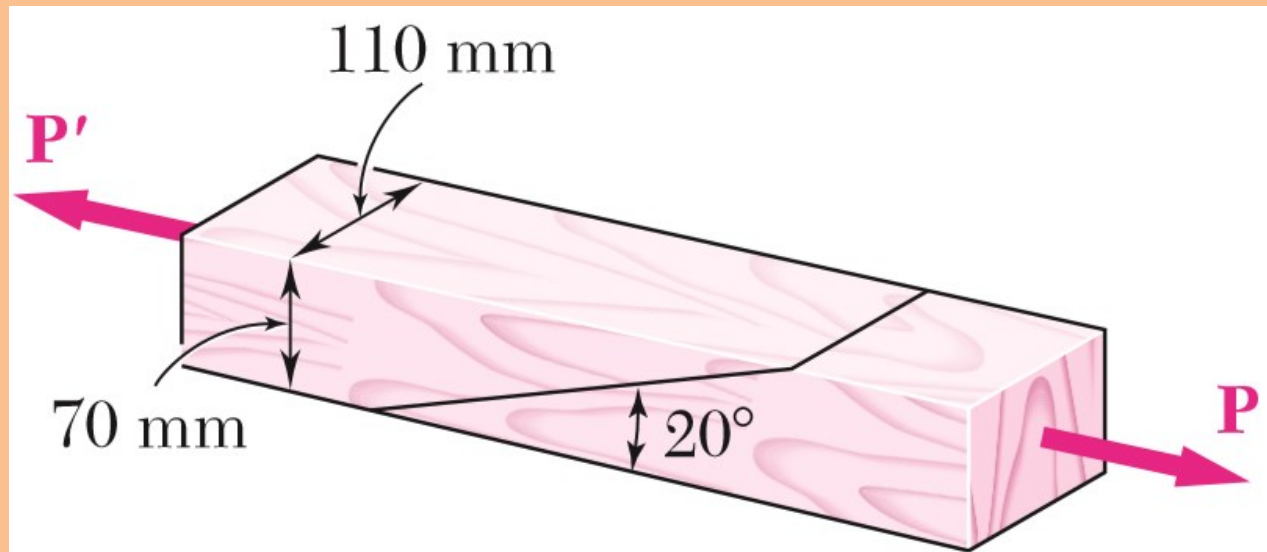
Prof. Dr. Alverlando Ricardo

Aula 3: PARTE I: **Tensão & Deformação**

EXERCÍCIO: AULA ANTERIOR

Exemplo 1: Beer

1.65) Dois elementos de madeira de $70 \times 110 \text{ mm}$ de seção transversal retangular uniforme são unidos por uma junta colada. Sabendo que a tensão de cisalhamento limite na junta colada é de 1500 kPa e a tensão normal limite é de 3000 kPa . Determine a maior carga axial P admissível que pode ser aplicada com segurança. Adote $e \text{ C.S} = 3$.



Introdução

- **Porque** devemos estudar as deformações produzidas pelas cargas aplicadas a uma estrutura?

Introdução

- Porque devemos estudar as deformações produzidas pelas cargas aplicadas a uma estrutura?
- É importante evitar **DEFORMAÇÕES EXCESSIVAS** que possam impedir a estrutura de atender à sua finalidade;
- Pois em muitos casos a determinação das tensões só pode ser efetuada em conjunto com a determinação das deformações.

Introdução

O edifício mais alto do Brasil, o Millennium Palace, balançou (10 *cm*) com rajadas de vento a 90km/h (*Balneário Camboriú, 2018*).



Introdução

O edifício mais alto do Brasil, o Millennium Palace, balançou (10 *cm*) com rajadas de vento a 90km/h (*Balneário Camboriú, 2018*).



Introdução

O edifício mais alto do Brasil, o Millennium Palace, balançou (10 *cm*) com rajadas de vento a 90km/h (*Balneário Camboriú, 2018*).



Introdução

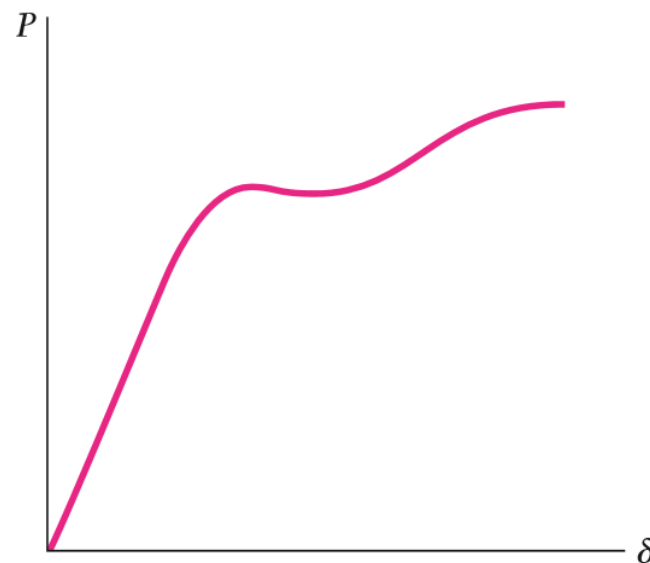
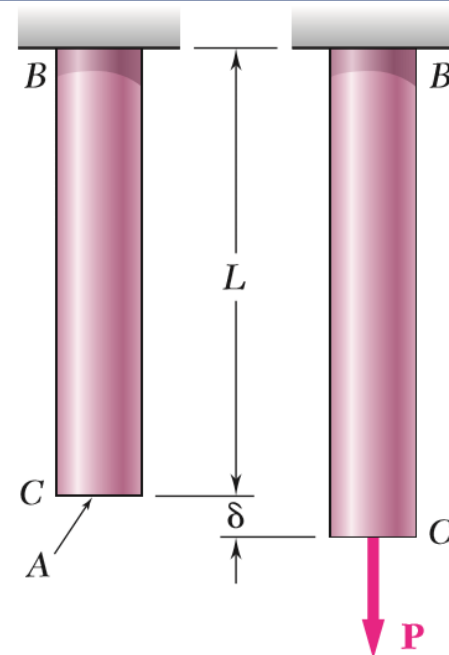
O edifício mais alto do Brasil, o Millennium Palace, balançou (10 *cm*) com rajadas de vento a 90km/h (*Balneário Camboriú, 2018*).



Deformação específica normal sob carregamento axial

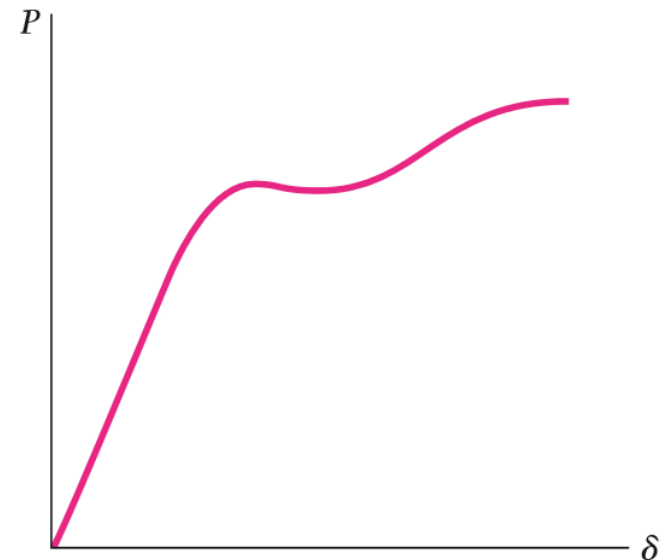
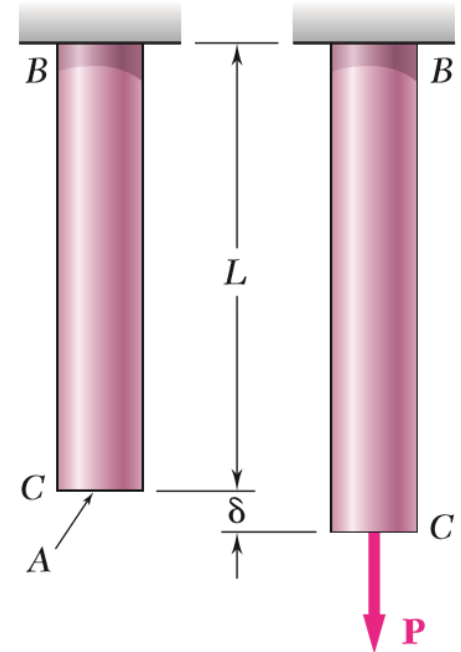
Deformação específica normal

- Consideremos a barra BC, de comprimento L e seção transversal uniforme de área A :
- *Ao aplicarmos uma carga P na extremidade livre, C, a barra sofrerá um alongamento.*
- Construindo um gráfico com valores da intensidade P da força em função da deformação δ , obtém-se um diagrama de força-deformação:

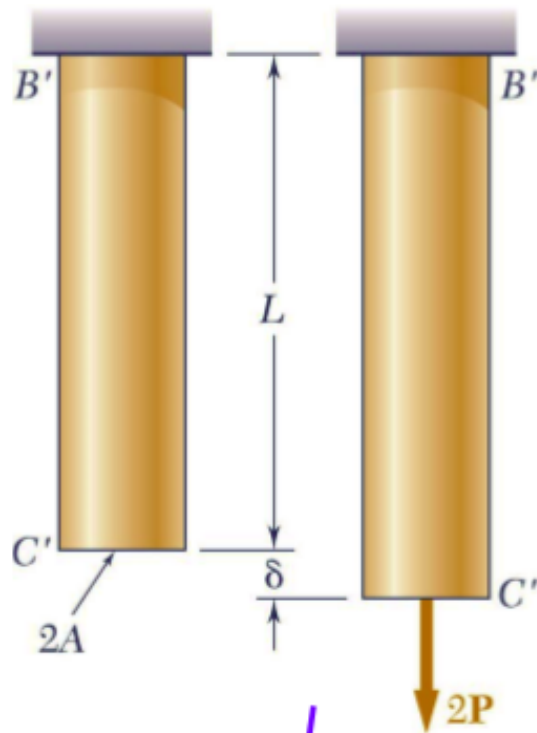


Deformação específica normal

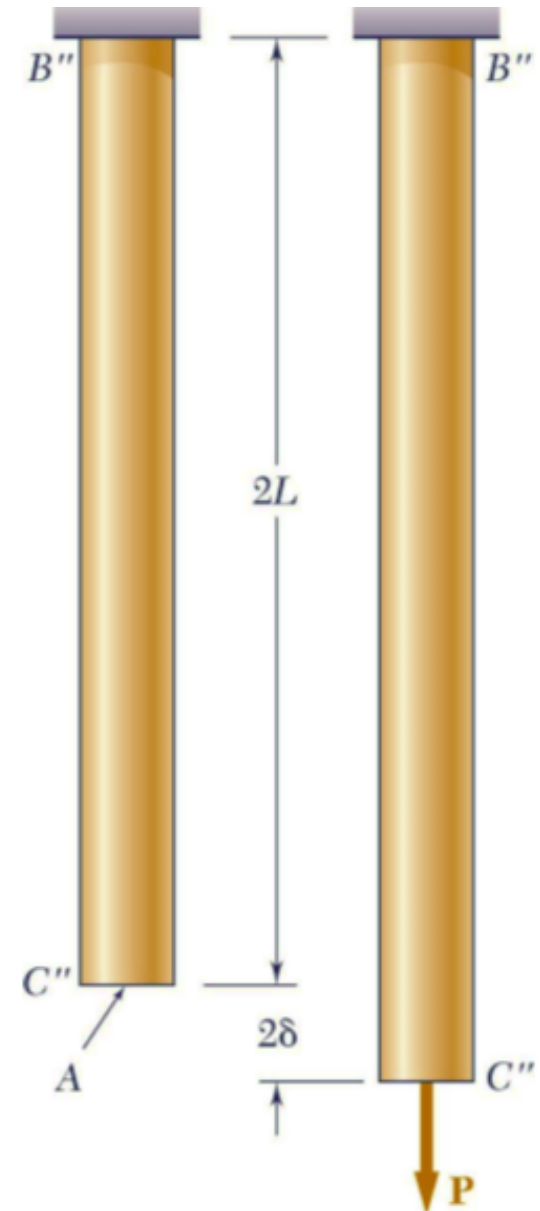
- Consideremos a barra BC, de comprimento L e seção transversal uniforme de área A :
- Ao aplicarmos uma carga P na extremidade livre, C , a barra sofrerá um alongamento.
- *Esse diagrama não pode ser utilizado diretamente para prever deformações em outras barras do mesmo material.*



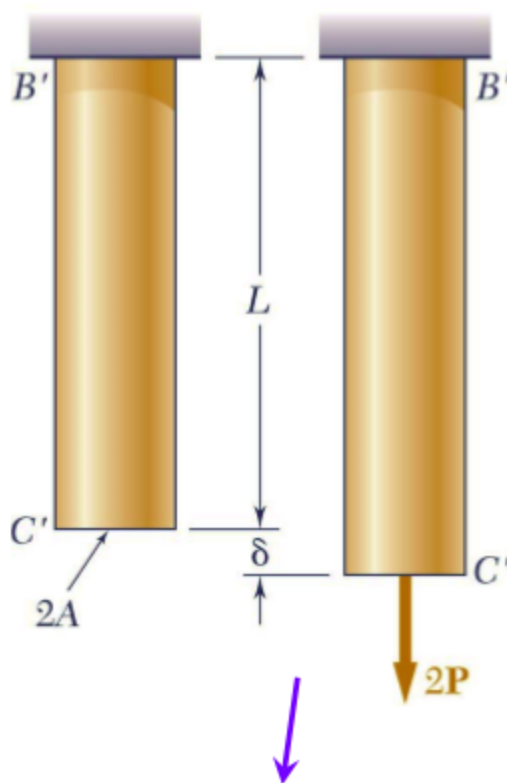
Deformação específica normal



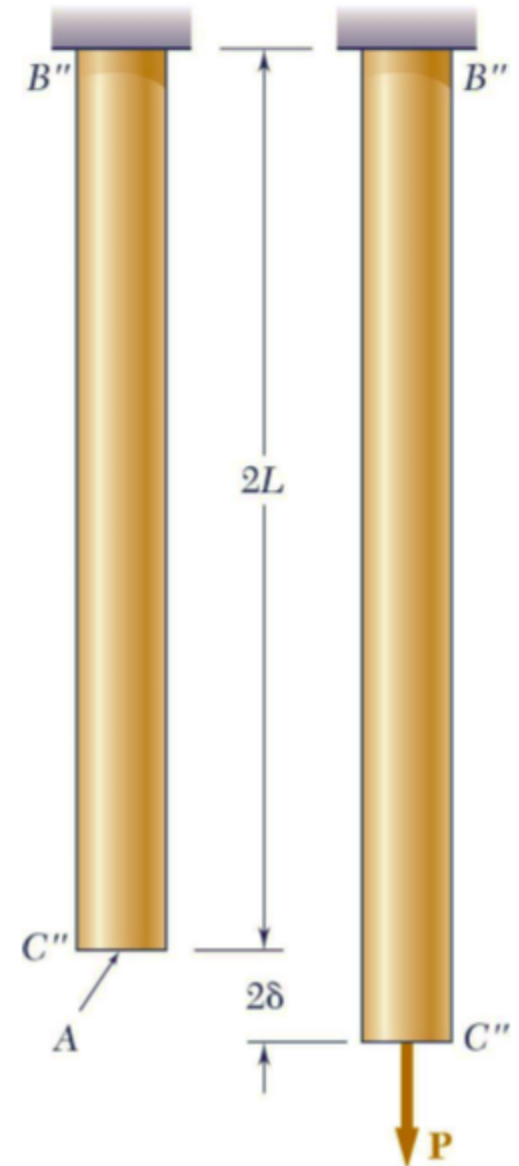
Mesmo valor da tensão anterior, mas diferentes diagramas força-deformação.



Deformação específica normal



Mesmo valor da tensão anterior, mas diferentes diagramas força-deformação.



Em todos os casos a relação entre a deformação e o comprimento da barra é a mesma: δ/L .

Deformação normal

- Na busca por uma medida de deformação que seja característica do material, definimos a deformação específica normal de uma barra sob carga axial como deslocamento por unidade de comprimento desta barra:

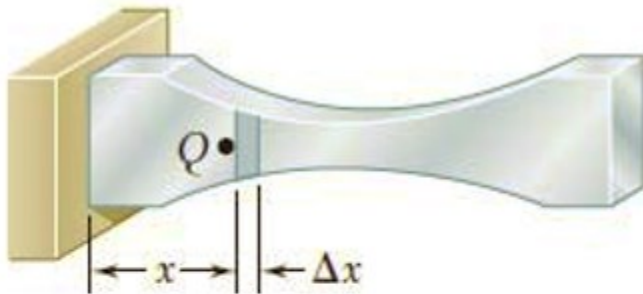
$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$




*Construindo o gráfico da **tensão** σ em função da **deformação específica** ϵ , obtemos uma **curva característica do material**.*

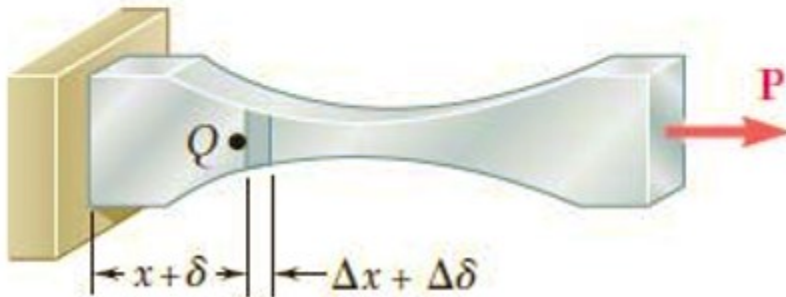
Deformação normal

- Caso a área da seção transversal seja variável, a tensão normal $\sigma = P/A$ variará ao longo do membro, é necessário definir a deformação para um ponto específico, Q:



Deformação específica normal no ponto Q:

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$



A deformação específica é uma medida adimensional!

Diagrama tensão-deformação

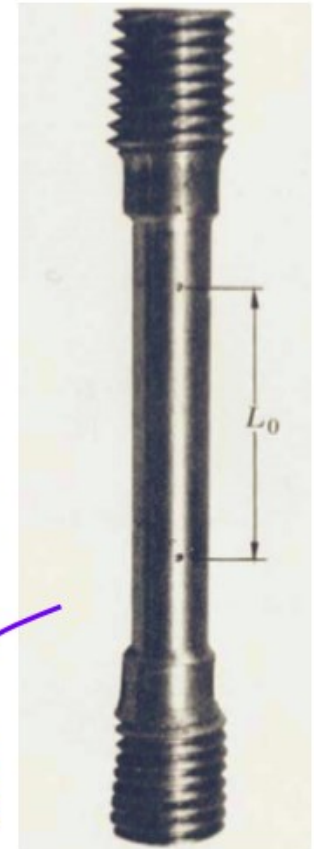
Diagrama tensão-deformação

- O diagrama que representa a relação *tensão x deformação* em um dado material é uma importante característica do mesmo;
- Ele é normalmente obtido a partir de um ensaio de tração em um corpo de prova do material;

➤ ENSAIO DE TRAÇÃO:

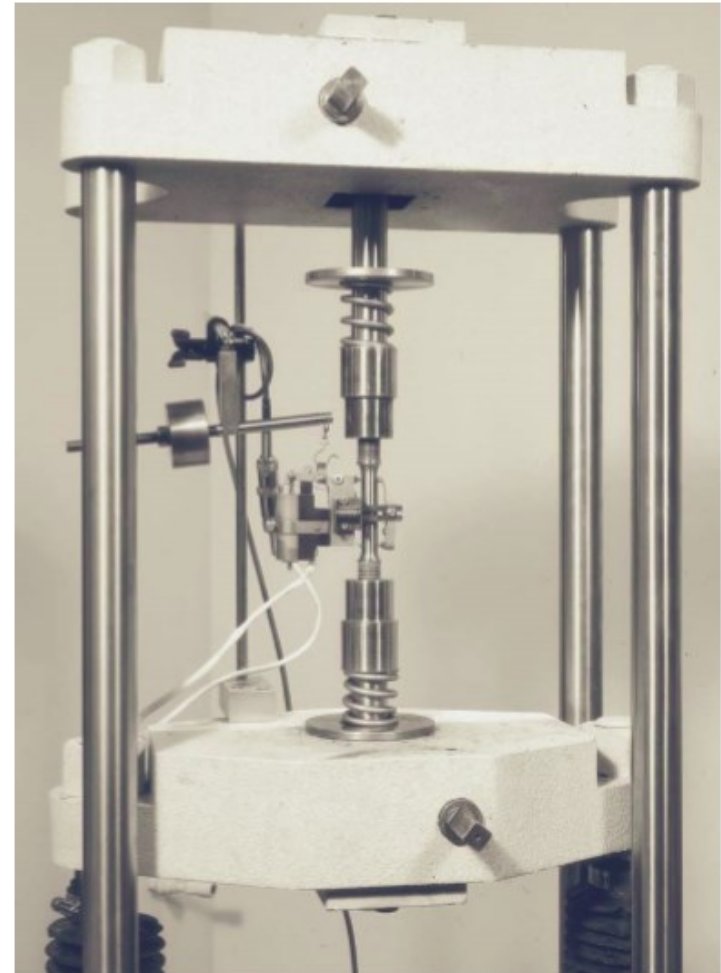
- A área da seção transversal da parte cilíndrica é **medida com precisão**. Duas marcas são desenhadas, separadas de uma distância inicial L_0 (comprimento de referência).

Tipo de corpo de prova usual.



Ensaio de tração

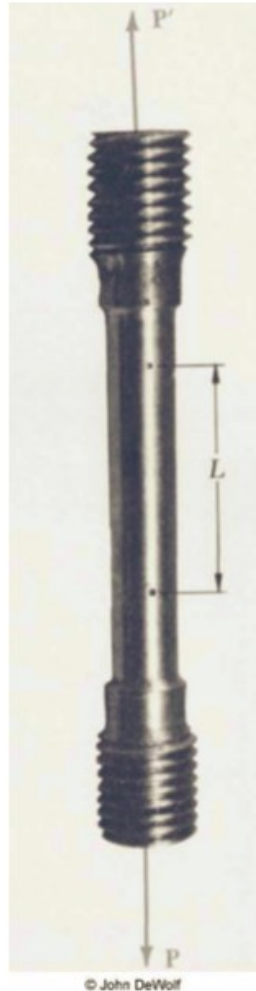
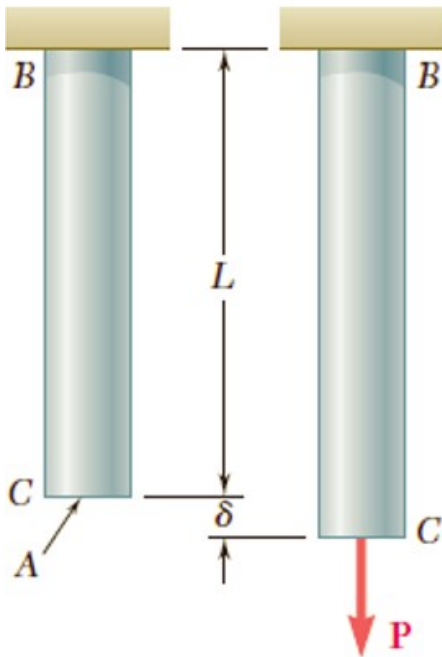
- O corpo é colocado em uma máquina de teste, utilizada para aplicar uma carga centrada P .



Courtesy of Tinius Olsen Testing Machine Co., Inc.

Ensaio de tração

- À medida que a carga aumenta, a distância L também aumenta.



- A distância L e as alterações no diâmetro do corpo de prova são medidos através de **extensômetros**.

Diagrama tensão-deformação

➤ Para cada passo de carga, são medidos/calculados:

P	$\delta = L - L_0$	$\sigma = P/A_0$	$\varepsilon = \delta/L_0$
P_1	δ_1	σ_1	ε_1
P_2	δ_2	σ_2	ε_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
P_n	δ_n	σ_n	ε_n

➤ Ao se construir um gráfico com os pares de valores σ e ε , obtém-se o chamado *diagrama tensão-deformação*.

Ensaio de tração

DIAGRAMA
TENSÃO-
DEFORMAÇÃO

Varia de material para material;

Pode variar até para um mesmo material.

Temperatura do
corpo de prova

Velocidade de
aplicação da carga

- Analisando os diagramas de vários grupos de materiais, é possível classificá-los em duas categorias:

FRÁGEIS

DÚCTEIS

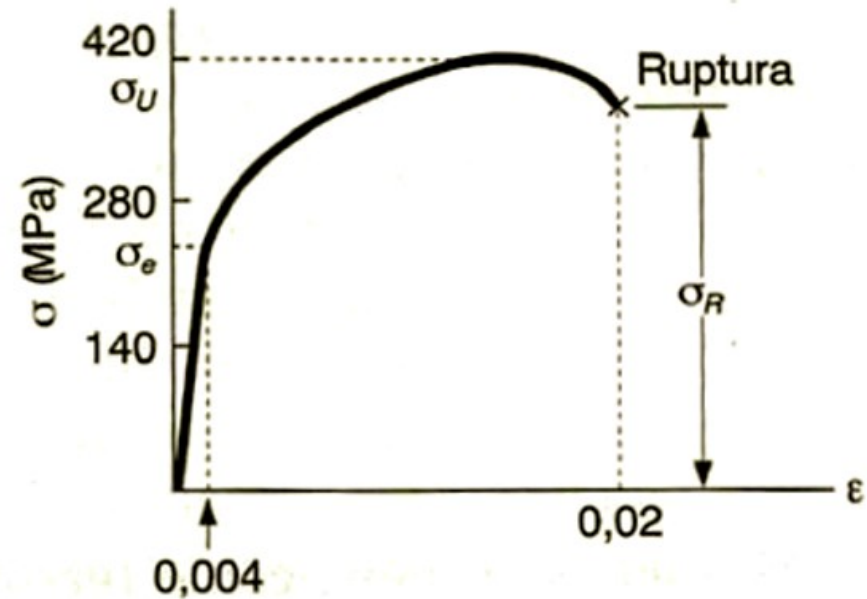
MATERIAIS DÚCTEIS

Materiais dúcteis

- *Exemplo:* aço estrutural e as ligas de muitos outros metais;
- Se caracterizam por apresentarem escoamento à temperatura ambiente;
- *Durante o ensaio de tração:*



(a) Aço com baixo teor de carbono



(b) Liga de alumínio

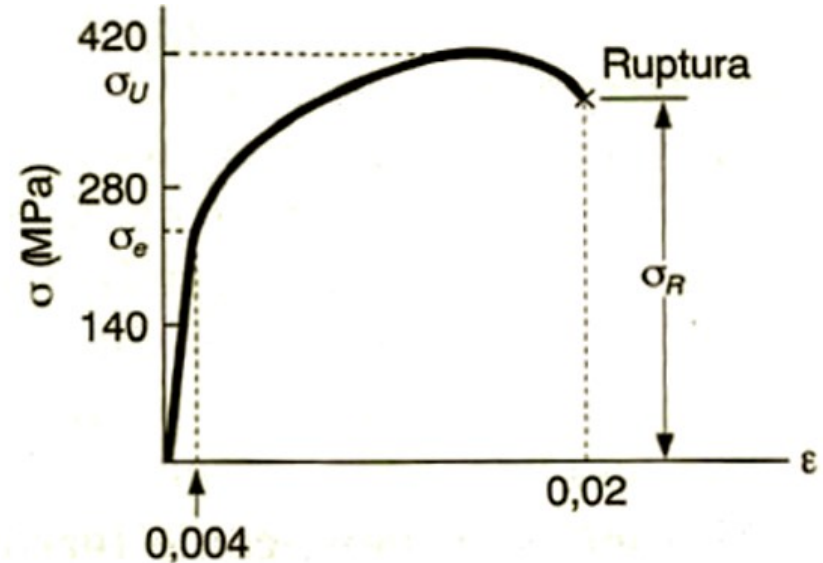
VÍDEO DO ENSAIO

Materiais dúcteis

➤ *Durante o ensaio de tração:*



(a) Aço com baixo teor de carbono



(b) Liga de alumínio

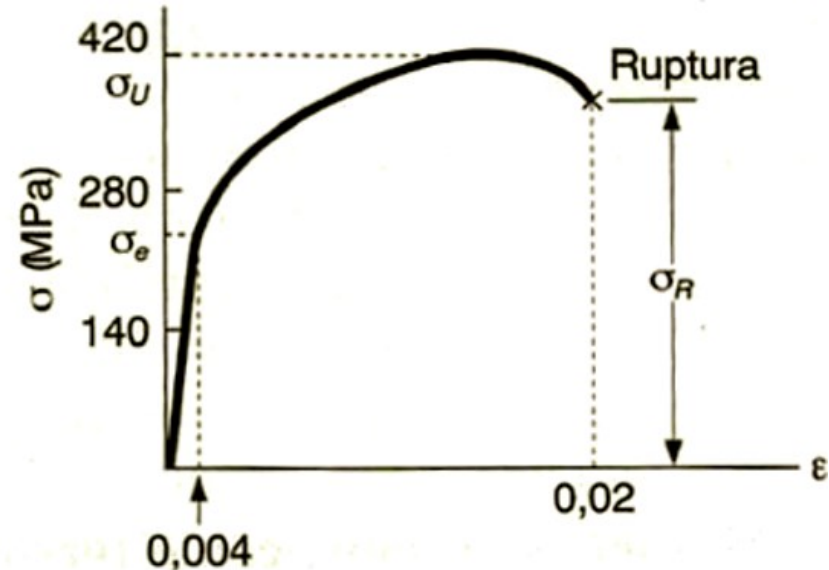
Comprimento aumenta lentamente, proporcional ao carregamento → linha reta com grande coeficiente angular.

Materiais dúcteis

➤ *Durante o ensaio de tração:*



(a) Aço com baixo teor de carbono



(b) Liga de alumínio

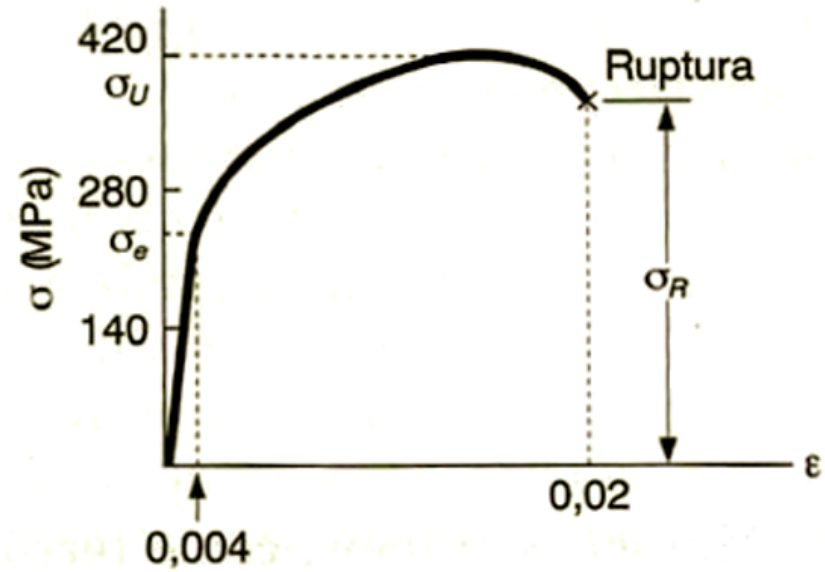
Valor crítico de tensão σ_e (tensão de escoamento) → o corpo de prova passa a sofrer longa deformação, com pequeno aumento relativo da carga aplicada.

Materiais dúcteis

➤ *Durante o ensaio de tração:*



(a) Aço com baixo teor de carbono



(b) Liga de alumínio

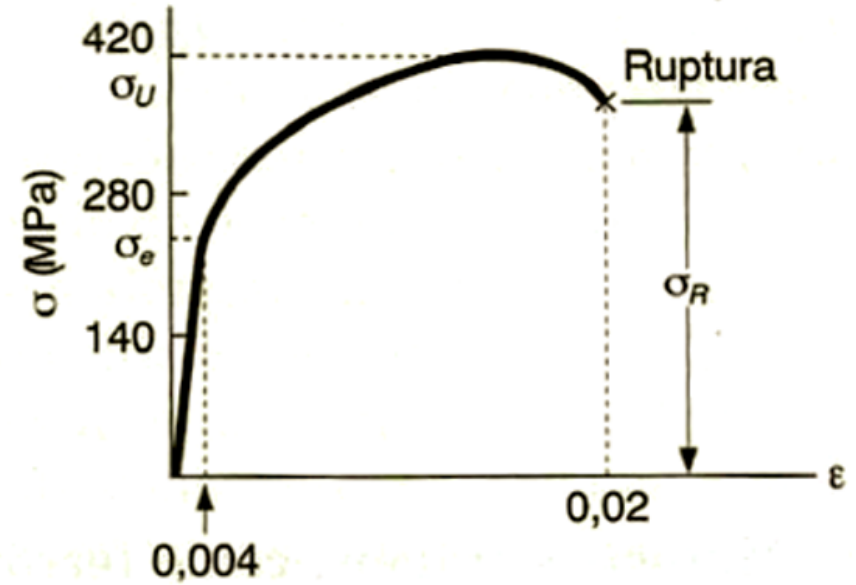
Valor crítico de tensão σ_e (tensão de escoamento) → o corpo de prova passa a sofrer longa deformação, com pequeno aumento relativo da carga aplicada. Isso ocorre por causa do deslizamento relativo de camadas do material ao longo de superfícies oblíquas.

Materiais dúcteis

➤ *Durante o ensaio de tração:*



(a) Aço com baixo teor de carbono



(b) Liga de alumínio

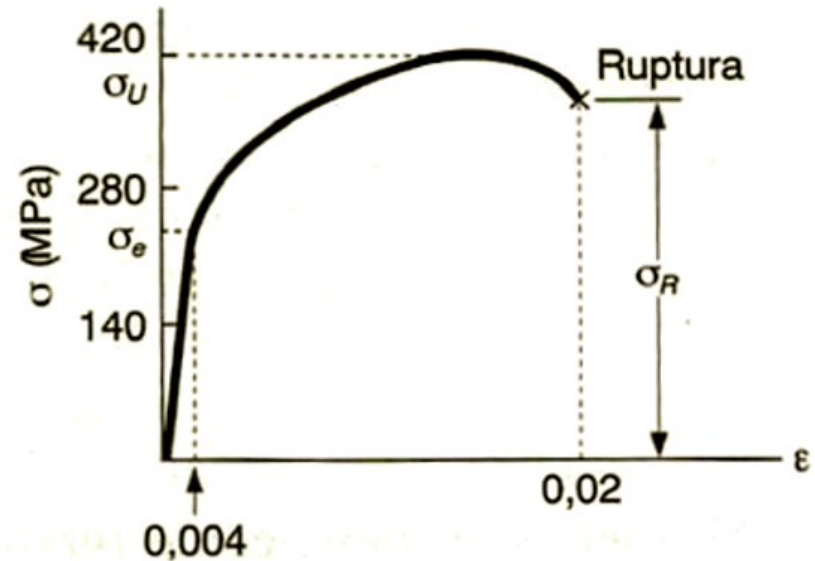
O alongamento do corpo de prova após o início do escoamento pode ser até 200 vezes maior do que aquele observado no início do escoamento!

Materiais dúcteis

➤ *Durante o ensaio de tração:*



(a) Aço com baixo teor de carbono

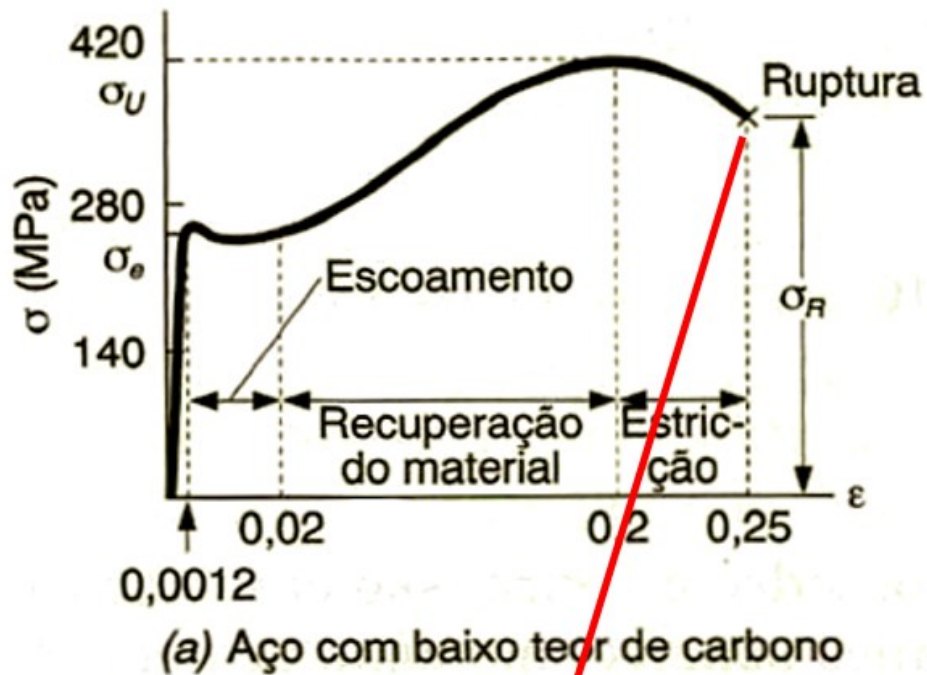


(b) Liga de alumínio

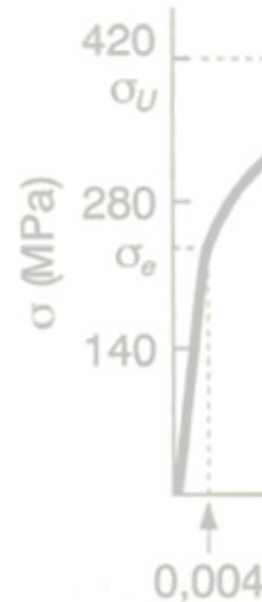
O valor máximo de tensão (tensão última ou tensão limite, σ_U) é atingido, o diâmetro de uma parte do corpo começa a diminuir devido à instabilidade local. Esse fenômeno é denominado estricção.

Materiais dúcteis

➤ *Durante o ensaio de tração:*



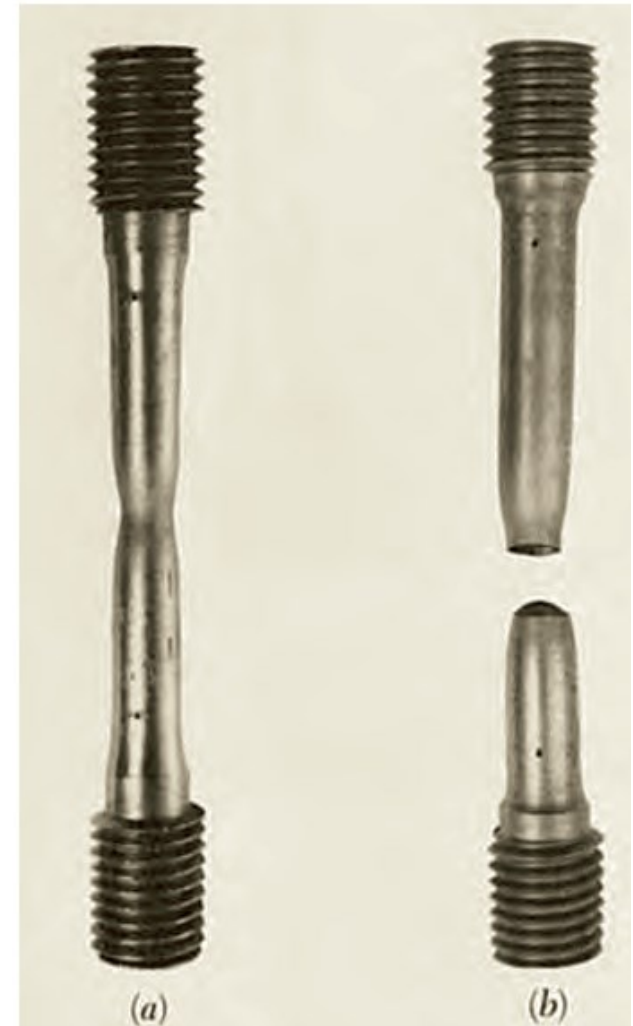
Rompimento do corpo de prova (tensão de ruptura).



Materiais dúcteis

- A ruptura ocorre ao longo de uma superfície cônica, formando um *ângulo de 45°* com a superfície original do corpo de prova;

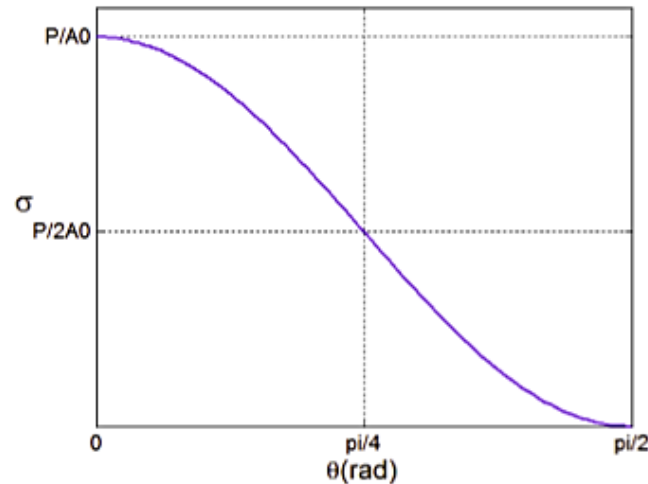
Que tipo de tensão é o principal responsável pela falha dos materiais dúcteis?



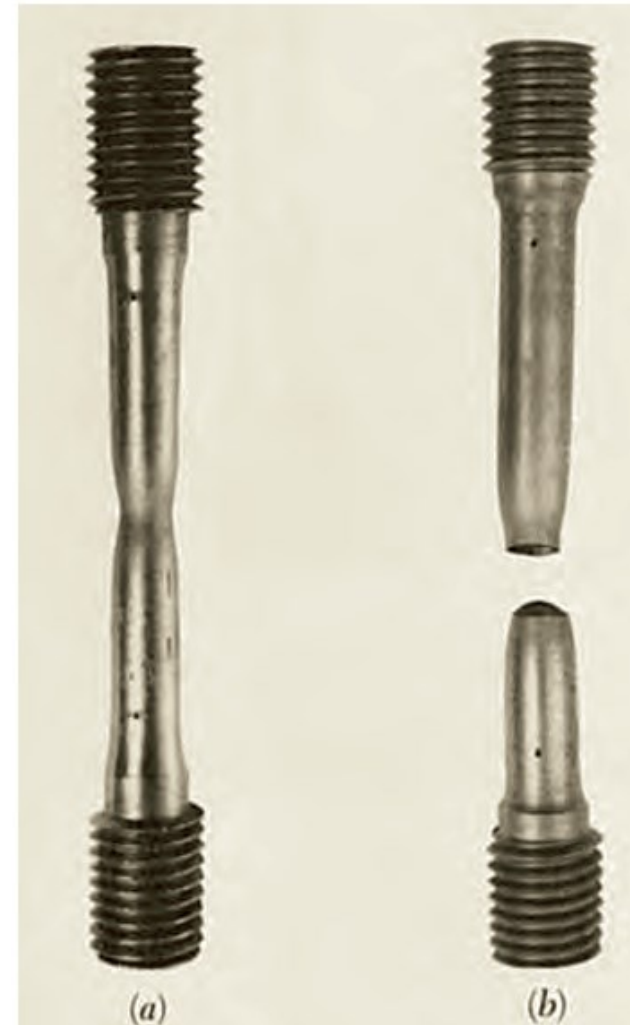
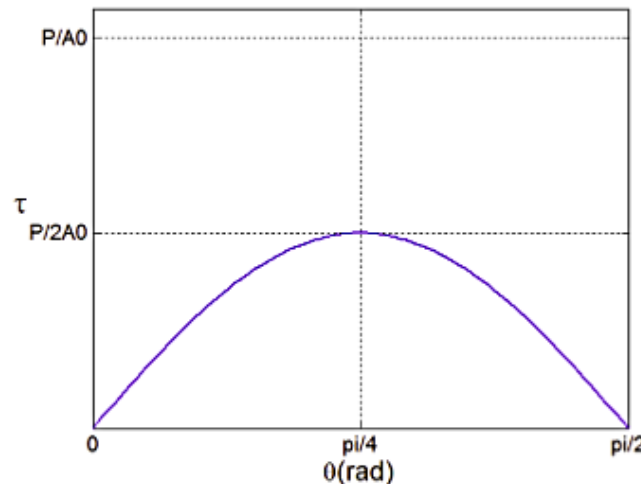
Materiais dúcteis

- *Que tipo de tensão é o principal responsável pela falha dos materiais dúcteis?*

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta$$



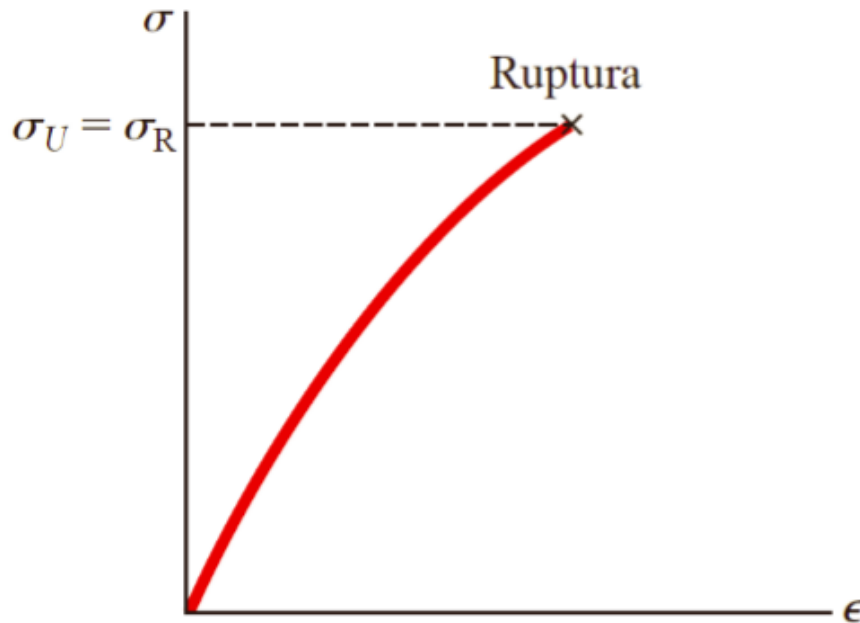
$$\tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta$$



MATERIAIS FRÁGEIS

Materiais frágeis

- **Exemplo:** ferro fundido, vidro, concreto;
- São caracterizados por uma ruptura que ocorre sem nenhuma mudança sensível no modo de deformação do material;
- A deformação até a ruptura é muito menor do que nos materiais dúcteis.



Não há distinção entre tensão última (tensão limite) e tensão de ruptura.



Materiais frágeis

- A ruptura ocorre ao longo de uma superfície perpendicular à carga;

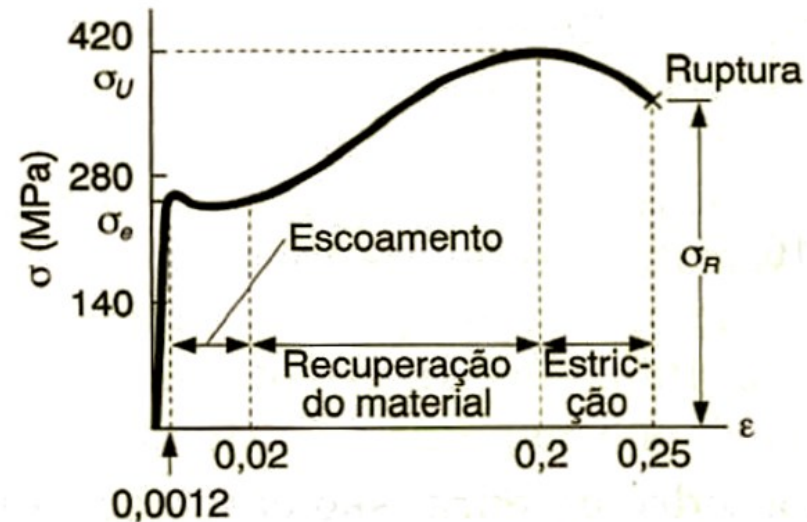
Que tipo de tensão é o principal responsável pela falha dos materiais frágeis?



Quanto à compressão

- Para materiais dúcteis, o diagrama tensão-deformação obtido seria o mesmo da tração até certo ponto (do trecho reto inicial, passando pelo trecho de escoamento e pelo de recuperação do material);

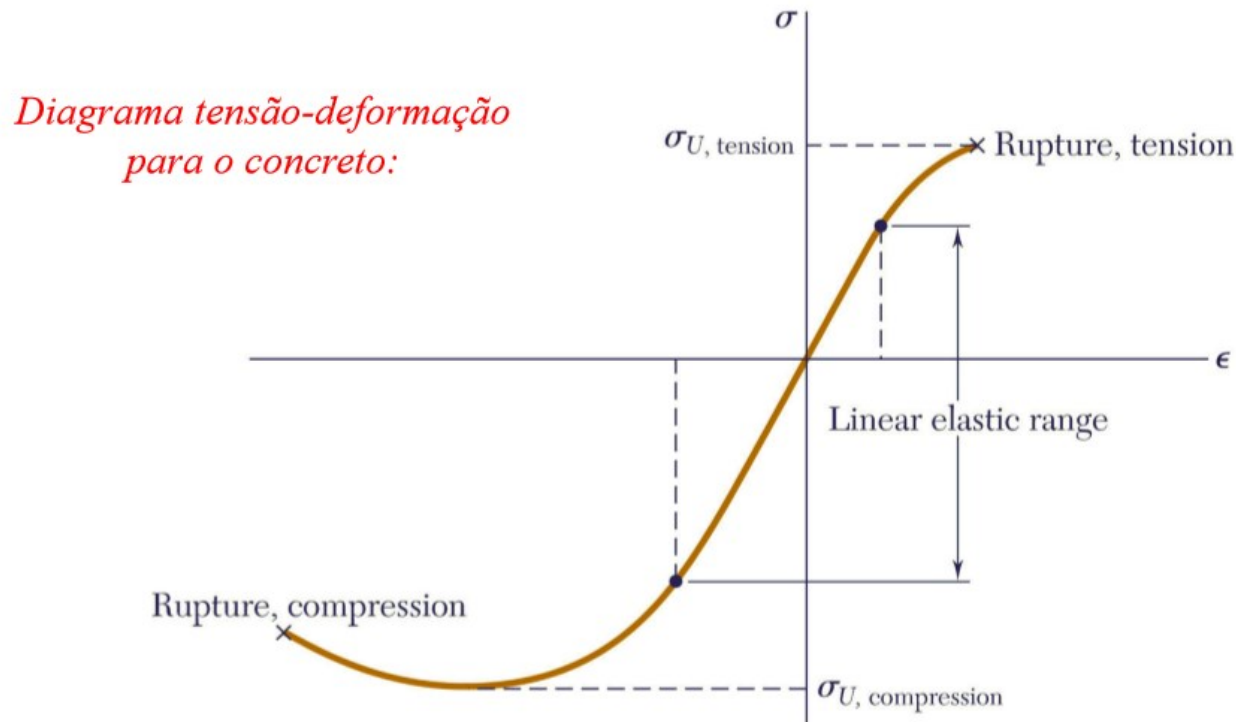
Para valores altos de deformação específica, como não há estricção na compressão, os diagramas passam a ser diferentes.



(a) Aço com baixo teor de carbono

Quanto à compressão

- Para a maior parte dos materiais frágeis, a tensão última de compressão é muito maior que a tensão última na tração;



Isso ocorre devido a imperfeições do material (fendas, cavidades), que debilitam o material, diminuindo sua resistência à tração.

**Tensões e deformações específicas
verdadeiras**

Tensões e deformações “verdadeiras”

Tensão de engenharia:

$$\sigma = \frac{P}{A_0}$$



Tensão verdadeira:

$$\sigma_v = \frac{P}{A}$$

Deformação específica de engenharia:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$$

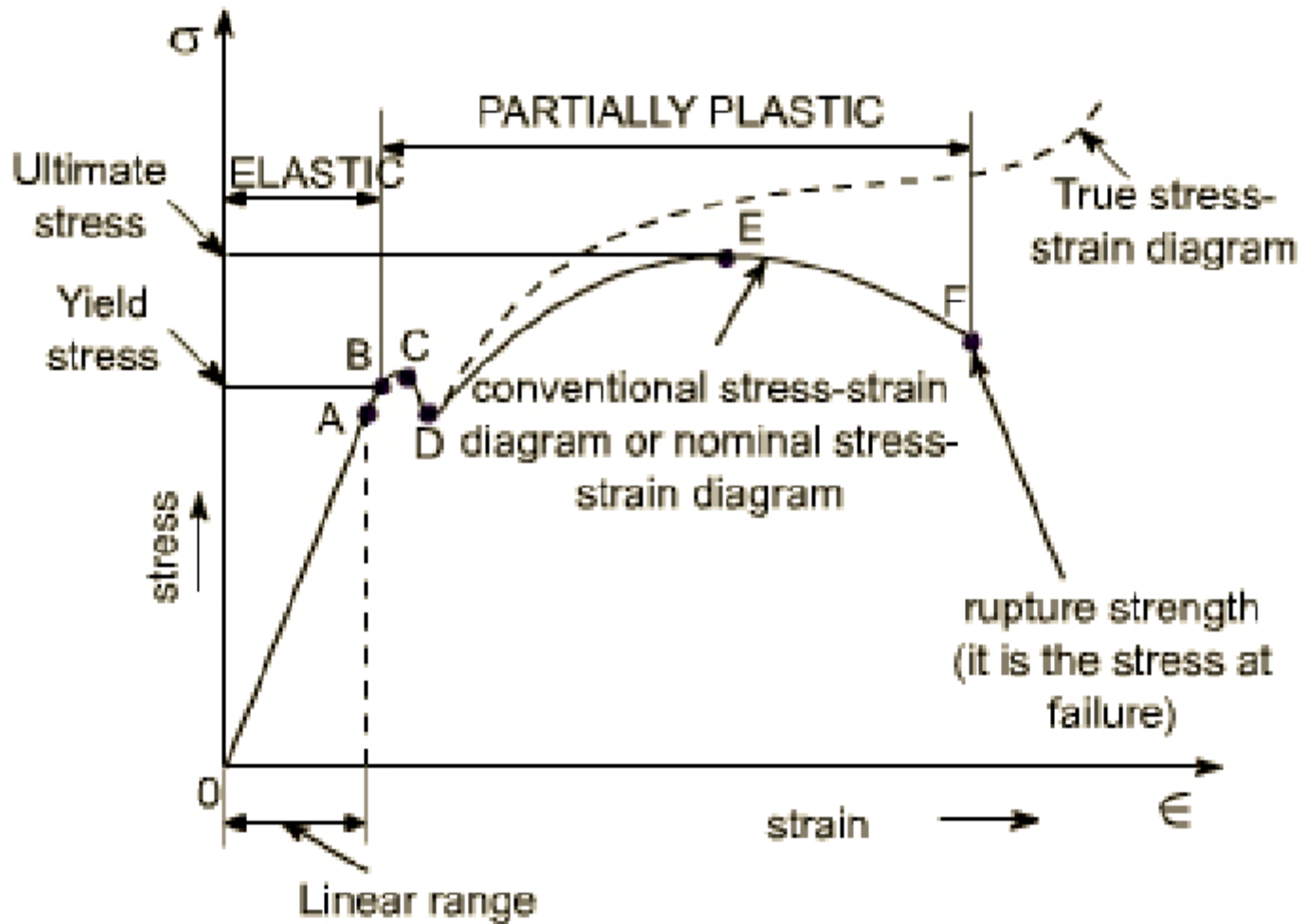


Deformação específica verdadeira:

$$\varepsilon_v = \Sigma \Delta \varepsilon = \Sigma (\Delta L / L)$$

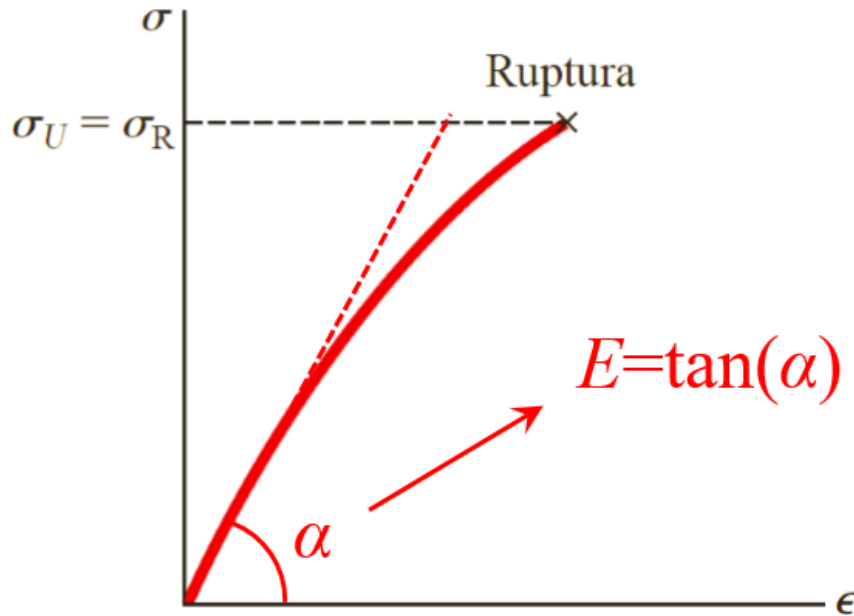
$$\varepsilon_v = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0}$$

Tensões e deformações “verdadeiras”



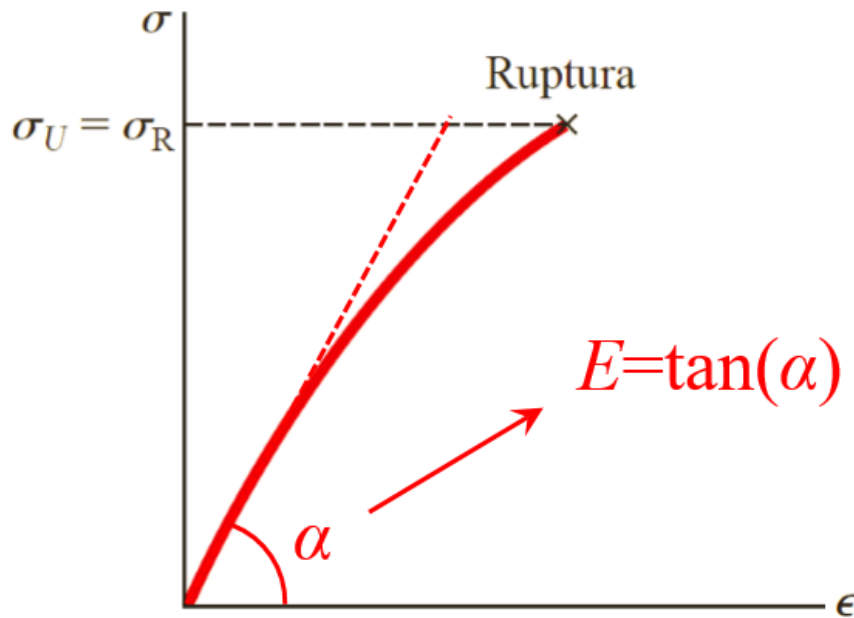
Lei de Hooke; módulo de elasticidade

Lei de Hooke; módulo de elasticidade



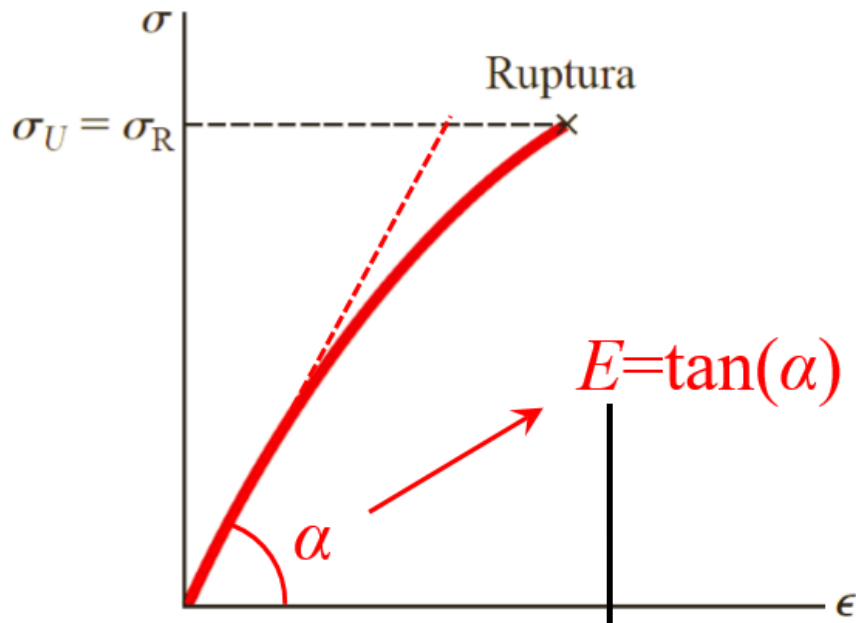
- As estruturas correntes são projetadas de modo a sofrerem apenas **pequenas deformações**, trabalhando assim no **regime linear**;

Lei de Hooke; módulo de elasticidade



- As estruturas correntes são projetadas de modo a sofrerem apenas **pequenas deformações**, trabalhando assim no **regime linear**;
- Na parte inicial do diagrama, a tensão σ é **diretamente proporcional** à deformação específica ϵ :

Lei de Hooke; módulo de elasticidade



- As estruturas correntes são projetadas de modo a sofrerem apenas **pequenas deformações**, trabalhando assim no **regime linear**;
- Na parte inicial do diagrama, a tensão σ é **diretamente proporcional** à deformação específica ϵ :

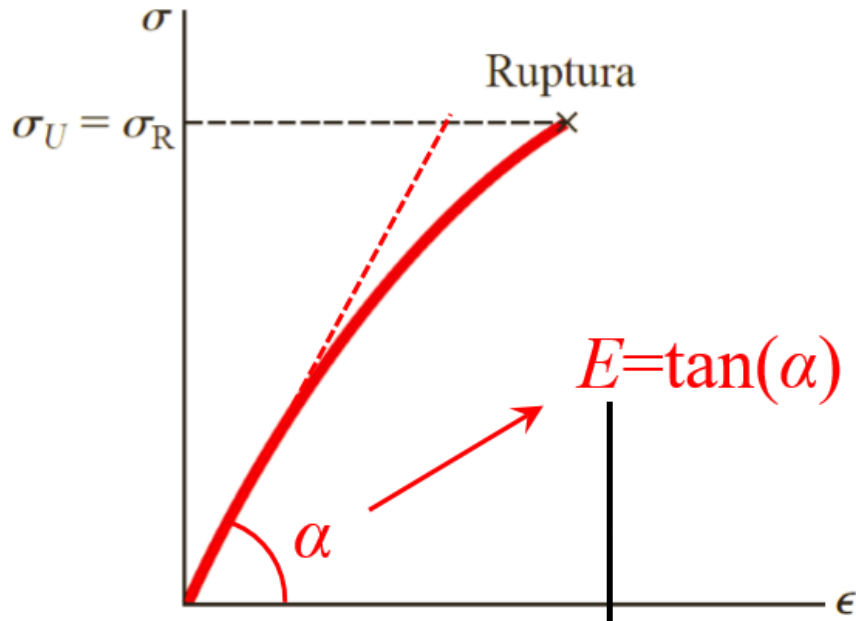
Módulo de elasticidade ou módulo de Young do material

$$\sigma = E\epsilon$$

(Lei de Hooke)



Lei de Hooke; módulo de elasticidade



Expresso na mesma unidade de σ (**Pa** no SI).

- As estruturas correntes são projetadas de modo a sofrerem apenas **pequenas deformações**, trabalhando assim no **regime linear**;
- Na parte inicial do diagrama, a tensão σ é **diretamente proporcional** à deformação específica ϵ :

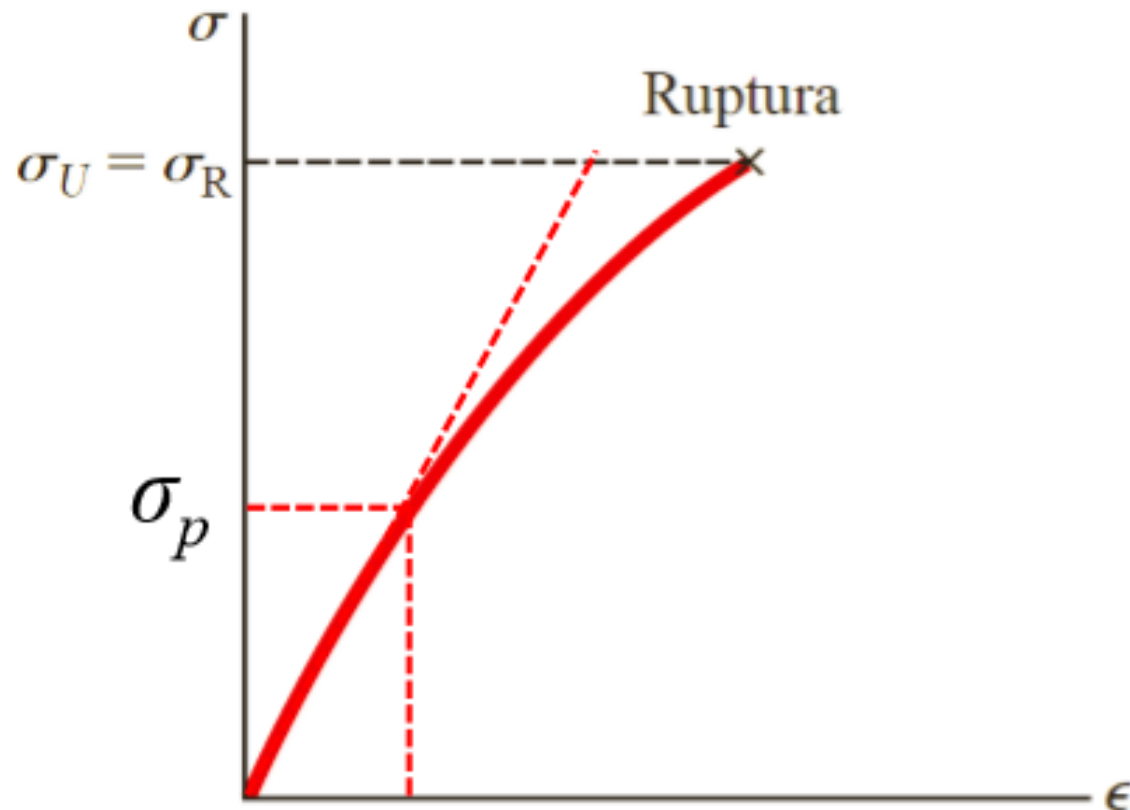
$$\sigma = E\epsilon$$

(Lei de Hooke)



Lei de Hooke; módulo de elasticidade

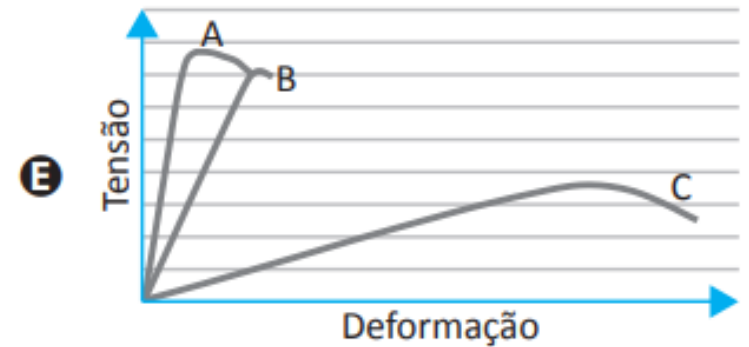
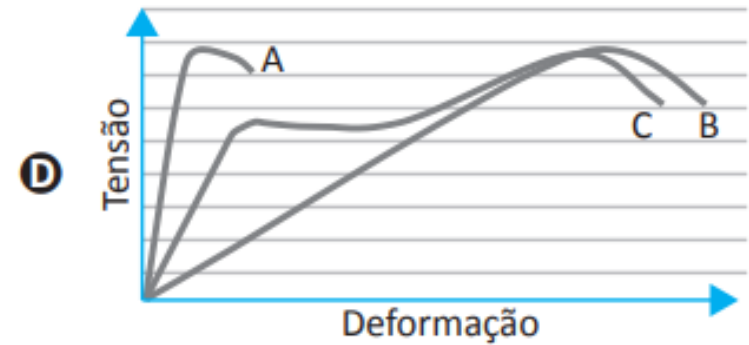
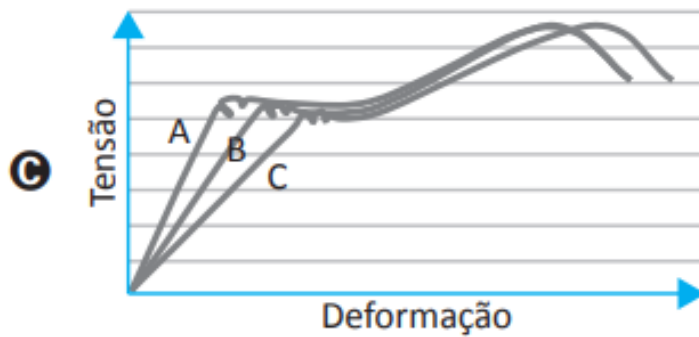
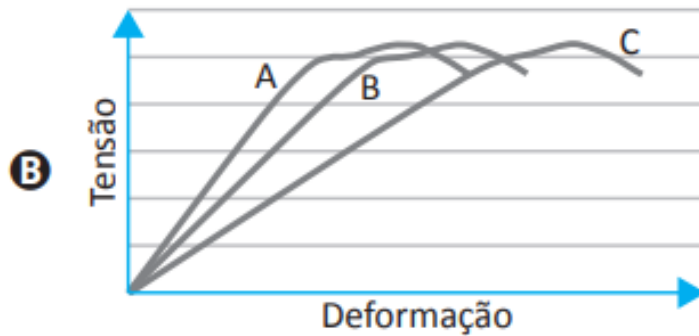
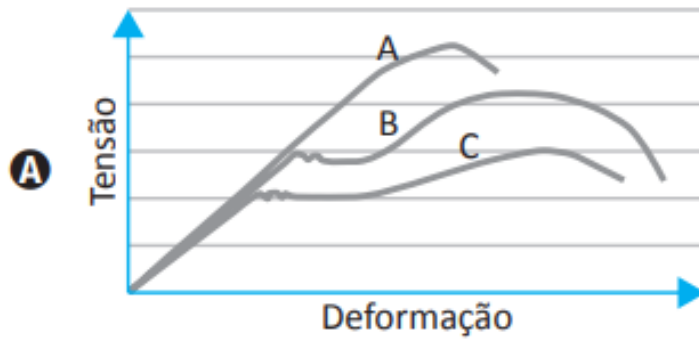
- O maior valor da tensão para o qual a lei de Hooke é válida se denomina **limite de proporcionalidade** do material.



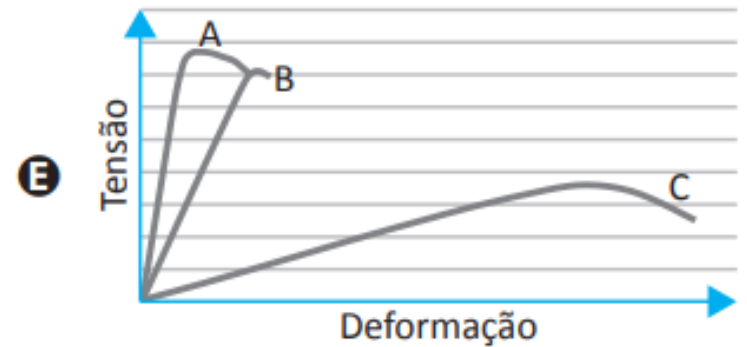
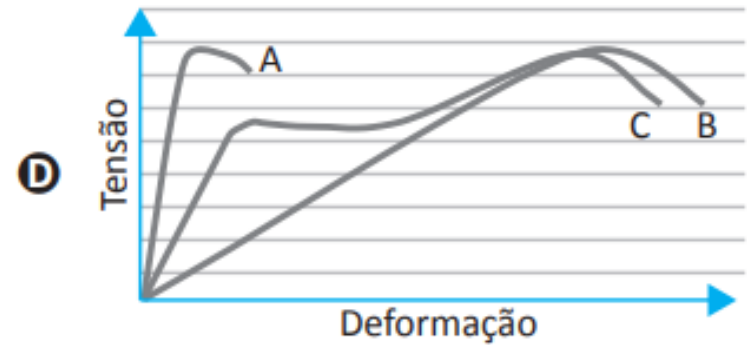
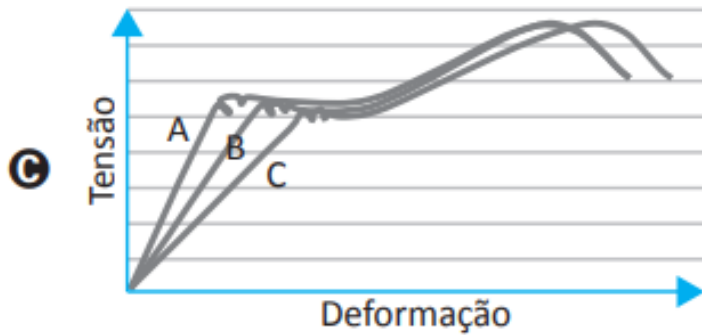
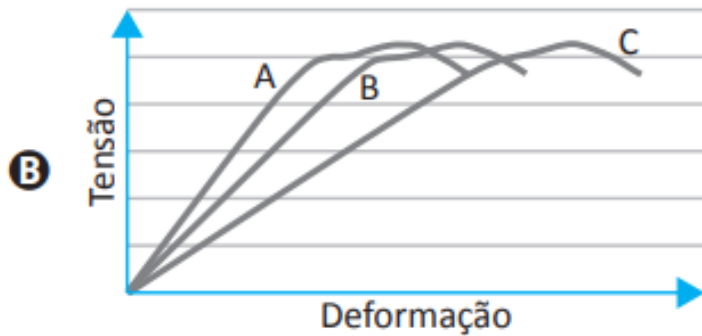
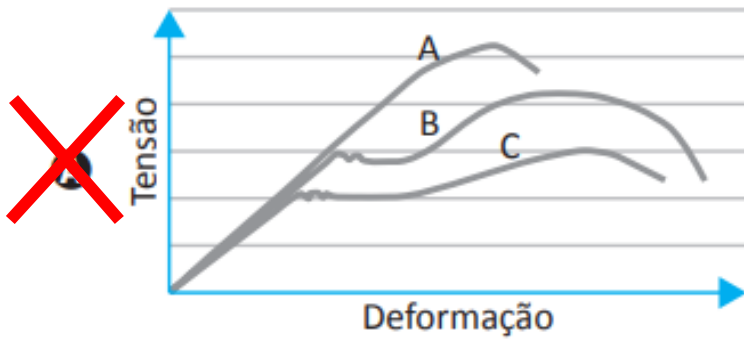
QUESTÃO 35: ENADE 2019

Na análise dos diagramas de **tensão x deformação** para três novos materiais (**A**, **B** e **C**), observou-se que os três apresentaram valores de módulo de deformação longitudinal similares. Considerando essas informações, assinale a opção em que as curvas de tensão x deformação melhor representam os três materiais (**A**, **B** e **C**).

QUESTÃO 35: ENADE 2019



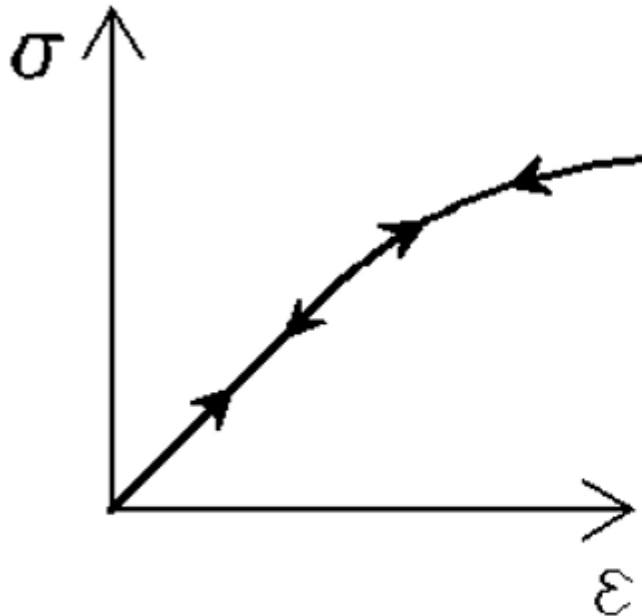
QUESTÃO 35: ENADE 2019



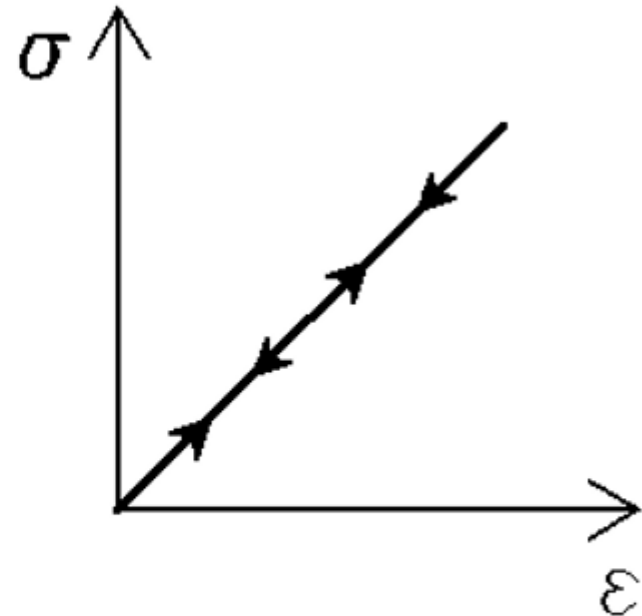
Elasticidade e plasticidade.

Elasticidade e plasticidade.

- Diz-se que um material tem **comportamento elástico** quando as deformações causadas por um certo carregamento desaparecem com a retirada do carregamento.



Material elástico
não-linear



Material elástico
linear

Elasticidade e plasticidade.

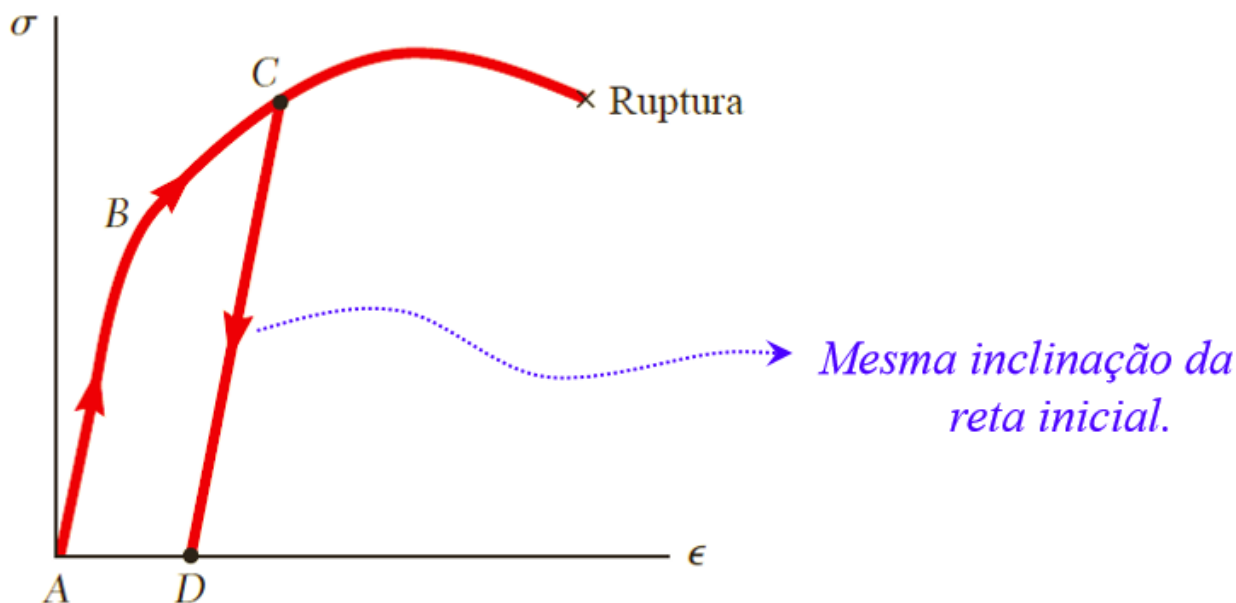
- O maior valor de tensão para o qual o material ainda apresenta comportamento elástico é denominado **limite de elasticidade**;



(a) Aço com baixo teor de carbono

Elasticidade e plasticidade.

- Se o material atingir o escoamento e se deformar, quando a carga é retirada as tensões e deformações decrescem de maneira linear, ao longo de uma linha reta CD paralela à reta AB:



- *O fato de ϵ não voltar ao ponto zero indica que o material sofreu **deformação permanente ou plástica**.*

Energia de deformação elástica para tensões normais

Energia de deformação

- Quando um material é deformado, tende a armazenar energia internamente em todo o seu volume.



Energia de deformação

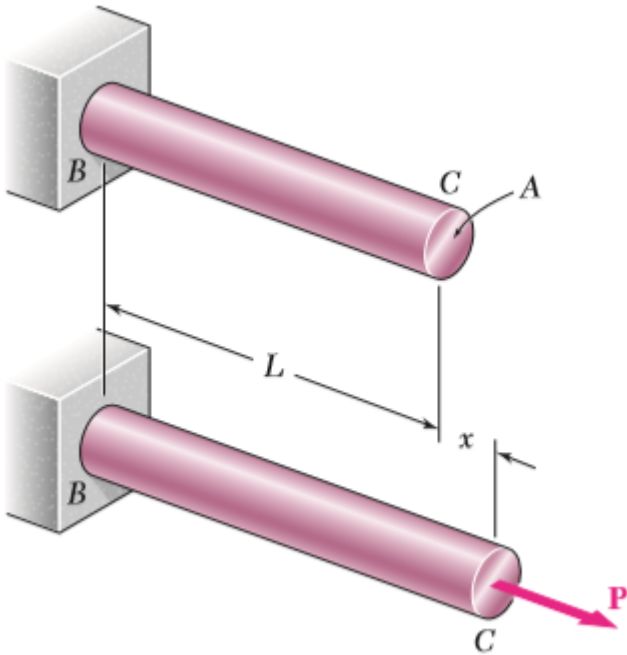
- Quando um material é deformado, tende a armazenar energia internamente em todo o seu volume.



*Como essa energia está relacionada com as deformações no material, ela é denominada **energia de deformação**.*

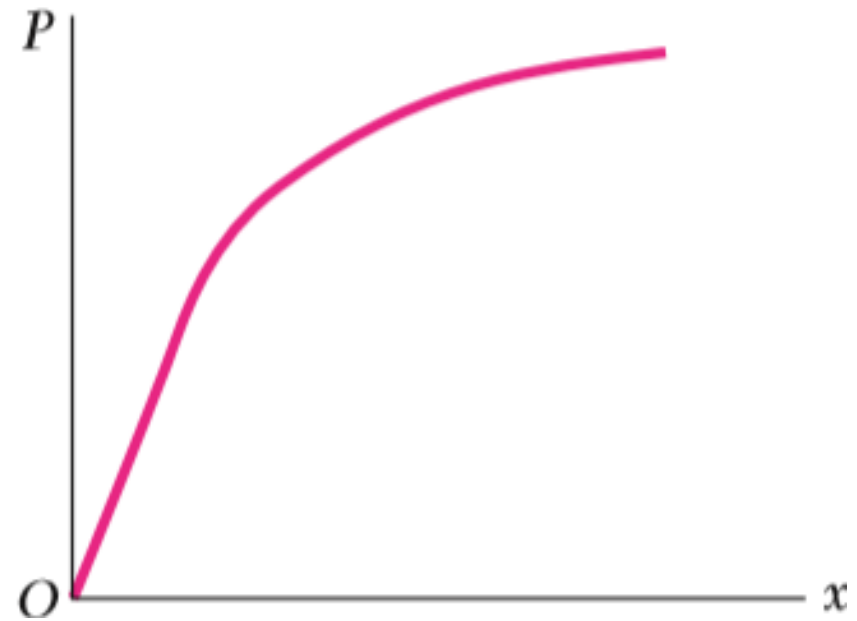
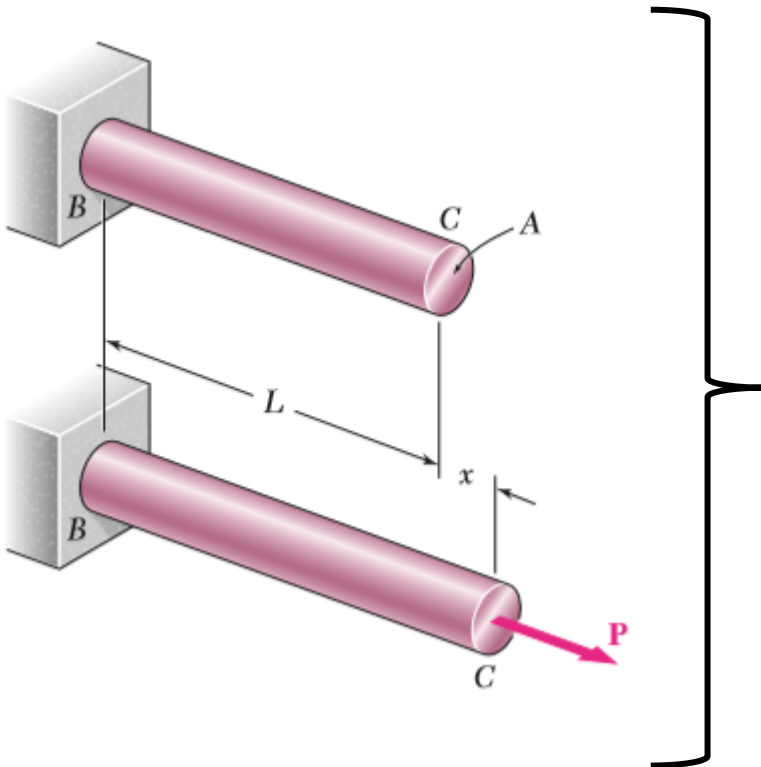
Energia de deformação

- Considere uma barra BC de comprimento L e seção transversal uniforme de área A , e que está submetida a uma força axial P que cresce lentamente (*para que não seja produzida energia cinética nem calorífica*).



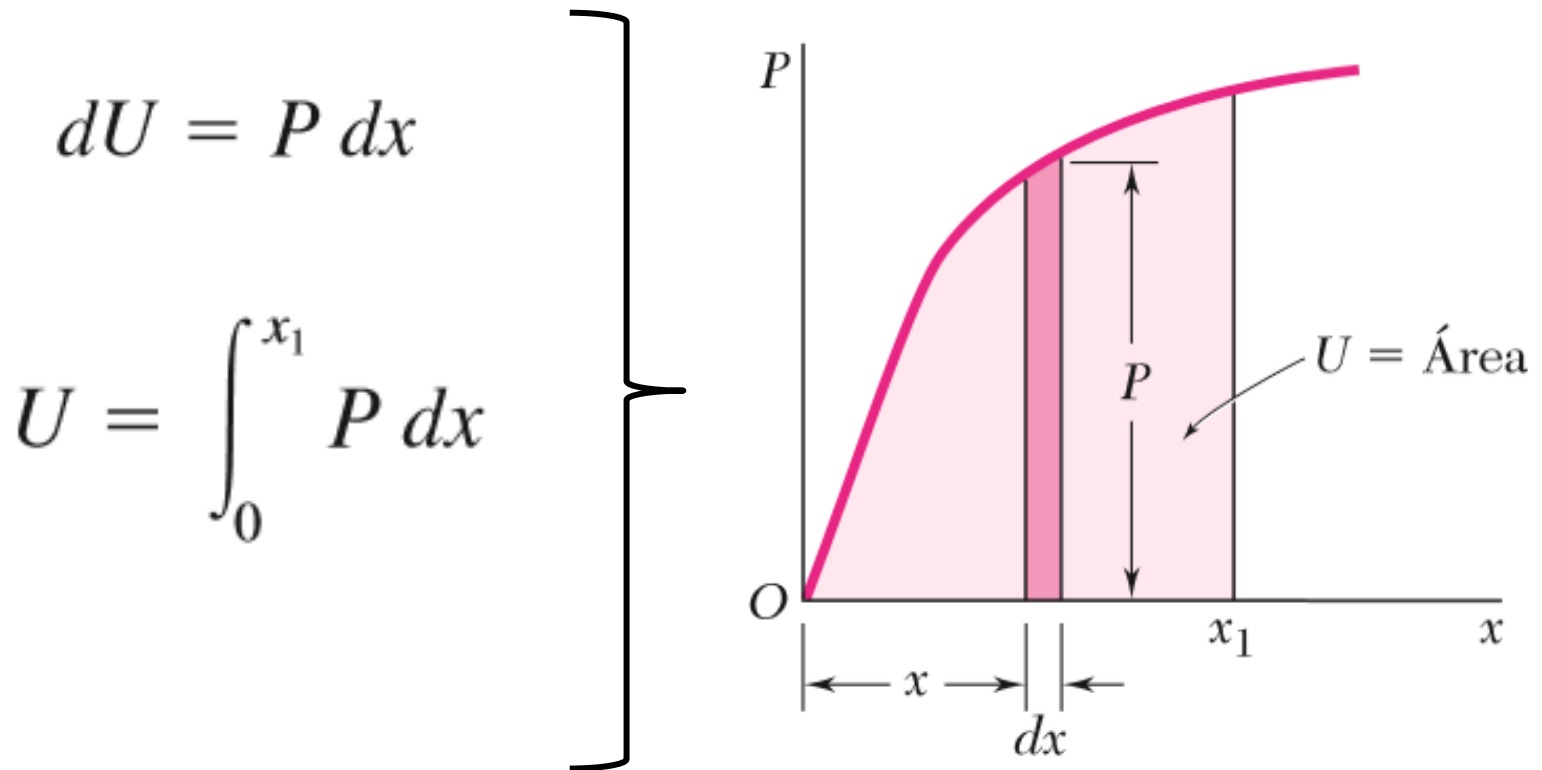
Energia de deformação

- Considere uma barra BC de comprimento L e seção transversal uniforme de área A , e que está submetida a uma força axial P que cresce lentamente (*para que não seja produzida energia cinética nem calorífica*).

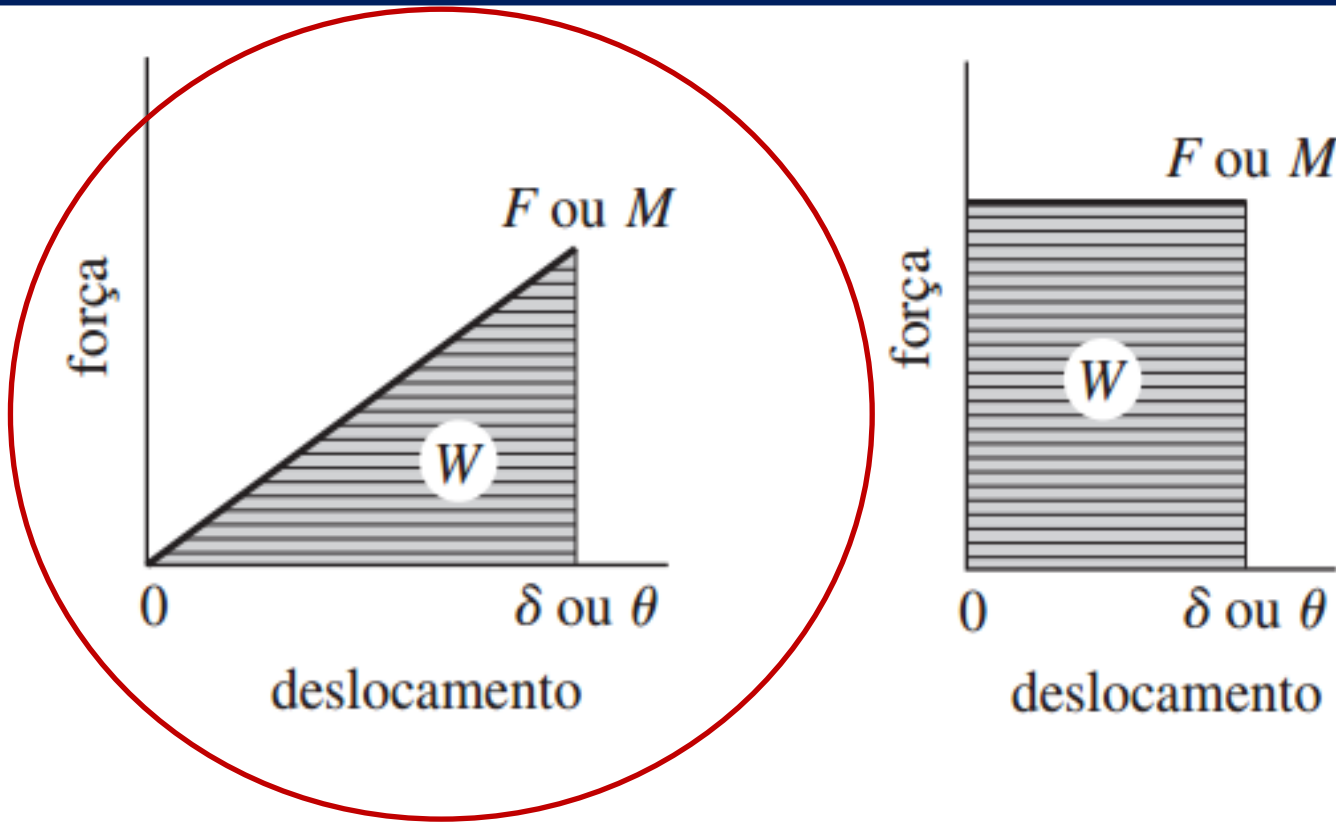


Energia de deformação

- Vamos agora considerar o trabalho dU feito pela força P à medida que a barra se alonga de um pequeno valor dx .



Energia de deformação



- Quando existir uma relação linear entre força e deslocamento e quando a força aumentar de zero até seu valor final:

$$U_{\text{externo}} = \frac{F \cdot d}{2}$$

Densidade de energia de deformação.

- Se não houve perda de energia, o U_{externo} será convertido em trabalho interno.
- Às vezes, é conveniente formular O TRABALHO INTERNO (U) por unidade de volume de material, denominada ***densidade de energia de deformação.***

Densidade de energia de deformação.

$$\frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \frac{P}{A} \frac{dx}{L} \quad \longrightarrow \quad \frac{U}{V} = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x d\epsilon_x$$

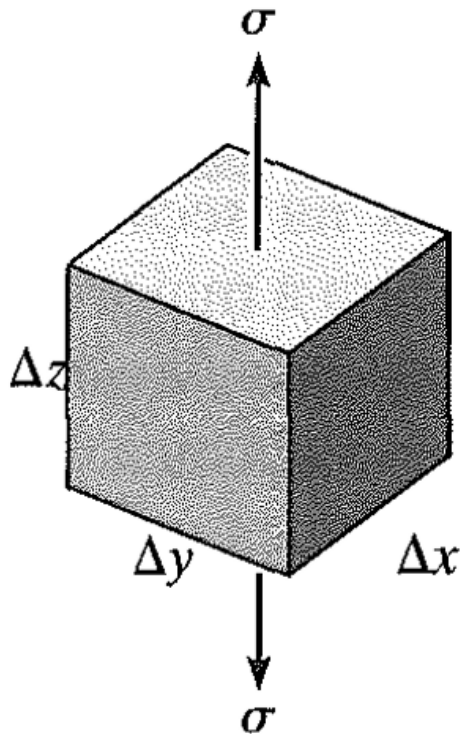


$$\text{Densidade de energia de deformação} = u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x d\epsilon_x$$



$$u = \frac{\sigma_1^2}{2E} \quad \longleftarrow \quad u = \int_0^{\epsilon_1} E\epsilon_x d\epsilon_x = \frac{E\epsilon_1^2}{2}$$

Energia de deformação elástica



$$u = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V}$$

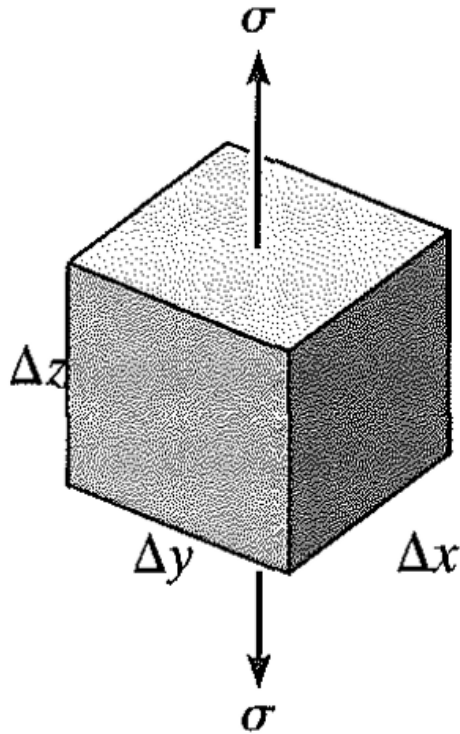
$$u = \frac{dU}{dV}$$

$$u = \frac{\sigma_1^2}{2E}$$

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV$$

A expressão obtida é válida **somente** para **deformações elásticas** e é conhecida como **ENERGIA DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA** do corpo!

Energia de deformação elástica



$$u = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V}$$

$$u = \frac{dU}{dV}$$

$$u = \frac{\sigma_1^2}{2E}$$

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV$$

- ❖ No **SI**, o trabalho e a energia serão expressos em ***N . m***;
- ❖ Essa unidade é chamada de ***joule (J)***.

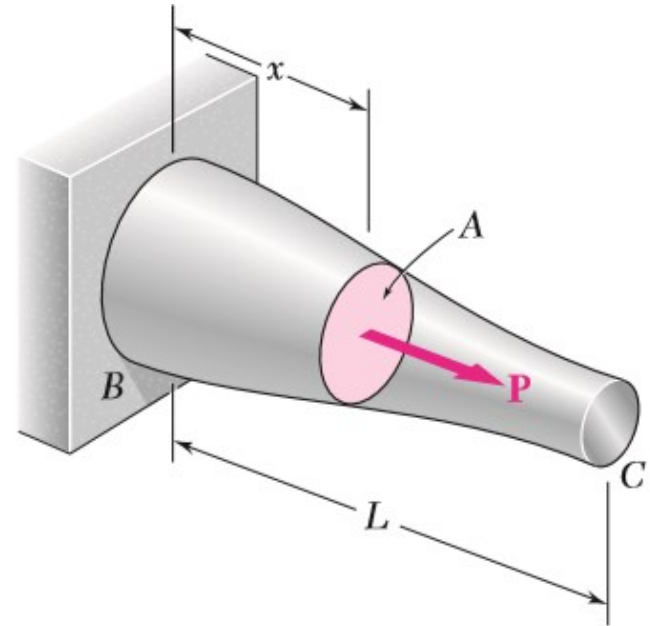
Energia de Deformação para Carregamento Axial

Energia de Deformação para Carregamento Axial

$$U = \int \frac{P^2}{2EA^2} dV$$

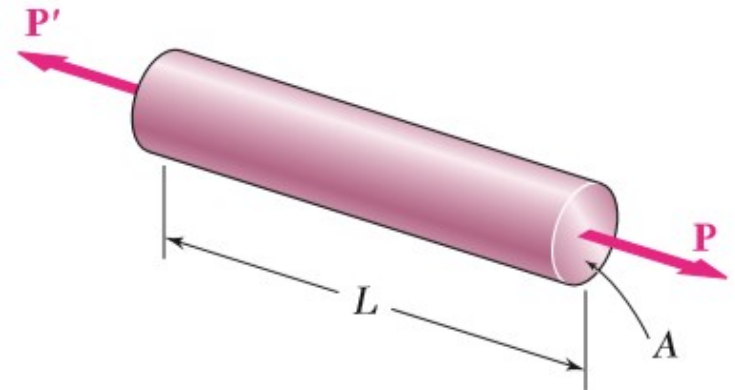
ou, fazendo $dV = A dx$,

$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx$$



No caso de uma barra de seção transversal uniforme

$$U = \frac{P^2 L}{2AE}$$



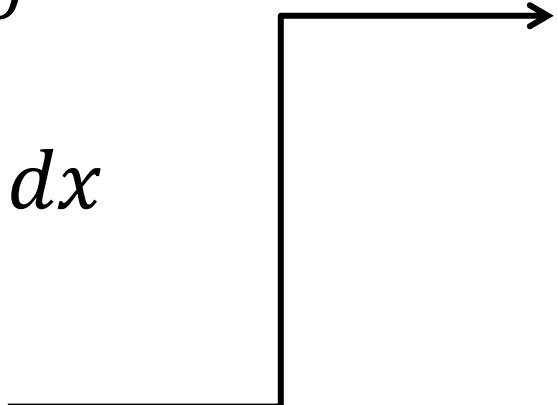
Princípio da conservação de energia

- Como o princípio da conservação de energia diz que o trabalho (U_{externo}) realizado por um sistema de forças aplicadas em uma estrutura é igual à energia de deformação (U) armazenada na estrutura, logo:

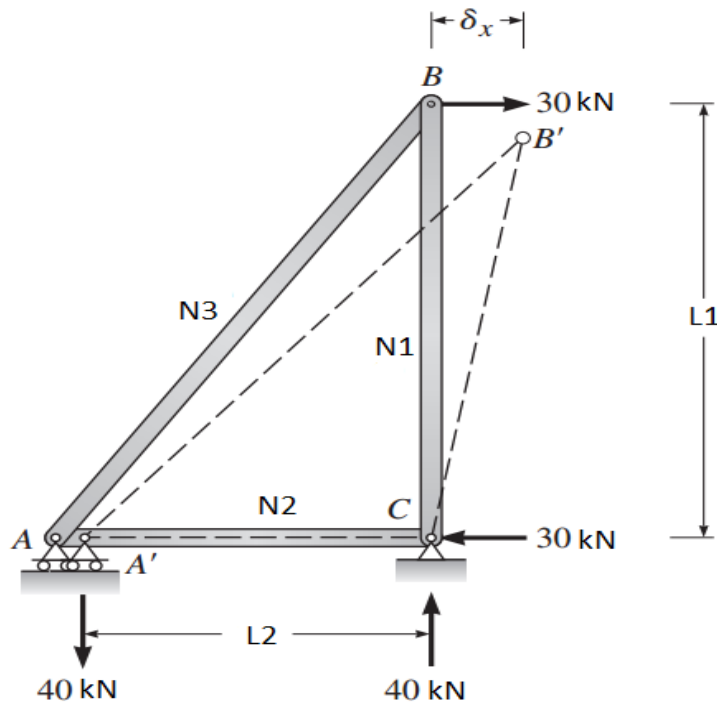
$$U_{\text{externo}} = U$$

$$\frac{P \cdot \delta}{2} = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx$$

$$\frac{P \cdot \delta}{2} = \frac{P^2 L}{2EA}$$


$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

Exemplo



$$\frac{F \cdot \delta x}{2} = \sum \int_V^{normal} \frac{\sigma^2}{2E} dV$$

$$\frac{F \cdot \delta x}{2} = \int_0^{L1} \frac{(N1/A)^2}{2E} A \cdot dx + \int_0^{L2} \frac{(N2/A)^2}{2E} A \cdot dx + \int_0^{L3} \frac{(N3/A)^2}{2E} A \cdot dx$$

$$\frac{F \cdot \delta x}{2} = \int_0^{L1} \frac{N1^2}{2EA} dx + \int_0^{L2} \frac{N2^2}{2EA} dx + \int_0^{L3} \frac{N3^2}{2EA} dx$$

$$\frac{F \cdot \delta x}{2} = \int_0^{L1} \frac{N1^2}{2EA} dx + \int_0^{L2} \frac{N2^2}{2EA} dx + \int_0^{L3} \frac{N3^2}{2EA} dx$$

$$\frac{F \cdot \delta x}{2} = \frac{N1^2 L1}{2EA} + \frac{N2^2 L2}{2EA} + \frac{N3^2 L3}{2EA}$$

$$\delta x = \frac{1}{30(EA)} (N1^2 L1 + N2^2 L2 + N3^2 L3)$$

...

CONTINUA