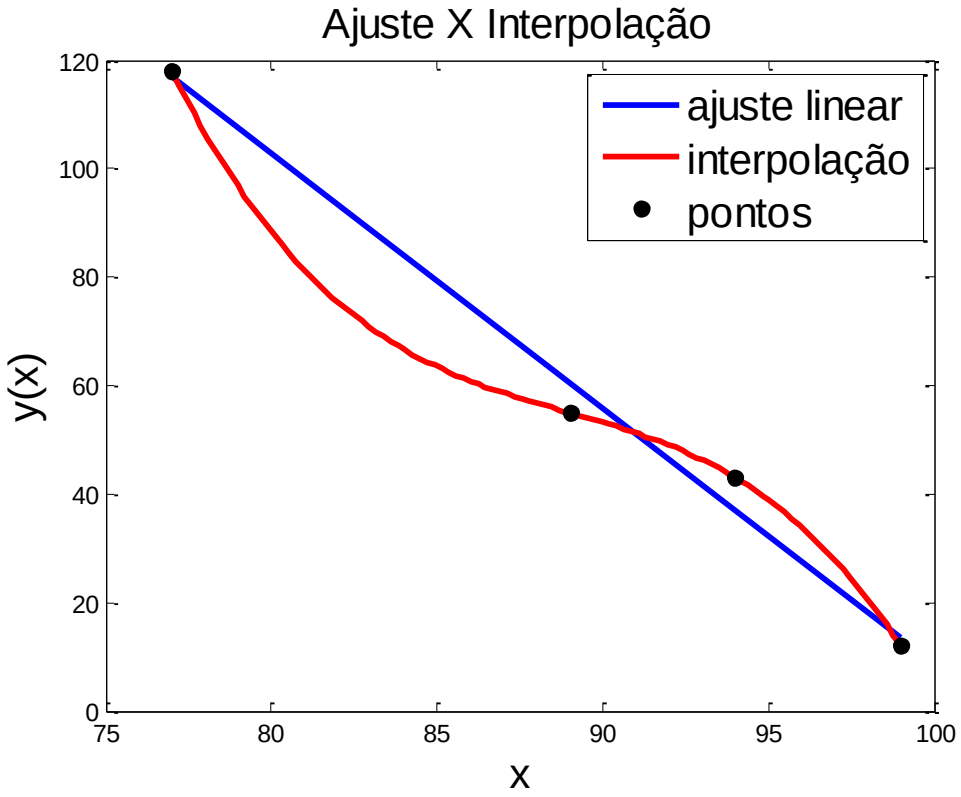
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS SERTÃO
EIXO TECNOLOGIA



Cálculo Numérico

Prof. Dr. Alverlando Ricardo

Aula 7: Parte III: AJUSTE DE CURVAS

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

- Muitas observações CIENTÍFICAS e de ENGENHARIA são feitas em experimentos nos quais grandezas físicas são medidas e gravadas.

- Tais registros são normalmente chamados de **DADOS** ou pontos experimentais.

INTRODUÇÃO

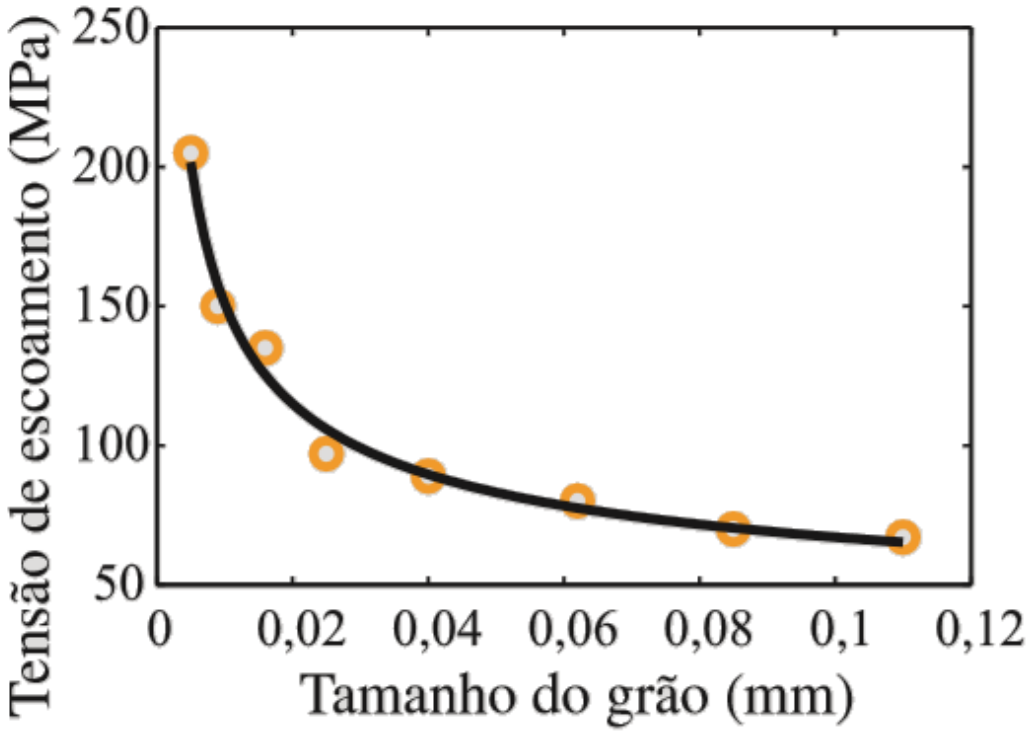
- Os dados são utilizados por ***cientistas e engenheiro*** no desenvolvimento ou ***na avaliação de fórmulas matemáticas*** (equações) que possam representá-los;
- Isso é feito com ***o traçado de curvas*** nas quais se assume uma forma de equação específica;
- E com a ***determinação dos parâmetros*** dessa equação de forma que as ***curvas*** traçadas representem da ***melhor forma possível*** o conjunto de dados.

INTRODUÇÃO

- A dureza de muitos metais depende do tamanho dos grãos que o compõem:

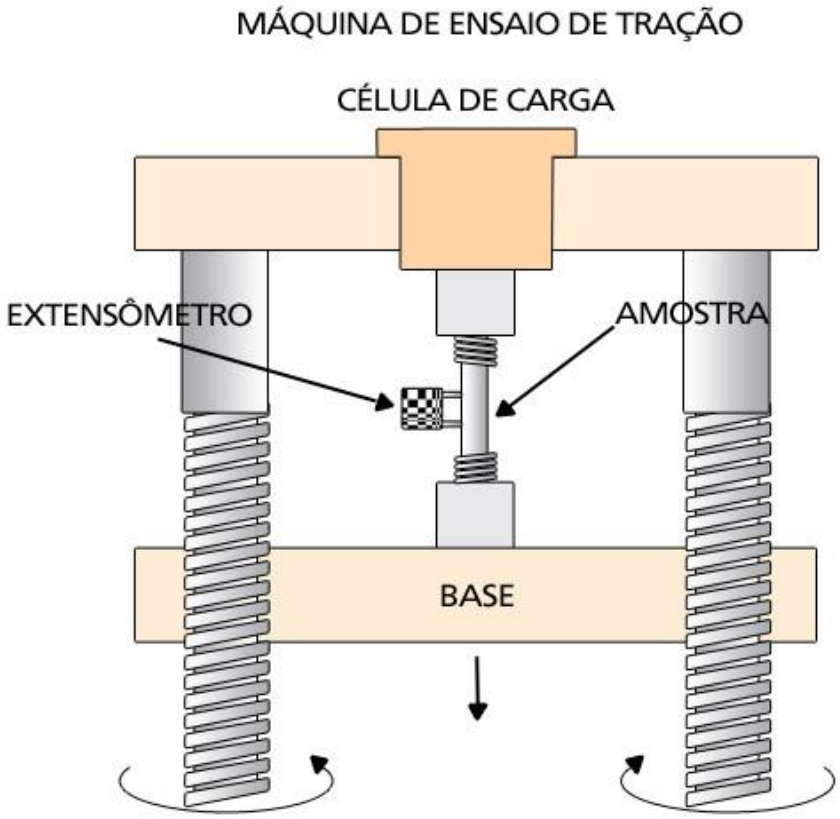
Dados da dureza dos grãos em função de sua dimensão

d (mm)	0,005	0,009	0,016	0,025	0,040	0,062	0,085	0,110
σ_y (MPa)	205	150	135	97	89	80	70	67

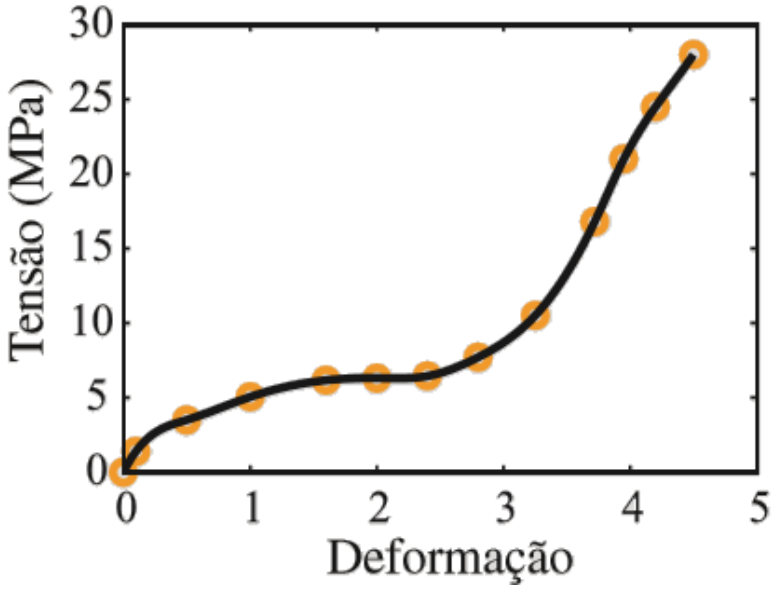


INTRODUÇÃO

- Ensaio de tração de uma amostra:

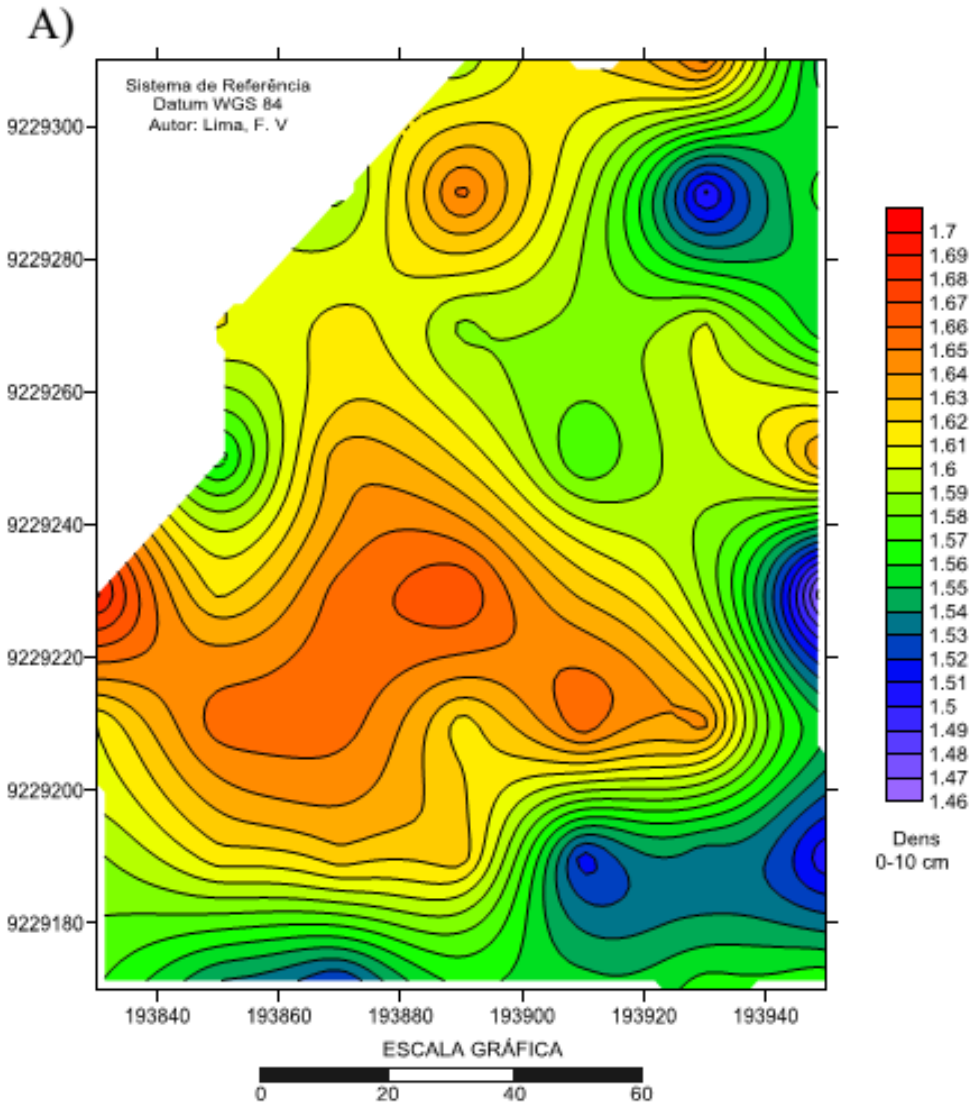


Deformação (mm)	Força (N)	Tensão de Engenharia	Deformação de Engenharia
0,00058784	716,65	17,91625	0,000
1,3748	7930,5	198,2625	0,005
2,5886	11335	283,375	0,010
3,8943	11541	288,525	0,016
5,6443	11578	289,45	0,023
18,333	13829	345,725	0,073
30,75	14465	361,625	0,123
42,083	14627	365,675	0,168
52,666	14614	365,35	0,211
63,089	11213	280,325	0,252



INTRODUÇÃO

- Curvas de nível de um determinado região:



INTRODUÇÃO

- Mapa das isopletas:

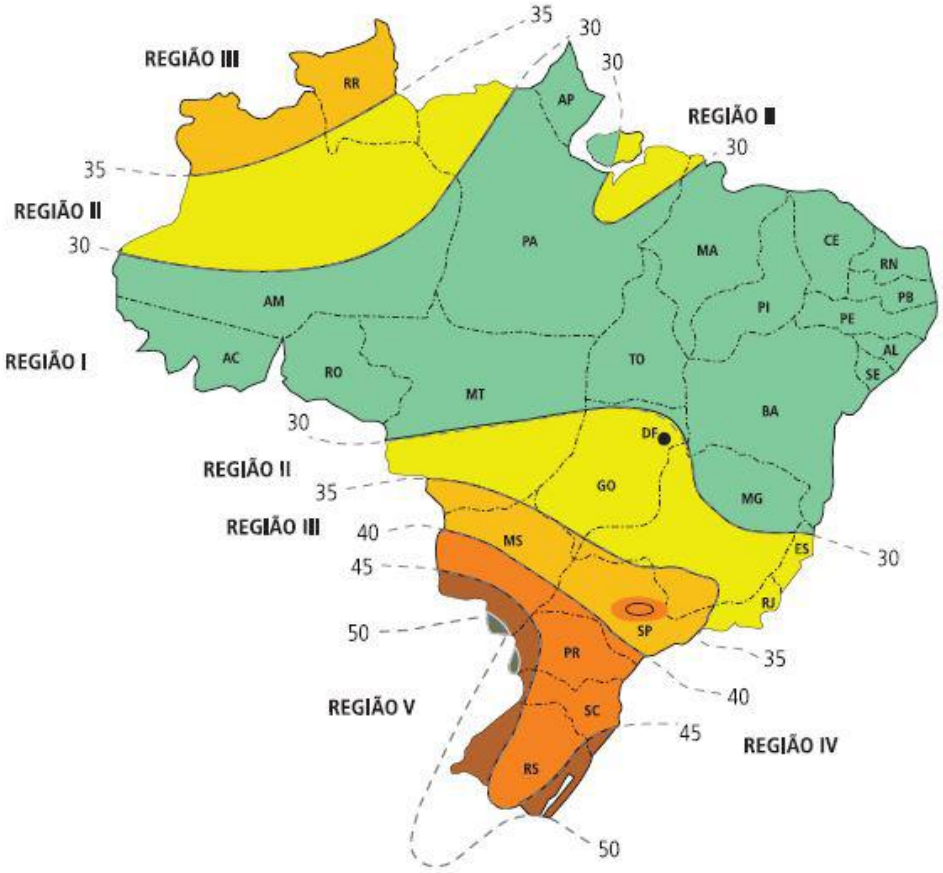
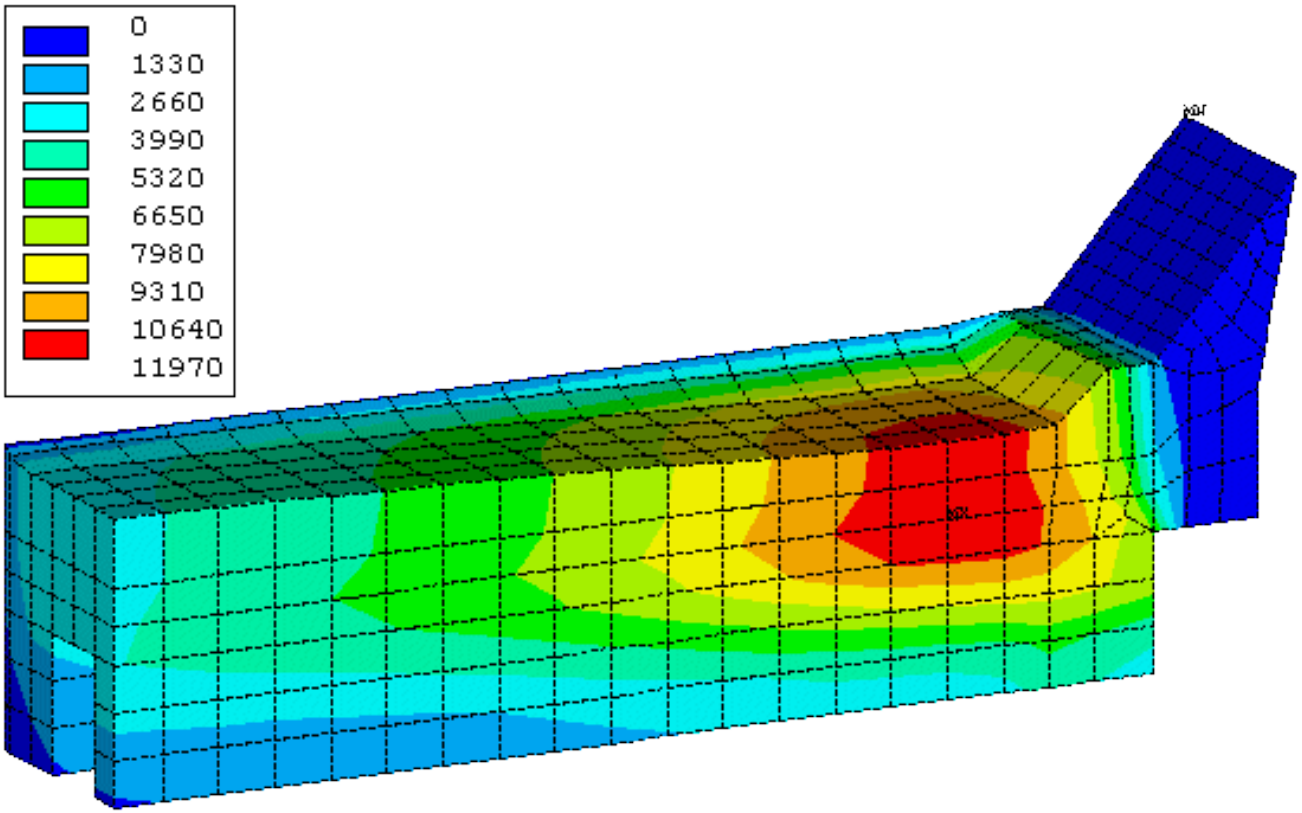


GRÁFICO DAS ISOPLETAS DE VELOCIDADE BÁSICA DOS VENTOS (NBR-6123)
(em metros por segundo)

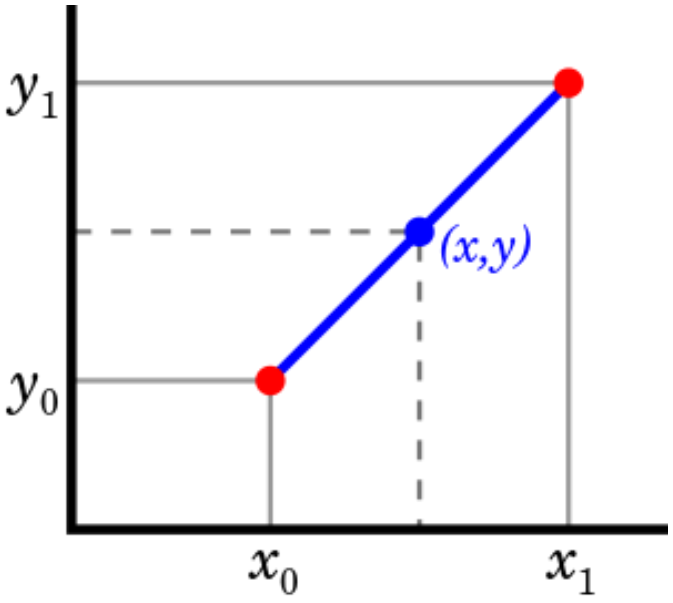
INTRODUÇÃO

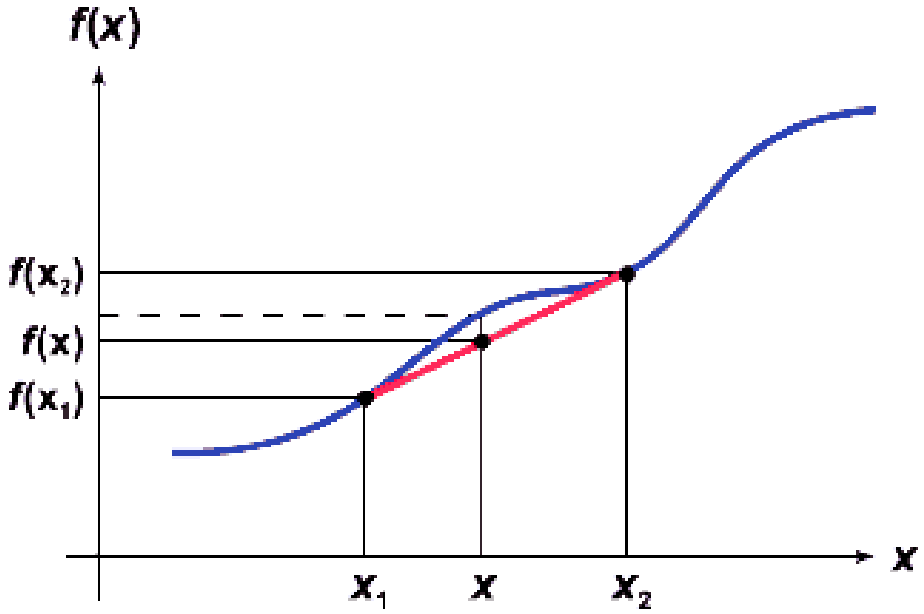
- Plotagem das Deformações em uma estrutura:



INTRODUÇÃO

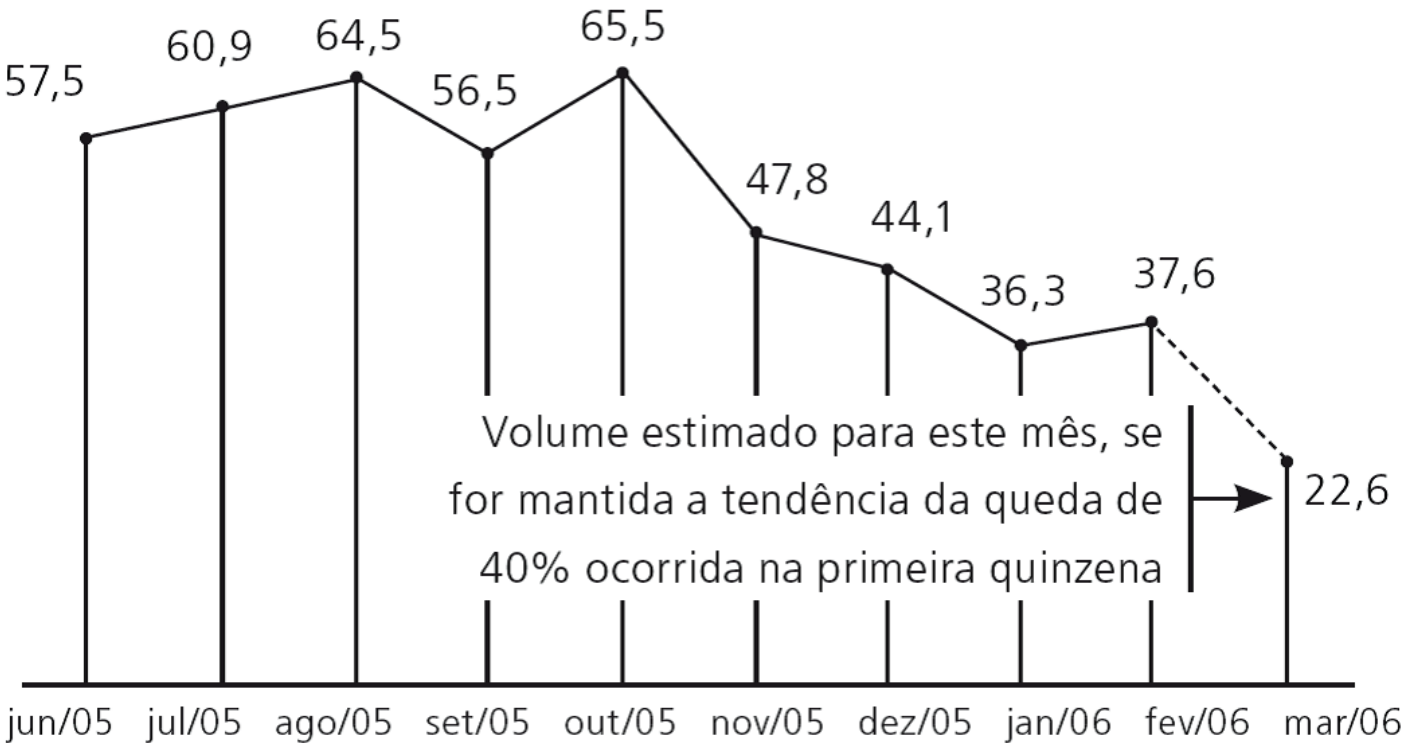
- Às vezes, são usados ***dados experimentais*** na ***estimativa dos valores esperados entre os pontos medidos***, um procedimento chamado de **INTERPOLAÇÃO**:





INTRODUÇÃO

- Ou **PREDIÇÃO** de como esses ***dados*** poderiam ser ***estendidos além do intervalo*** no qual foram medidos, um procedimento chamado de **EXTRAPOLAÇÃO (*AJUSTE*)**.

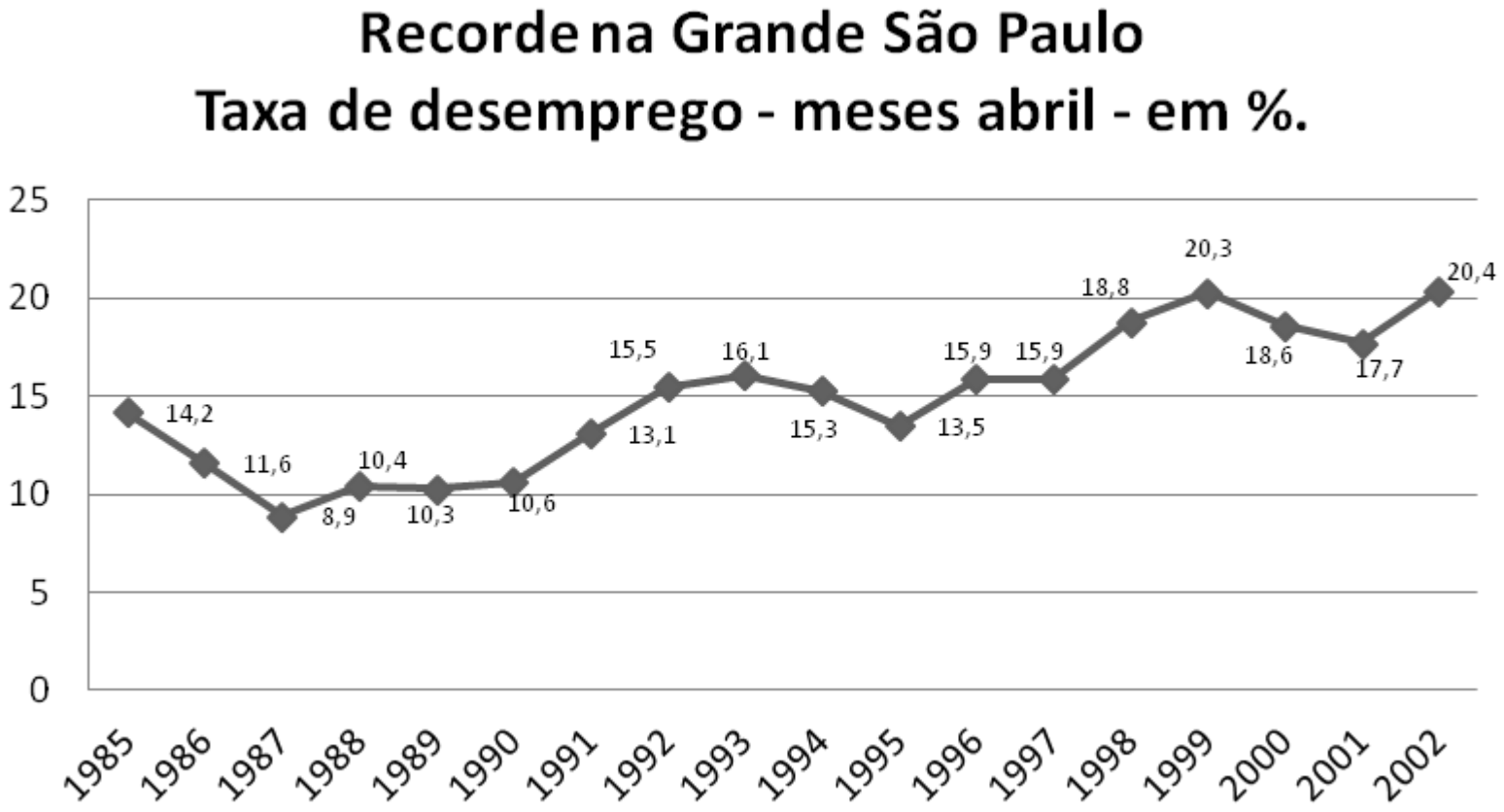


Folha de S. Paulo. 30/8/2006. p. B10 (com adaptações)

Exportações brasileiras de carne suína, em mil toneladas

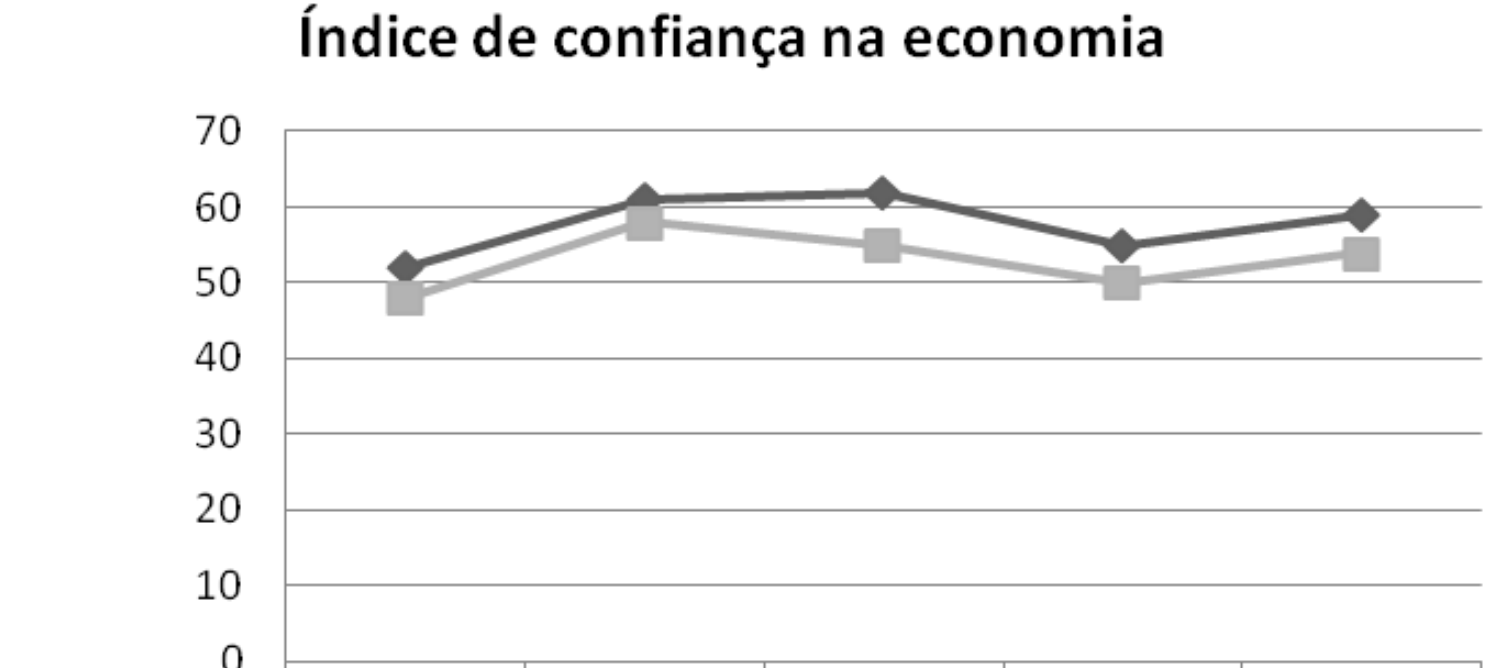
INTRODUÇÃO

- Ou **PREDIÇÃO** de como esses ***dados*** poderiam ser ***estendidos além do intervalo*** no qual foram medidos, um procedimento chamado de **EXTRAPOLAÇÃO**.



INTRODUÇÃO

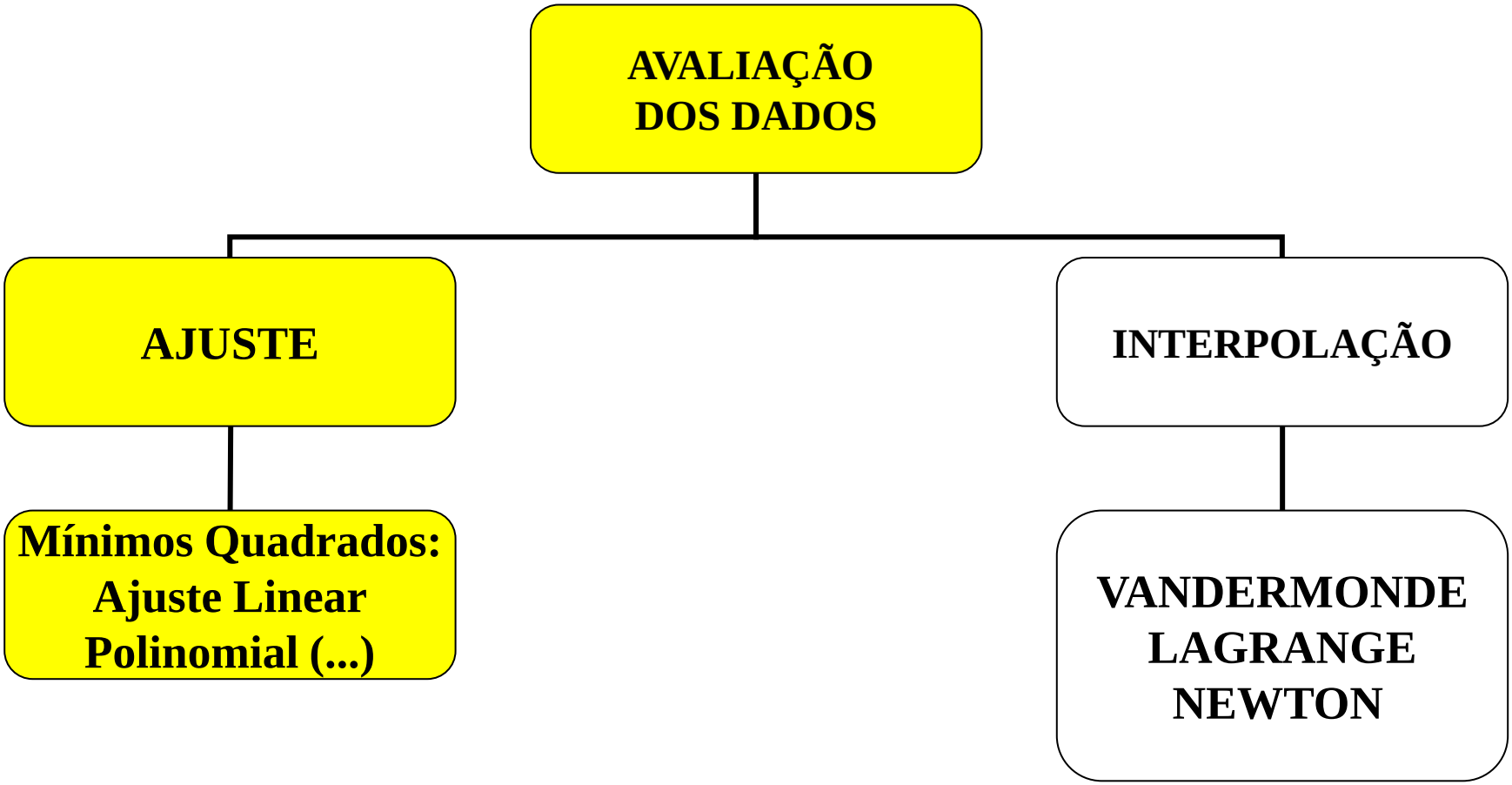
- Ou **PREDIÇÃO** de como esses ***dados*** poderiam ser ***estendidos além do intervalo*** no qual foram medidos, um procedimento chamado de **EXTRAPOLAÇÃO**.



	out/2002	jan/2003	abr/2003	jul/2003	out/2004
Grandes	52	61	62	55	59
Médio	48	58	55	50	54

INTRODUÇÃO

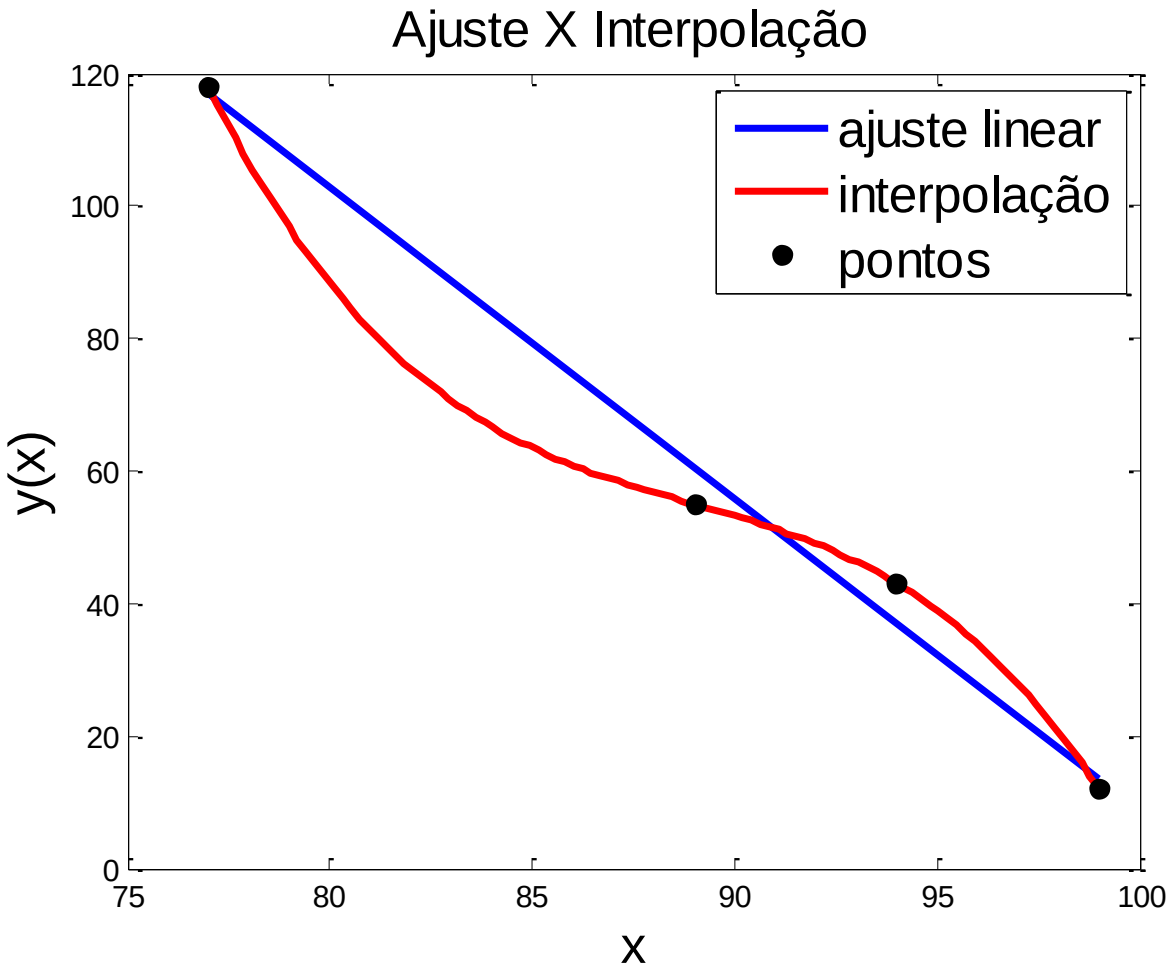
- Para solucionar esses e outros problemas aplicam-se o **AJUSTE DE CURVAS** e/ou a **INTERPOLAÇÃO**:



AJUSTE DE CURVAS

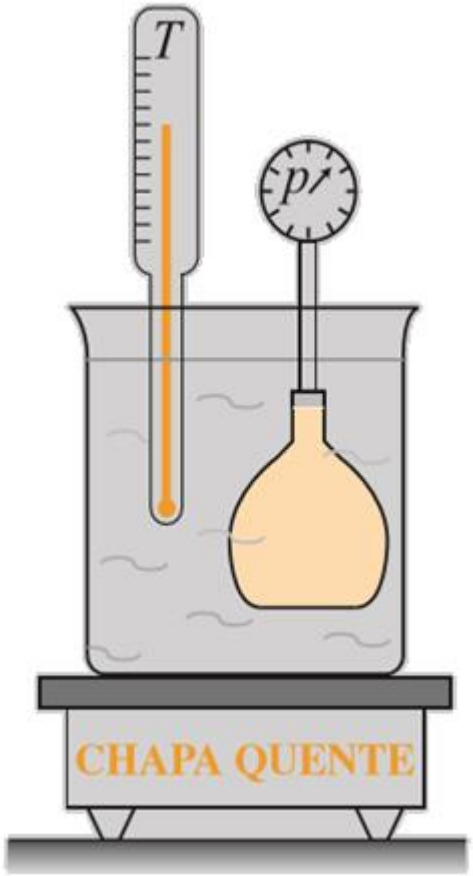
AJUSTE DE CURVAS

- No **AJUSTE** busca-se uma *função que melhor represente os dados*. Não exige-se que essa função passe pelos pontos fornecidos.



AJUSTE DE CURVAS

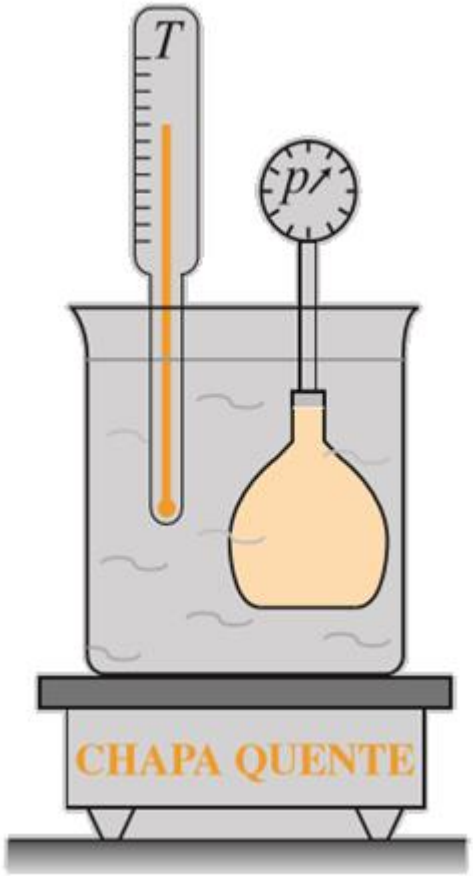
- O ***ajuste de curvas*** é um procedimento no qual uma fórmula matemática (***equação***) é usada para produzir uma curva que ***melhor represente um conjunto de dados***.



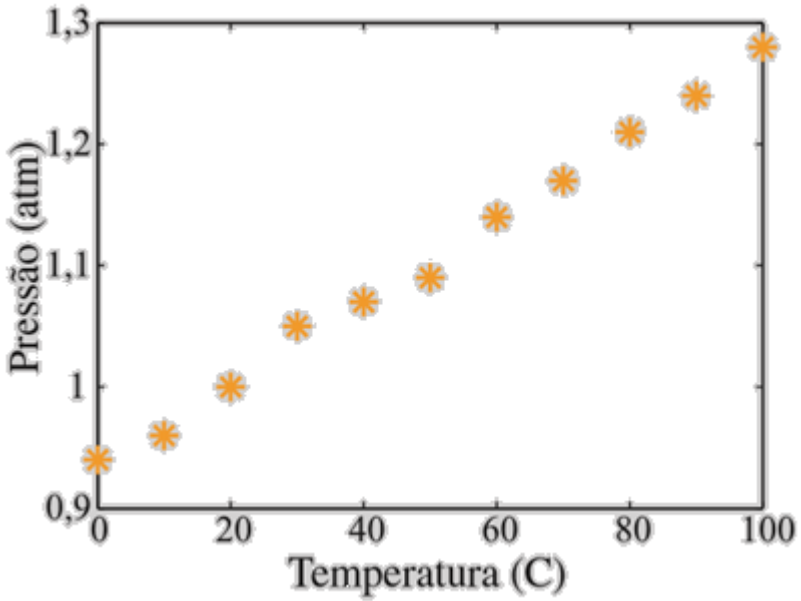
T (°C)	0	10	20	30	40	50	60
p (atm.)	0,94	0,96	1,0	1,05	1,07	1,09	1,14
T (°C)	70	80	90	100			
p (atm.)	1,17	1,21	1,24	1,28			

AJUSTE DE CURVAS

- O ***ajuste de curvas*** é um procedimento no qual uma fórmula matemática (***equação***) é usada para produzir uma curva que ***melhor represente um conjunto de dados***.

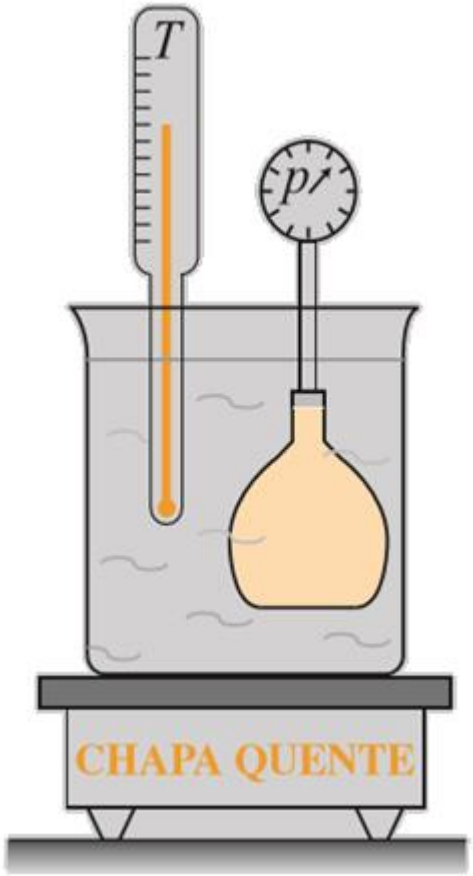


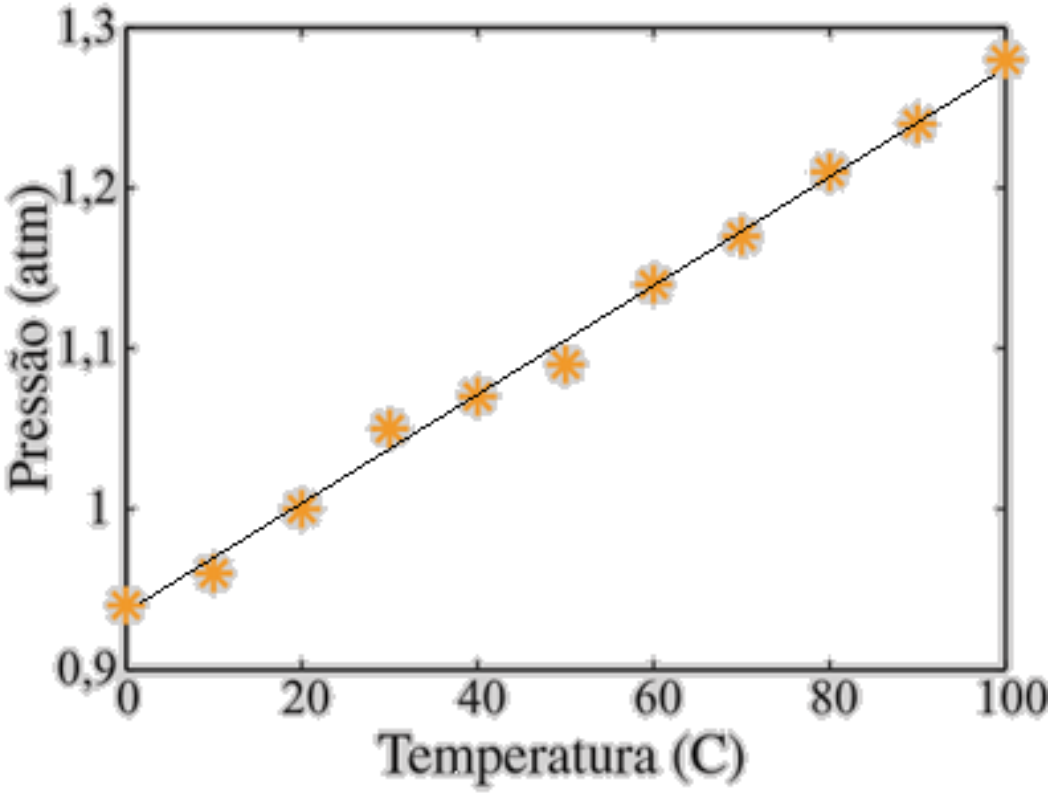
T (°C)	0	10	20	30	40	50	60
p (atm.)	0,94	0,96	1,0	1,05	1,07	1,09	1,14
T (°C)	70	80	90	100			
p (atm.)	1,17	1,21	1,24	1,28			



AJUSTE DE CURVAS

- O ***ajuste de curvas*** é um procedimento no qual uma fórmula matemática (***equação***) é usada para produzir uma curva que ***melhor represente um conjunto de dados***.





AJUSTE DE CURVAS

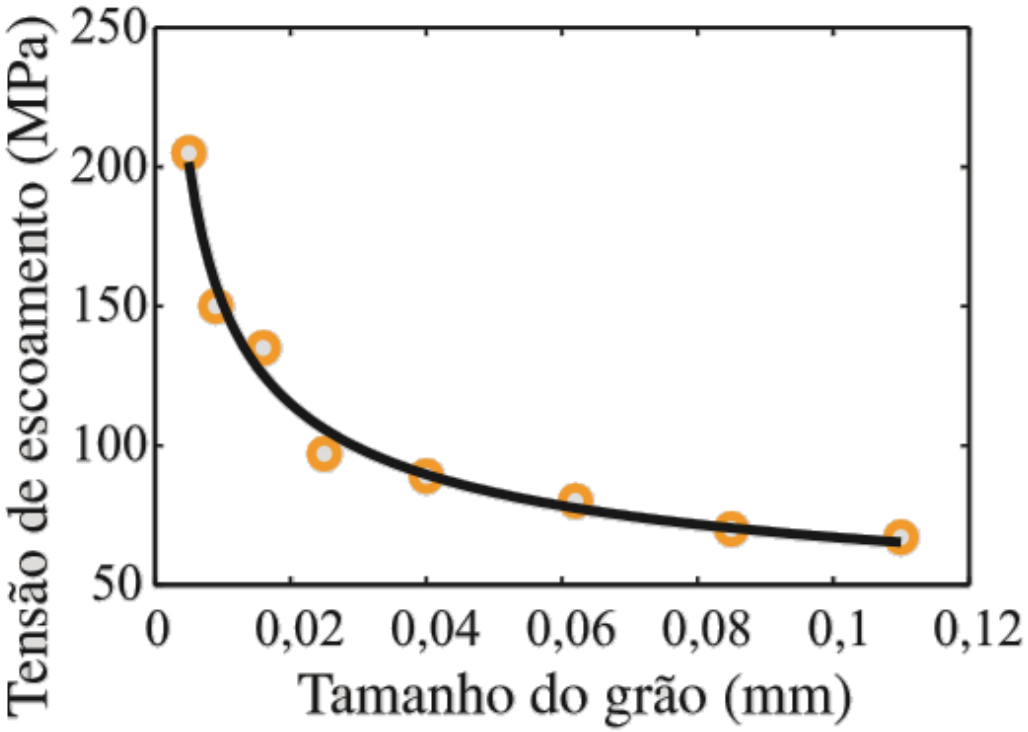
- **OBJETIVO**: encontrar uma equação que possa fazer isso de forma geral.
- Isso significa que a função ***não tem que fornecer o valor exato*** em cada ponto, mas sim representar o conjunto de dados de ***forma satisfatória*** como um todo.
- Por exemplo:

AJUSTE DE CURVAS

- **OBJETIVO**: encontrar uma equação que possa fazer isso de forma geral.

Dados da dureza dos grãos em função de sua dimensão

d (mm)	0,005	0,009	0,016	0,025	0,040	0,062	0,085	0,110
σ_y (MPa)	205	150	135	97	89	80	70	67



$$(\sigma = Cd^m)$$

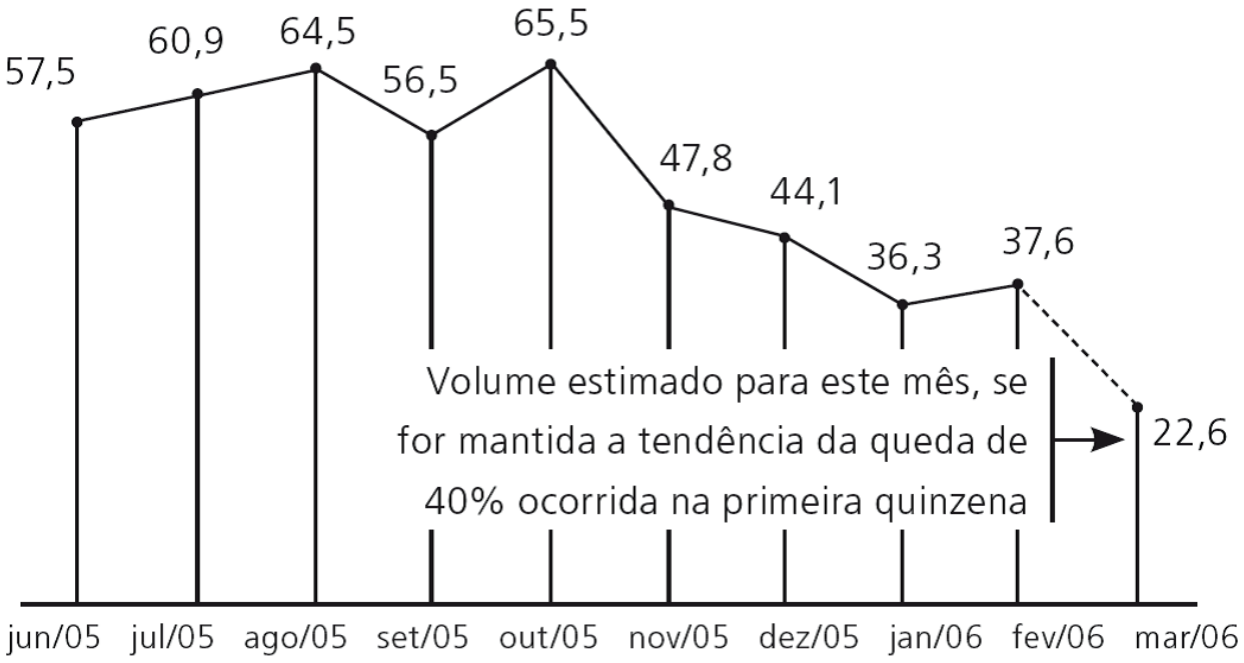
A curva reproduz a tendência geral dos dados, embora não seja exatamente igual a nenhum dos pontos medidos.

AJUSTE DE CURVAS

- O ***ajuste de curvas*** é tipicamente ***utilizado*** quando os valores dos dados medidos apresentam ***algum erro ou dispersão***.
- Em geral, *qualquer medição experimental apresenta erros ou incertezas inerentes*, e a procura por uma curva que passe por ***TODOS*** os pontos medidos **não traz consigo qualquer benefício**.
- O procedimento de ajuste de curvas também é usado para **DETERMINAR** os valores dos parâmetros (**COEFICIENTES**) nas equações.

AJUSTE DE CURVAS

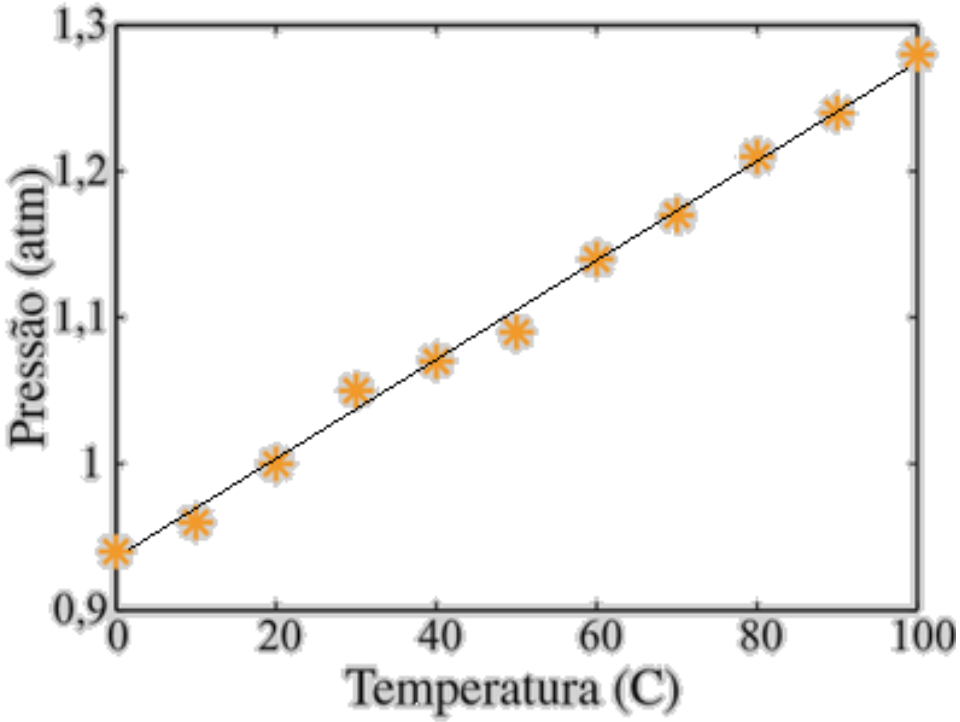
- **Quando utilizar?**
  - Quando se deseja extrapolar ou fazer previsões em regiões fora do intervalo considerado;



Folha de S. Paulo. 30/8/2006. p. B10 (com adaptações)

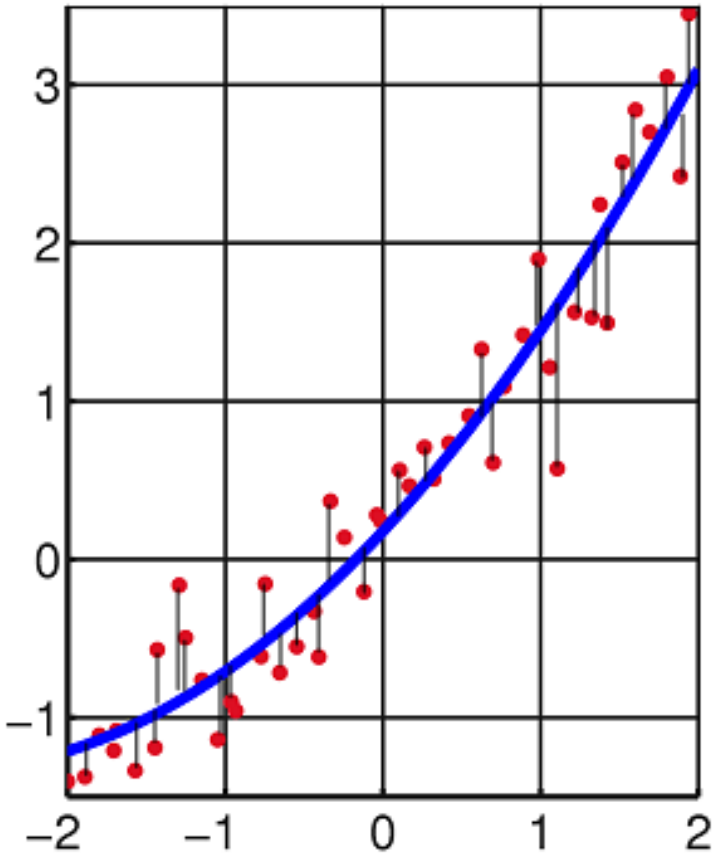
AJUSTE DE CURVAS

- **Quando utilizar?**
  - Quando os dados tabelados são resultados de experimentos, onde erros na obtenção destes resultados podem influenciar a sua qualidade.;



AJUSTE DE CURVAS

- **Qual a ideia do Método?**
  - Minimizar os desvios (ou resíduos) de cada ponto tabelado em relação a uma função ajustada;



AJUSTE DE CURVAS

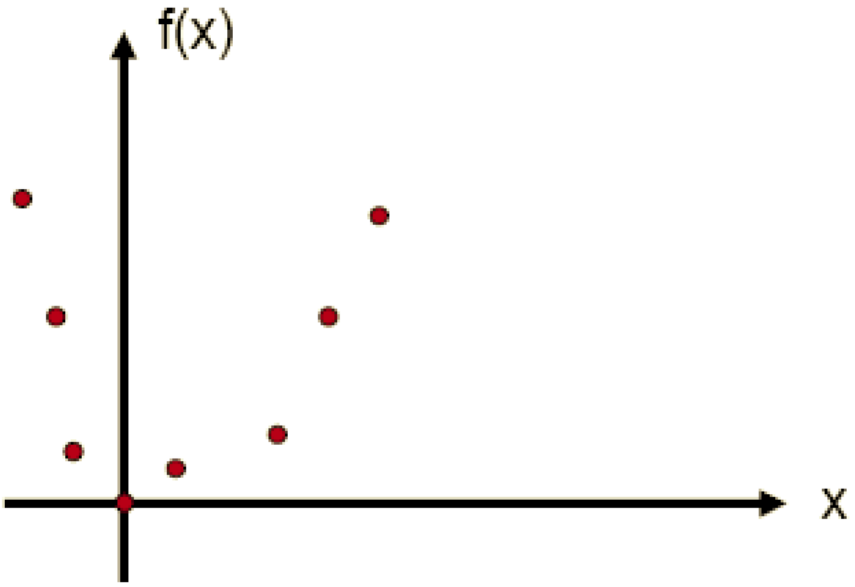
- **FORMULAÇÃO:**

  - Dada uma tabela com m pontos $(x_k, f(x_k))$, $k=1,...,m$ em um intervalo $[a,b]$. Deseja-se encontrar uma função $q(x) = a_1g_1(x) + a_2g_2(x) + ... + a_ng_n(x)$ que melhor ajuste esses pontos. Ou seja, determinar a função $q(x)$ que mais se aproxime de $f(x)$.

  - **Problema:** Como escolher as funções $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_n(x)$?

AJUSTE DE CURVAS

- **Problema:** Como escolher as funções $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_n(x)$?
  - Observando o diagrama de dispersão dos pontos tabelados com o intuito de buscar a curva que melhor ajusta os dados;



$g_1(x) = x^2$

$\Downarrow$

$q(x) = a_1x^2$

Como determinar a_1?

$\Downarrow$

MÍNIMOS QUADRADOS

AJUSTE DE CURVAS

- **Problema:** Como escolher as funções $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_n(x)$?

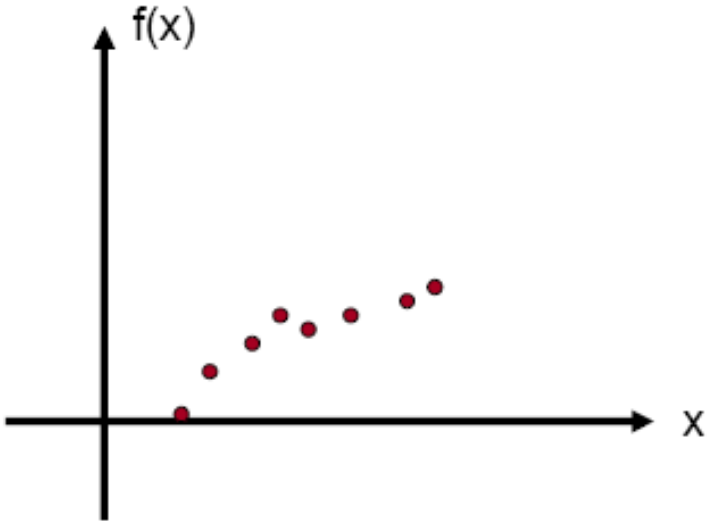
  - Baseando-se em fundamentos teóricos dos experimentos que forneceu a tabela.

  - *Ex.: Sabe-se que a relação entre tensão e corrente elétrica é linear – Lei de Ohm.*

Como determinar a_1*?*

⇩

MÍNIMOS QUADRADOS



Teoria: V=Ri

$g_1(i) = i$

⇓

$q(x) = a_1 i$

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

- **Importância:** O Método dos Mínimos Quadrados é um método bastante utilizado para ajustar uma determinada quantidade de pontos.

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

- **Importância:** O Método dos Mínimos Quadrados é um método bastante utilizado para ajustar uma determinada quantidade de pontos.

- Formalmente, Os mínimos quadrados são ***corretos*** se os resíduos tiverem uma ***distribuição normal***.

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

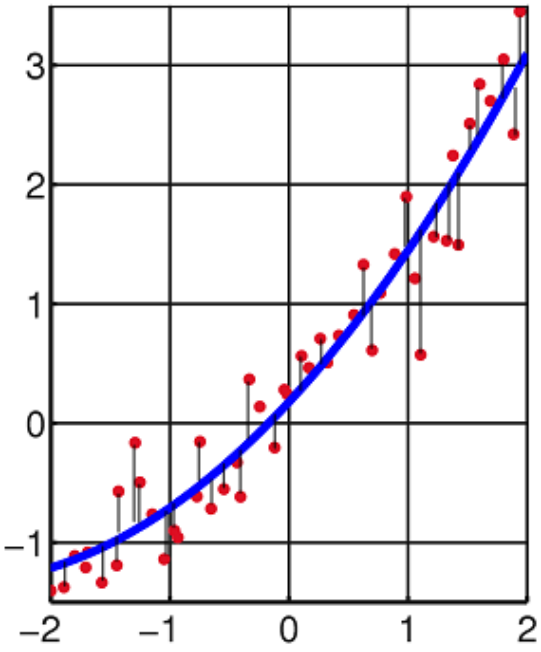
- **Importância:** O Método dos Mínimos Quadrados é um método bastante utilizado para ajustar uma determinada quantidade de pontos.

- Formalmente, Os mínimos quadrados são ***corretos*** se os resíduos tiverem uma ***distribuição normal***.

- Dados ***m*** pontos $(x_k, f(x_K))$, $k=1,...,m$ e as ***n*** funções $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_n(x)$ escolhidas de alguma forma.
  - Considere que o número de pontos tabelados ***m*** é sempre maior ou igual ao número de funções escolhidas ***n*** (ou ao número de coeficientes a determinar a_i);
  - Encontrar os coeficientes a_1, a_2, ..., a_n tais que a função $q(x) = a_1g_1(x) + a_2g_2(x) + ... + a_ng_n(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$.

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

- Seja $d_k = f(x_k) - q(x_k)$ o desvio em x_k. Um conceito de proximidade é que d_k seja mínimo para todo $k = 1, 2, \ldots, m$.

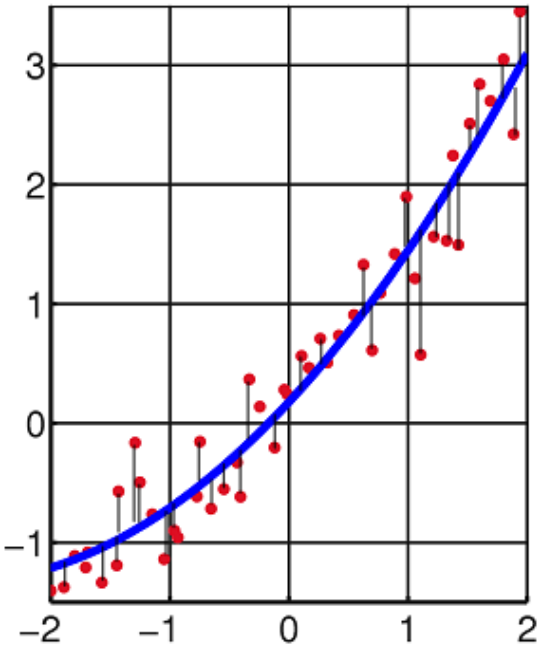


MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

- Seja $d_k = f(x_k) - q(x_k)$ o desvio em x_k. Um conceito de proximidade é que d_k seja mínimo para todo $k = 1, 2, \ldots, m$.

- O Método dos Mínimos Quadrados consiste em escolher os a_i's de tal forma que a ***soma dos quadrados dos desvios seja mínima.***

$$S = \sum_{k=1}^{m} d_k^2 = \sum_{k=1}^{m} \left[f(x_k) - q(x_k) \right]^2$$



MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

1) Como minimizar essa função?

$$S = \sum_{k=1}^{m} d_k^2 = \sum_{k=1}^{m} \left[f(x_k) - q(x_k) \right]^2$$

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

1) Como minimizar essa função?

$$S = \sum_{k=1}^{m} d_k^2 = \sum_{k=1}^{m} \left[f(x_k) - q(x_k) \right]^2$$

- Usando cálculo diferencial, sabe-se que para encontrar um ponto de mínimo de $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, é necessário achar inicialmente os pontos críticos (ou seja, todos os a_i's).

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0$$

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

2) Por que este critério é considerado um bom critério e não simplesmente minimizar os resíduos ou o módulo dos resíduos?

$$S = \sum_{k=1}^{m} d_k^2 = \sum_{k=1}^{m} \left[f(x_k) - q(x_k) \right]^2$$

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

2) Por que este critério é considerado um bom critério e não simplesmente minimizar os resíduos ou o módulo dos resíduos?

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_1 x_i + a_0)]$$

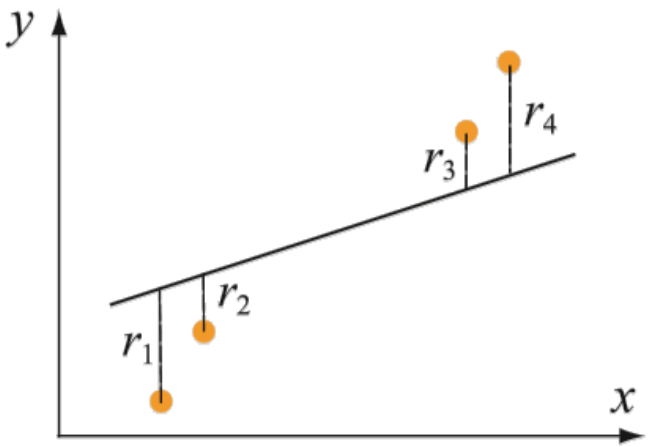


Figura Ajuste com erro nulo.

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - (a_1 x_i + a_0)|$$

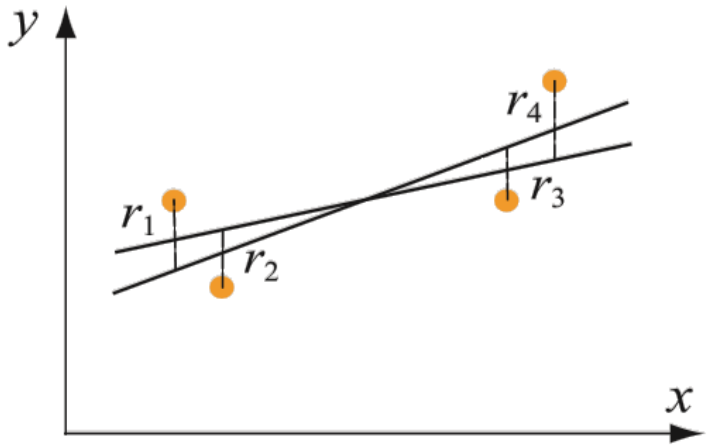


Figura Dois ajustes com o mesmo erro,

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

3) Qual função q(x) utilizar?

$$S = \sum_{k=1}^{m} d_k^2 = \sum_{k=1}^{m} \left[f(x_k) - q(x_k) \right]^2$$

$$q(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \ldots + a_n g_n(x)$$

- ***Polinômios; (Linear, quadrática, cúbica, ...)***
- ***Exponenciais;***
- ***Logarítmicas;***
- ***Trigonométricas;***

AJUSTE DE CURVAS COM EQUAÇÕES LINEARES

AJUSTE LINEAR

$$q(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \ldots + a_n g_n(x)$$

- Neste tipo de ajuste consideramos as funções $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$. Assim, a função de ajuste é dada por

$$q(x) = a_1 + a_2 x$$

  - onde a_1 e a_2 são os coeficientes a serem determinados pelo método dos mínimos quadrados.

AJUSTE LINEAR

- **Ajuste Linear:** $\dfrac{\partial S}{\partial a_1}$

$$S = \sum_{k=1}^{m} d_k^2 = \sum_{k=1}^{m} \left[f(x_k) - q(x_k) \right]^2$$

$$S = \sum_{k=1}^{m} d_k^2 = \sum_{k=1}^{m} \left[f(x_k) - a_1 - a_2 x_k \right]^2$$

  - A condição de minimização é satisfeita se:

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0$$

AJUSTE LINEAR

- **Ajuste Linear:** $\dfrac{\partial S}{\partial a_1}$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{k=1}^{m}\left[f(x_k) - a_1 - a_2 x_k\right](-1) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left[f(x_k) - a_1 - a_2 x_k\right] = 0$$

$$\sum_{k=1}^{m} f(x_k) - \sum_{k=1}^{m} a_1 - \sum_{k=1}^{m} a_2 x_k = 0$$

AJUSTE LINEAR

- **Ajuste Linear:** $\dfrac{\partial S}{\partial a_1}$

$$\sum_{k=1}^{m} a_1 + \sum_{k=1}^{m} a_2 x_k = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)$$

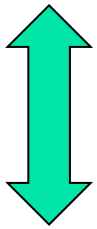
$$a_1 \sum_{k=1}^{m} 1 + a_2 \sum_{k=1}^{m} x_k = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)$$

$$m \cdot a_1 + a_2 \sum_{k=1}^{m} x_k = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)$$

AJUSTE LINEAR

- **Ajuste Linear:** $\dfrac{\partial S}{\partial a_1}$

$$m \cdot a_1 + a_2 \sum_{k=1}^{m} x_k = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)$$



$$\begin{bmatrix} m & \sum_{k=1}^{m} x_k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} f(x_k) \end{bmatrix}$$

AJUSTE LINEAR

- **Ajuste Linear:** $\dfrac{\partial S}{\partial a_2}$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum_{k=1}^{m}\left[f(x_k) - a_1 - a_2 x_k\right](-x_k) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left[-x_k f(x_k) + a_1 x_k + a_2 x_k^2\right] = 0$$

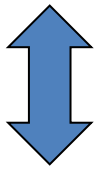
$$-\sum_{k=1}^{m} x_k f(x_k) + \sum_{k=1}^{m} a_1 x_k + \sum_{k=1}^{m} a_2 x_k^2 = 0$$

AJUSTE LINEAR

- **Ajuste Linear:** $\dfrac{\partial S}{\partial a_2}$

$$\sum_{k=1}^{m} a_1 x_k + \sum_{k=1}^{m} a_2 x_k^2 = \sum_{k=1}^{m} x_k f(x_k)$$

$$a_1 \sum_{k=1}^{m} x_k + a_2 \sum_{k=1}^{m} x_k^2 = \sum_{k=1}^{m} x_k f(x_k)$$



$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} x_k & \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} x_k f(x_k) \end{bmatrix}$$

AJUSTE LINEAR

- **Ajuste Linear**

Agrupando as equações:

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{k=1}^{m} x_k \\ \sum_{k=1}^{m} x_k & \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} f(x_k) \\ \sum_{k=1}^{m} x_k f(x_k) \end{bmatrix}$$

AJUSTE LINEAR

- **Ajuste Linear**

Agrupando as equações:

$$S_x = \sum_{k=1}^{m} x_k, \quad S_y = \sum_{k=1}^{m} f_k, \quad S_{xy} = \sum_{k=1}^{m} x_k f_k, \quad S_{xx} = \sum_{k=1}^{m} x_k^2$$

$$a_1 = \frac{m S_{xy} - S_x S_y}{m S_{xx} - (S_x)^2} \qquad a_0 = \frac{S_{xx} S_y - S_{xy} S_x}{m S_{xx} - (S_x)^2}$$

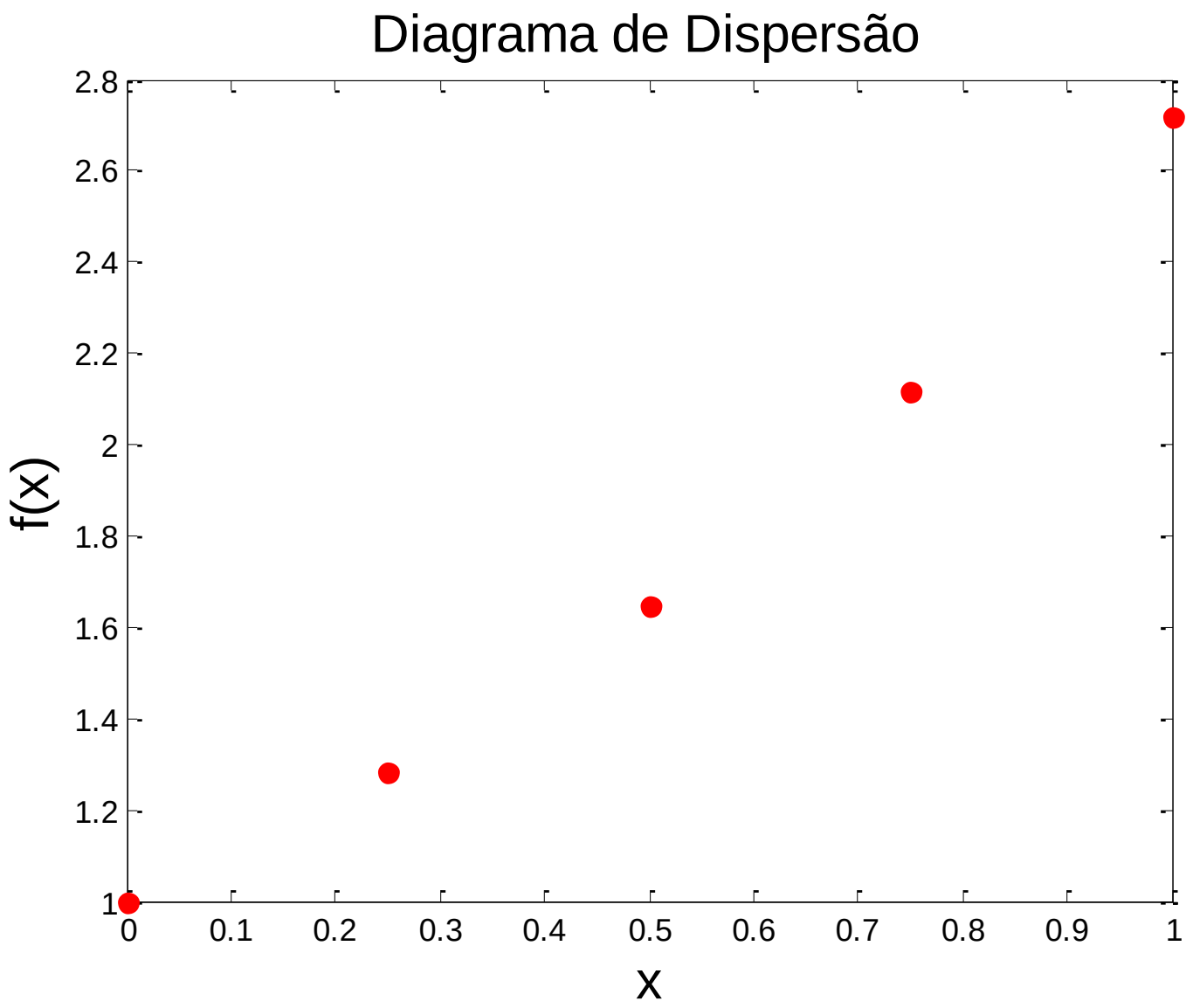
AJUSTE LINEAR

- **Exemplo**: encontrar a ***melhor reta*** que ajusta os valores da tabela abaixo:

x	**0,00**	**0,25**	**0,50**	**0,75**	**1,00**
f(x)	1,00	1,2840	1,6487	2,1170	2,7183

- Solução:
  - Número de pontos tabelados m = 5.

AJUSTE LINEAR



AJUSTE LINEAR

x	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
f(x)	1,00	1,2840	1,6487	2,1170	2,7183

$$Sx = \sum_{k=1}^{5} x_k = 0 + 0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}75 + 1 = 2{,}5$$

$$Sxx = \sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 0^2 + 0{,}25^2 + 0{,}5^2 + 0{,}75^2 + 1^2 = 1{,}875$$

$$Sy = \sum_{k=1}^{5} f(x_k) = 1 + 1{,}284 + 1{,}6487 + 2{,}117 + 2{,}7183 = 8{,}768$$

$$Sxy = \sum_{k=1}^{5} x_k \cdot f(x_k) = 0 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 1{,}284 + 0{,}5 \cdot 1{,}6487 + 0{,}75 \cdot 2{,}117 + 1 \cdot 2{,}7183 = 5{,}4514$$

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{k=1}^{m} x_k \\ \sum_{k=1}^{m} x_k & \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^{m} f(x_k) \\ \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot f(x_k) \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 1{,}875 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8{,}768 \\ 5{,}4514 \end{Bmatrix}$$

AJUSTE LINEAR

$$a_1 = \frac{mS_{xy} - S_x S_y}{mS_{xx} - (S_x)^2}$$

$$a_0 = \frac{S_{xx} S_y - S_{xy} S_x}{mS_{xx} - (S_x)^2}$$

$$a_1 = \frac{(5).(5{,}4514) - (2{,}5).(8{,}768)}{(5).(1{,}875) - (2{,}5).(2{,}5)}$$

$$a_0 = \frac{(1{,}875).(8{,}768) - (5{,}4514).(2{,}5)}{(5).(1{,}875) - (2{,}5).(2{,}5)}$$

$$a_1 = 1{,}7078$$

$$a_0 = 0{,}8997$$

$$q(x) = a_0 + a_1 x$$

$$q(x) = 0{,}8997 + 1{,}7078x$$

AJUSTE LINEAR

- Solução do sistema:

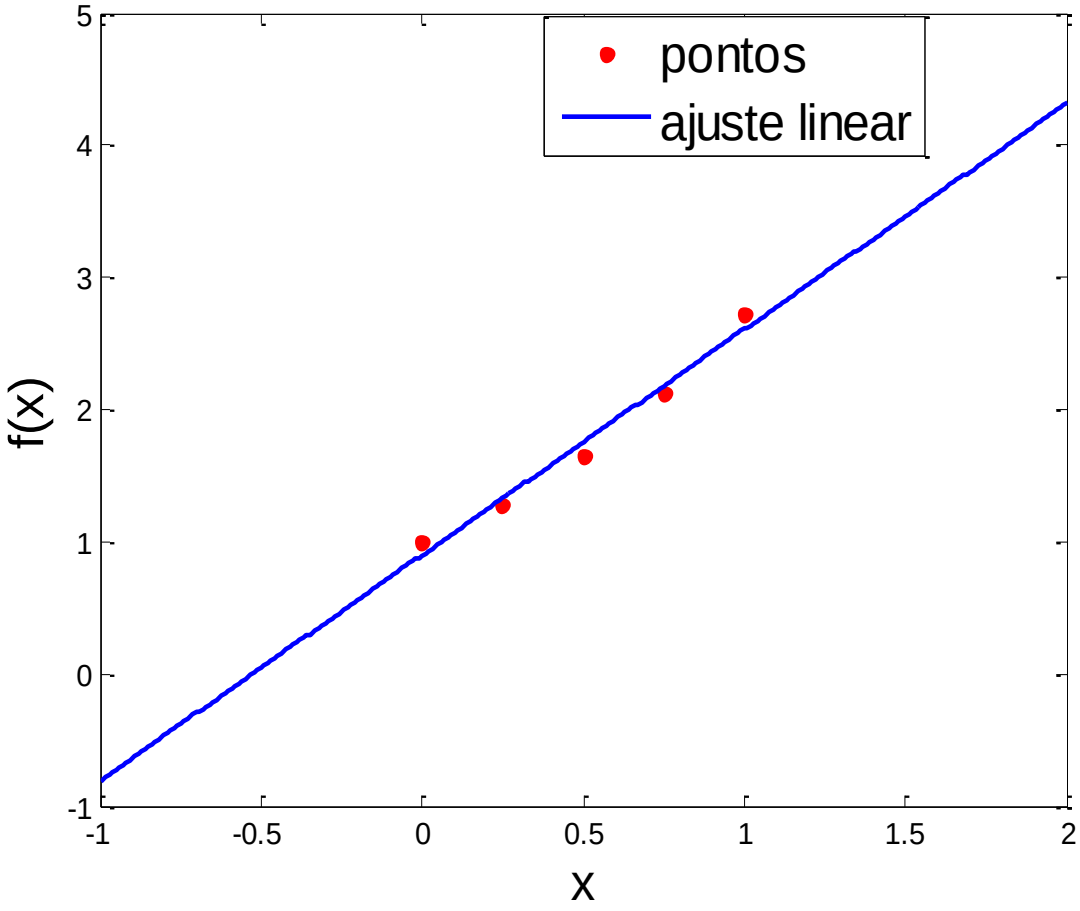
$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}8997 \\ 1{,}7078 \end{Bmatrix}$$

Função ajustada

$$q(x) = 0{,}8997 + 1{,}7078\,x$$

Soma dos quadrados dos resíduos

$$S = \sum_{k=1}^{5} d_k^2 = 0{,}0392$$



AJUSTE DE CURVAS COM EQUAÇÕES POLINOMIAIS

AJUSTE POLINOMIAL

- **Ajuste Polinomial**
  - Pode-se estender o processo do cálculo da função utilizado no ajuste linear para o ajuste polinomial. Assim, uma ***função polinomial de grau (n-1)*** é dada por:

$$q(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$$

  - onde os coeficientes a_i podem ser obtidos através da expansão do sistema utilizado no ajuste linear.

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0 \qquad \text{com i = 1,2,...,n}$$

AJUSTE POLINOMIAL

- **Ajuste Polinomial**
  - A expansão resultará no seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{k=1}^{m} x_k & \sum_{k=1}^{m} x_k^2 & \cdots & \sum_{k=1}^{m} x_k^{n-1} \\ \sum_{k=1}^{m} x_k & \sum_{k=1}^{m} x_k^2 & \sum_{k=1}^{m} x_k^3 & \cdots & \sum_{k=1}^{m} x_k^{n} \\ \sum_{k=1}^{m} x_k^2 & \sum_{k=1}^{m} x_k^3 & \sum_{k=1}^{m} x_k^4 & \cdots & \sum_{k=1}^{m} x_k^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} x_k^{n-1} & \sum_{k=1}^{m} x_k^{n} & \sum_{k=1}^{m} x_k^{n+1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} x_k^{2(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^{m} f(x_k) \\ \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot f(x_k) \\ \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \cdot f(x_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} x_k^{n-1} \cdot f(x_k) \end{Bmatrix}$$

AJUSTE POLINOMIAL

- Aplicação: encontrar a melhor parábola que ajusta os valores da tabela abaixo:

x	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
f(x)	1,00	1,2840	1,6487	2,1170	2,7183

- Solução:
  - Número de pontos tabelados m = 5.
  - Polinômio adotado (n = 3):

$$q(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

AJUSTE POLINOMIAL

x	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
f(x)	1,00	1,2840	1,6487	2,1170	2,7183

- Calculando os termos da matriz de coeficientes e do vetor de constantes:

$$\sum_{k=1}^{5} x_k = 0 + 0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}75 + 1 = 2{,}5$$

$$\sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 0^2 + 0{,}25^2 + 0{,}5^2 + 0{,}75^2 + 1^2 = 1{,}875$$

$$\sum_{k=1}^{5} x_k^3 = 0^3 + 0{,}25^3 + 0{,}5^3 + 0{,}75^3 + 1^3 = 1{,}5625$$

$$\sum_{k=1}^{5} x_k^4 = 0^4 + 0{,}25^4 + 0{,}5^4 + 0{,}75^4 + 1^4 = 1{,}3828$$

AJUSTE POLINOMIAL

x	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
f(x)	1,00	1,2840	1,6487	2,1170	2,7183

$$\sum_{k=1}^{5} f(x_k) = 1 + 1{,}284 + 1{,}6487 + 2{,}117 + 2{,}7183 = 8{,}768$$

$$\sum_{k=1}^{5} x_k \cdot f(x_k) = 0 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 1{,}284 + 0{,}5 \cdot 1{,}6487 + 0{,}75 \cdot 2{,}117 + 1 \cdot 2{,}7183 = 5{,}4514$$

$$\sum_{k=1}^{5} x_k^2 \cdot f(x_k) = 0^2 \cdot 1 + 0{,}25^2 \cdot 1{,}284 + 0{,}5^2 \cdot 1{,}6487 + 0{,}75^2 \cdot 2{,}117 + 1^2 \cdot 2{,}7183 = 4{,}4015$$

AJUSTE POLINOMIAL

Montando o sistema de equações:

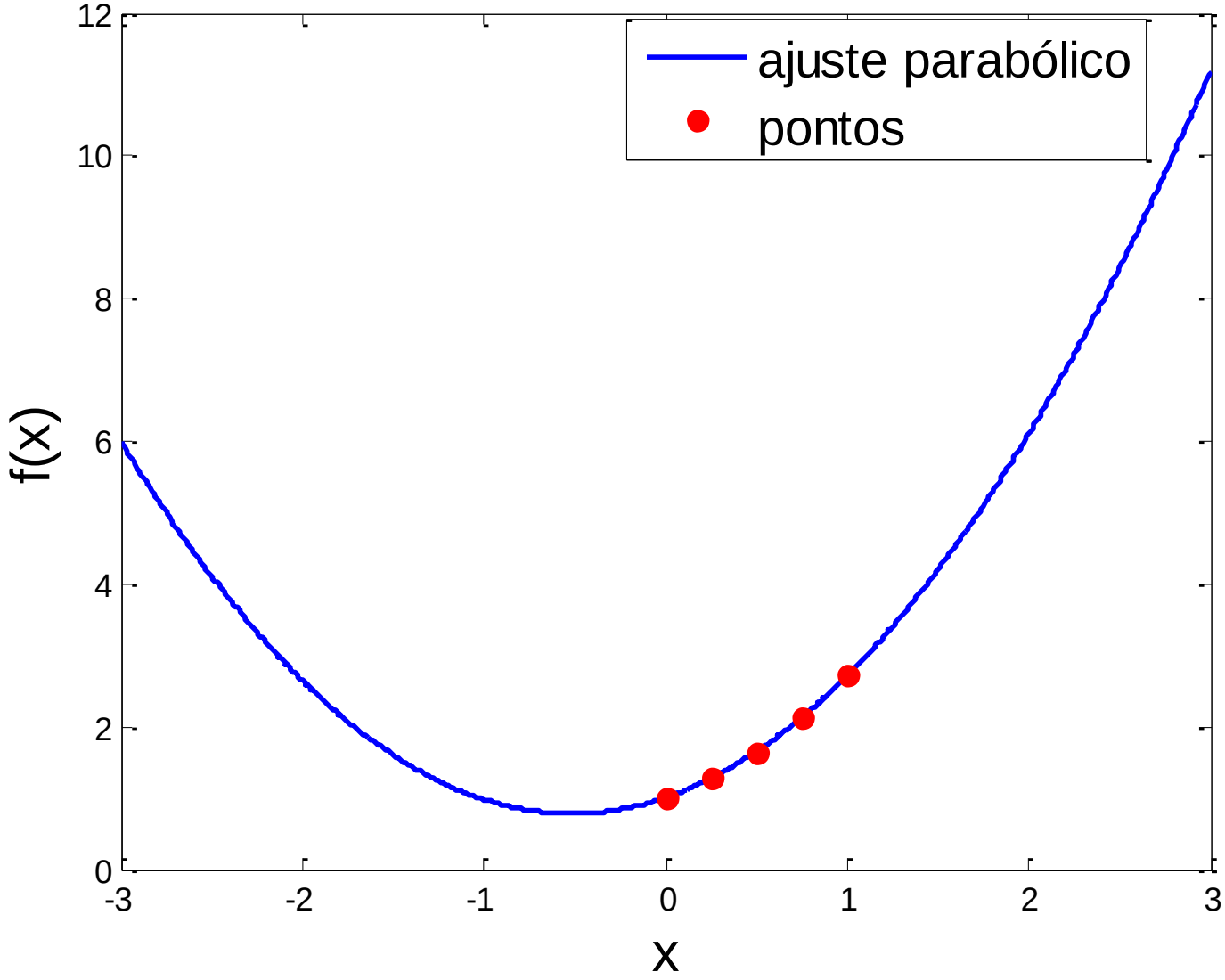
$$\begin{bmatrix} 5 & 2{,}5 & 1{,}875 \\ 2{,}5 & 1{,}875 & 1{,}5625 \\ 1{,}875 & 1{,}5625 & 1{,}3828 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8{,}768 \\ 5{,}4514 \\ 4{,}4015 \end{Bmatrix}$$

Solução:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}0051 \\ 0{,}8647 \\ 0{,}8432 \end{Bmatrix}$$

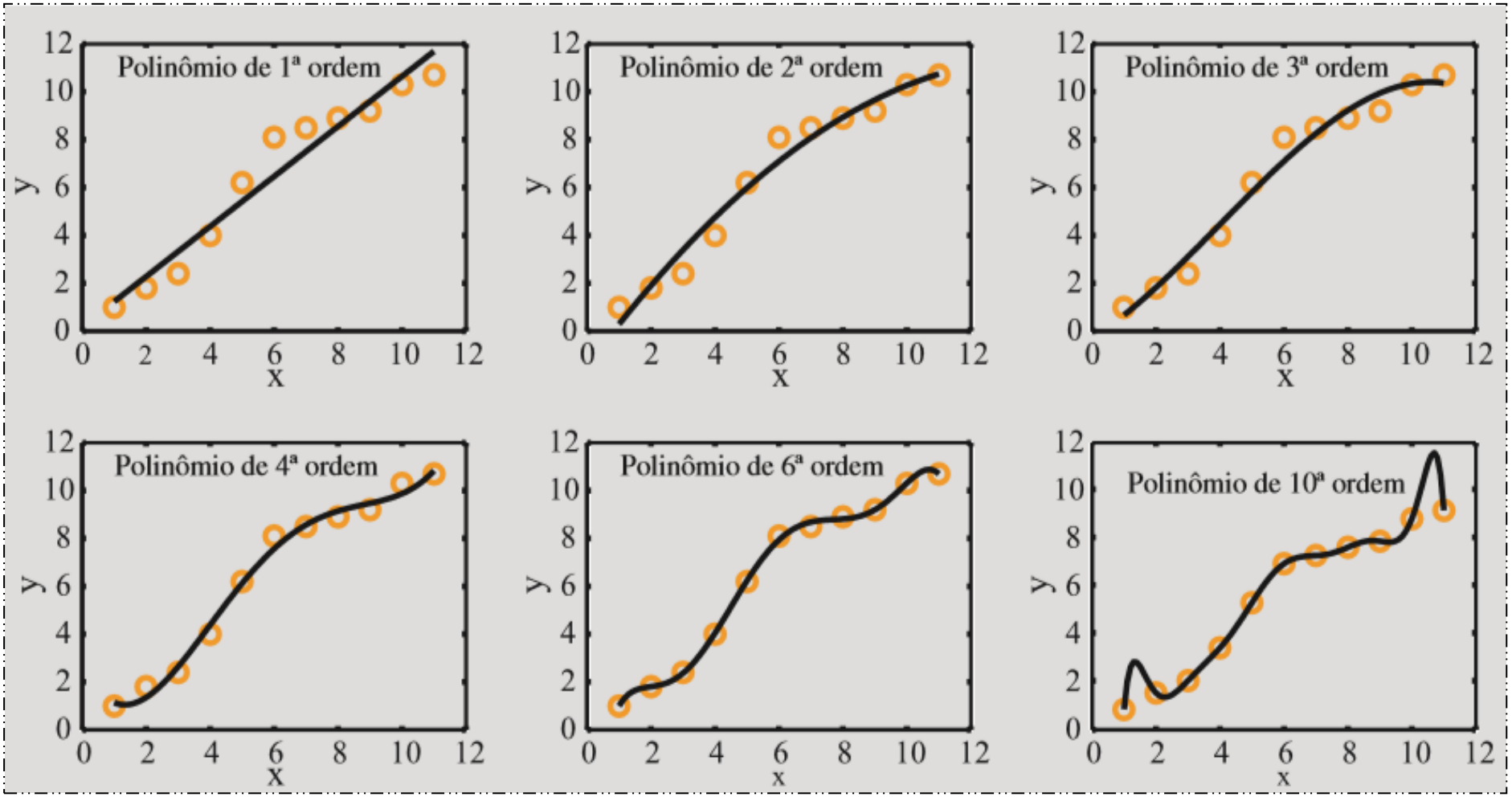
Equação da parábola: $q(x) = 1{,}0051 + 0{,}8647x + 0{,}8432x^2$

AJUSTE POLINOMIAL



AJUSTE POLINOMIAL

- Ajuste de curvas de um mesmo conjunto de dados usando polinômios com diferentes graus.



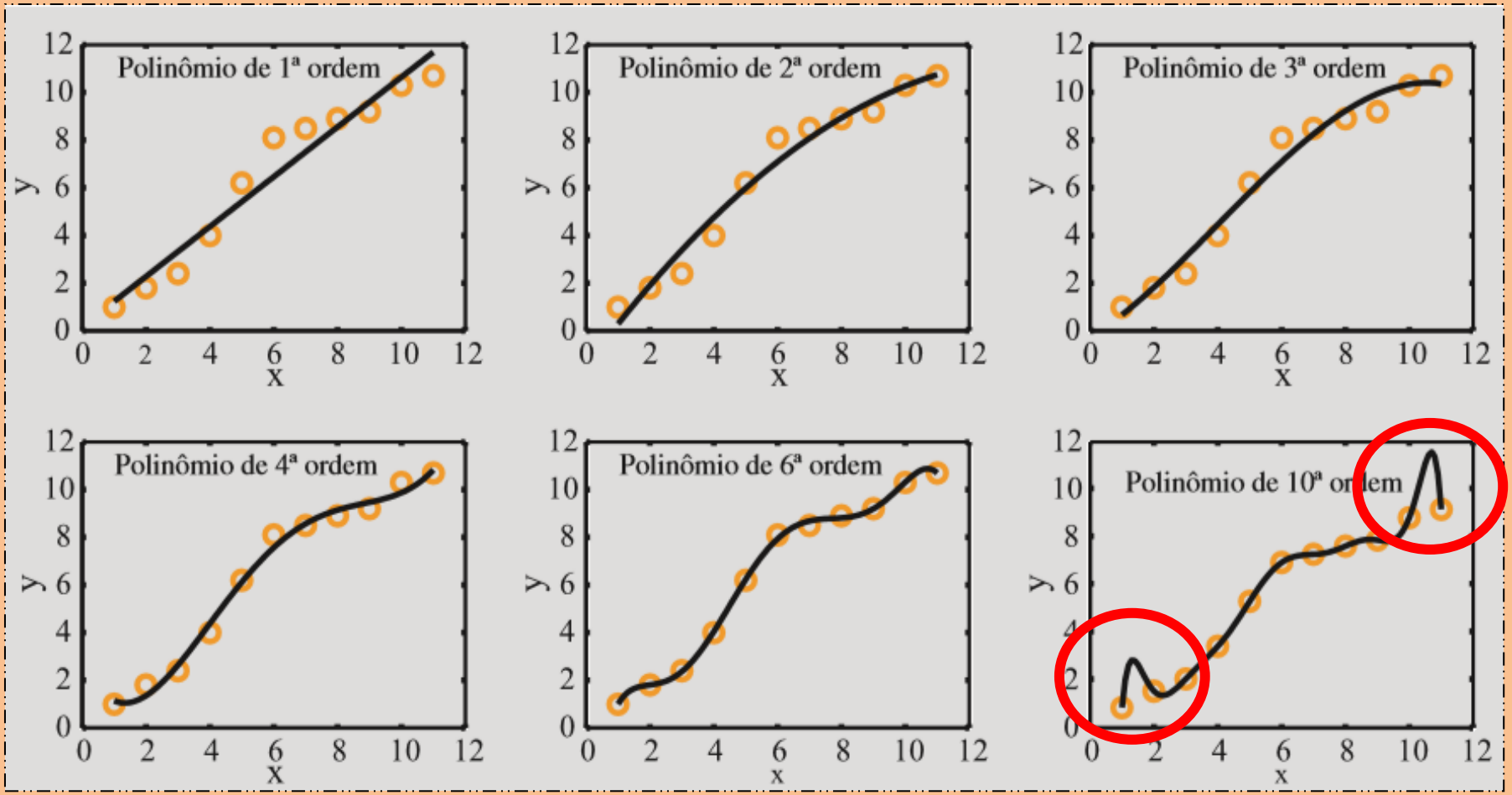
AJUSTE POLINOMIAL

```
% MATLAB: Programa escrito em arquivo texto. Ajuste de curvas usando regressão polinomial

clear all
clc
% DADOS DE ENTRADA
x = [0 0.25 0.5 0.75 1];
y = [1 1.2840 1.6487 2.1170 2.7183];
m = 1;
% PROGRAMA
n = length(x);
for i = 1:2*m
    xsum(i) = sum(x.^(i));
end
a(1,1) = n;
b(1,1) = sum(y);
for j = 2:m+1
    a(1,j) = xsum(j-1);
end
for i = 2:m+1
    for j = 1:m+1
        a(i,j) = xsum(j+i-2);
    end
    b(i,1) = sum(x.^(i-1).*y);
end
p = (a\b)';
disp('COEFICIENTES DOS POLINOMIOS:')
disp(p);
% PLOTAGEM
hold on
for i=1:m+1
    Pcoef(i)=p(m+2-i);
end
epsilon=0:0.1:3;
stressfit = polyval(Pcoef,epsilon);
plot(x,y,'ro',epsilon,stressfit,'k','linewidth',2)
xlabel('Deformação','fontsize',20)
ylabel('Tensão (MPa)','fontsize',20)
```

AJUSTE POLINOMIAL

- **NOTA IMPORTANTE:** *NÃO se recomenda o uso de polinômios de ordem elevada no ajuste de curvas, pois apresenta um desvio significativo entre alguns dos pontos*



AJUSTE DE CURVAS COM A LINEARIZAÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

LINEARIZAÇÃO DE FUNÇÕES NL

- Linearização
  - Algumas funções de ***duas constantes*** podem ser ***linearizadas*** antes da aplicação do método dos mínimos quadrados, com o objetivo de obter o sistema de equações como aquele apresentado anteriormente.

  - **Função Exponencial**

$$y = ae^{bx}$$

Se aplicarmos o logarítmo em ambos os membros, teremos:

LINEARIZAÇÃO DE EQUAÇÕES NL

- **Função Exponencial**

$$y = ae^{bx}$$

$$\ln(y) = \ln(ae^{bx}) = \ln(a) + \ln(e^{bx})$$

$$\ln(y) = \ln(a) + bx$$

Se fizermos $y^* = \ln(y)$, $a_1 = \ln(a)$ e $a_2 = b$, temos:

$$y^* = a_1 + a_2 x$$

Equação da reta. Daí o nome linearização.

LINEARIZAÇÃO DE EQUAÇÕES NL

- **Função Logarítmica**

$$y = a\ln(bx)$$

A função pode ser expandida para:

$$y = a\ln(b) + a\ln(x)$$

Se fizermos y* = y, a_1 = aln(b), a_2 = a e x^* = ln(x):

$$y^* = a_1 + a_2 x^*$$

LINEARIZAÇÃO DE EQUAÇÕES NL

- **Função Potencial**

$$y = ax^b$$

Se aplicarmos o logarítmo em ambos os membros, teremos:

$$\ln(y) = \ln(ax^b) = \ln(a) + b\ln(x)$$

Se fizermos y* = ln(y), a_1 = ln(a), a_2 = b e x^* = ln(x):

$$y^* = a_1 + a_2 x^*$$

LINEARIZAÇÃO DE EQUAÇÕES NL

- **Função Hiperbólica**

$$y = a + \frac{b}{x}$$

Se fizermos $y^* = y$, $x^* = 1/x$, $a_1 = a$, $a_2 = b$:

$$y^* = a_1 + a_2 x^*$$

LINEARIZAÇÃO DE EQUAÇÕES NL

- Aplicação: encontrar a melhor função que ajusta os valores da tabela abaixo:

x	-1	-0,7	-0,4	-0,1	0,2	0,5	0,8	1
y	36,547	17,264	8,155	3,852	1,82	0,86	0,406	0,246

Sugestão: utilizar uma função exponencial.

$$y = ae^{bx}$$

LINEARIZAÇÃO DE EQUAÇÕES NL

Como vamos ajustar os pontos por uma exponencial, precisamos fazer a adaptação:

$$y^* = \ln(y)$$

x	**-1**	**-0,7**	**-0,4**	**-0,1**	**0,2**	**0,5**	**0,8**	**1**
y	36,547	17,264	8,155	3,852	1,82	0,86	0,406	0,246
y*	3,5986	2,8486	2,0986	1,3486	0,5988	-0,1508	-0,9014	-1,4024

Então, faz-se um ajuste linear dos pontos de abscissa x e ordenada y*.

LINEARIZAÇÃO DE EQUAÇÕES NL

x	-1	-0,7	-0,4	-0,1	0,2	0,5	0,8	1
y	36,547	17,264	8,155	3,852	1,82	0,86	0,406	0,246
y*	3,5986	2,8486	2,0986	1,3486	0,5988	-0,1508	-0,9014	-1,4024

Número de pontos m = 8

$$\sum_{k=1}^{8} x_k = 0{,}3 \quad \sum_{k=1}^{8} x_k^2 = 3{,}59 \quad \sum_{k=1}^{8} f(x_k) = 8{,}0386 \quad \sum_{k=1}^{8} x_k \cdot f(x_k) = -8{,}6461$$

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{k=1}^{m} x_k \\ \sum_{k=1}^{m} x_k & \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^{m} f(x_k) \\ \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot f(x_k) \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 3{,}59 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8{,}0386 \\ -8{,}6461 \end{Bmatrix}$$

LINEARIZAÇÃO DE EQUAÇÕES NL

Resolvendo o sistema:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}0986 \\ -2{,}5002 \end{Bmatrix}$$

Equação da reta:

$$y^* = 1{,}0986 - 2{,}5002\,x$$

Para adaptar esses valores, coeficientes da reta, para a função exponencial, ainda basta fazer as seguintes adaptações:

$$\underline{y = ae^{bx}}$$

LINEARIZAÇÃO DE EQUAÇÕES NL

$$y^* = 1{,}0986 - 2{,}5002\,x$$

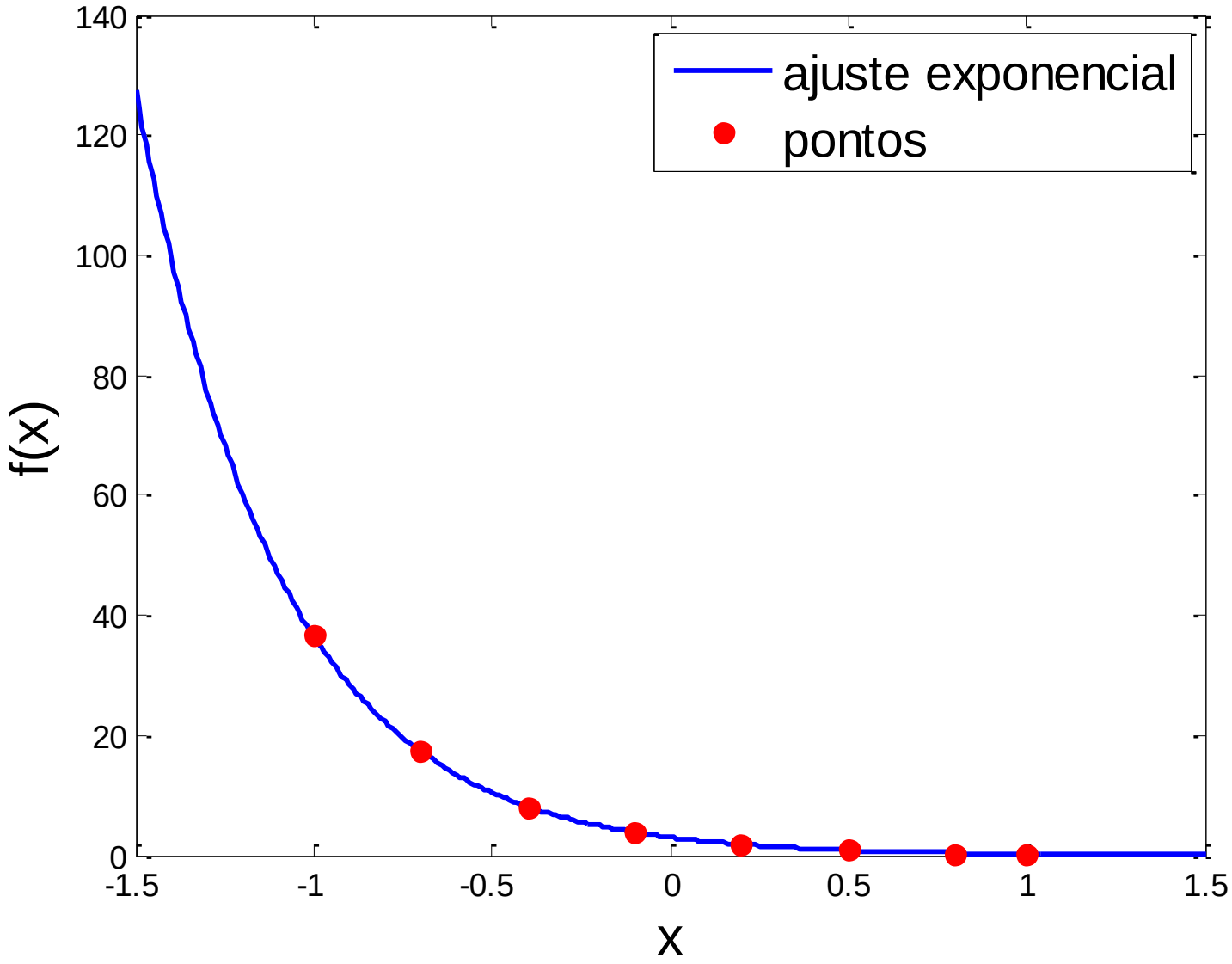
$$a_1 = \ln(a) \Rightarrow a = e^{a_1} = e^{1{,}0986} = 3$$

$$a_2 = b = -2{,}5002$$

Então, a função exponencial que melhor ajusta os pontos fornecidos no exemplo é:

$$\underline{y = 3e^{-2{,}5002x}}$$

LINEARIZAÇÃO DE EQUAÇÕES NL



QUALIDADE DO AJUSTE

QUALIDADE DO AJUSTE

- Uma forma de avaliar a qualidade do ajuste é através do **coeficiente de correlação de Pearson (r)**. Este coeficiente pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$r = \frac{\sum_{k=1}^{m}\left[(y_k - \bar{y})(q_k - \bar{q})\right]}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(y_k - \bar{y})^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(q_k - \bar{q})^2}}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y_k \quad \text{e} \quad \bar{q} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} q_k$$

  - Sendo y_k os valores tabelados da função e q_k os valores da função ajustada relativos aos valores x_k.

QUALIDADE DO AJUSTE

- Esse coeficiente assume apenas valores entre -1 e 1:
  - r = 1, significa uma correlação perfeita positiva entre duas variáveis;
  - r = -1, significa uma correlação perfeita negativa entre duas variáveis, isto é, se uma aumenta a outra diminui;
  - r = 0, indica que as duas variáveis não dependem linearmente uma da outra.

...CONTINUA