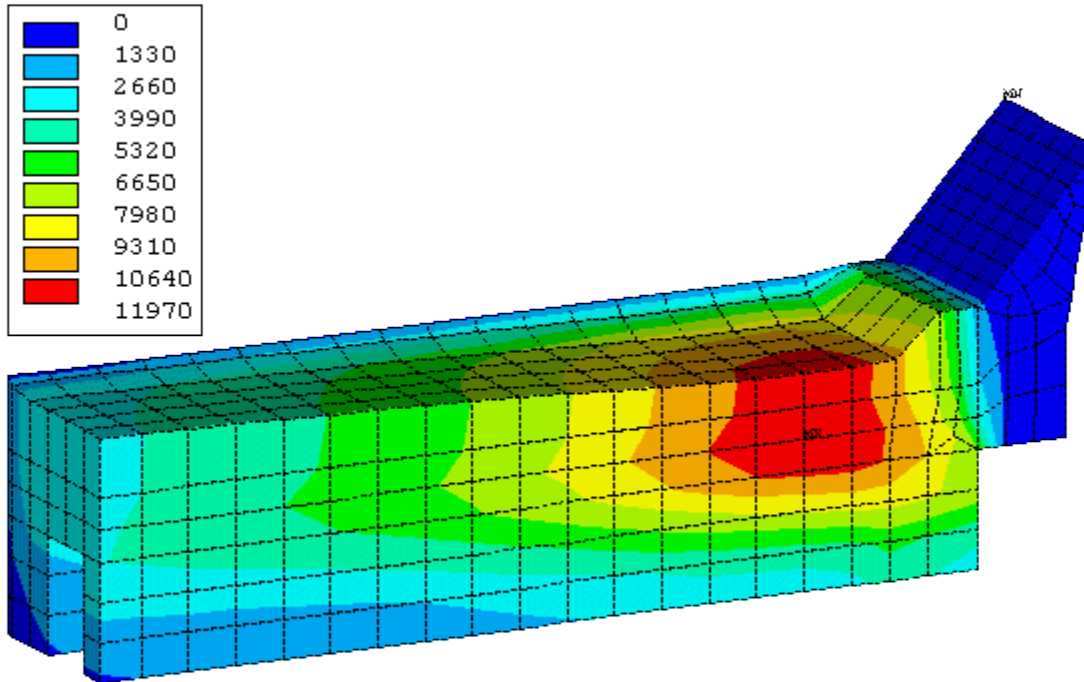




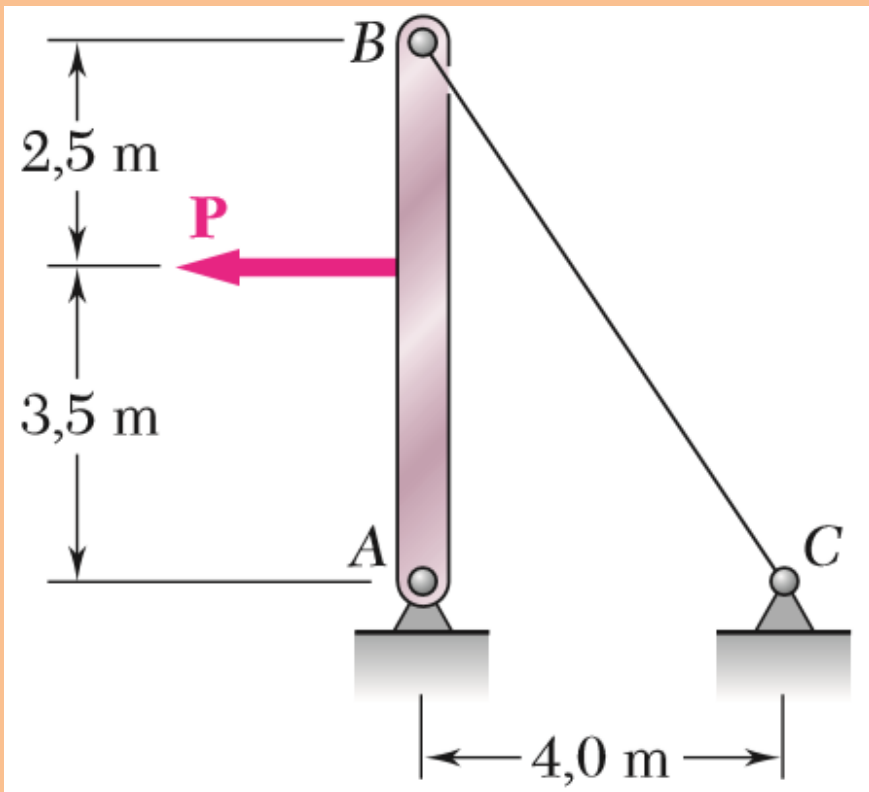
Mecânica dos Sólidos II

Prof. Dr. Alverlando Ricardo

Aula 4: PARTE I: **Tensão & Deformação**

Exemplo 1

1) O cabo BC de 4 mm de diâmetro é feito de um aço com $E=200\text{ GPa}$. Sabendo que a máxima tensão no cabo não pode exceder 190 MPa e que o deslocamento do cabo não deve exceder 6 mm .



a) Determine a máxima força P que pode ser aplicada.

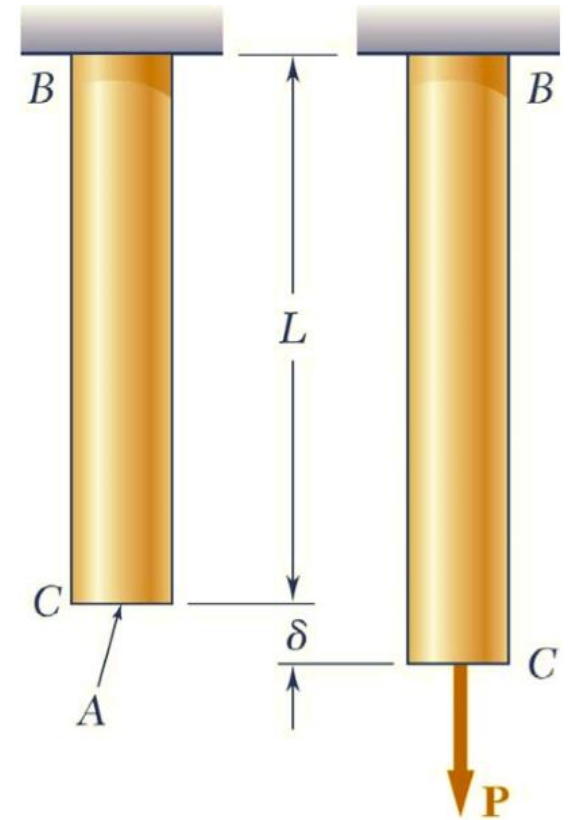
b) Qual o trabalho necessário para provocar esse deslocamento?

c) Qual a energia interna armazenada?

Deformação específica normal sob carregamento axial

Deformação sob carregamento axial

- Considere uma barra homogênea BC, de comprimento L e seção transversal uniforme de área A , sujeita a uma força axial centrada P .
- Se a tensão atuante $\sigma = P/A$ **não exceder** o **limite de proporcionalidade** do material, podemos aplicar a **Lei de Hooke**:



Deformação sob carregamento axial

- Considere uma barra homogênea BC, de comprimento L e seção transversal uniforme de área A , sujeita a uma força axial centrada P .
- Se a tensão atuante $\sigma = P/A$ **não exceder o limite de proporcionalidade** do material, podemos aplicar a **Lei de Hooke**:

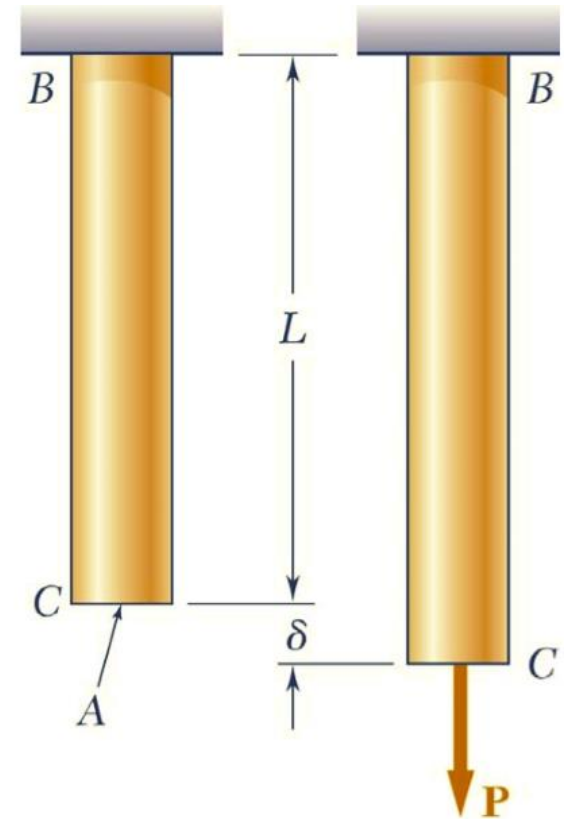
$$\sigma = E\varepsilon$$

Daí:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

Como:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad \therefore \quad \delta = \varepsilon \cdot L$$



Deformação sob carregamento axial

- Considere uma barra homogênea BC, de comprimento L e seção transversal uniforme de área A , sujeita a uma força axial centrada P .
- Se a tensão atuante $\sigma = P/A$ **não exceder** o **limite de proporcionalidade** do material, podemos aplicar a **Lei de Hooke**:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Daí:

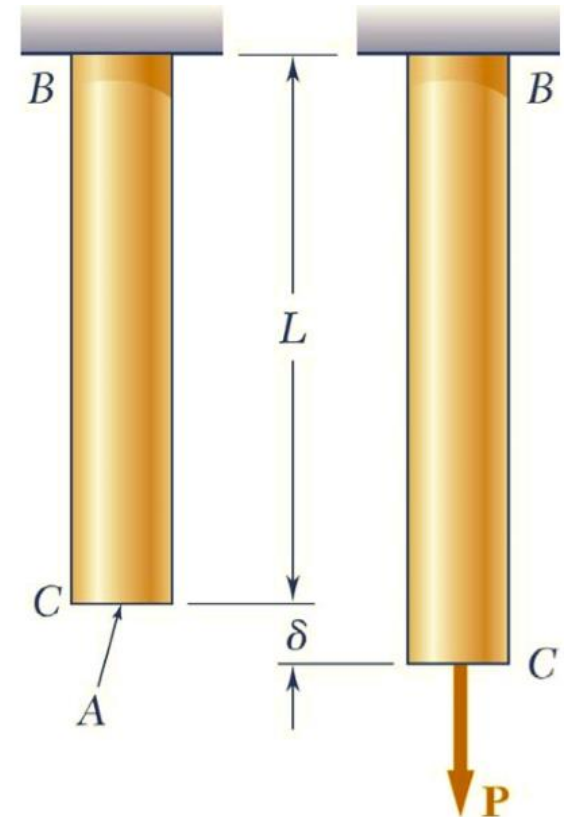
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

Como:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad \therefore \quad \delta = \varepsilon \cdot L$$

- O deslocamento na barra será:

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$



Deformação sob carregamento axial

- Validade da equação anterior:
 - *Barra homogênea;*
 - *Seção transversal uniforme de área constante A ;*
 - *Carga aplicada nas extremidades da barra.*

Deformação sob carregamento axial

➤ Validade da equação anterior:

- *Barra homogênea;*
- *Seção transversal uniforme de área constante A ;*
- *Carga aplicada nas extremidades da barra.*

- Se tivermos variações de P , A e/ou E ao longo de L , devemos efetuar o cálculo para cada trecho e somar as deformações dos trechos para obter a deformação total:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$



Deformação sob carregamento axial

➤ Validade da equação anterior:

- *Barra homogênea;*
- *Seção transversal uniforme de área constante A ;*
- *Carga aplicada nas extremidades da barra.*

- Se tivermos variações de P , A e/ou E ao longo de L , devemos efetuar o cálculo para cada trecho e somar as deformações dos trechos para obter a deformação total:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$



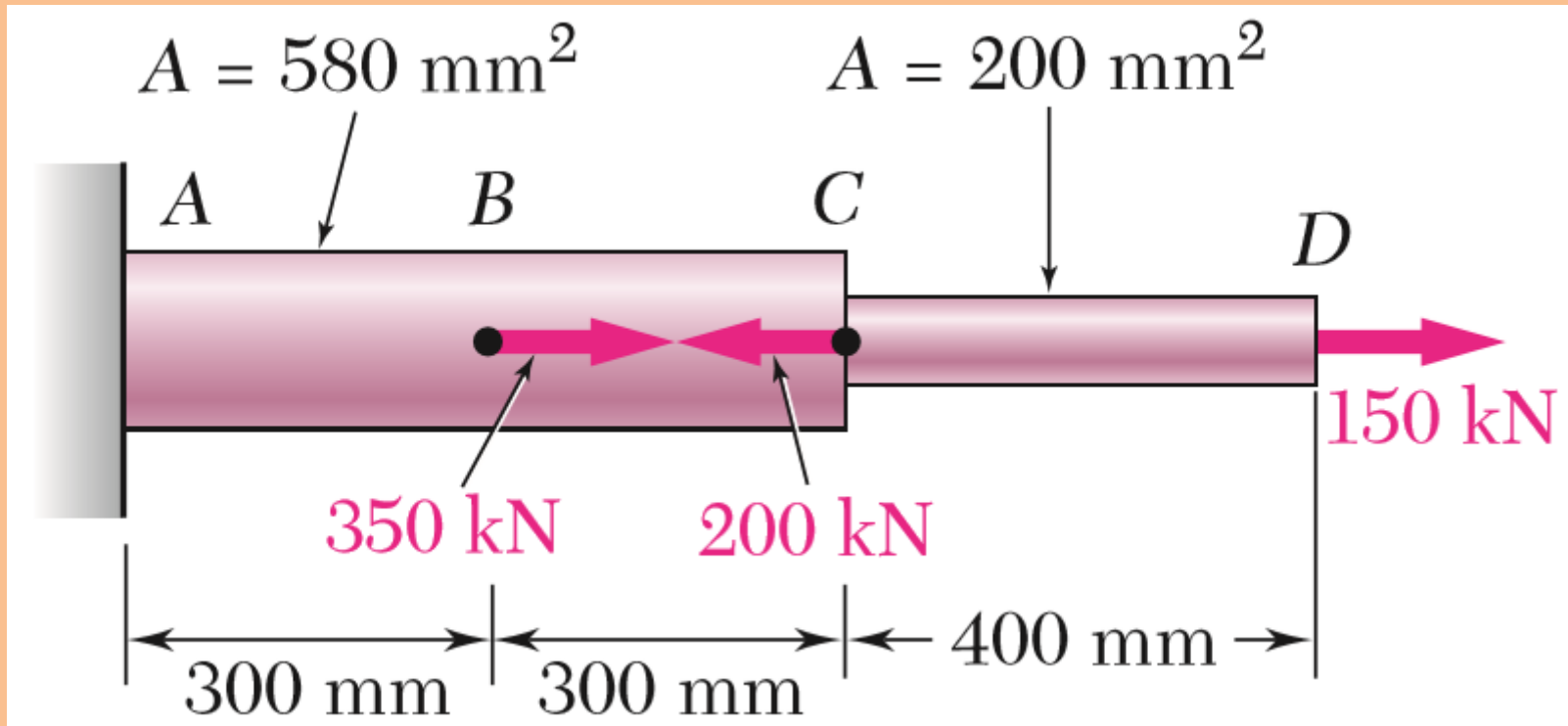
- No caso mais geral, P , A e/ou E podem variar ao longo do comprimento da barra. O somatório se torna uma integral:

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)}{A(x)E(x)} dx$$



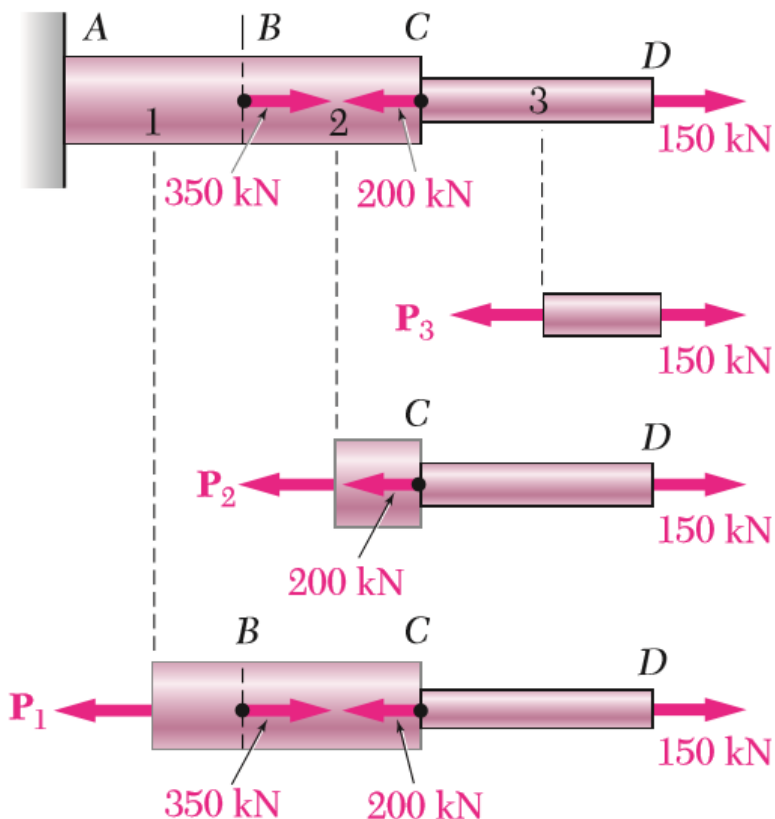
Exemplo 2.1 (Beer et al., 2008)

Determine o deslocamento da barra de aço ilustrada abaixo, submetida às forças dadas ($E = 200\text{GPa}$).



Exemplo 2.1 (Beer et al., 2008)

- Determine o deslocamento da barra de aço ilustrada abaixo, submetida às forças dadas ($E = 200\text{GPa}$).



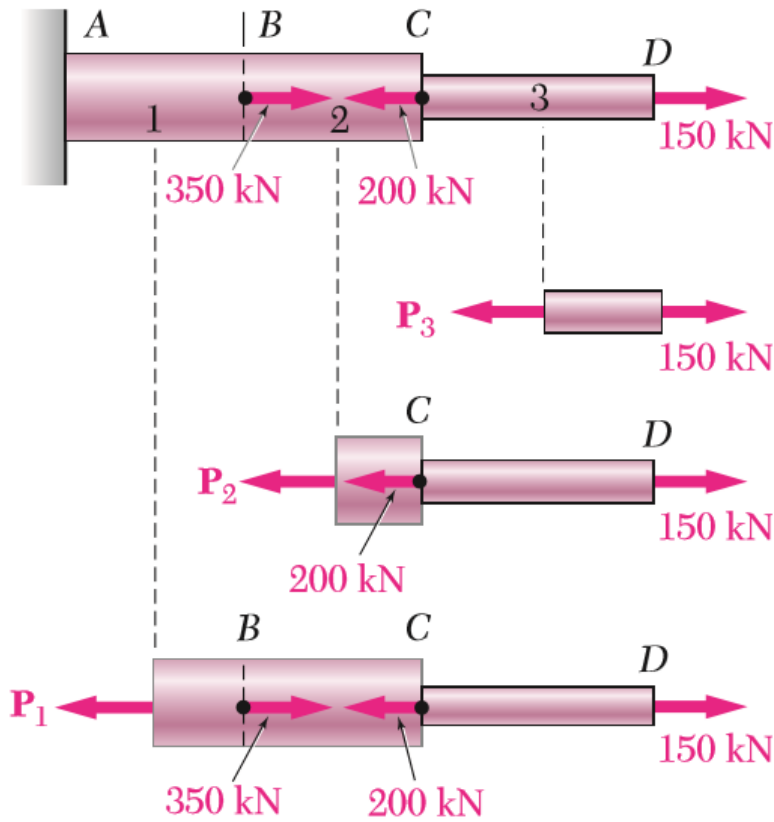
Dividimos a barra em três segmentos:

$$L_1 = L_2 = 300 \text{ mm.} \quad L_3 = 400 \text{ mm.}$$

$$A_1 = A_2 = 580 \text{ mm}^2 \quad A_3 = 200 \text{ mm}^2$$

Exemplo 2.1 (Beer et al., 2008)

- Determine o deslocamento da barra de aço ilustrada abaixo, submetida às forças dadas ($E = 200\text{GPa}$).



Dividimos a barra em três segmentos:

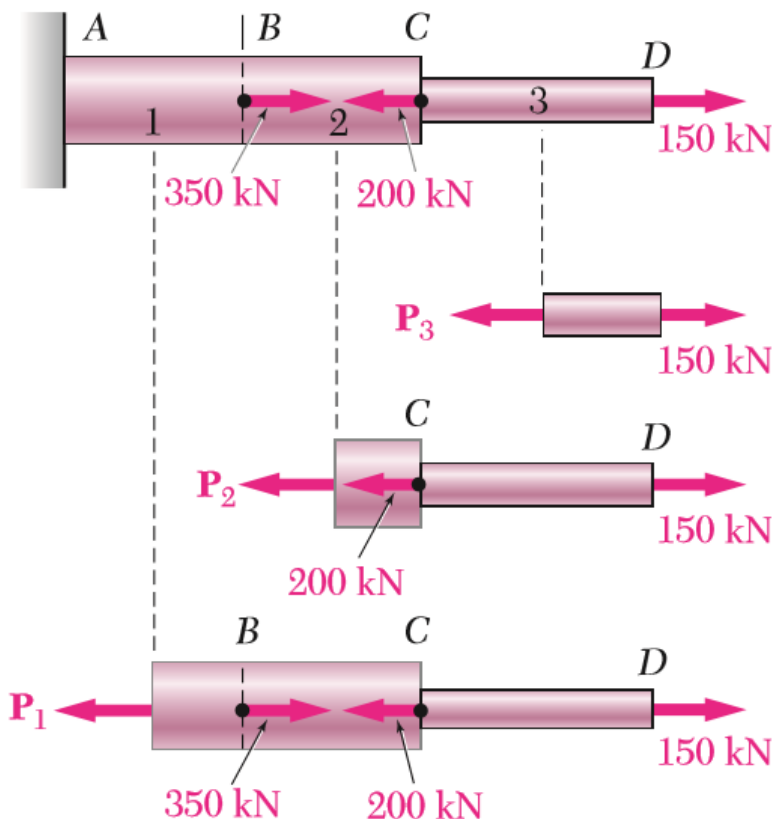
$$L_1 = L_2 = 300\text{ mm.} \quad L_3 = 400\text{ mm.}$$

$$A_1 = A_2 = 580\text{ mm}^2 \quad A_3 = 200\text{ mm}^2$$

Para determinar as forças internas P_1 , P_2 e P_3 , passamos seções transversais pelas três partes da peça e desenhamos o DCL da parte à direita de cada seção.

Exemplo 2.1 (Beer et al., 2008)

- Determine o deslocamento da barra de aço ilustrada abaixo, submetida às forças dadas ($E = 200\text{GPa}$).



Das condições de equilíbrio de cada parte, temos:

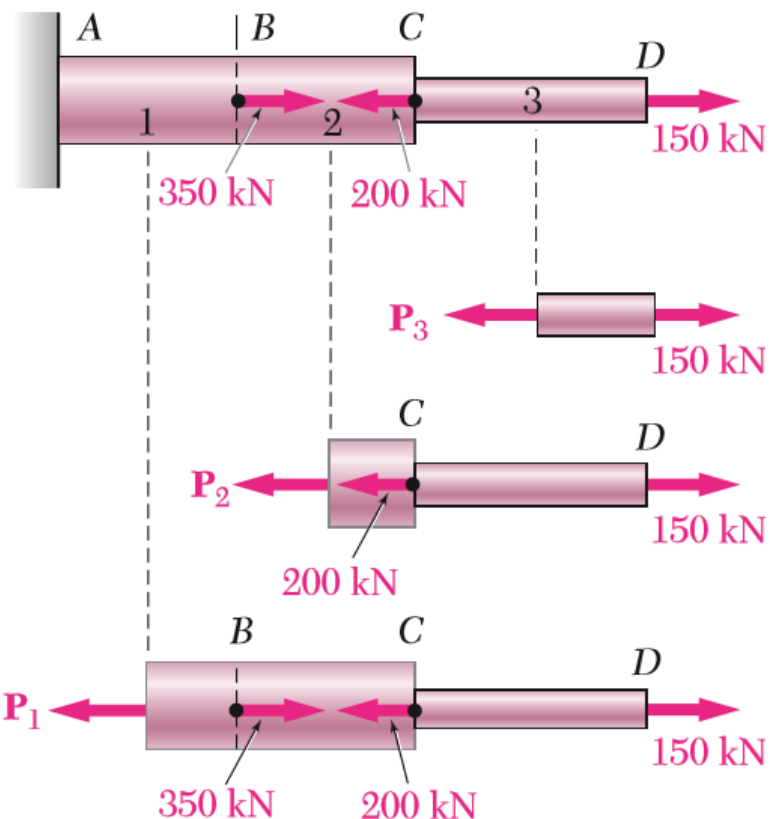
$$P_1 = 300\text{kN} = 300 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P_2 = -50\text{kN} = -50 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P_3 = 150\text{kN} = 150 \times 10^3 \text{ N}$$

Exemplo 2.1 (Beer et al., 2008)

- Determine o deslocamento da barra de aço ilustrada abaixo, submetida às forças dadas ($E = 200\text{GPa}$).



Aplicando a equação anterior:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E} \left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3} \right)$$

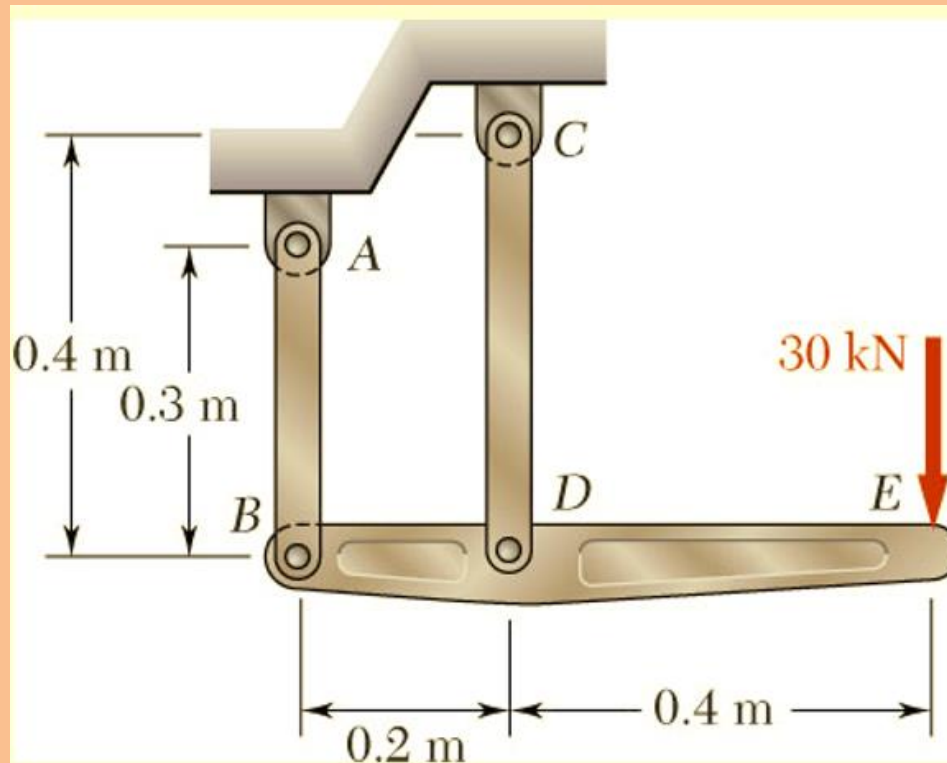
$$= \frac{1}{200} \left[\frac{(300 \times 300)}{580} + \frac{(-50 \times 300)}{580} + \frac{(150 \times 400)}{200} \right]$$

$$\delta = \frac{429,31}{200} = 2,15\text{ mm.}$$

Exercício para o LAR

Problema resolvido 2.1 (Beer et al., 2008)

A barra rígida BDE é suspensa por duas hastes AB e CD. A haste AB é de alumínio ($E=70\text{GPa}$) com área da seção transversal de 500mm^2 ; a haste CD é de aço ($E=200\text{GPa}$) com área da seção transversal de 600mm^2 . Para a força de 30kN , determine:

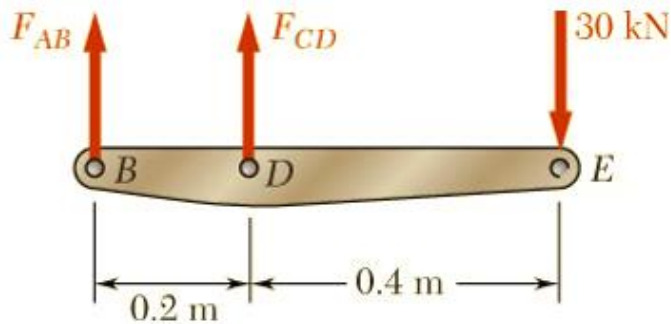


- a) O deslocamento de B ;
- b) O deslocamento de D ;
- c) O deslocamento de E .

Problema resolvido 2.1 (Beer et al., 2008)

➤ Diagramas de corpo livre:

Barra *BDE*



$$\sum M_B = 0$$

$$0 = -(30 \text{ kN} \times 0.6\text{m}) + F_{CD} \times 0.2\text{m}$$

$$F_{CD} = +90\text{kN} \text{ tração}$$

$$\sum M_D = 0$$

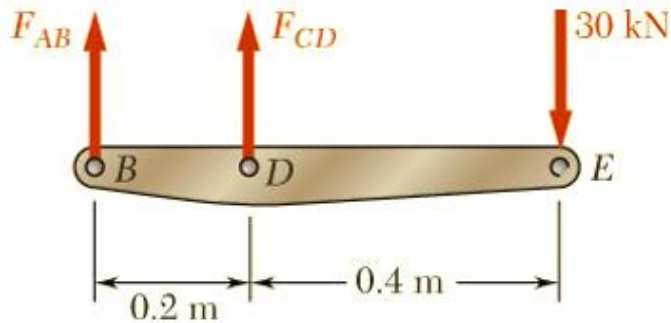
$$0 = -(30 \text{ kN} \times 0.4\text{m}) - F_{AB} \times 0.2\text{m}$$

$$F_{AB} = -60\text{kN} \text{ compressão}$$

Problema resolvido 2.1 (Beer et al., 2008)

➤ Diagramas de corpo livre:

Barra *BDE*



$$\sum M_B = 0$$

$$0 = -(30 \text{ kN} \times 0.6 \text{ m}) + F_{CD} \times 0.2 \text{ m}$$

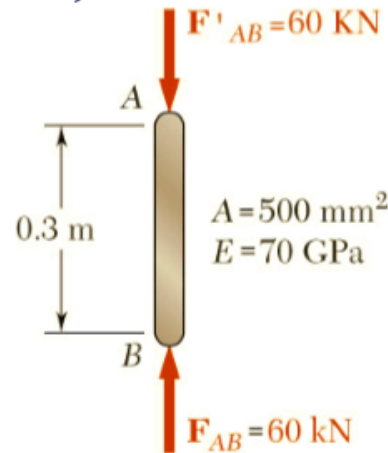
$$F_{CD} = +90 \text{ kN} \text{ tração}$$

$$\sum M_D = 0$$

$$0 = -(30 \text{ kN} \times 0.4 \text{ m}) - F_{AB} \times 0.2 \text{ m}$$

$$F_{AB} = -60 \text{ kN} \text{ compressão}$$

a) Deslocamento do ponto B:



$$\delta_B = \frac{PL}{AE}$$

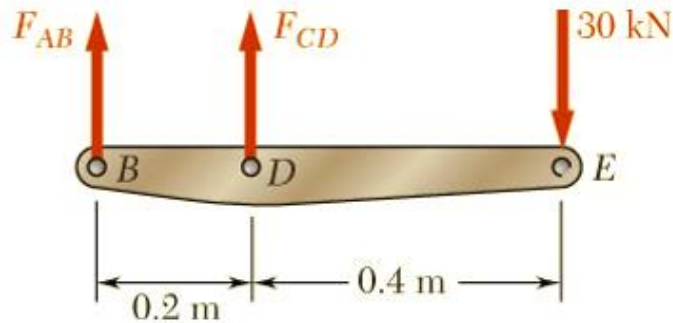
$$\begin{aligned} &= \frac{(-60 \times 10^3 \text{ N})(0.3 \text{ m})}{(500 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(70 \times 10^9 \text{ Pa})} \\ &= -514 \times 10^{-6} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\delta_B = 0.514 \text{ mm} \uparrow$$

Problema resolvido 2.1 (Beer et al., 2008)

➤ Diagramas de corpo livre:

Barra BDE



$$\sum M_B = 0$$

$$0 = -(30 \text{ kN} \times 0.6 \text{ m}) + F_{CD} \times 0.2 \text{ m}$$

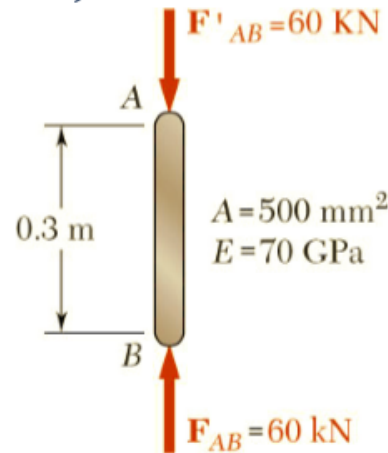
$$F_{CD} = +90 \text{ kN} \text{ tração}$$

$$\sum M_D = 0$$

$$0 = -(30 \text{ kN} \times 0.4 \text{ m}) - F_{AB} \times 0.2 \text{ m}$$

$$F_{AB} = -60 \text{ kN} \text{ compressão}$$

a) Deslocamento do ponto B:

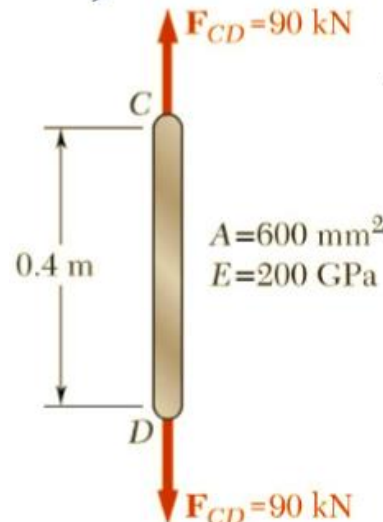


$$\delta_B = \frac{PL}{AE}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-60 \times 10^3 \text{ N})(0.3 \text{ m})}{(500 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(70 \times 10^9 \text{ Pa})} \\ &= -514 \times 10^{-6} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\delta_B = 0.514 \text{ mm} \uparrow$$

b) Deslocamento do ponto D:



$$\delta_D = \frac{PL}{AE}$$

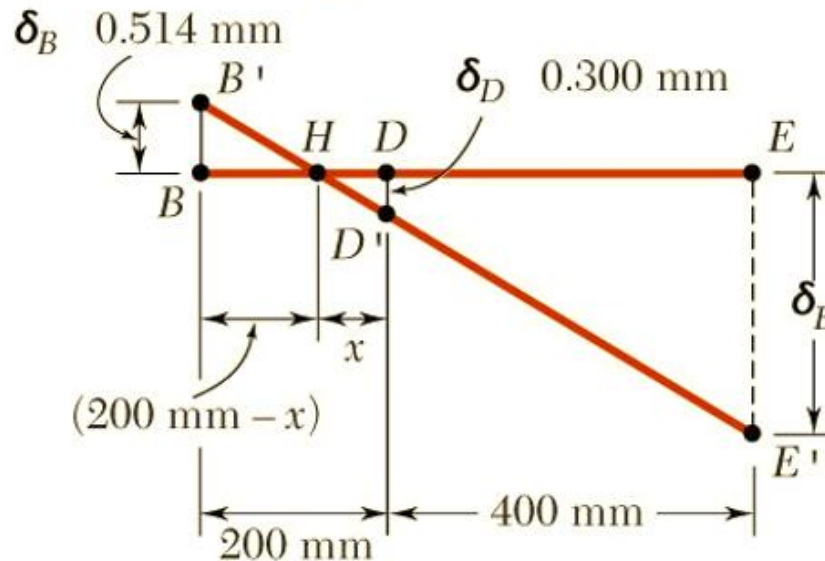
$$\begin{aligned} &= \frac{(90 \times 10^3 \text{ N})(0.4 \text{ m})}{(600 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \text{ Pa})} \\ &= 300 \times 10^{-6} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\delta_D = 0.300 \text{ mm} \downarrow$$

Problema resolvido 2.1 (Beer et al., 2008)

c) Deslocamento de E :

Lembrando que a barra BDE é rígida, temos:



Portanto:

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD}$$

$$\frac{0.514 \text{ mm}}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(200 \text{ mm}) - x}{x}$$

$$x = 73.7 \text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD}$$

$$\frac{\delta_E}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(400 + 73.7) \text{ mm}}{73.7 \text{ mm}}$$

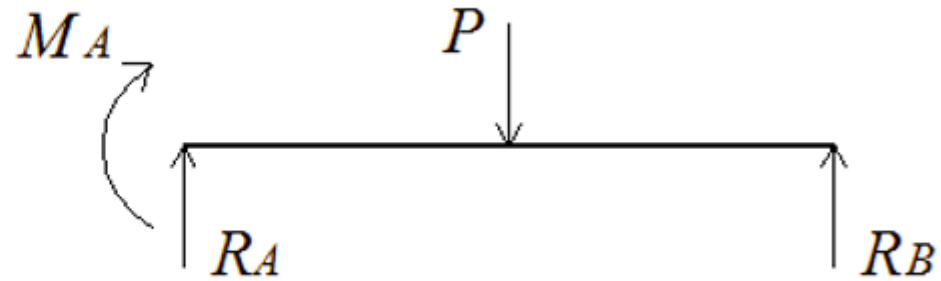
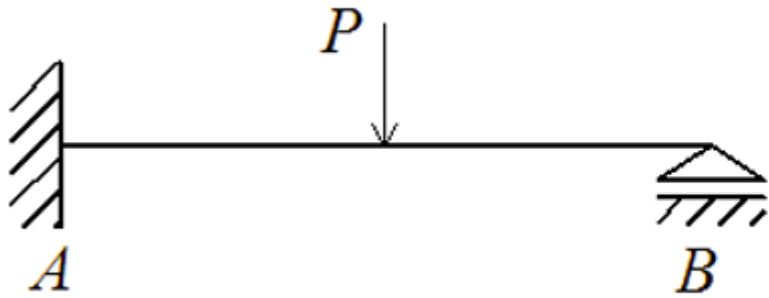
$$\delta_E = 1.928 \text{ mm}$$



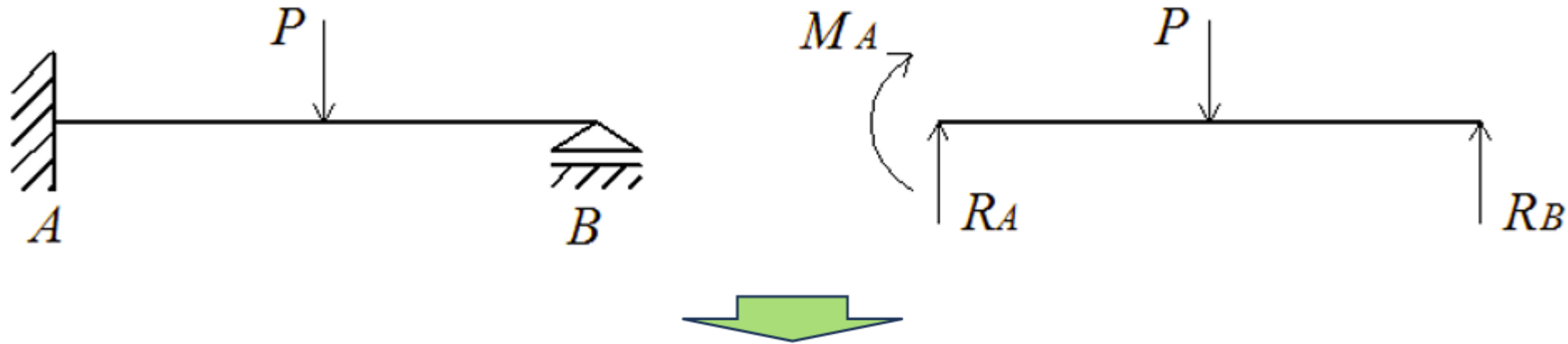
$$\delta_E = 1.928 \text{ mm} \downarrow$$

Problemas estaticamente indeterminados

Problemas estaticamente indeterminados

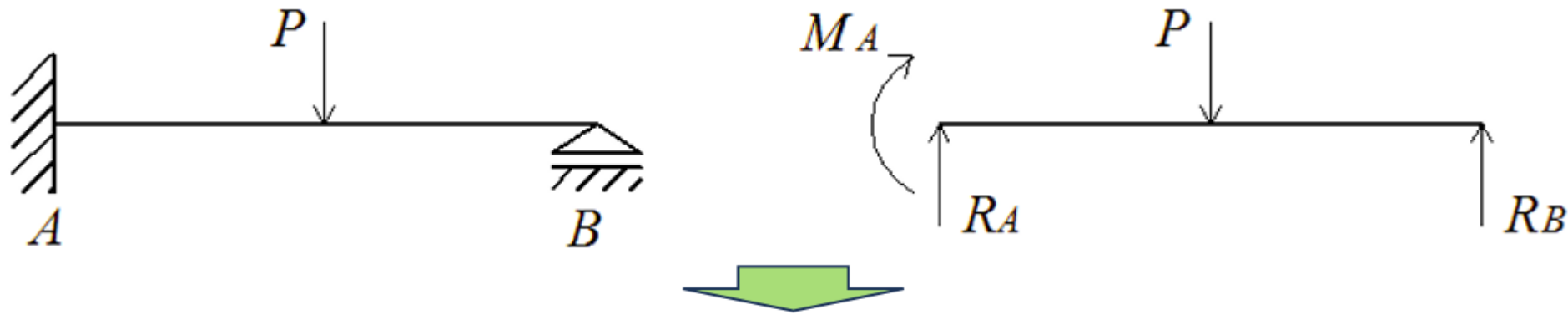


Problemas estaticamente indeterminados



Duas equações de equilíbrio aplicáveis, mas, três incógnitas a determinar!

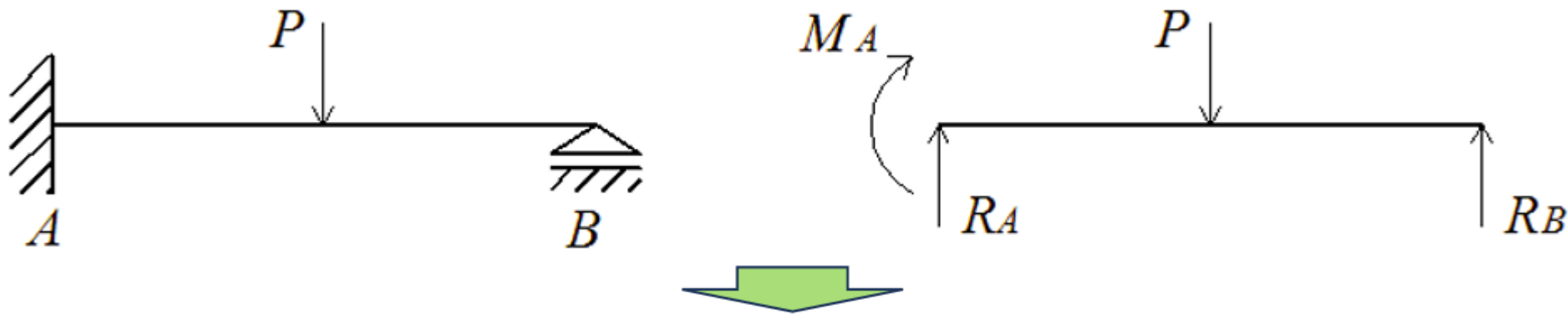
Problemas estaticamente indeterminados



Duas equações de equilíbrio aplicáveis, mas, três incógnitas a determinar!

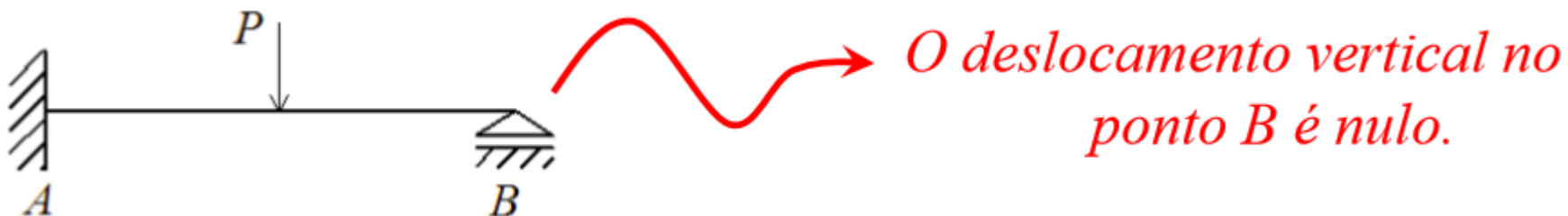
- Em muitos problemas **não é possível** determinar as forças internas nem as próprias reações **utilizando apenas os recursos da estática**;

Problemas estaticamente indeterminados



Duas equações de equilíbrio aplicáveis, mas, três incógnitas a determinar!

- Em muitos problemas **não é possível** determinar as forças internas nem as próprias reações **utilizando apenas os recursos da estática**;
- São necessárias **relações complementares**, envolvendo deformações, obtidas considerando-se a geometria do problema;



Problemas estaticamente indeterminados

- Tais problemas são ditos *estaticamente indeterminados*!

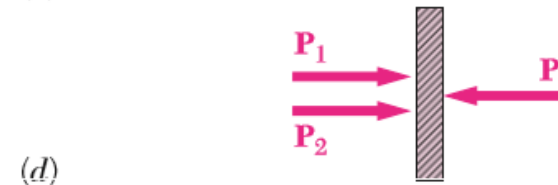
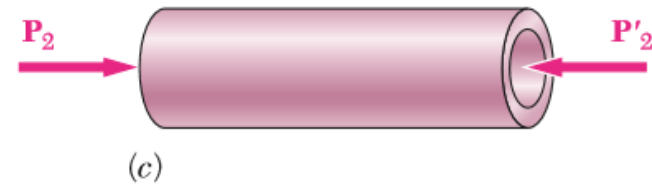
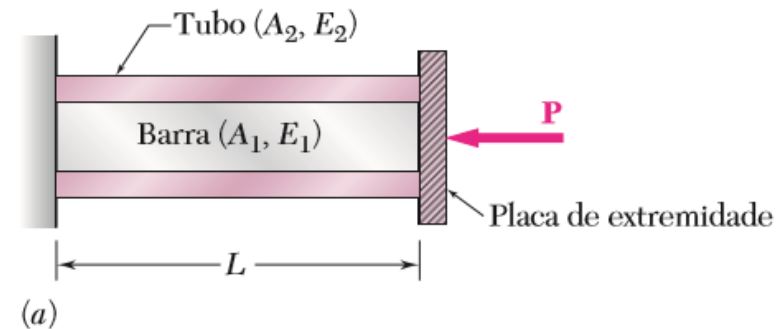


A estática não é suficiente para determinar as reações nem os esforços internos.

Exemplo 2.2 (Beer et al., 2008):

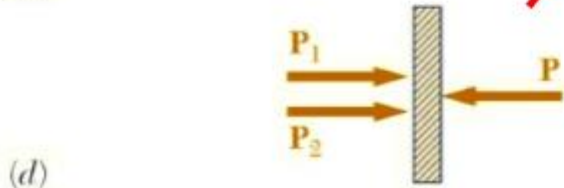
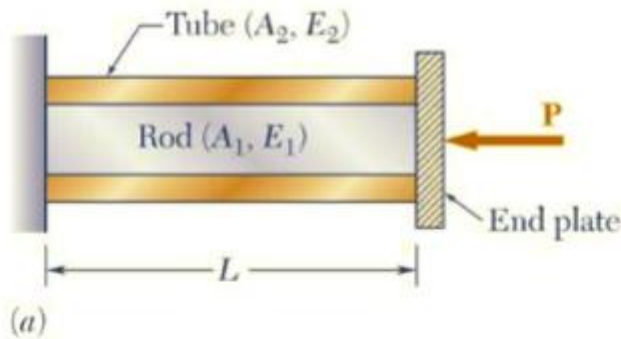
Uma barra de comprimento L , seção transversal de área A_1 e módulo de elasticidade E_1 foi colocada dentro de um tubo de mesmo comprimento, mas de área A_2 e módulo de elasticidade E_2 .

- Qual o deslocamento da barra e do tubo, quando uma força P é aplicada por meio de uma placa rígida?



Problemas estaticamente indeterminados

- Qual a deformação da barra e do tubo, quando uma força P é aplicada por meio de uma placa rígida?



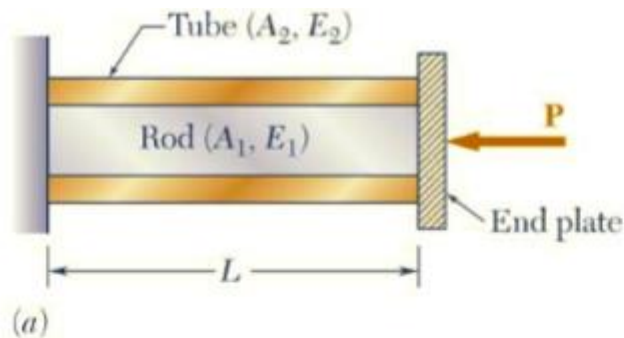
Após desenhar o diagrama de corpo livre, verifica-se que:

$$P = P_1 + P_2$$

- Duas incógnitas;
 - Uma equação;
- **Problema estaticamente indeterminado!**

Problemas estaticamente indeterminados

- Qual a deformação da barra e do tubo, quando uma força P é aplicada por meio de uma placa rígida?



A condição complementar necessária para resolver o problema parte da geometria:

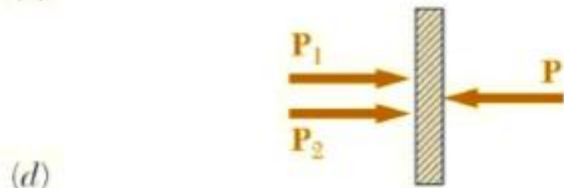
Como a placa onde a força é aplicada é rígida, as deformações da barra e do tubo devem ser iguais.



$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{A_1 E_1}; \quad \delta_2 = \frac{P_2 L}{A_2 E_2}$$



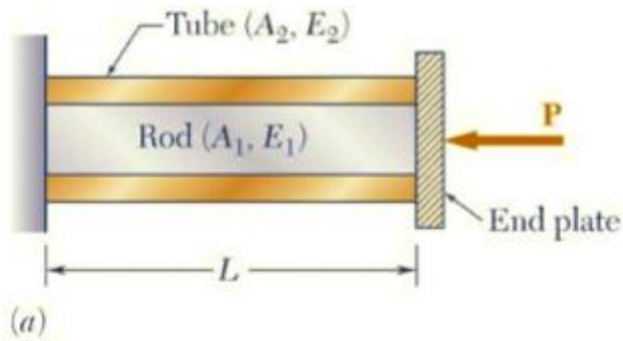
$$\delta_1 = \delta_2 \quad \therefore \quad \frac{P_1 L}{A_1 E_1} = \frac{P_2 L}{A_2 E_2}$$



$$\frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2}$$

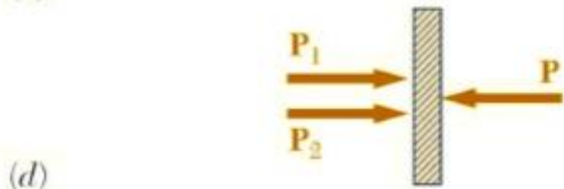
Problemas estaticamente indeterminados

- Qual a deformação da barra e do tubo, quando uma força P é aplicada por meio de uma placa rígida?



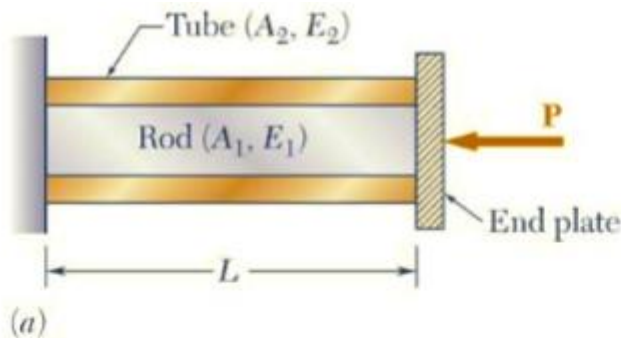
Passamos a ter duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} \frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2} \\ P = P_1 + P_2 \end{cases}$$



Problemas estaticamente indeterminados

- Qual a deformação da barra e do tubo, quando uma força P é aplicada por meio de uma placa rígida?



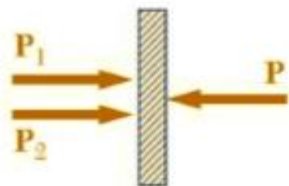
Passamos a ter duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} \frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2} \\ P = P_1 + P_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações:

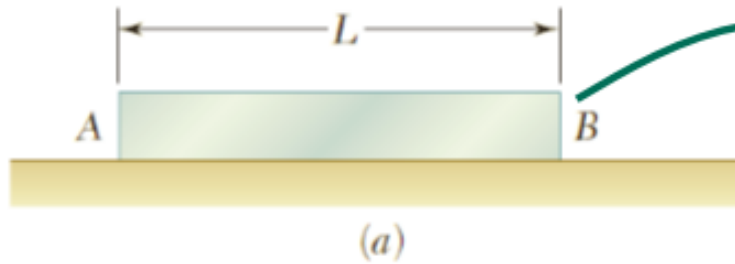

$$P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}; \quad P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

Com estes valores é possível determinar a deformação da barra e do tubo.



Problemas envolvendo variação de temperatura

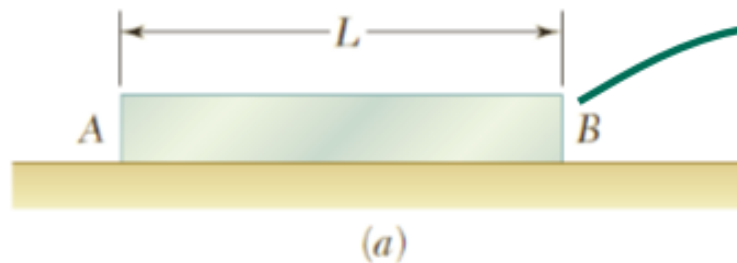
Problemas com variação de temperatura



Barra AB, homogênea e de seção transversal uniforme.

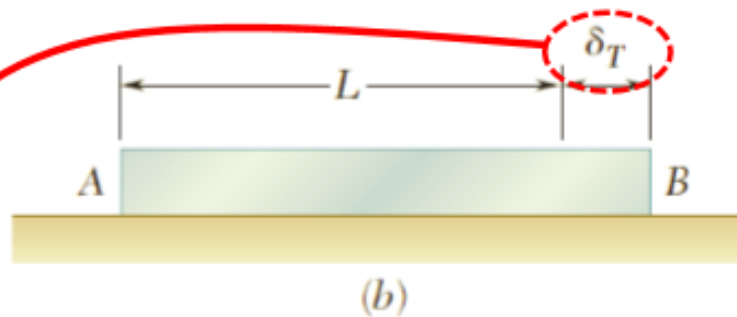
Superfície lisa horizontal.

Problemas com variação de temperatura



Barra AB, homogênea e de seção transversal uniforme.

Superfície lisa horizontal.



Aumentando a temperatura da barra de um valor ΔT , a barra se alonga de um valor δ_T , proporcional à variação da temperatura e ao comprimento da barra, L :

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$



α é uma constante característica do material, denominada *coeficiente de dilatação térmica*.

α representa uma quantidade por grau de temperatura.

Problemas com variação de temperatura

- A deformação total δ_T está relacionada uma deformação específica térmica, $\varepsilon_T = \delta T / L$:

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T$$



$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$



α é uma constante característica do material, denominada coeficiente de dilatação térmica. A representa uma quantidade por grau de temperatura.

Problemas com variação de temperatura

- A importância da variação de temperatura nas estruturas pode ser verificada através da presença de juntas de dilatação em edifícios, calçadas, pontes, etc.

Por exemplo, segundo a NBR6118 – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento: “As juntas de dilatação devem ser previstas pelo menos a cada 15m.”.

- À deformação total δ_T está relacionada uma deformação específica térmica, $\varepsilon_T = \delta T / L$:

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T$$



$$\delta_T = \alpha (\Delta T) L$$



α é uma constante característica do material, denominada coeficiente de dilatação térmica. A representa uma quantidade por grau de temperatura.

Problemas com variação de temperatura



Problemas com variação de temperatura

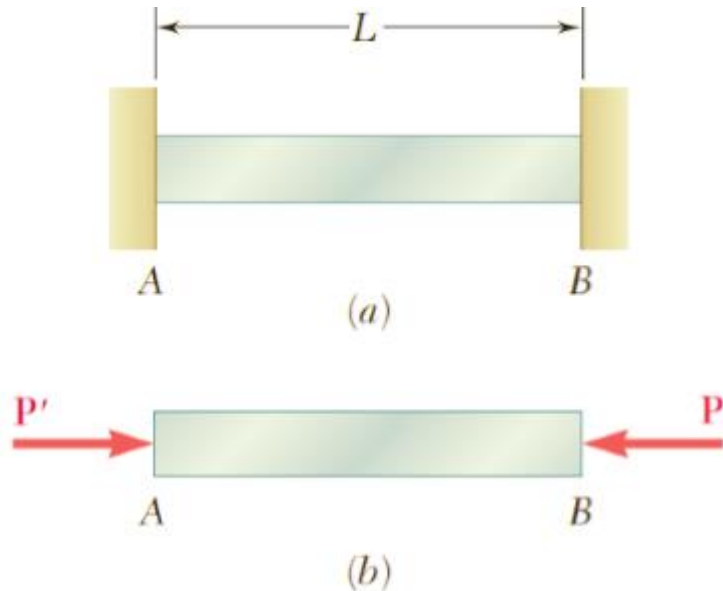


Problemas com variação de temperatura

- Quando a barra se encontra livre para se deformar, não aparecem tensões relacionadas à deformação ε_T ;

Problemas com variação de temperatura

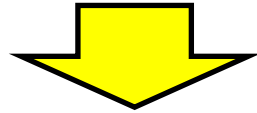
- Quando a barra se encontra livre para se deformar, não aparecem tensões relacionadas à deformação ε_T ;
- Caso a barra seja colocada entre anteparos rígidos e sua temperatura seja elevada em ΔT graus, haverá uma tendência de aumento do comprimento da barra, a ser combatida pelas reações nos apoios:



É criado um estado de tensão na barra, sem que ocorram deformações específicas;

Problemas com variação de temperatura

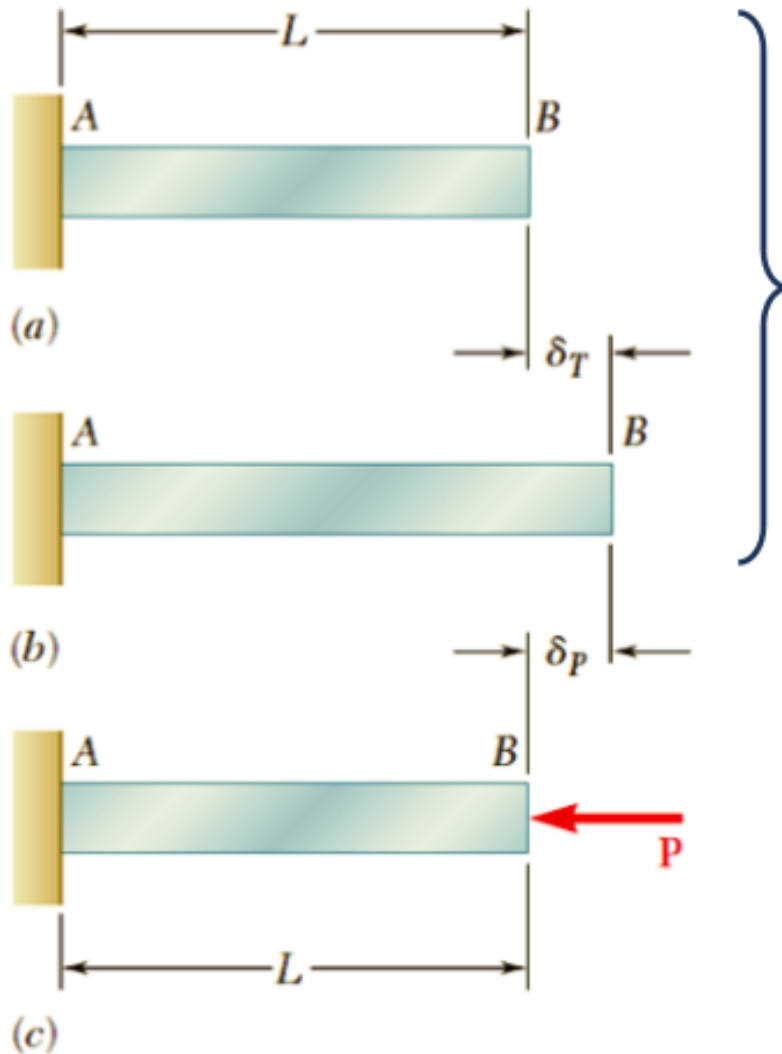
- Trata-se de um problema estaticamente indeterminado;



- A solução deve ser procurada através da utilização de informações a respeito das deformações da peça!

Problemas com variação de temperatura

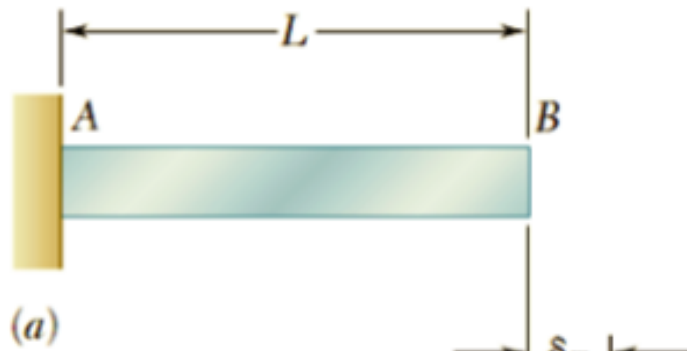
Neste caso, é como se:



A barra sofresse um alongamento inicial igual a δ_T , devido à variação de temperatura...

Problemas com variação de temperatura

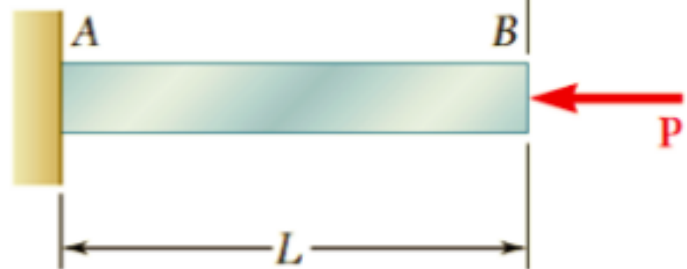
Neste caso, é como se:



(a)



(b)



(c)

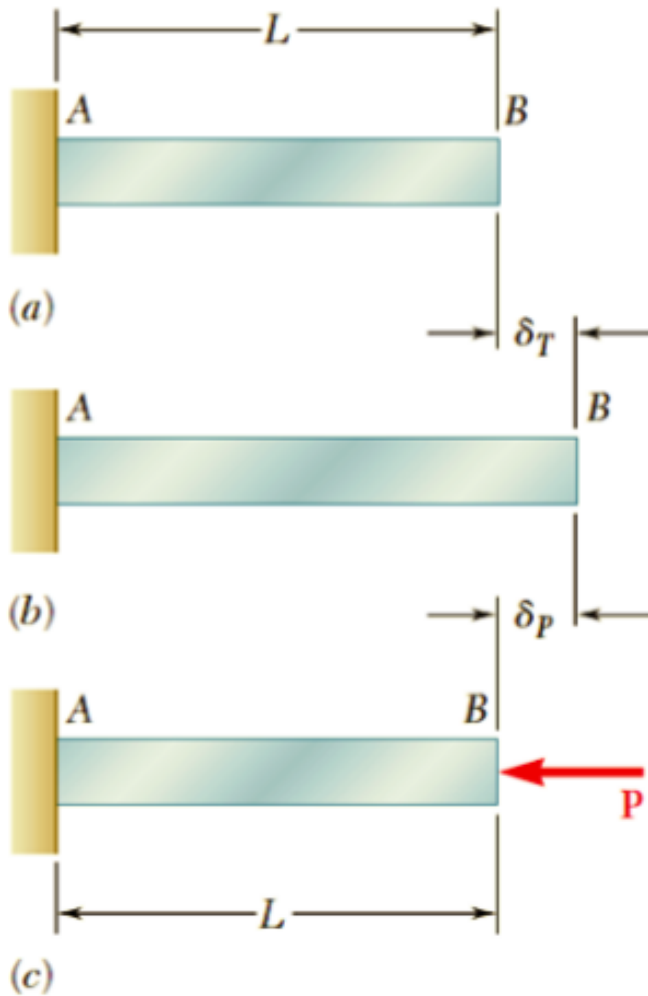
A barra sofresse um alongamento inicial igual a δ_T , devido à variação de temperatura...



mas, logo após, uma carga de intensidade P fosse aplicada no sentido de anular tal alongamento.

(Método da superposição: apoio B tratado como redundante)

Problemas com variação de temperatura



A deformação total, que é igual à deformação provocada pela temperatura somada à deformação produzida pela aplicação da carga P , deve ser nula:

$$\delta = \delta_T + \delta_P = 0$$

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

$$\delta_P = \frac{PL}{AE}$$

Daí:

$$\delta_T + \delta_P = \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

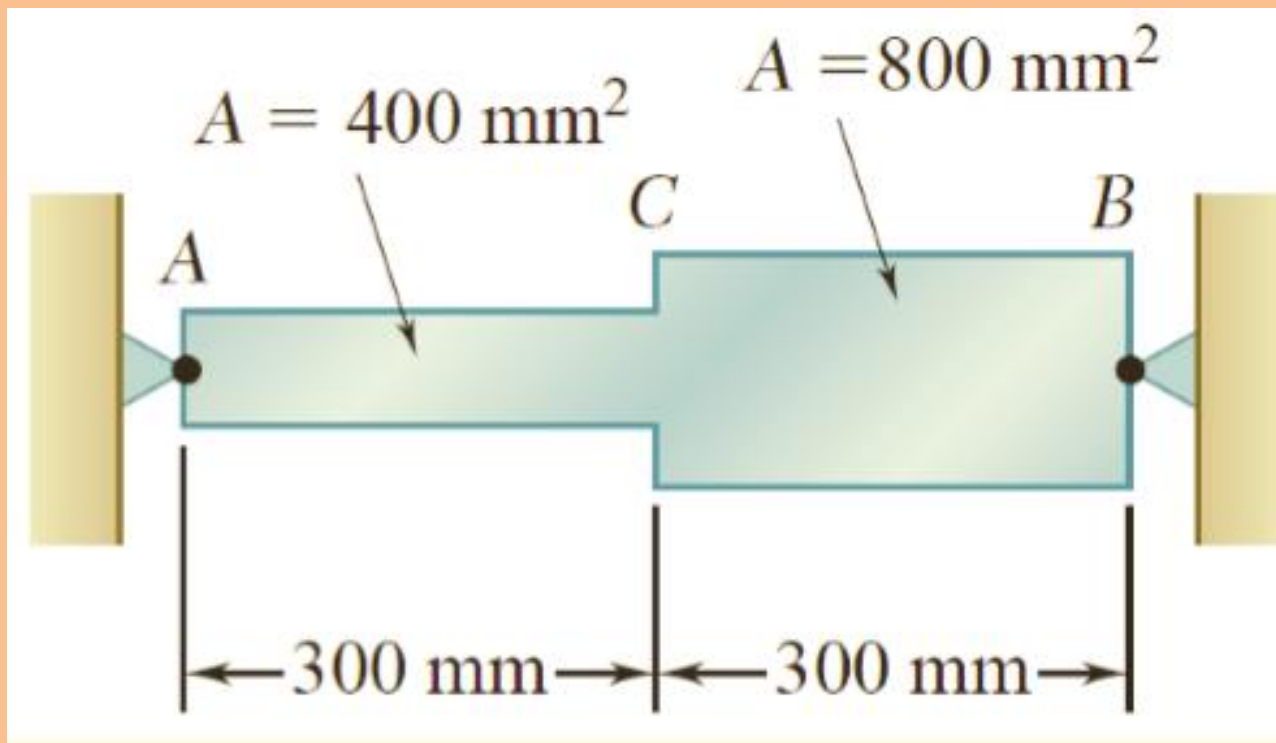
$$\therefore P = -AE\alpha(\Delta T)$$

Tensão na barra devido à variação de temperatura:

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T)$$

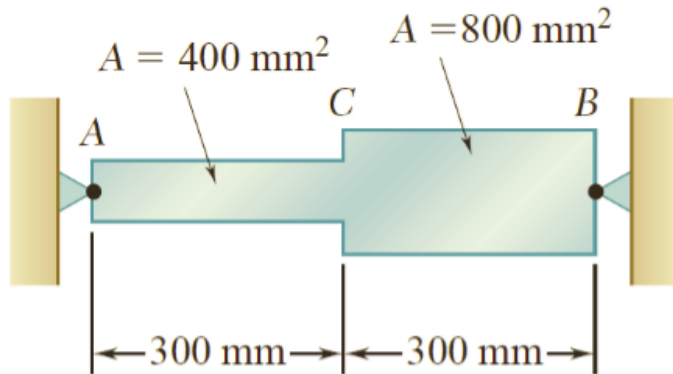
Exemplo 2.2 (Beer et al., 2008):

A barra AB é perfeitamente ajustada aos anteparos fixos quando a temperatura é de $+25^{\circ}\text{C}$. Determinar as tensões atuantes nas partes AC e CB da barra para a temperatura de -50°C . Usar $E = 200 \text{ GPa}$ e $\alpha = 12 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$.



EXEMPLO

Determinando reações nos anteparos:



A variação de temperatura é:

$$\Delta T = (-50^\circ\text{C}) - (25^\circ\text{C}) = -75^\circ\text{C}$$

A deformação correspondente:

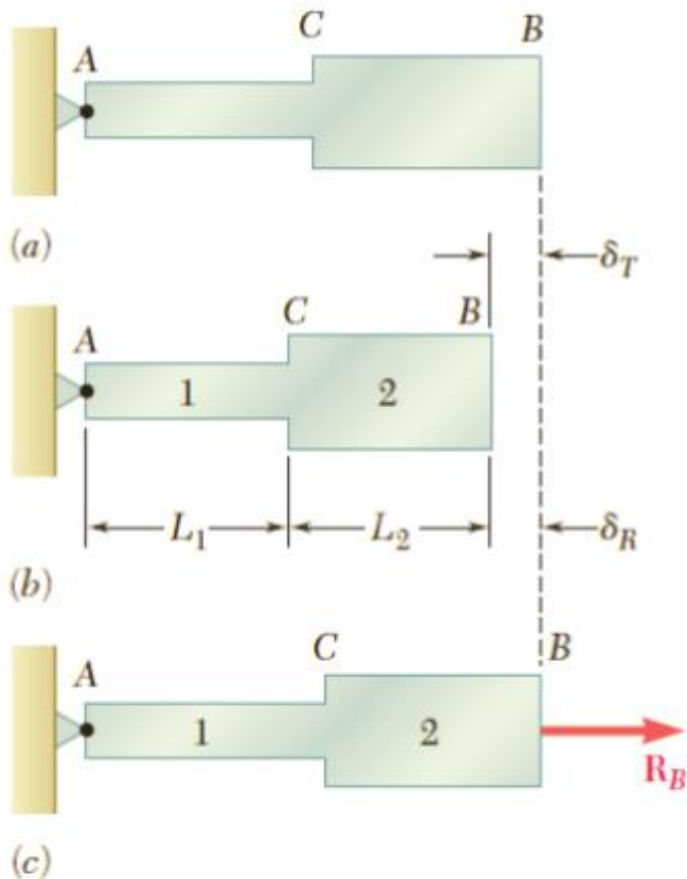
$$\begin{aligned}\delta_T &= \alpha(\Delta T)L \\ &= (12 \times 10^{-6}/^\circ\text{C})(-75^\circ\text{C})(0,6 \text{ m}) = -540 \times 10^{-6} \text{ m}\end{aligned}$$

*Note que a deformação devido à temperatura
não depende da área!*

EXEMPLO

Determinando reações nos anteparos:

Como o problema é estaticamente indeterminado, retiramos o anteparo B , e consideramos a reação em B e o fato de que o deslocamento naquele ponto deve ser nulo:

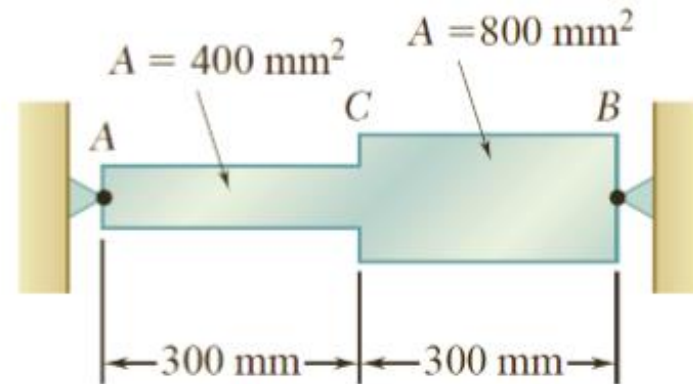


As propriedades das seções são as seguintes:

$$L_1 = L_2 = 0,3 \text{ m}$$

$$A_1 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_2 = 800 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

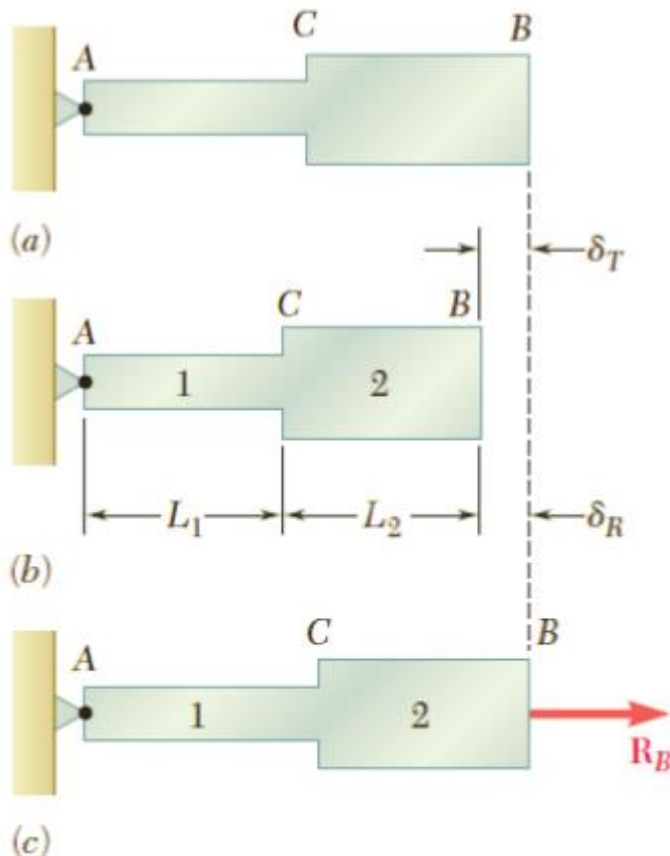
$$P_1 = P_2 = R_B \quad E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$$



EXEMPLO

Determinando reações nos anteparos:

Como o problema é estaticamente indeterminado, retiramos o anteparo B , e consideramos a reação em B e o fato de que o deslocamento naquele ponto deve ser nulo:



As propriedades das seções são as seguintes:

$$L_1 = L_2 = 0,3 \text{ m}$$

$$A_1 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_2 = 800 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$P_1 = P_2 = R_B \quad E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$$

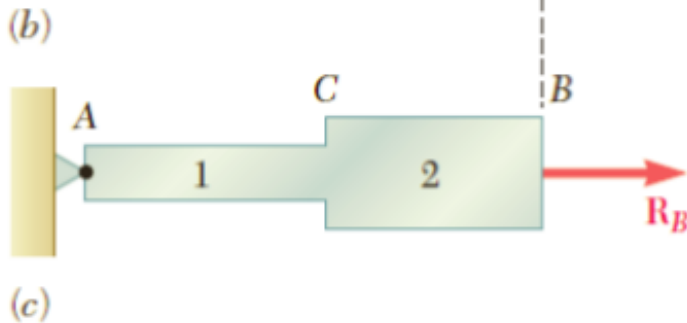
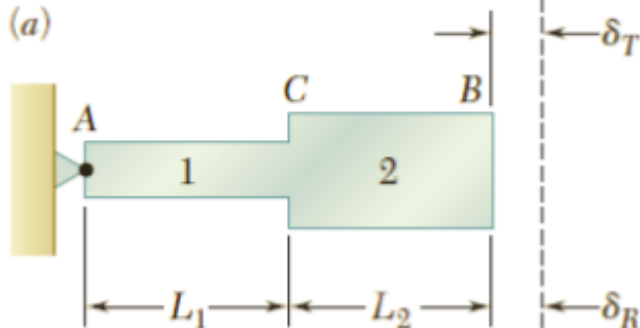
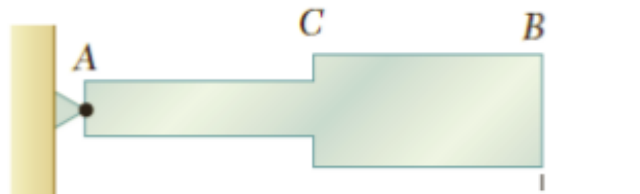
Aplicando a força desconhecida R_B à extremidade B para determinar a deformação δ_R :

$$\begin{aligned} \delta_R &= \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} \\ &= \frac{R_B}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} \left(\frac{0,3 \text{ m}}{400 \times 10^{-6} \text{ m}^2} + \frac{0,3 \text{ m}}{800 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \right) \\ &\quad (\delta_R \text{ em função de } R_B) \end{aligned}$$

EXEMPLO

Determinando reações nos anteparos:

Devido às restrições dos anteparos, a deformação total é nula, ou seja:



$$\delta = \delta_T + \delta_R = 0$$

$$\delta = -540 \times 10^{-6} \text{ m} + (5,625 \times 10^{-9} \text{ m/N})R_B = 0$$

Daí:

$$R_B = 96,0 \times 10^3 \text{ N} = 96,0 \text{ kN}$$

Pelo equilíbrio da barra, a reação em A é igual e de sentido contrário.

EXEMPLO

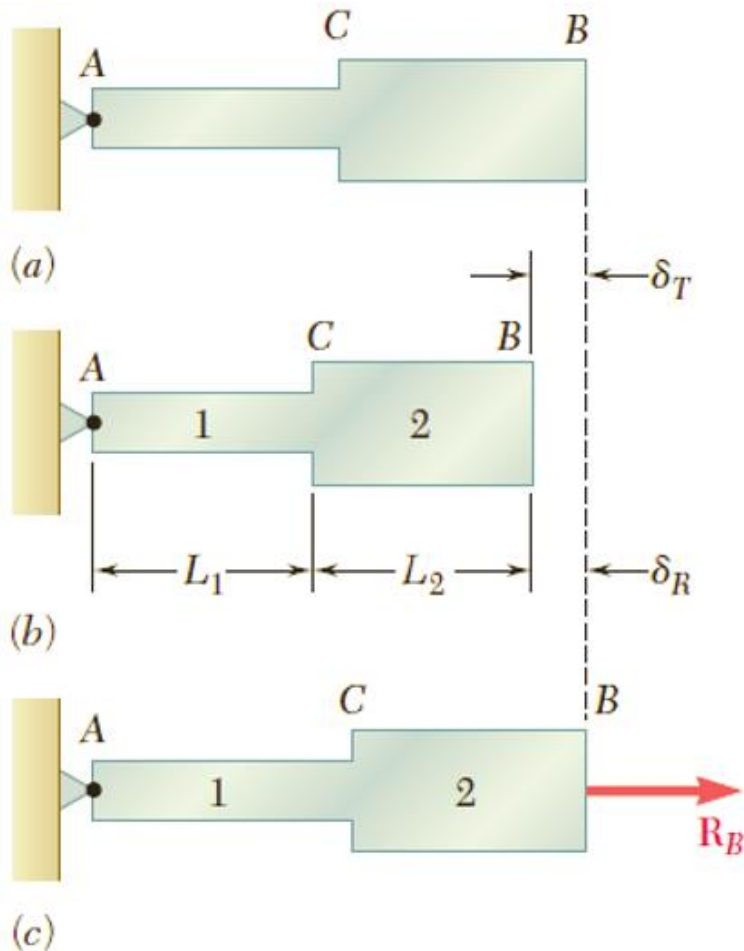
- Conhecidas as forças nas duas porções da barra, que são $P_1 = P_2 = 96 \text{ kN}$, obtemos os valores das tensões atuantes em AC e CB :

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{96,0 \times 10^3 \text{ N}}{400 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 240 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A_2} = \frac{96,0 \times 10^3 \text{ N}}{800 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 120 \text{ MPa}$$

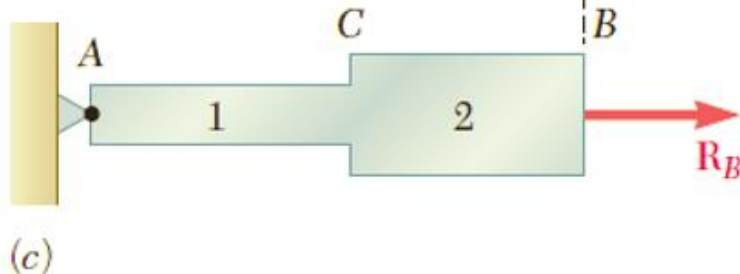
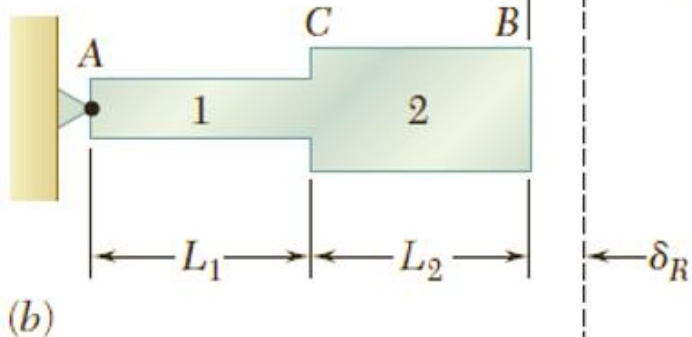
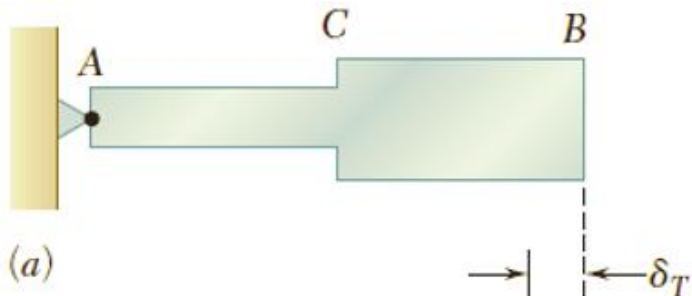
EXEMPLO

- Apesar da deformação total da barra ser nula, não se deve concluir que as deformações em AC e CB são também nulas.



EXEMPLO

- Apesar da deformação total da barra ser nula, não se deve concluir que as deformações em AC e CB são também nulas.



Na porção AC da barra, por exemplo, a deformação específica ε_{AC} pode ser dividida em duas parcelas:

$$\begin{aligned}\varepsilon_T &= \alpha \Delta T = (12 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C})(-75^{\circ}\text{C}) \\ &= -900 \times 10^{-6} = -900 \mu\end{aligned}\quad \text{(Temperatura)}$$

Pela Lei de Hooke:

$$\frac{\sigma_1}{E} = \frac{240 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}} = 1200 \times 10^{-6} = 1200 \mu$$

(Parcela associada à tensão σ_1)

Somando as parcelas:

$$\varepsilon_{AC} = \varepsilon_T + \frac{\sigma_1}{E} = -900 \mu + 1200 \mu = +300 \mu$$

EXEMPLO

- De maneira semelhante, determinamos a deformação específica na parte CB:

$$\varepsilon_{CB} = \varepsilon_T + \frac{\sigma_2}{E} = -900 \mu + 600 \mu = -300 \mu$$

- As deformações totais nas duas partes da barra são:

$$\delta_{AC} = \varepsilon_{AC}(AC) = (+300\mu)(0,3 \text{ m}) = +90 \mu\text{m}$$

$$\delta_{CB} = \varepsilon_{CB}(CB) = (-300\mu)(0,3 \text{ m}) = -90 \mu\text{m}$$

A soma das duas deformações é zero, mas nenhuma delas é nula.

...

CONTINUA