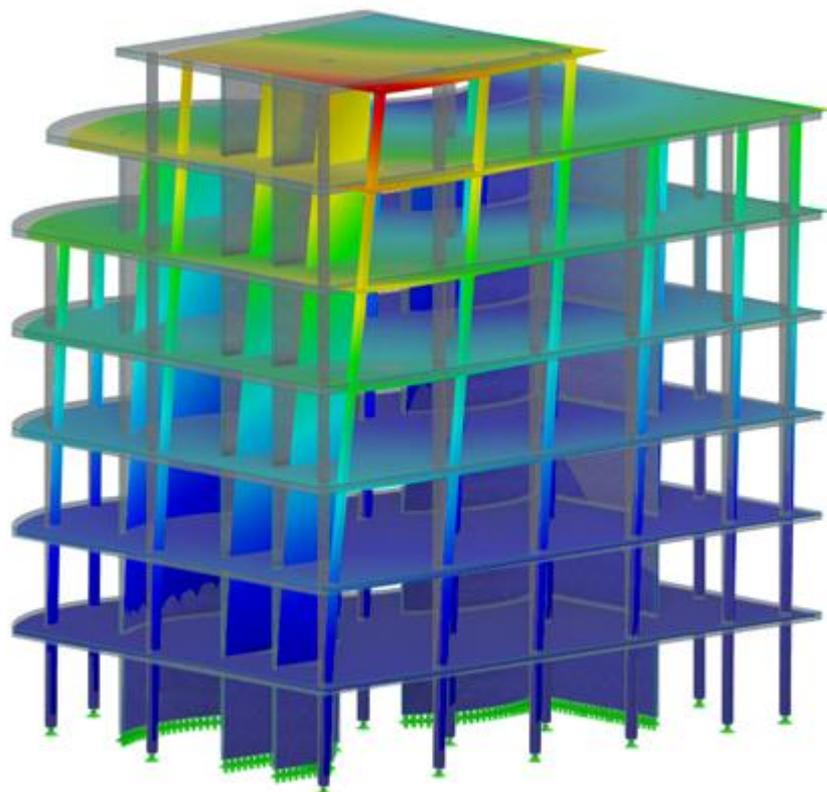




UNIVERSIDADE FEDERAL  
DE ALAGOAS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
CAMPUS SERTÃO  
EIXO TECNOLOGIA



# Teoria das Estruturas 2

*Introdução à Análise de Estruturas*



Prof. Dr. Alverlando Ricardo

## Parte 4: **MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS**

# Superposição de casos básicos

# Superposição de casos básicos

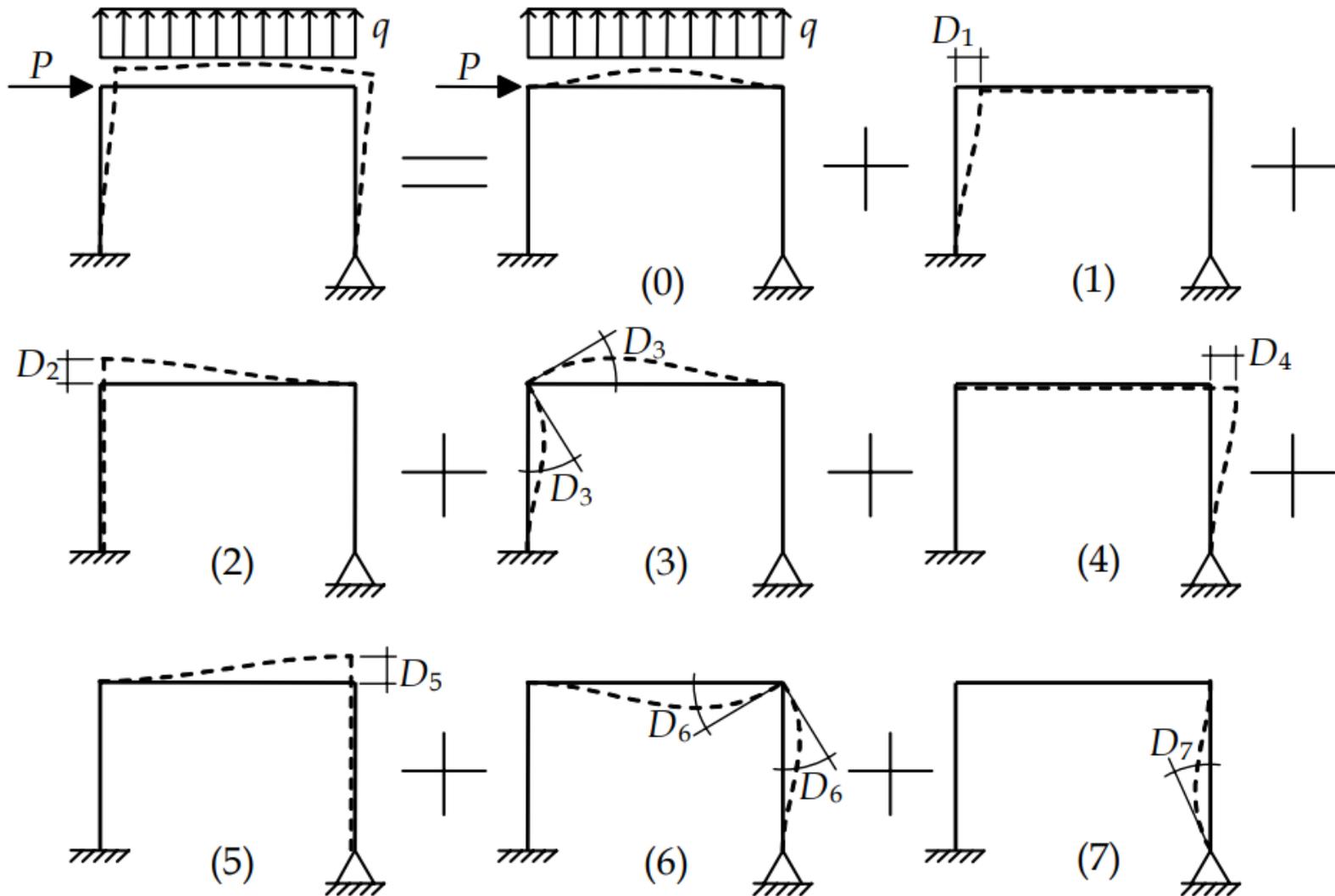


Figura 6.1 – Configuração deformada de um pórtico plano formada pela superposição de configurações deformadas elementares.

# DESLOCABILIDADES

# DESLOCABILIDADES

As *deslocabilidades* são as incógnitas do Método dos Deslocamentos e pode ser definida como:

$D_i$  deslocabilidade de uma estrutura  $i \rightarrow$  : componente de deslocamento ou rotação livre (não restrita apenas aos apoios) em um nó da estrutura, na direção de um dos eixos globais.

# DESLOCABILIDADES

$D_i$  deslocabilidade de uma estrutura  $i \rightarrow$  : componente de deslocamento ou rotação livre (não restrita apenas aos apoios) em um nó da estrutura, na direção de um dos eixos globais.

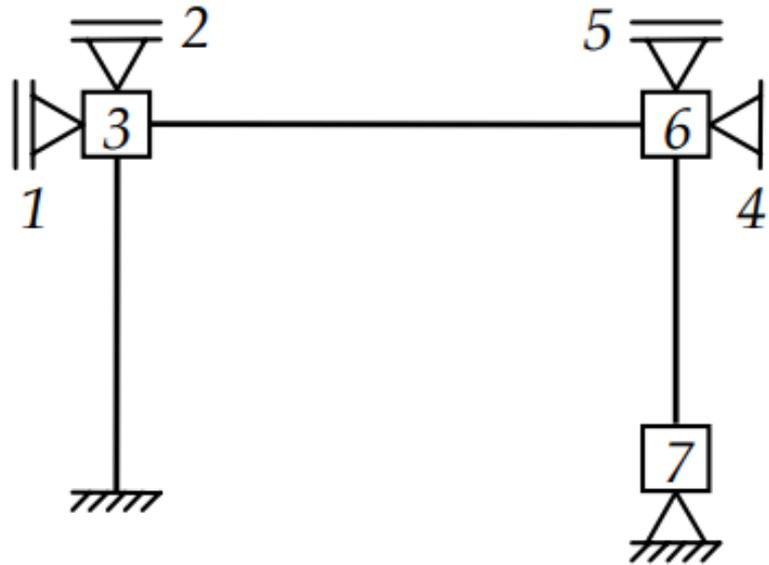
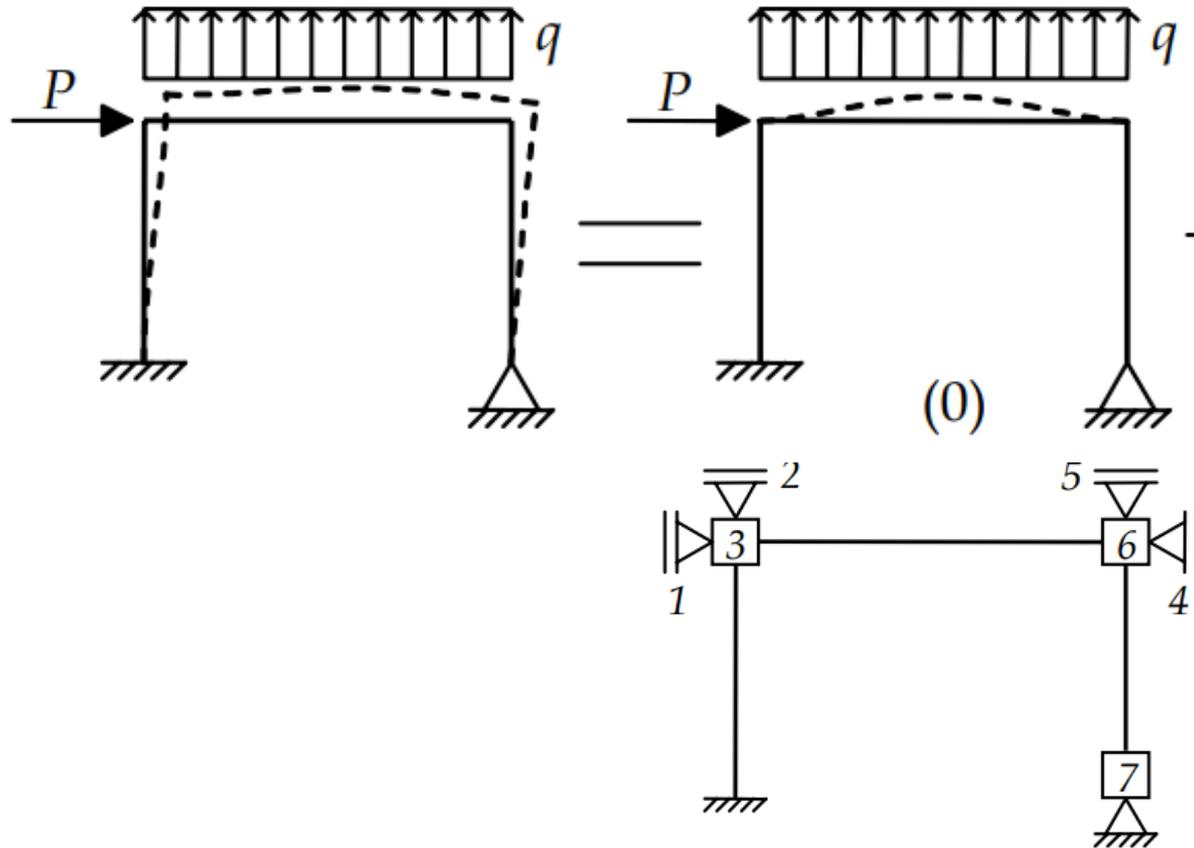


Figura 6.2 – Sistema Hipergeométrico do pórtico plano da Figura 6.1.

# DESLOCABILIDADES

O modelo estrutural utilizado nos casos básicos (**caso (0)**) é o de uma estrutura obtida a partir da estrutura original pela adição de vínculos na forma de apoios fictícios. Esse modelo é chamado de **Sistema Hipergeométrico (SH)** - os nós são engastados completamente.



# DESLOCABILIDADES

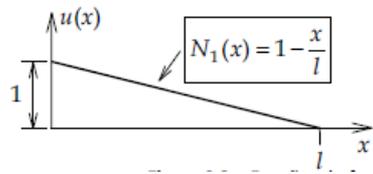
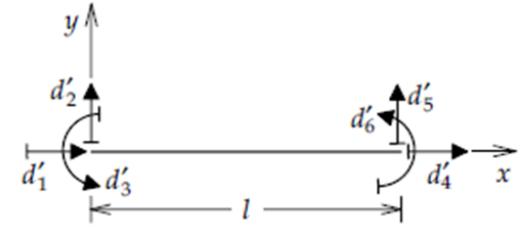
As funções de forma, definem as elásticas elementares da barra isolada.

**Barra indeformada tracejada (---)**

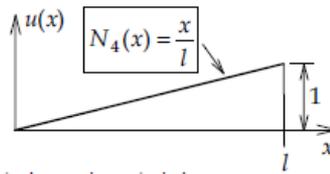
Barra azul deformada por deslocamento horizontal

Barra vermelha deformada por deslocamento verticais

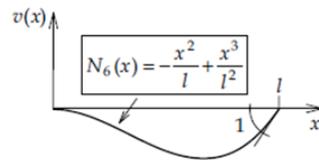
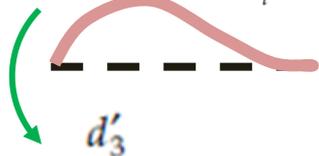
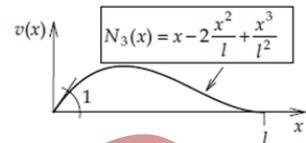
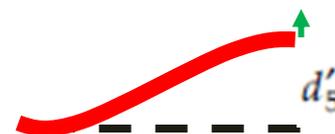
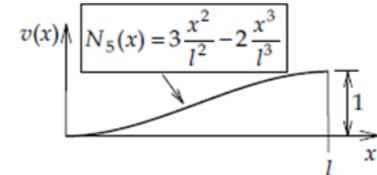
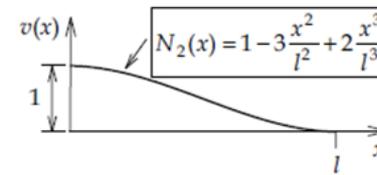
Barra marrom deformada por rotações



$$u(x) = b_1x + b_0$$



$$u(x) = N_1(x) d_1 + N_4(x) d_4$$



**Equação de Navier:**

$$v(x) = c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

$$v(x) = N_2(x) d_2 + N_3(x) d_3 + N_5(x) d_5 + N_6(x) d_6$$

$N_i$  são as funções de forma

# DESLOCABILIDADES

Conceitos fundamentais – Como determinar as Funções de forma

$$v(x) = c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

$$v(x) = N_2(x) d_2 + N_3(x) d_3 + N_5(x) d_5 + N_6(x) d_6$$

Condições de contorno

Sistema de equações para determinar as  $c_i$

Constantes

$$v(0) = 0$$

$$c_3 \cdot 0^3 + c_2 \cdot 0^2 + c_1 \cdot 0 + c_0 = 0$$

$$c_0 = 0$$

$$\frac{dv}{dx}(0) = 1$$

$$3c_3 \cdot 0^2 + 2c_2 \cdot 0 + c_1 = 1$$

$$c_1 = 1$$

$$v(l) = 0$$

$$c_3 l^3 + c_2 l^2 + 1 = 0$$

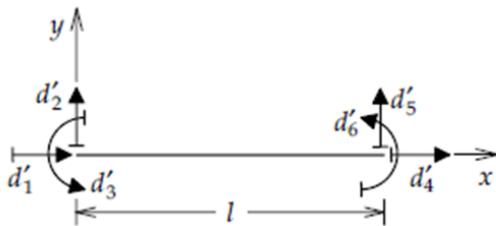
$$c_3 = -(c_2 l + 1) / l^2 = 0$$

$$\frac{dv}{dx}(l) = 0$$

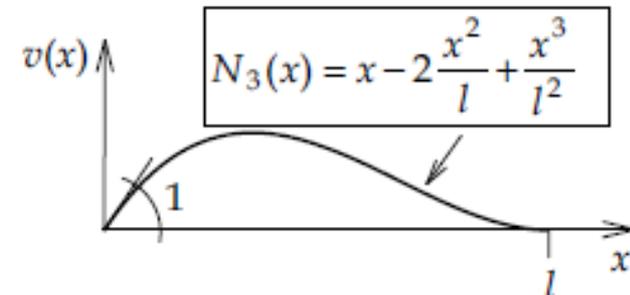
$$3c_3 l^2 + 2c_2 l + 1 = 0$$

$$c_2 = -2/l$$

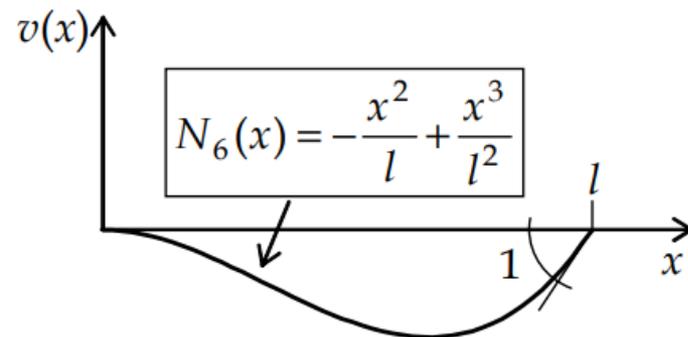
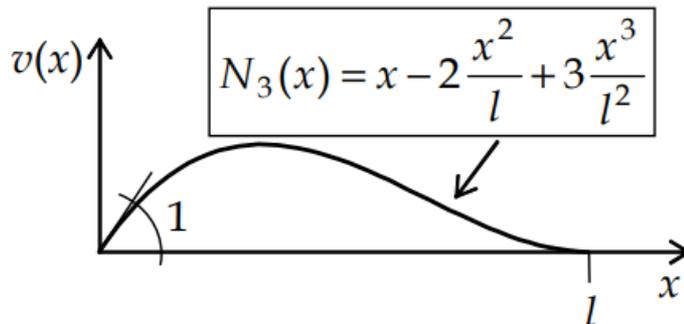
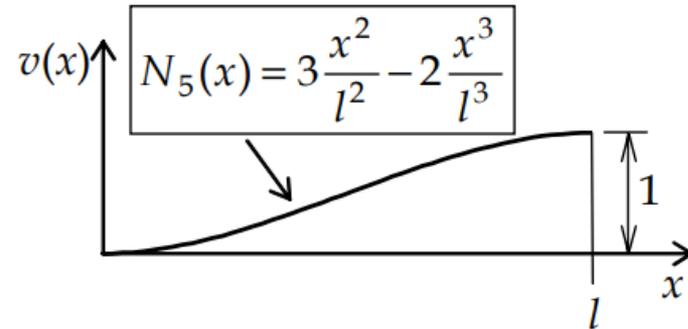
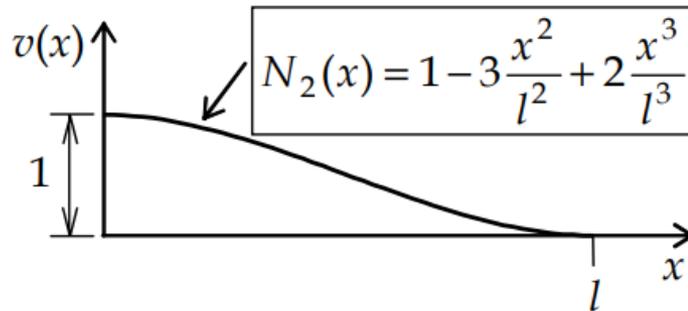
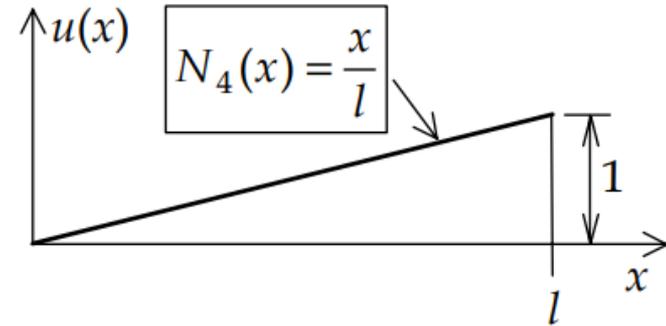
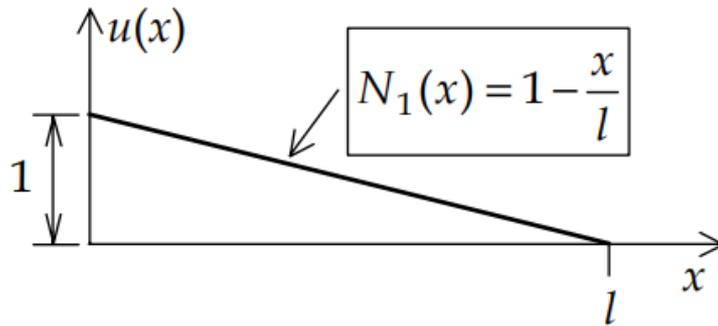
$$c_3 = 1/l^2$$



$$v(x) = \frac{1}{l^2} x^3 - \frac{2}{l} x^2 + x = N_2(x) \cdot 0 + N_3(x) \cdot 1 + N_5(x) \cdot 0 + N_6(x) \cdot 0$$



# DESLOCABILIDADES



# DESLOCABILIDADES

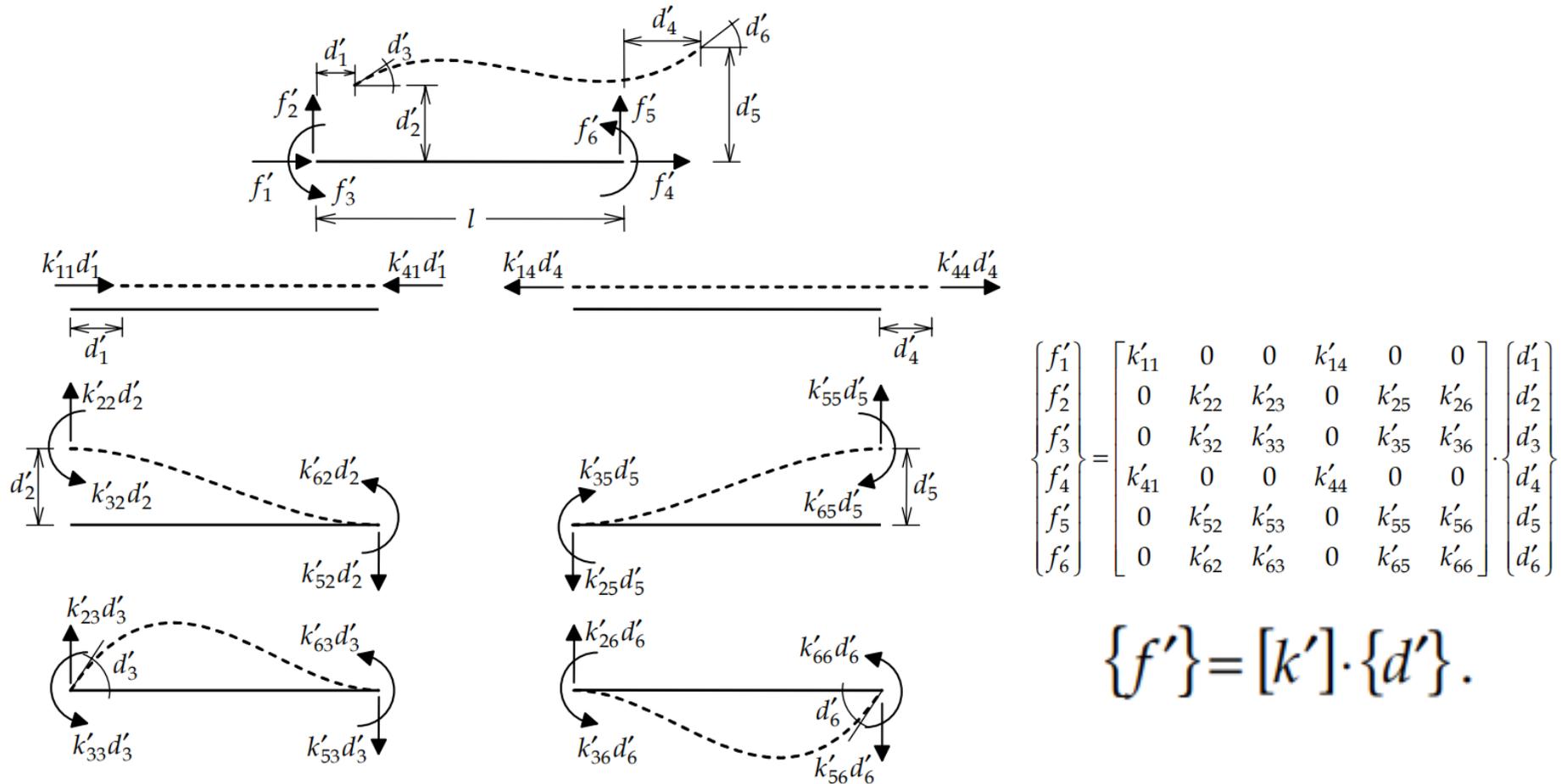
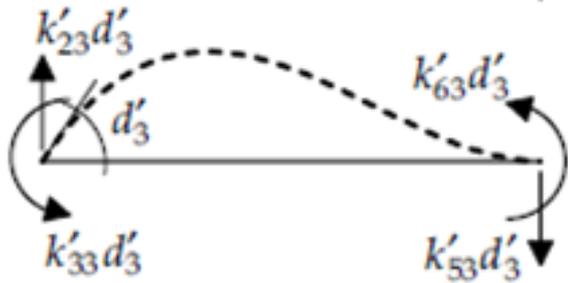


Figura 4.26 – Superposição de configurações deformadas elementares para compor a elástica final de uma barra de pórtico plano isolada.

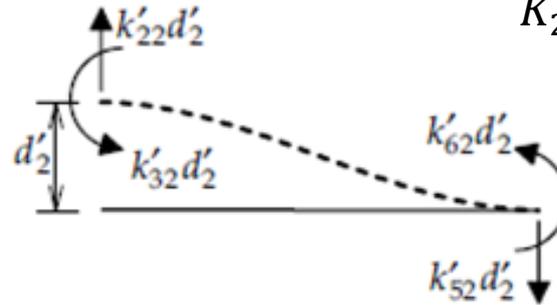
# DESLOCABILIDADES

## Conceitos fundamentais – Coeficientes de rigidez locais

Sistema real



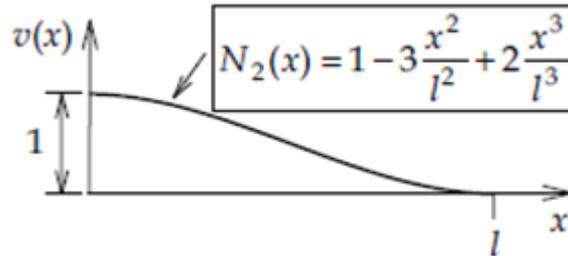
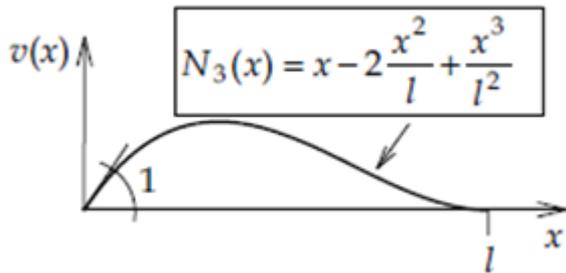
Sistema Virtual



$$K_{23}d'_3 \times 1 = \int_0^l EI \frac{d^2 v}{dx} \frac{d^2 \bar{v}}{dx} dx$$

$$\bar{v}(x) = N_2(x) d_2$$

$$v(x) = N_3(x) d_3$$



$$= \int_0^l EI \frac{d^2 N_3(x)}{dx} \frac{d^2 N_2(x)}{dx} dx$$

$$K_{23}d'_3 \times 1 = \int_0^l EI \left( -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} \right) \left( -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right) dx = \int_0^l EI \left( \frac{75x^2}{l^5} - \frac{84x}{l^4} + \frac{24}{l^3} \right) dx$$

$$K_{23} = EI \left( \frac{75 l^3}{3 l^5} - \frac{84 l^2}{2 l^4} + \frac{24 l}{l^3} \right) = EI \left( \frac{24}{l^2} - \frac{42}{l^2} + \frac{24}{l^2} \right)$$

$$K_{23} = \frac{6EI}{l^2}$$

# DESLOCABILIDADES

A generalização desse resultado para as outros coeficientes resulta na nos valores dos coeficientes de rigidez abaixo:

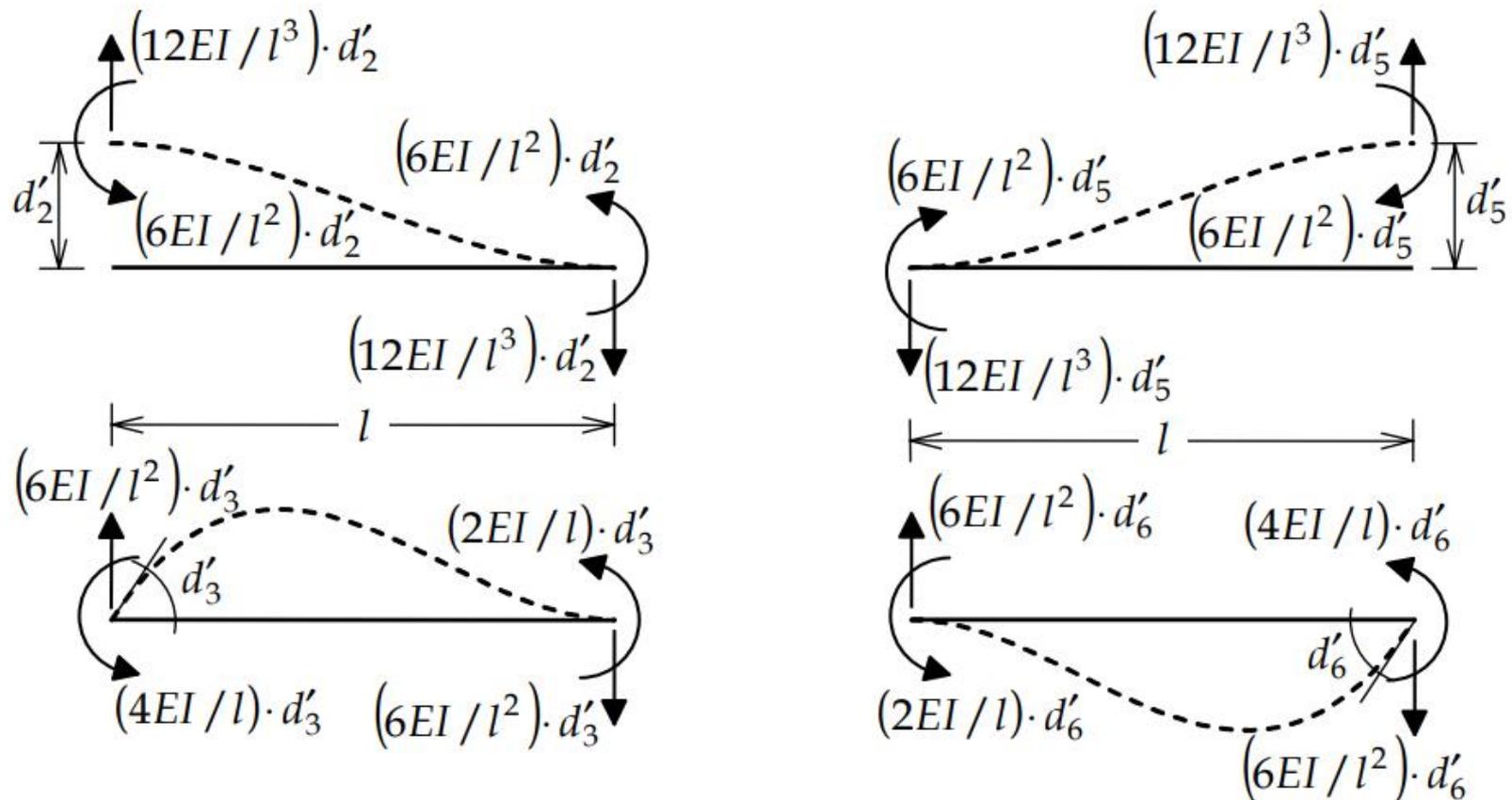


Figura 4.30 – Coeficientes de **rigidez** à flexão de uma barra isolada sem articulação.

# Metodologia de análise pelo Método dos Deslocamentos (Método do Equilíbrio/Método da Rigidez)

# Método dos Deslocamentos

Para facilitar o entendimento do método, esta apresentação é feita com base em um exemplo, que é mostrado na Figura. Todas barras têm  $A = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ ;  $I = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$  e  $E = 1,2 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ .

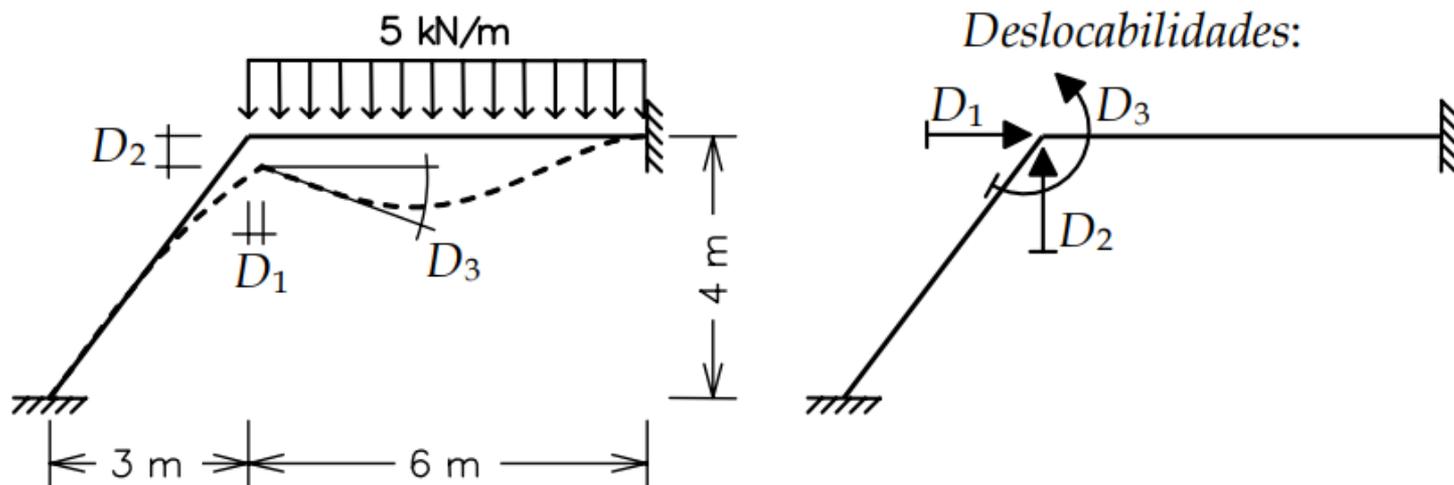


Figura 6.3 – Estrutura utilizada para a descrição da metodologia do Método dos Deslocamentos e suas deslocabilidades.

# Metodologia: Método dos Deslocamentos

## Passo 1: Sistema Hipergeométrico (SH)

Deslocabilidades: No exemplo,  $d = 3$ .

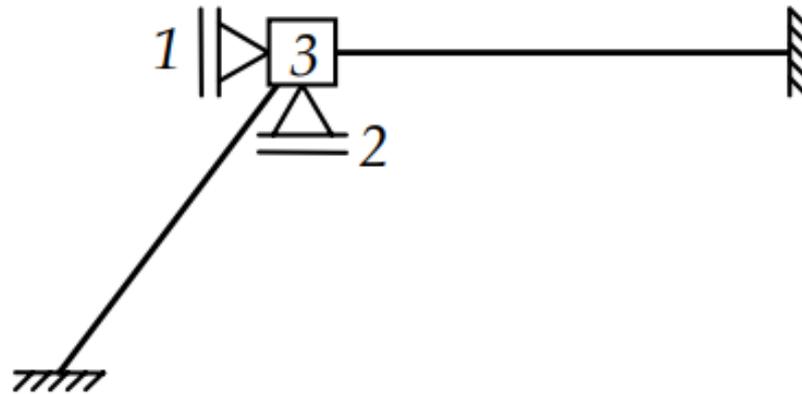


Figura 6.4 – Sistema Hipergeométrico da estrutura da Figura 6.3.

# Metodologia: Método dos Deslocamentos

## Passo 2: Casos Básicos

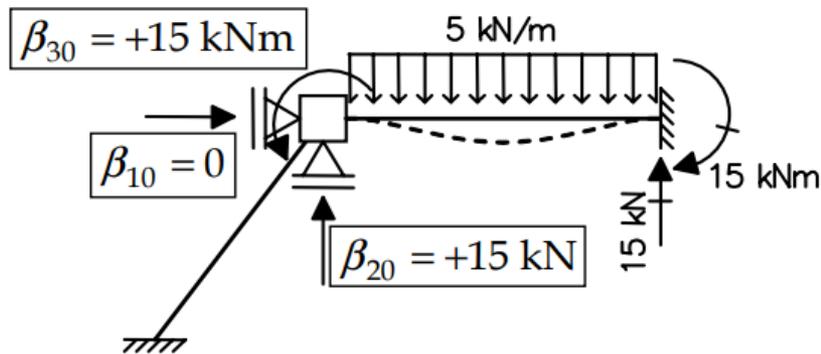
O número de casos básicos é sempre igual a  $d + 1$ . No exemplo, isso resulta nos casos (0), (1), (2) e (3) que são mostrados a seguir.

# Metodologia: Método dos Deslocamentos

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH.

O caso básico (0) isola o efeito da solicitação externa (carregamento aplicado) no SH



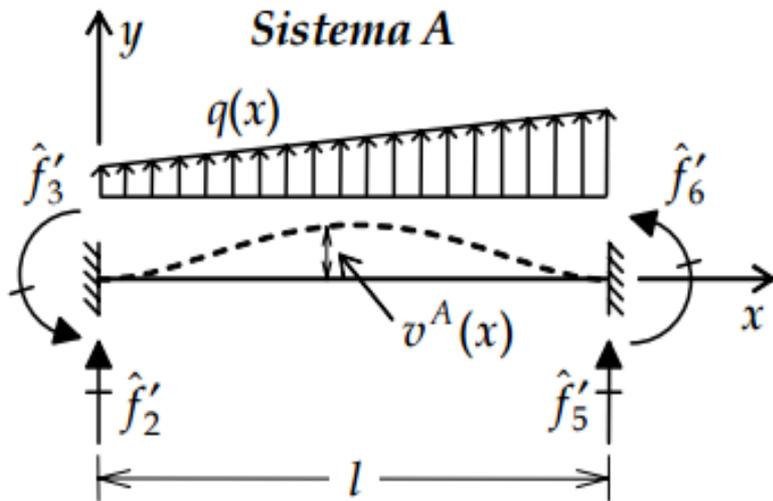
as forças e os momentos que aparecem nos apoios fictícios do SH  $\beta_{i0}$ , são chamados de **termos de carga**.

$\beta_{i0} \rightarrow$  reação no apoio fictício associado à deslocabilidade  $D_i$  para equilibrar o SH quando atua a solicitação externa isoladamente, isto é, com deslocabilidades com valores nulos.

# Metodologia: Método dos Deslocamentos

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH.

## 1 - Reações de Engastamento Perfeito em Barras:



O **caso (0)** corresponde a uma situação de engastamento perfeito!

A determinação das reações de engastamento perfeito de uma barra solicitada para um carregamento externo genérico é feito com base no **Teorema de Betti**:

$$\hat{f}'_i = - \int_0^l N_i(x) \cdot q(x) \cdot dx - \sum_j N_i(x_j) \cdot P_j - \sum_j \frac{dN_j(x_j)}{dx} \cdot M_j \quad (i = 2, 3, 5, 6)$$

# Metodologia: Método dos Deslocamentos

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH.

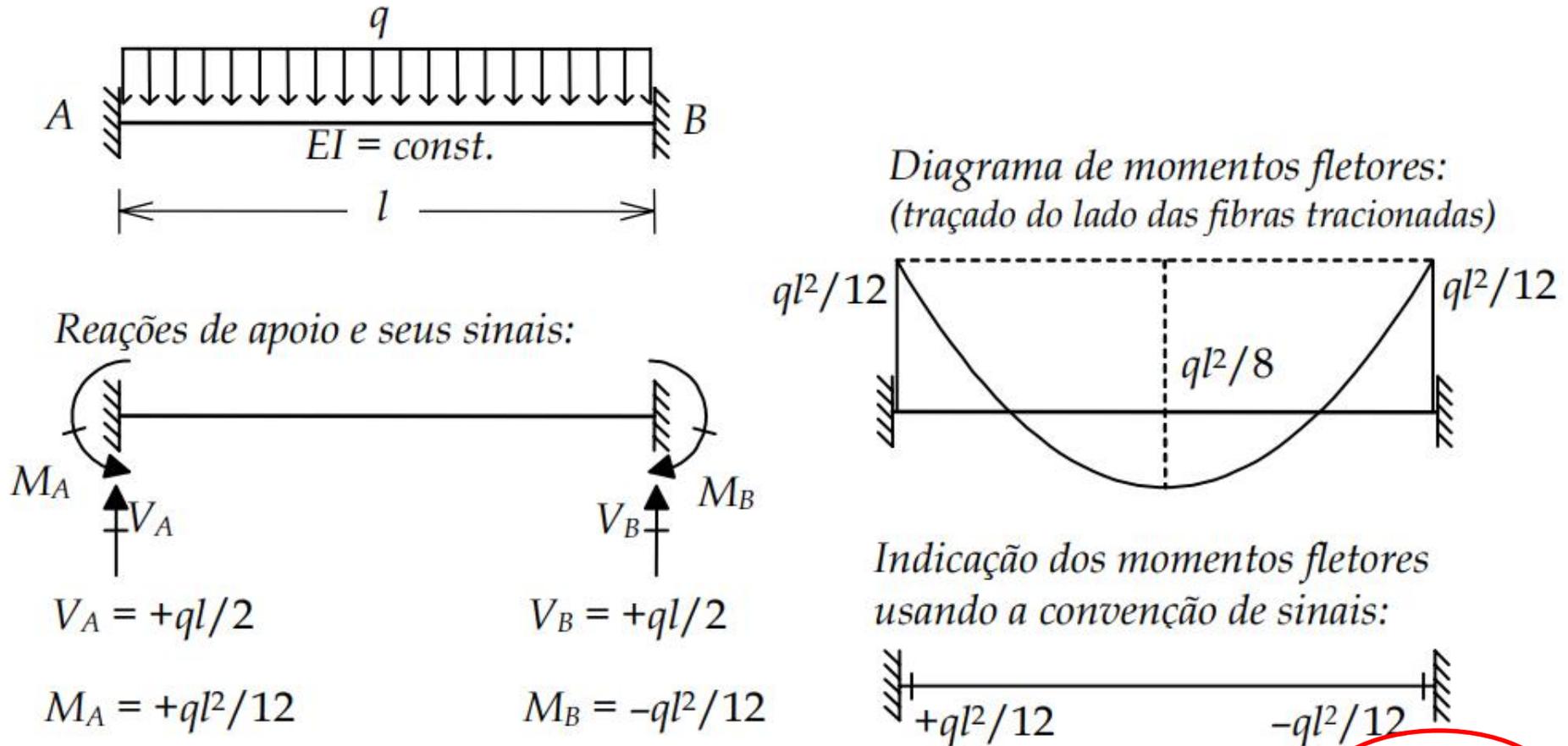


Figura 6.9 – Indicação de momentos fletores em uma viga biengastada utilizando a convenção de sinais do Método dos Deslocamentos.

# Metodologia: Método dos Deslocamentos

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH.

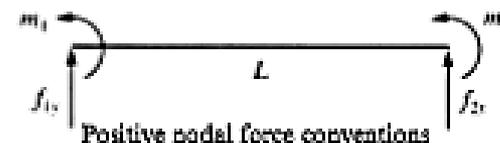


Table D-1 Single element equivalent joint forces  $f_0$  for different types of loads

	$f_{1y}$	$m_1$	Loading case	$f_{2y}$	$m_2$
1.	$\frac{-P}{2}$	$\frac{-PL}{8}$		$\frac{-P}{2}$	$\frac{PL}{8}$
2.	$\frac{-Pb^2(L+2a)}{L^3}$	$\frac{-Pab^2}{L^2}$		$\frac{-Pa^2(L+2b)}{L^3}$	$\frac{Pa^2b}{L^2}$
3.	$-P$	$-\alpha(1-\alpha)PL$		$-P$	$\alpha(1-\alpha)PL$
4.	$\frac{-wL}{2}$	$\frac{-wL^2}{12}$		$\frac{-wL}{2}$	$\frac{wL^2}{12}$
5.	$\frac{-7wL}{20}$	$\frac{-wL^2}{20}$		$\frac{-3wL}{20}$	$\frac{wL^2}{30}$
6.	$\frac{-wL}{4}$	$\frac{-5wL^2}{96}$		$\frac{-wL}{4}$	$\frac{5wL^2}{96}$

# Metodologia: Método dos Deslocamentos

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH.

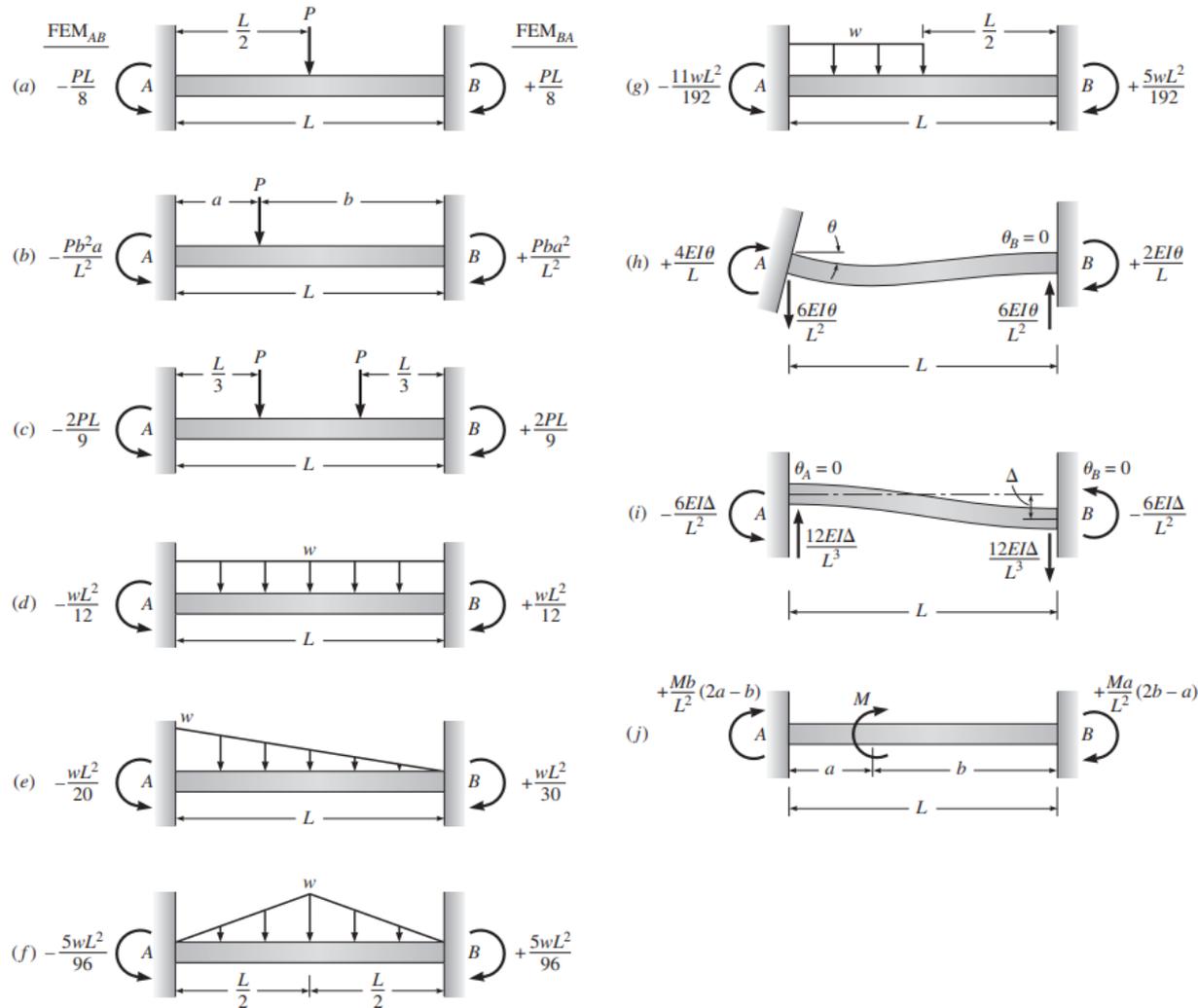


Figura 12.5: Momentos de extremidade fixa.

# Metodologia: Método dos Deslocamentos

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH.

Reações de Apoio para viga bi-engastada:

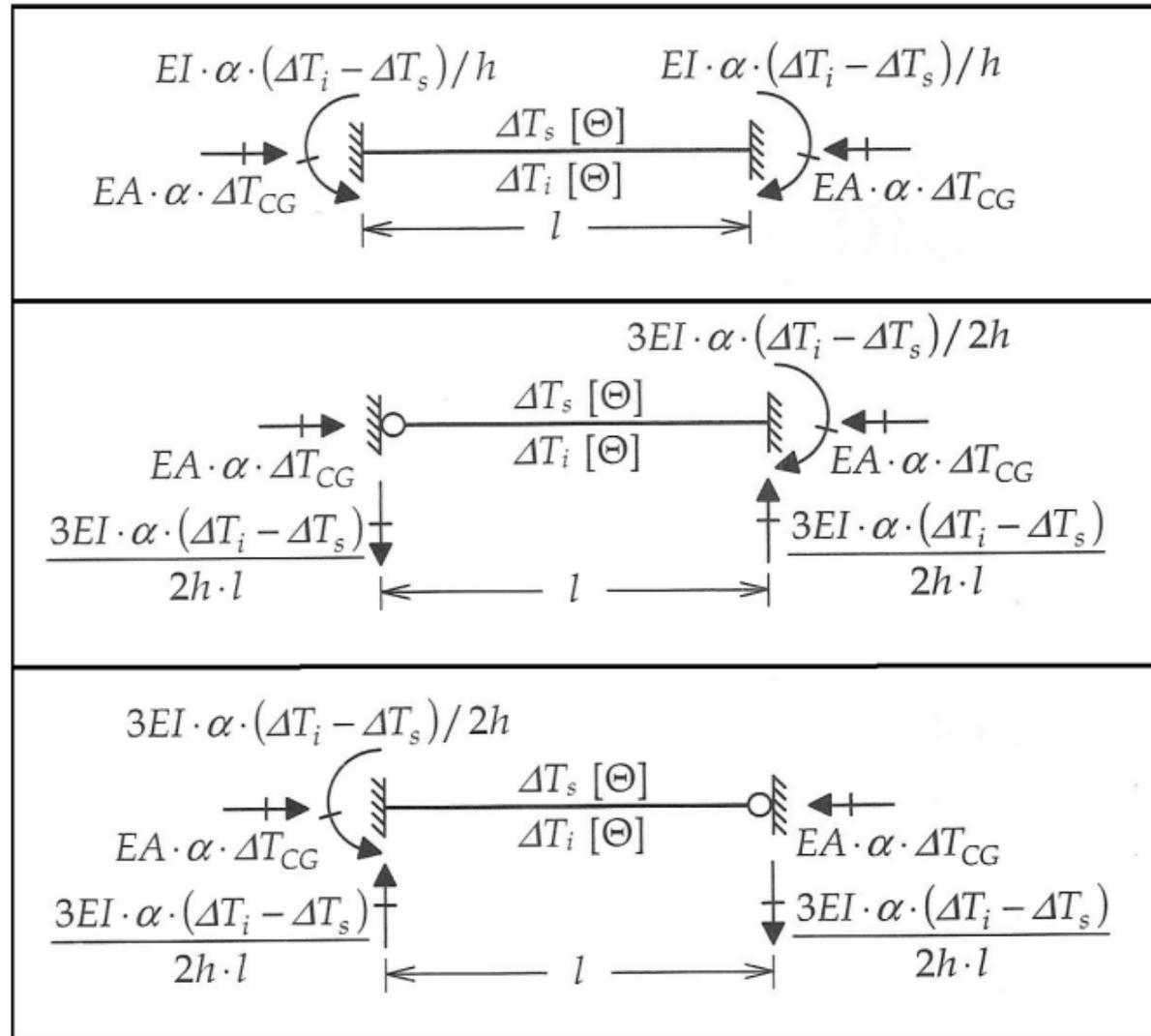
<p>Diagram of a fixed-fixed beam of length <math>L</math> subjected to a uniformly distributed load <math>q</math>. The reactions are: at the left end, a counter-clockwise moment of <math>qL^2/12</math> and an upward reaction of <math>qL/2</math>; at the right end, a clockwise moment of <math>qL^2/12</math> and an upward reaction of <math>qL/2</math>.</p>	<p>Diagram of a fixed-fixed beam of length <math>L</math> subjected to a point load <math>P</math> at a distance <math>a</math> from the left support and <math>b</math> from the right support. The reactions are: at the left end, a counter-clockwise moment of <math>Pab^2/L^2</math>, an upward reaction of <math>Pb^2(3a+b)/L^3</math>, and a downward reaction of <math>6Mab/L^3</math>; at the right end, a clockwise moment of <math>Pa^2b/L^2</math>, an upward reaction of <math>Pa^2(a+3b)/L^3</math>, and a downward reaction of <math>6Mab/L^3</math>.</p>
<p>Diagram of a fixed-fixed beam of length <math>L</math> subjected to a point load <math>P</math> at the center (<math>L/2</math>). The reactions are: at the left end, a counter-clockwise moment of <math>PL/8</math> and an upward reaction of <math>P/2</math>; at the right end, a clockwise moment of <math>PL/8</math> and an upward reaction of <math>P/2</math>.</p>	<p>Diagram of a fixed-fixed beam of length <math>L</math> subjected to a point load <math>P</math> at the center (<math>L/2</math>). The reactions are: at the left end, a counter-clockwise moment of <math>Mb(2a-b)/L^2</math>, an upward reaction of <math>6Mab/L^3</math>, and a downward reaction of <math>6Mab/L^3</math>; at the right end, a clockwise moment of <math>Ma(2b-a)/L^2</math>, an upward reaction of <math>6Mab/L^3</math>, and a downward reaction of <math>6Mab/L^3</math>.</p>
<p>Diagram of a fixed-fixed beam of length <math>L</math> subjected to a triangularly distributed load <math>q</math> that increases linearly from 0 at the left end to <math>q</math> at the right end. The reactions are: at the left end, a counter-clockwise moment of <math>qL^2/30</math> and an upward reaction of <math>3qL/20</math>; at the right end, a clockwise moment of <math>qL^2/20</math> and an upward reaction of <math>7qL/20</math>.</p>	<p>Diagram of a fixed-fixed beam of length <math>L</math> subjected to a triangularly distributed load <math>q</math> that increases linearly from 0 at the left end to <math>q</math> at the right end. The reactions are: at the left end, a counter-clockwise moment of <math>Mb(2a-b)/L^2</math>, an upward reaction of <math>6Mab/L^3</math>, and a downward reaction of <math>6Mab/L^3</math>; at the right end, a clockwise moment of <math>Ma(2b-a)/L^2</math>, an upward reaction of <math>6Mab/L^3</math>, and a downward reaction of <math>6Mab/L^3</math>.</p>

# Metodologia: Método dos Deslocamentos

Reações de Apoio para viga engastada rotulada (com articulação):


# Metodologia: Método dos Deslocamentos

## Reações de Apoio para viga com variação térmica:



# Metodologia: Método dos Deslocamentos

2 - Soluções quando são impostos deslocamentos nas extremidades (Casos (1, 2..., n) são impostos deslocamentos unitários):

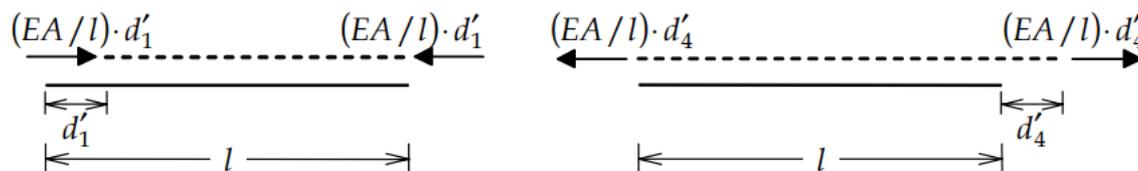


Figura 4.28 – Coeficientes de rigidez axial de uma barra isolada.

$$k'_{ij} = EI \int_0^l \frac{d^2 N_i}{dx^2} \cdot \frac{d^2 N_j}{dx^2} dx \quad (i, j = 2, 3, 5, 6) \quad (4.57)$$

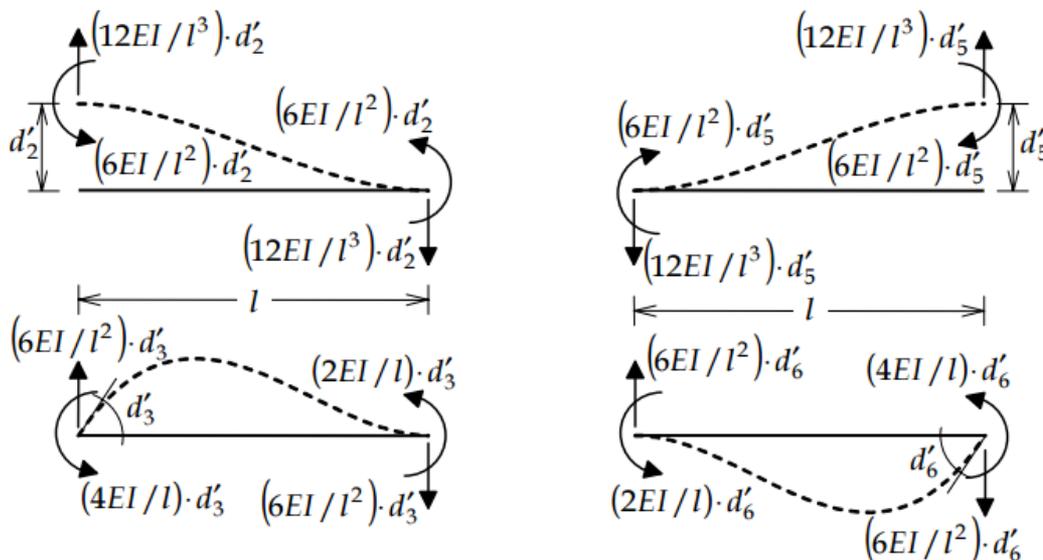
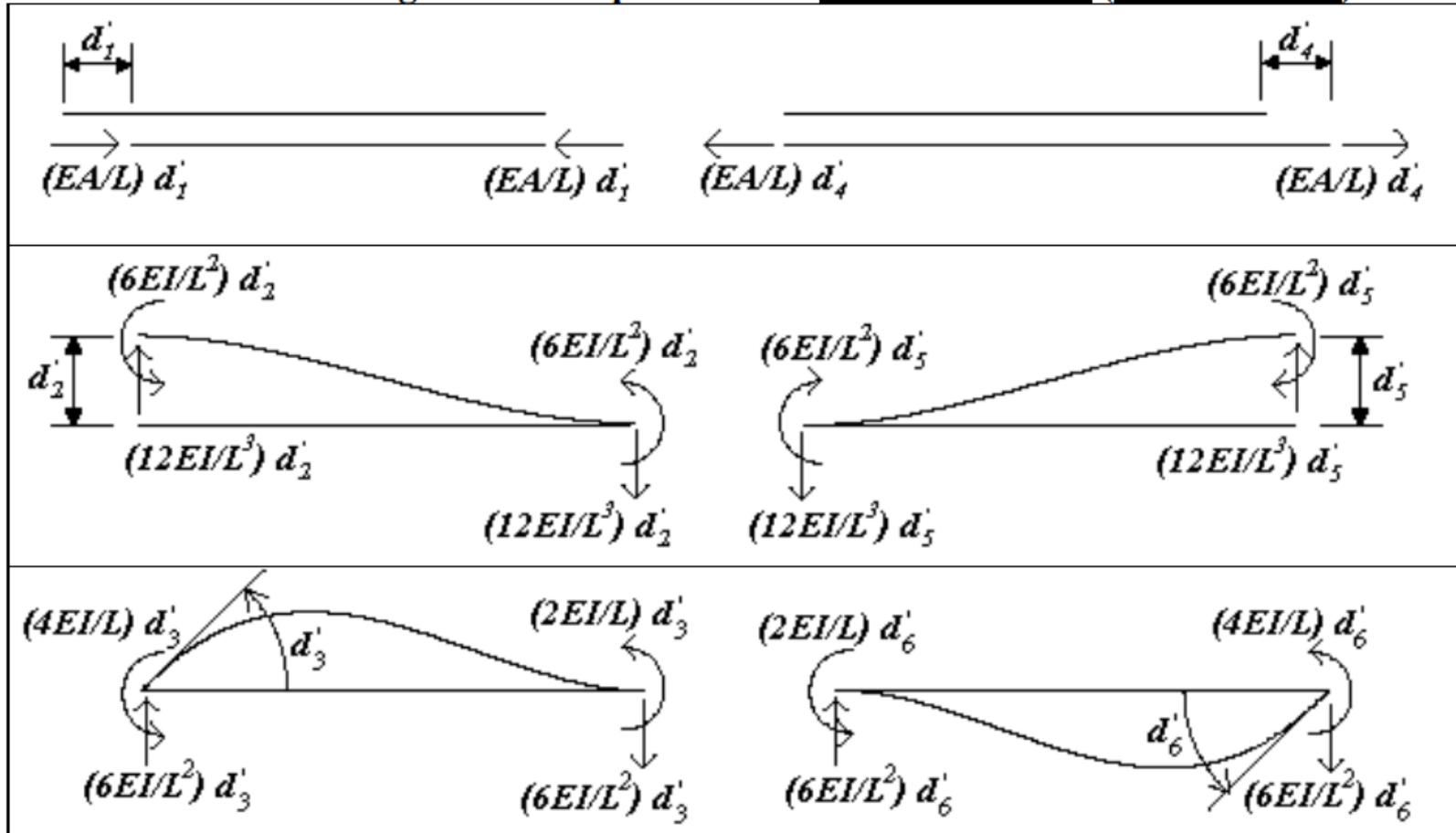


Figura 4.30 – Coeficientes de rigidez à flexão de uma barra isolada sem articulação.

# Metodologia: Método dos Deslocamentos

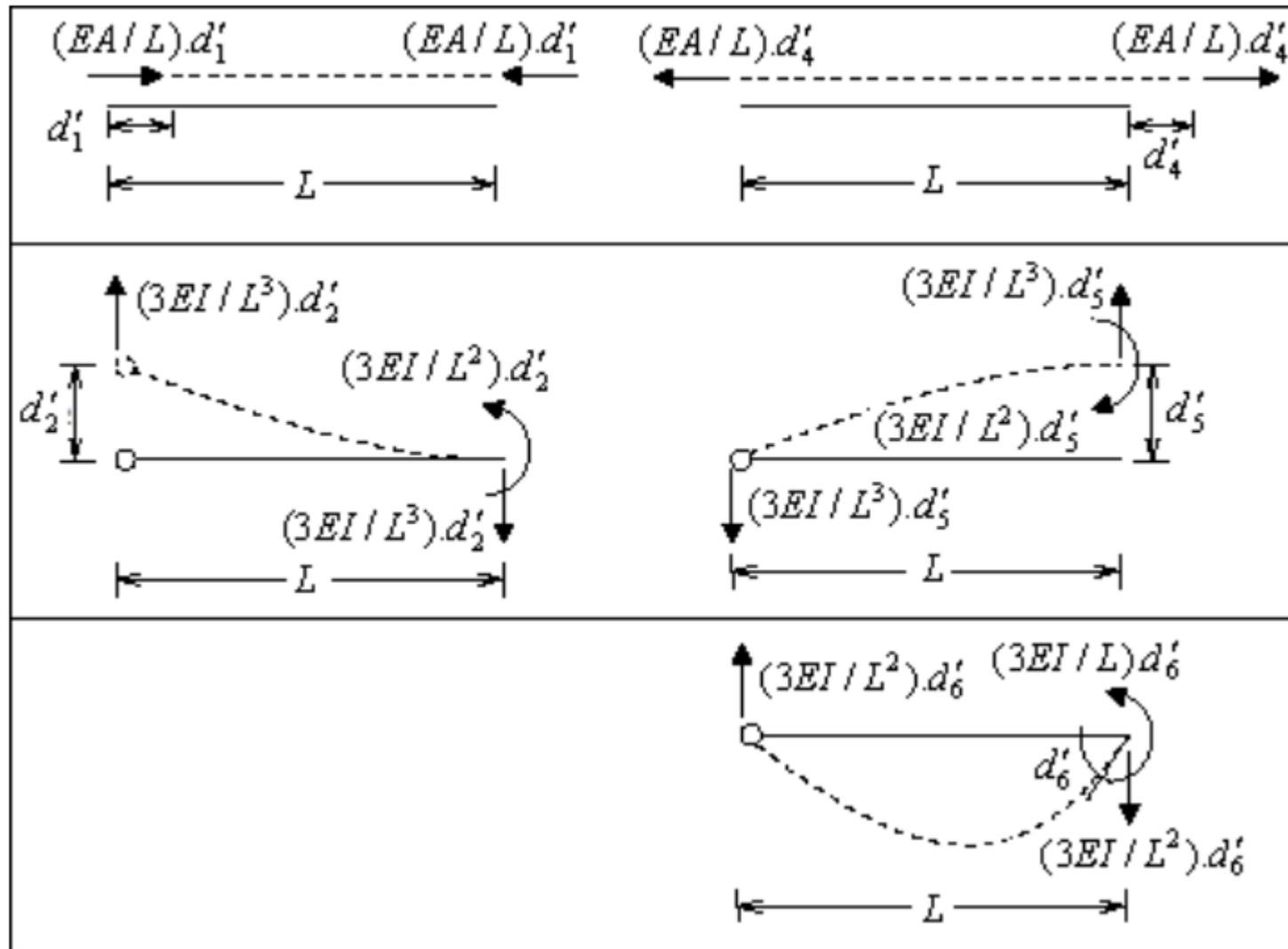
## 2 - Soluções quando são impostos deslocamentos nas extremidades:

Coeficientes de Rigidez Locais para barras sem articulações (bi-engastadas):



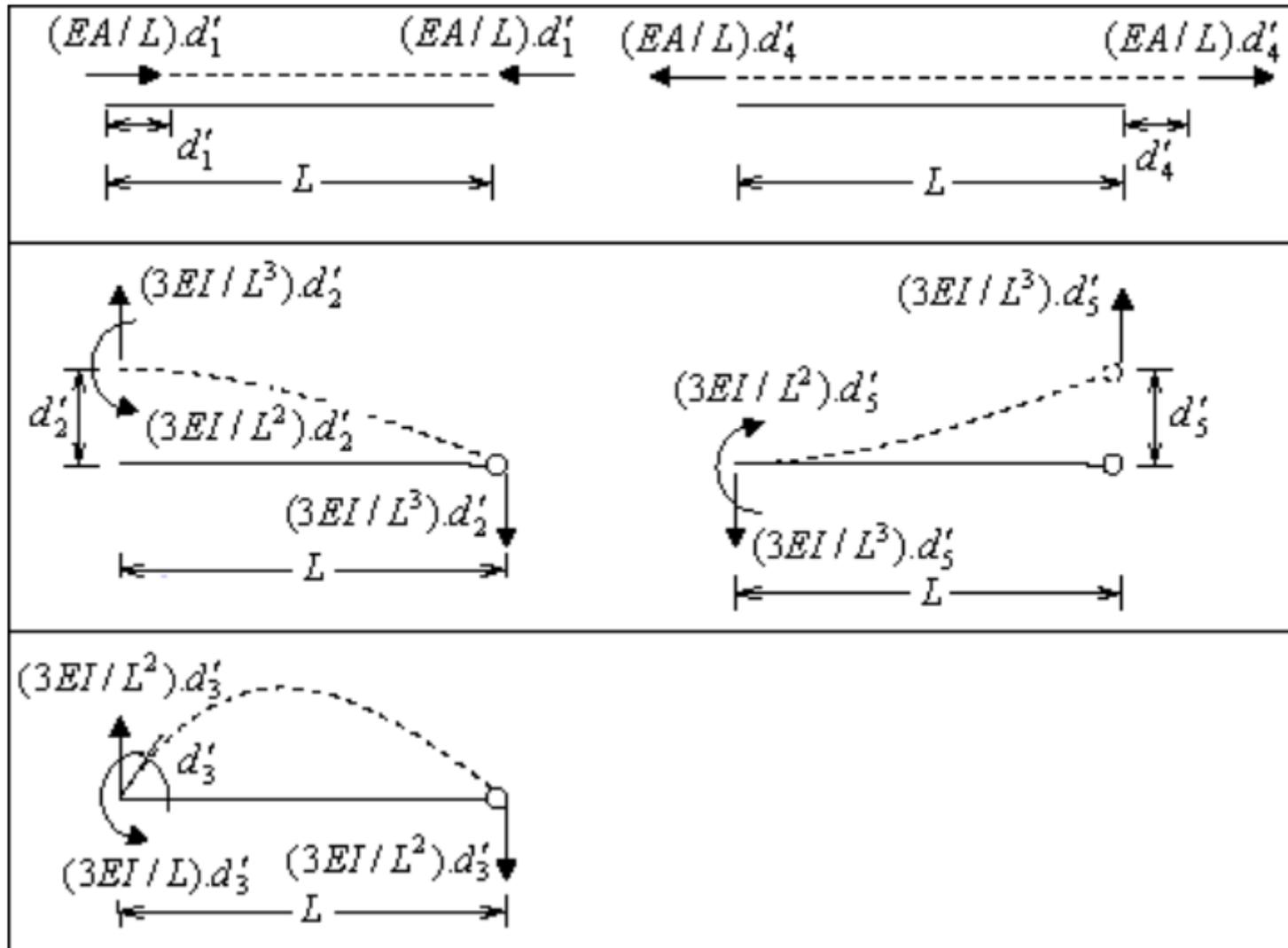
# Metodologia: Método dos Deslocamentos

Coefficientes de Rigidez Locais para barras com articulações à esquerda:



# Metodologia: Método dos Deslocamentos

Coeficientes de Rigidez Locais para barras com articulações à direita:

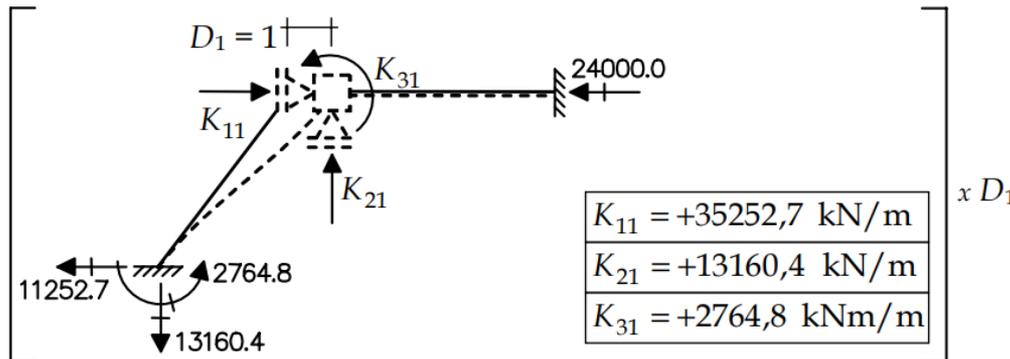


# Metodologia: Método dos Deslocamentos

## Passo 2: Casos Básicos

### Caso (1) – Deslocabilidade $D_1$ isolada no SH.

Considera-se um valor unitário para  $D_1$ , sendo o efeito de  $D_1 = 1$  multiplicado pelo valor final que  $D_1$  deverá ter.



**$K_{ij}$  → coeficiente de rigidez global:**

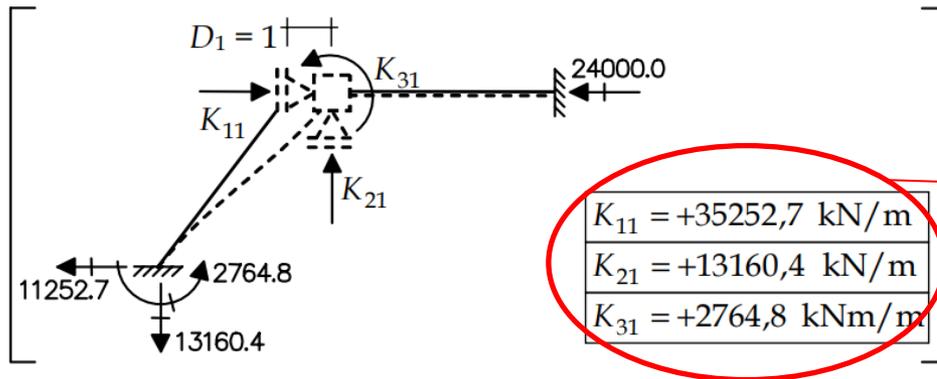
Força ou Momento que deve atuar na direção de  $D_i$  para manter o SH em equilíbrio quando  $D_j = 1$  e as demais deslocabilidades são nulas.

# Metodologia: Método dos Deslocamentos

## Passo 2: Casos Básicos

### Caso (1) – Deslocabilidade $D_1$ isolada no SH.

Considera-se um valor unitário para  $D_1$ , sendo o efeito de  $D_1 = 1$  multiplicado pelo valor final que  $D_1$  deverá ter.



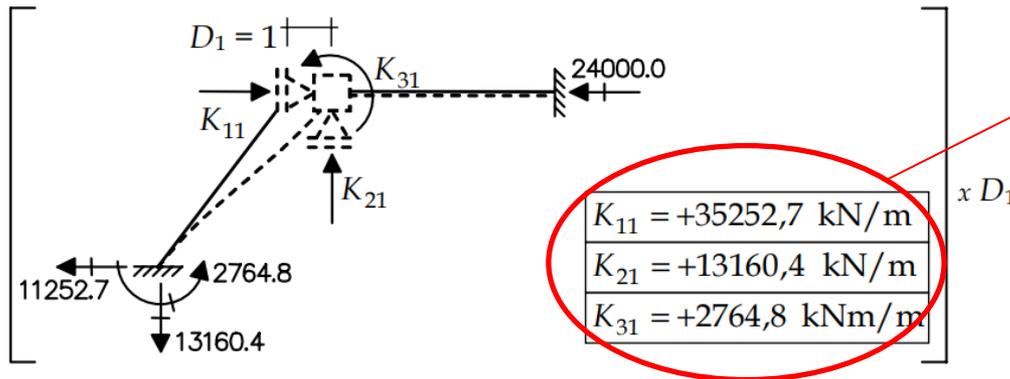
Uma das **vantagens** do Método dos Deslocamentos (em relação ao Método das Forças) é que o cálculo dos **coeficientes de rigidez** é baseado em valores **tabelados!**

# Metodologia: Método dos Deslocamentos

## Passo 2: Casos Básicos

### Caso (1) – Deslocabilidade $D_1$ isolada no SH.

Considera-se um valor unitário para  $D_1$ , sendo o efeito de  $D_1 = 1$  multiplicado pelo valor final que  $D_1$  deverá ter.



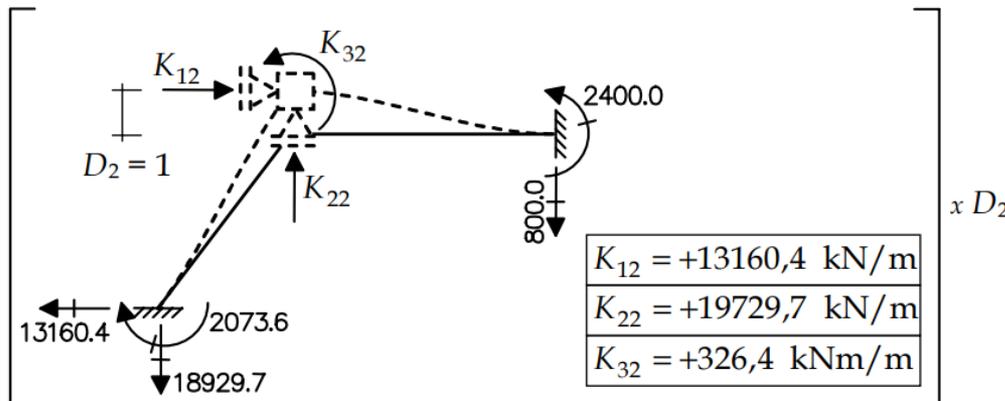
*Essa vantagem também facilita a implementação computacional do Método dos Deslocamentos!*

# Metodologia: Método dos Deslocamentos

## Passo 2: Casos Básicos

### Caso (2) – Deslocabilidade $D_2$ isolada no SH.

Considera-se um valor unitário para  $D_2$ , sendo o efeito de  $D_2 = 1$  multiplicado pelo valor final que  $D_2$  deverá ter.



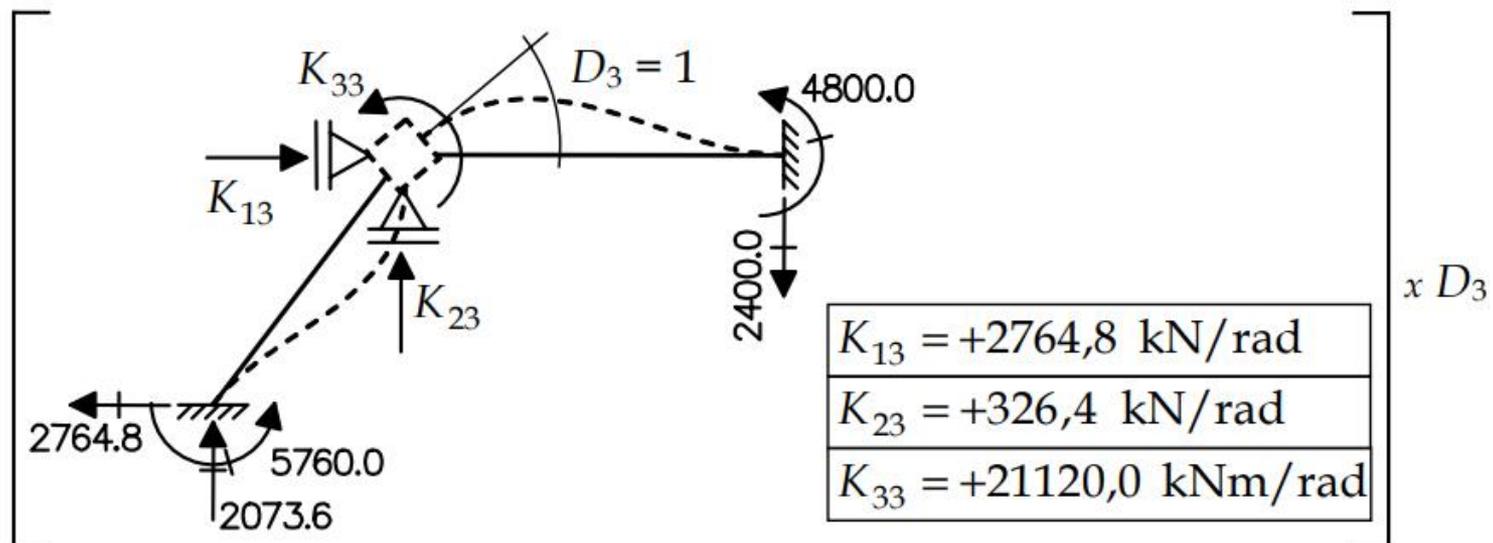
Os coeficientes  $K_{ij}$  e  $K_{ji}$ , sempre serão iguais, conforme o Teorema de Maxwell.

# Metodologia: Método dos Deslocamentos

## Passo 2: Casos Básicos

### Caso (3) – Deslocabilidade $D_3$ isolada no SH.

Considera-se um valor unitário para  $D_3$ , sendo o efeito de  $D_3 = 1$  multiplicado pelo valor final que  $D_3$  deverá ter.



# Metodologia: Método dos Deslocamentos

## Passo 3: Superposição de Efeitos

Utiliza-se a superposição de efeitos para restabelecer as condições de equilíbrio do nó interior.

- Somatório das forças externas horizontais que atuam no nó interior:

$$\beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + K_{13}D_3 = 0$$

- Somatório das forças externas verticais que atuam no nó interior:

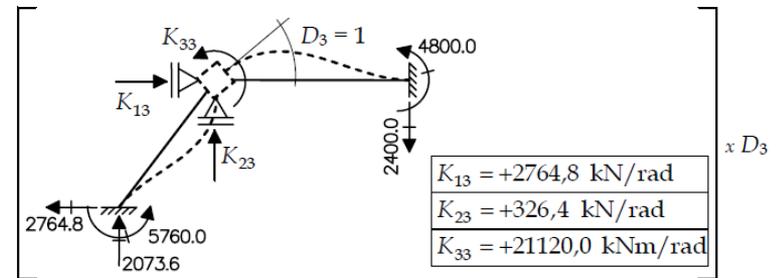
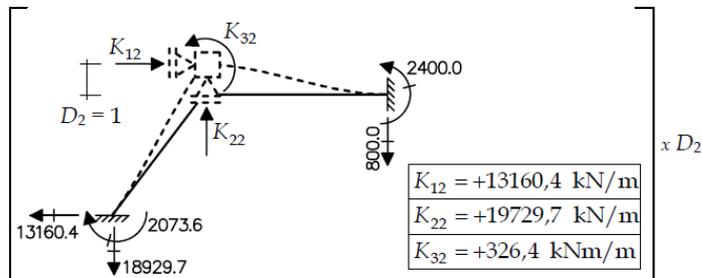
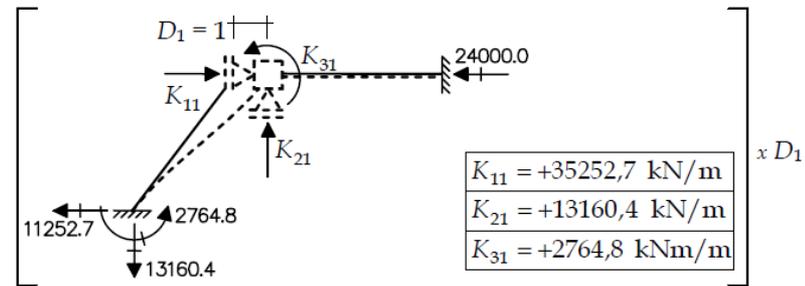
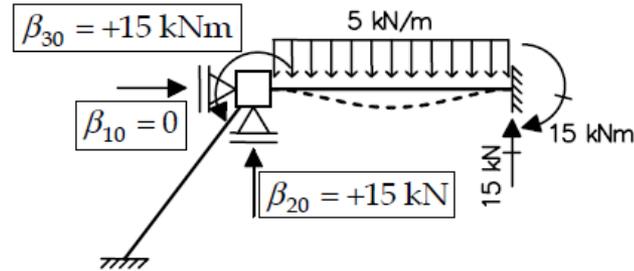
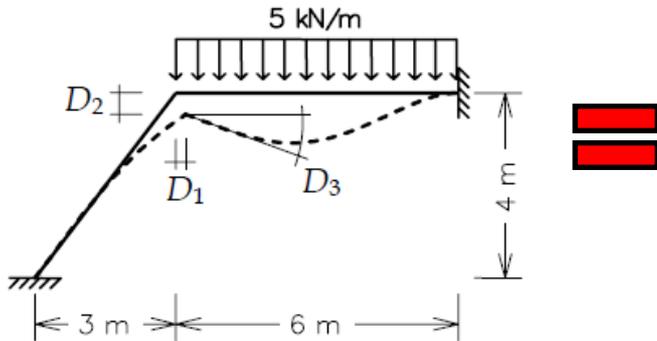
$$\beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + K_{23}D_3 = 0$$

- Somatório dos momentos externos que atuam no nó interior:

$$\beta_{30} + K_{31}D_1 + K_{32}D_2 + K_{33}D_3 = 0$$

# Metodologia: Método dos Deslocamentos

## Passo 3: Superposição de Efeitos



# Metodologia: Método dos Deslocamentos

## Passo 3: Superposição de Efeitos

Pode-se reescrever o sistema de equações de equilíbrio do exemplo da seção anterior de uma forma matricial:

$$\begin{cases} \beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + K_{13}D_3 = 0 \\ \beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + K_{23}D_3 = 0 \\ \beta_{30} + K_{31}D_1 + K_{32}D_2 + K_{33}D_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \\ \beta_{30} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

No caso geral de uma estrutura com  $n$  deslocabilidades, pode-se escrever:

$$\{\beta_0\} + [K]\{D\} = \{0\}. \quad (6.5)$$

Sendo:

$\{\beta_0\}$  → vetor dos termos de carga;

$[K]$  → matriz de rigidez global;

$\{D\}$  → vetor das deslocabilidades.

$$D_1 = +0,45 \cdot 10^{-3} \text{ m};$$

$$D_2 = -1,05 \cdot 10^{-3} \text{ m};$$

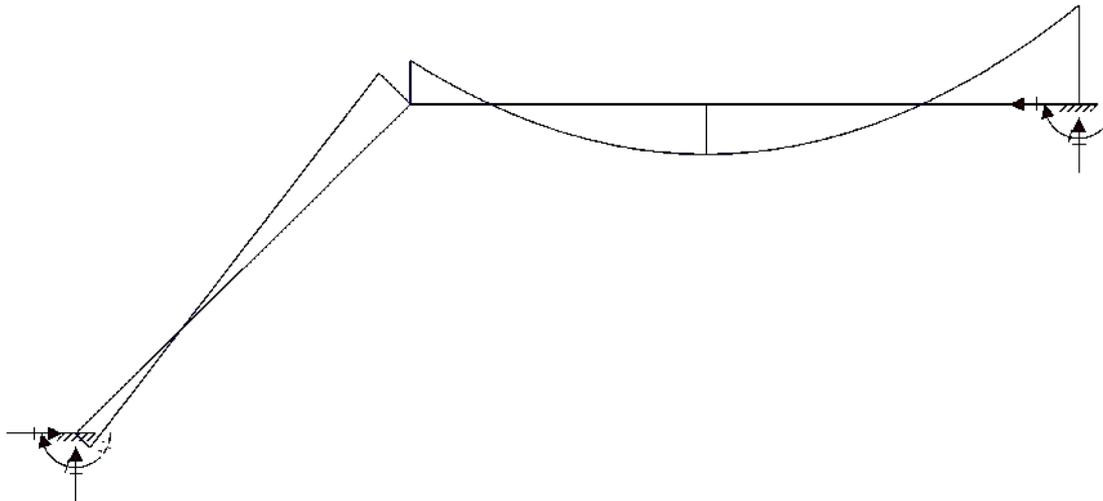
$$D_3 = -0,75 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

# Metodologia: Método dos Deslocamentos

## Passo 4: Determinação dos esforços internos

$$M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2,$$

Os diagramas finais de esforços da estrutura podem ser obtidos pela superposição dos diagramas de cada um dos casos básico.



# Metodologia: Método dos Deslocamentos

## Passo 4: Determinação dos esforços internos

Esse resultado pode ser generalizado para todos os esforços internos:

$$N = N_0 + \sum_{j=1}^{j=g} N_j \cdot X_j ; \quad (5.1)$$

$$Q = Q_0 + \sum_{j=1}^{j=g} Q_j \cdot X_j ; \quad (5.2)$$

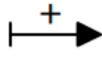
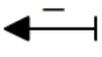
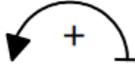
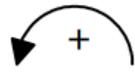
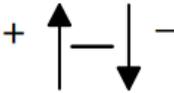
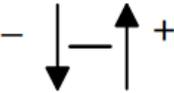
$$M = M_0 + \sum_{j=1}^{j=g} M_j \cdot X_j . \quad (5.3)$$

# Convenções de Sinais

# Convenções de Sinais

É conveniente introduzir uma convenção de sinais para forças e momentos:

Tabela 6.1 - Convenção de sinais adotada para quadros planos no Método dos Deslocamentos.

<i>Deslocamentos horizontais:</i>		
<i>Deslocamentos verticais:</i>		
<i>Rotações:</i>		
<i>Forças horizontais:</i>		
<i>Forças verticais:</i>		
<i>Momentos:</i>		
<i>Esforços axiais em extremidades de barra:</i>		
<i>Esforços cortantes em extremidades de barra:</i>		
<i>Momentos fletores em extremidades de barra:</i>		

# EXEMPLO 1: Viga Contínua

# EXEMPLO 1: Viga Contínua

Considere a viga contínua mostrada na Figura 6.11. O valor da rigidez à flexão da viga é  $EI = 1,2 \times 10^4 \text{ kNm}^2$ . O valor da carga uniformemente distribuída é  $q = 12 \text{ kN/m}$ .

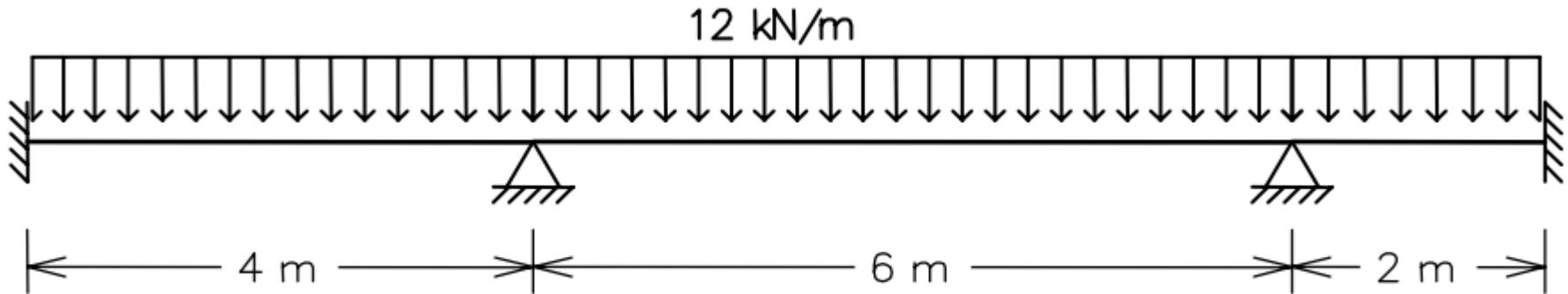


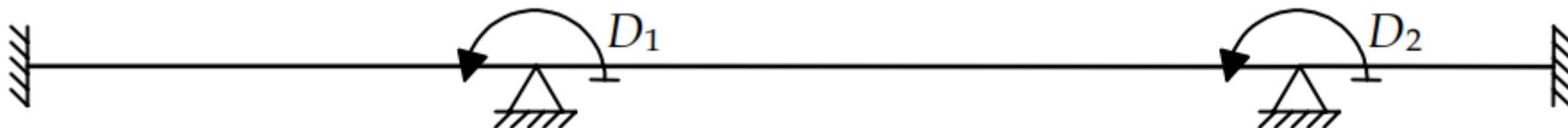
Figura 6.11 – Viga contínua para exemplo de solução pelo Método dos Deslocamentos.

# EXEMPLO 1: Viga Contínua

## Passo 1: Sistema Hipergeométrico (SH)

Deslocabilidades: No exemplo,  $d = 2$ .

*Deslocabilidades:*



*Sistema Hipergeométrico:*

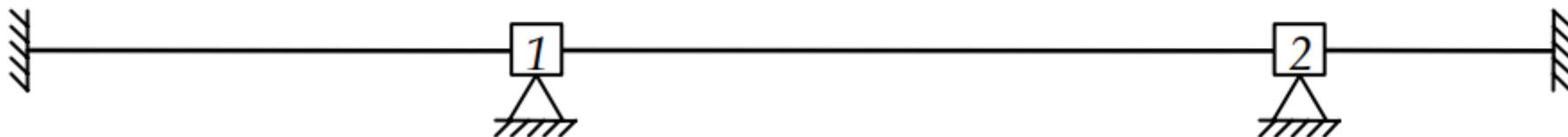


Figura 6.12 – Deslocabilidades e Sistema Hipergeométrico da estrutura da Figura 6.11.

# EXEMPLO 1: Viga Contínua

## Passo 2: Casos Básicos

O número de casos básicos é sempre igual a  $d + 1$ . No exemplo, isso resulta nos casos (0), (1) e (2) que são mostrados a seguir.

# EXEMPLO 1: Viga Contínua

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH.

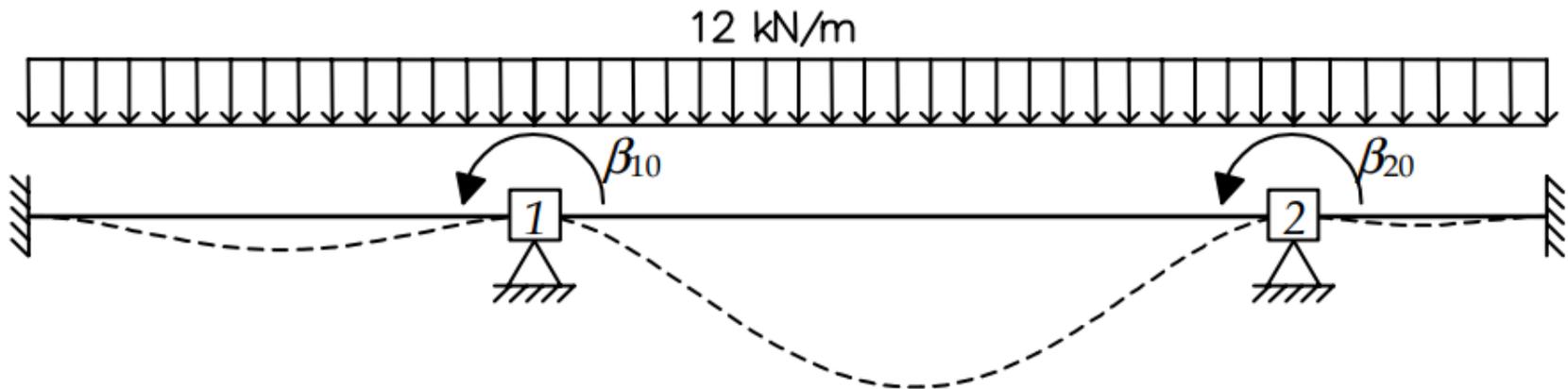
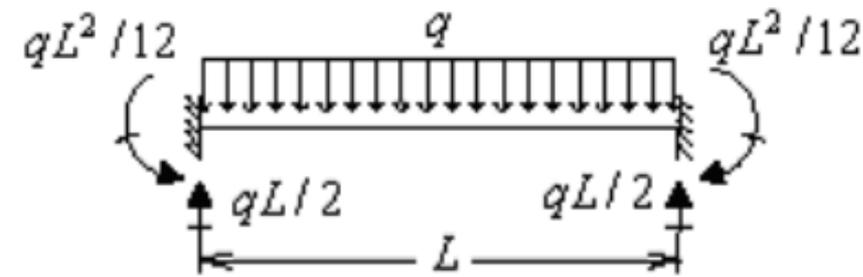


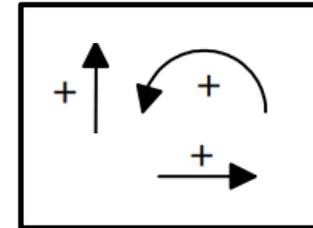
Figura 6.13 – Configuração deformada (exagerada) do caso (0) da estrutura da Figura 6.11.

# EXEMPLO 1: Viga Contínua

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH (engastamento perfeito).

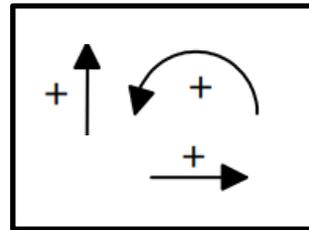
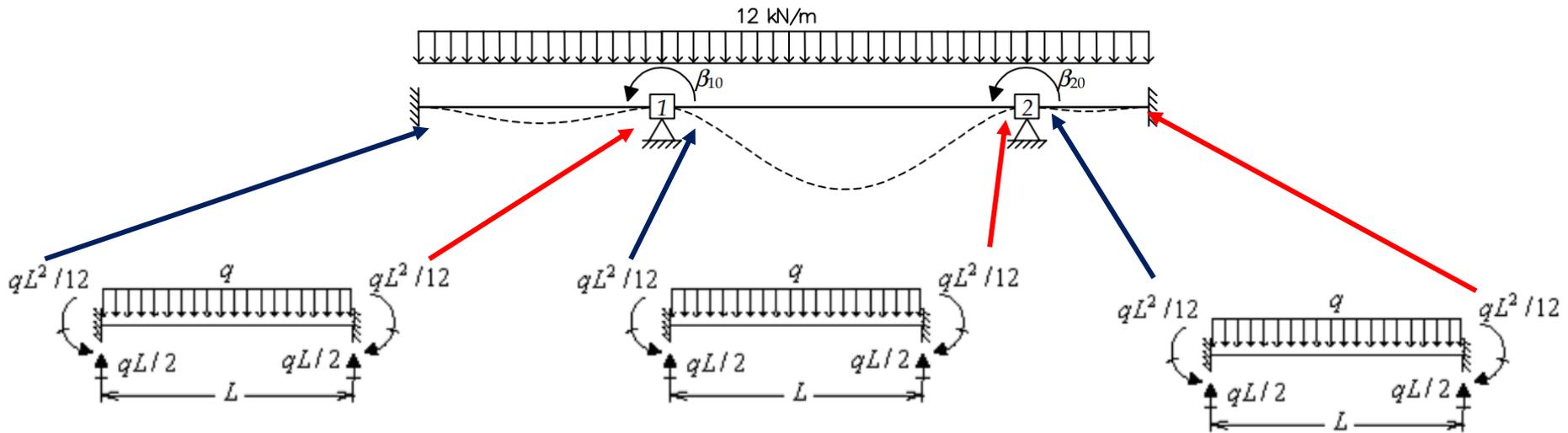


Nas imagens, os sentidos positivos são os seguintes:



# EXEMPLO 1: Viga Contínua

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH (engastamento perfeito).



$$\beta_{10} = -qL^2/12 + qL^2/6 = -16 + 36 = +20 \text{ kNm};$$

$$\beta_{20} = -qL^2/12 + qL^2/12 = -36 + 4 = -32 \text{ kNm}.$$

# EXEMPLO 1: Viga Contínua

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH (engastamento perfeito).

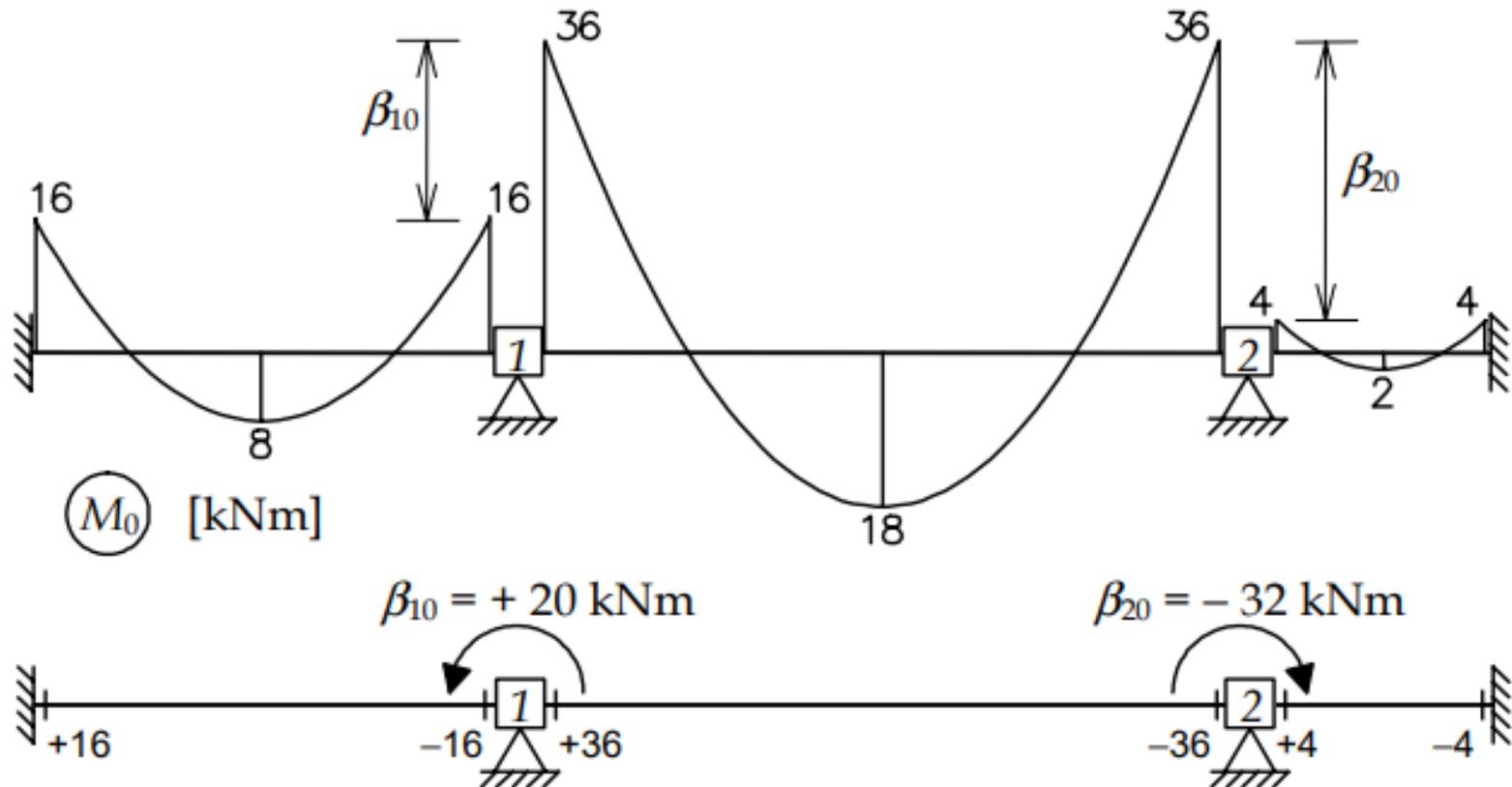
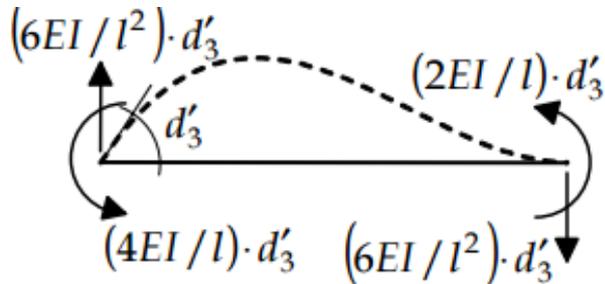
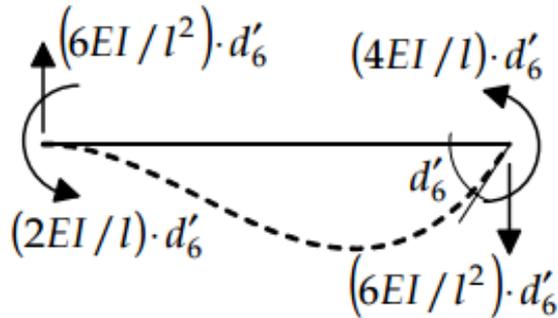


Figura 6.14 – Diagrama de momentos fletores do caso (0) da estrutura da Figura 6.11.

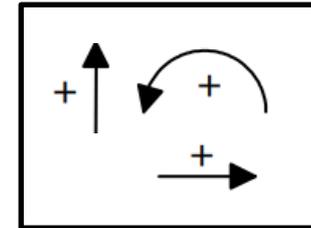
# EXEMPLO 1: Viga Contínua

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (1) – Deslocabilidade  $D_1$  isolada no SH.



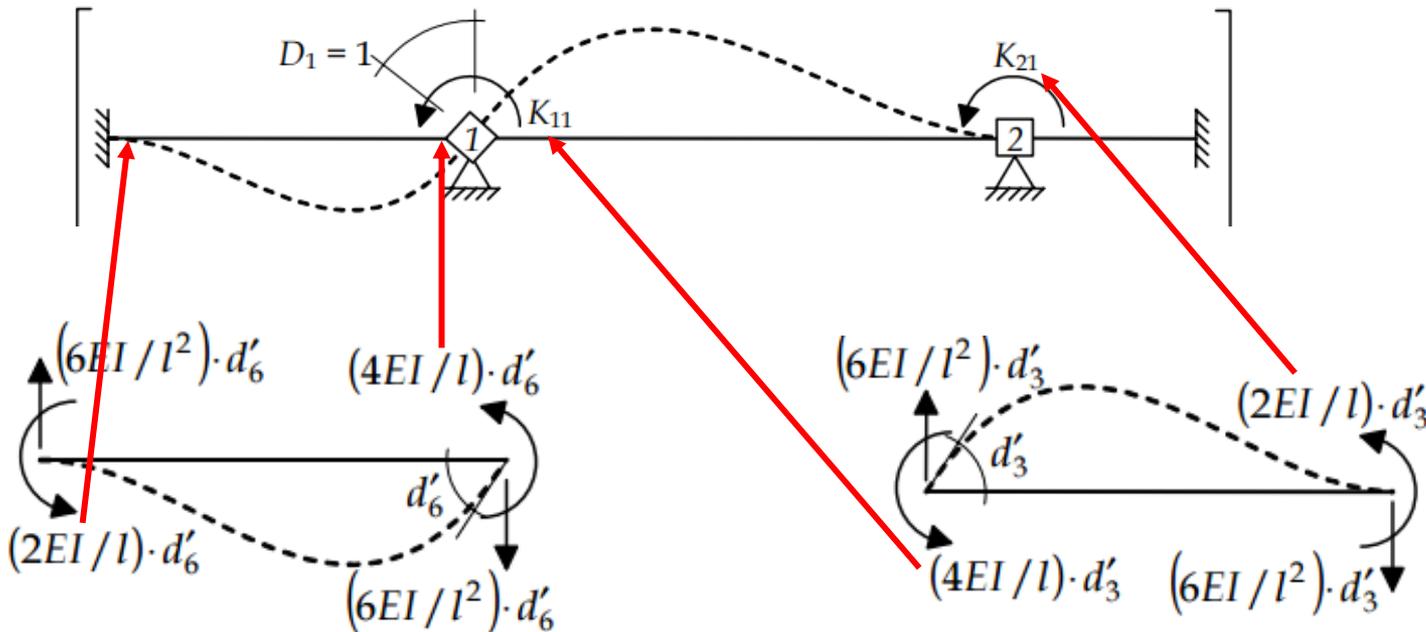
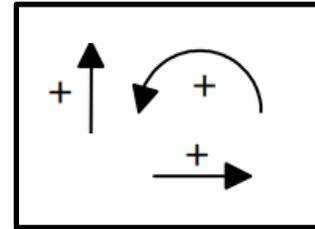
Nas imagens, os sentidos positivos são os seguintes:



# EXEMPLO 1: Viga Contínua

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (1) – Deslocabilidade  $D_1$  isolada no SH.



$$K_{11} = + 4EI/4 + 4EI/6 = + 12000 + 8000 = + 20000 \text{ kNm/rad};$$

$$K_{21} = + 2EI/4 = + 4000 \text{ kNm/rad}.$$

# EXEMPLO 1: Viga Contínua

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (1) – Deslocabilidade  $D_1$  isolada no SH.

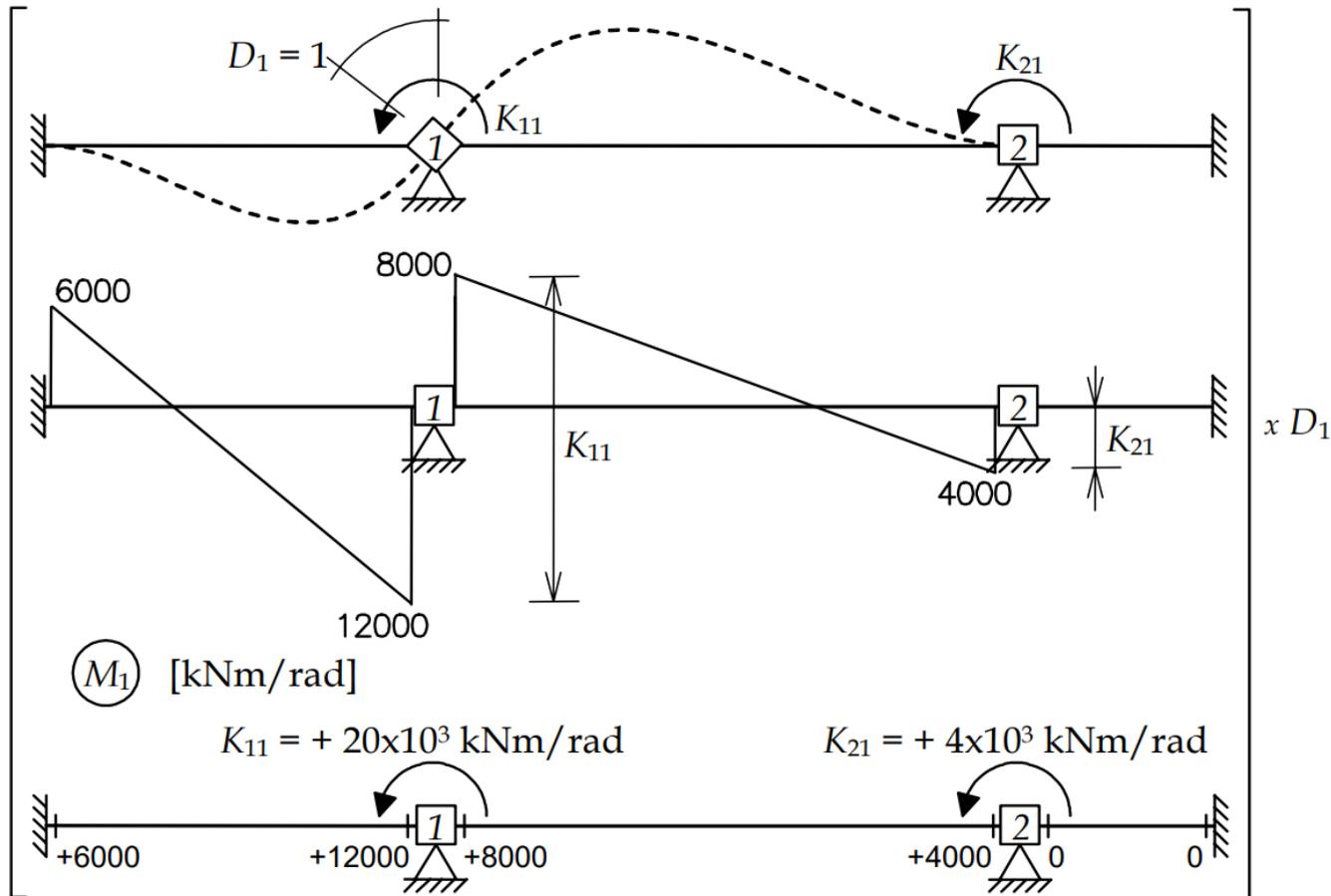
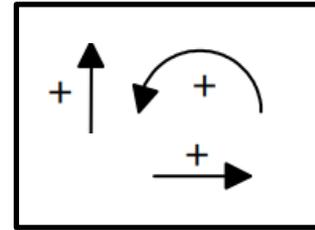
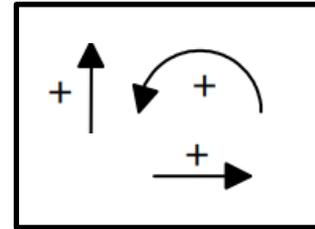


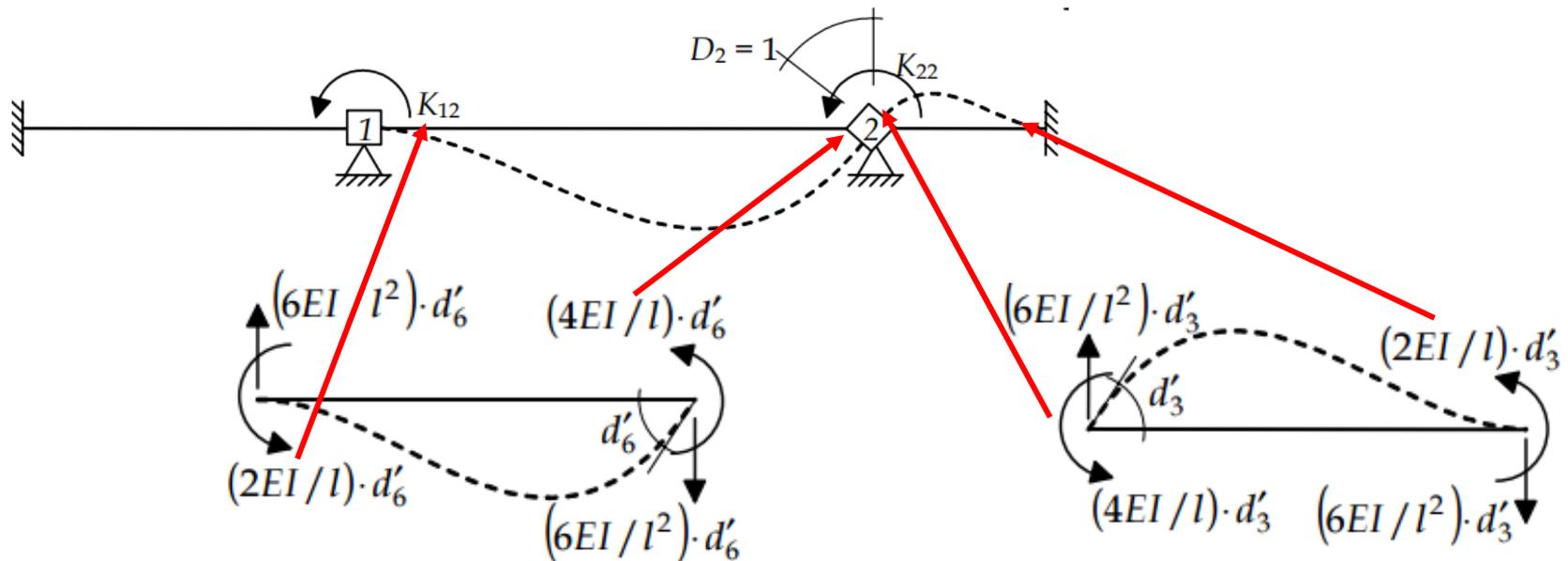
Figura 6.15 – Configuração deformada e diagrama de momentos fletores do caso (1) da estrutura da Figura 6.11.

# EXEMPLO 1: Viga Contínua

## Passo 2: Casos Básicos



Caso (2) – Deslocabilidade  $D_2$  isolada no SH.



$$K_{12} = + 2EI/4 = + 4000 \text{ kNm/rad};$$

$$K_{22} = + 4EI/6 + 4EI/2 = + 8000 + 24000 = + 32000 \text{ kNm/rad}.$$

# EXEMPLO 1: Viga Contínua

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (2) – Deslocabilidade  $D_2$  isolada no SH.

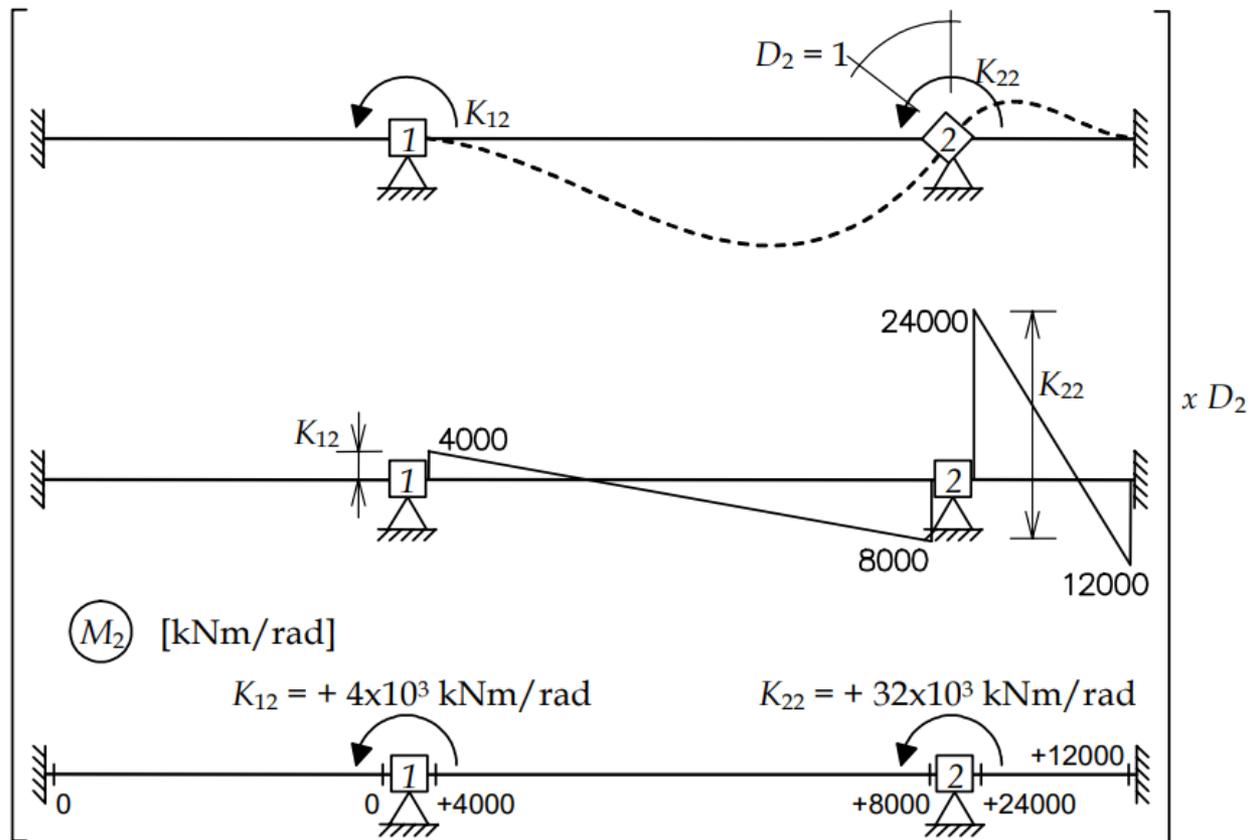


Figura 6.16 – Configuração deformada e diagrama de momentos fletores do caso (2) da estrutura da Figura 6.11.

# EXEMPLO 1: Viga Contínua

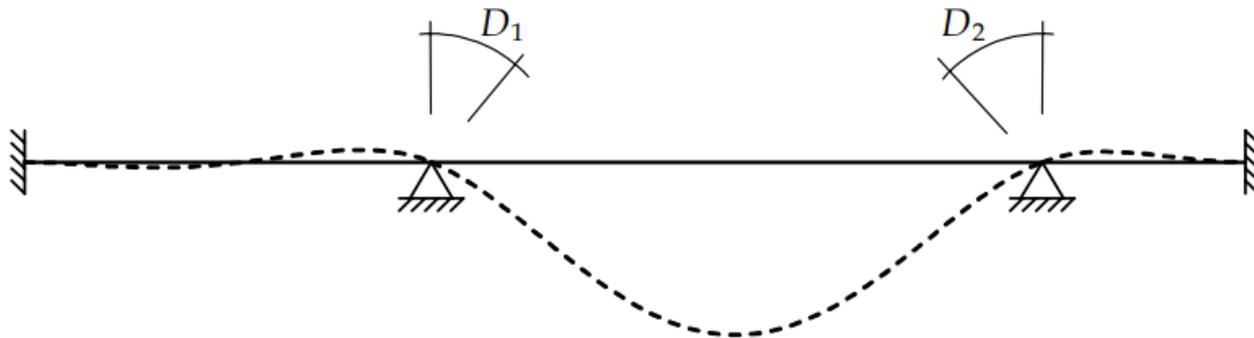
## Passo 3: Superposição de Efeitos

$$\begin{cases} \beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 = 0 \\ \beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} +20 \\ -32 \end{Bmatrix} + 10^3 \begin{bmatrix} +20 & +4 \\ +4 & +32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

A solução desse sistema de equações fornece os seguintes valores para as deslocabilidades:

$$D_1 = -1,23 \times 10^{-3} \text{ rad};$$

$$D_2 = +1,15 \times 10^{-3} \text{ rad}.$$



# EXEMPLO 1: Viga Contínua

## Passo 4: Determinação dos esforços internos

$$M = M_0 + M_1D_1 + M_2D_2,$$

Os diagramas finais de esforços da estrutura podem ser obtidos pela superposição dos diagramas de cada um dos casos básico.

# EXEMPLO 1: Viga Contínua

## Passo 4: Determinação dos esforços internos

$$M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2$$

$$D_1 = - 1,23 \times 10^{-3} \text{ rad};$$

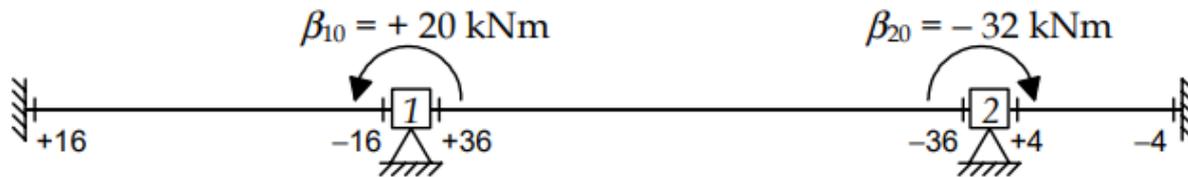
$$D_2 = + 1,15 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$M = M_0 - 1,23 \times 10^{-3} \times M_1 + 1,15 \times 10^{-3} \times M_2.$$

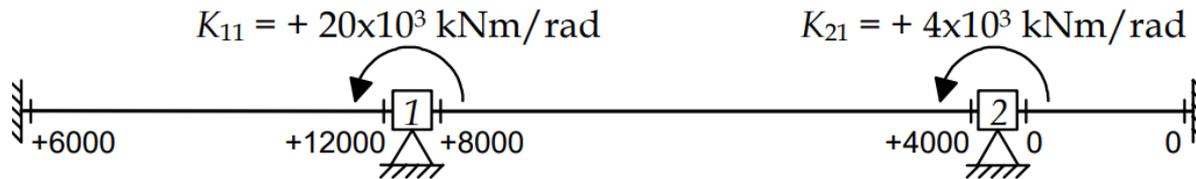
# EXEMPLO 1: Viga Contínua

## Passo 4: Determinação dos esforços internos

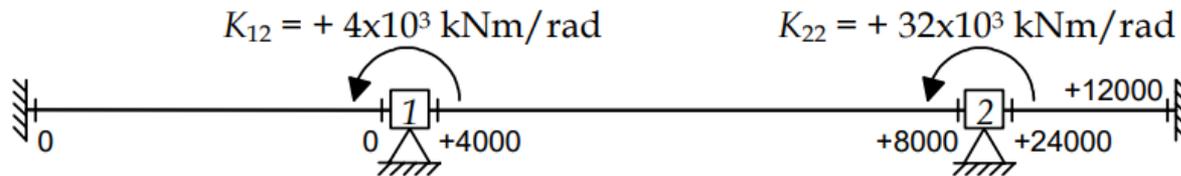
$M_0$



$M_1$



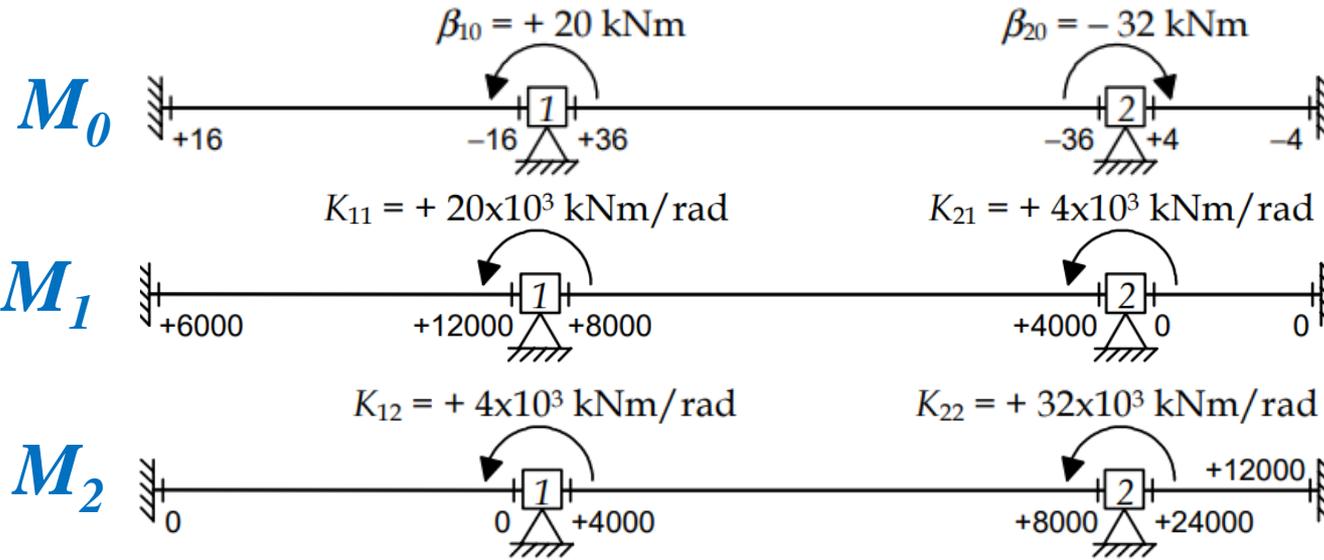
$M_2$



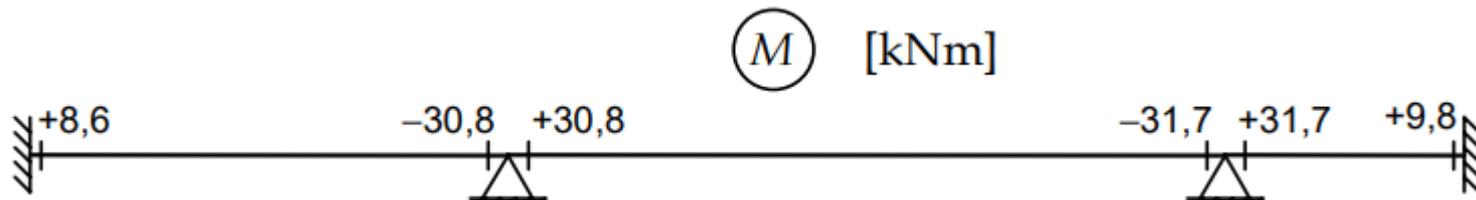
$$M = M_0 - 1,23 \times 10^{-3} \times M_1 + 1,15 \times 10^{-3} \times M_2.$$

# EXEMPLO 1: Viga Contínua

## Passo 4: Determinação dos esforços internos



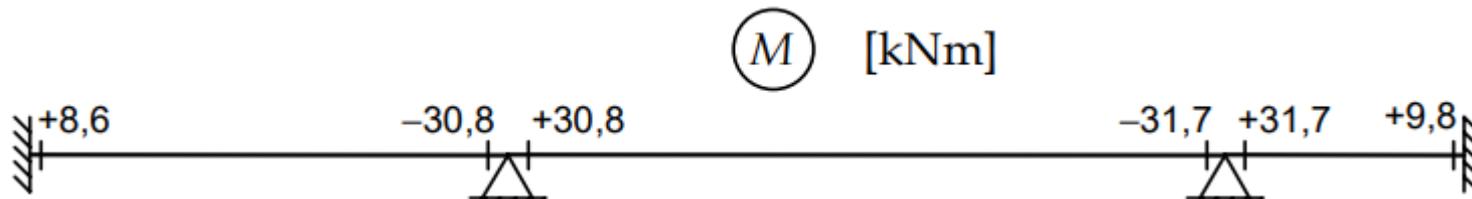
$$M = M_0 - 1,23 \times 10^{-3} \times M_1 + 1,15 \times 10^{-3} \times M_2.$$



# EXEMPLO 1: Viga Contínua

## Passo 4: Determinação dos esforços internos

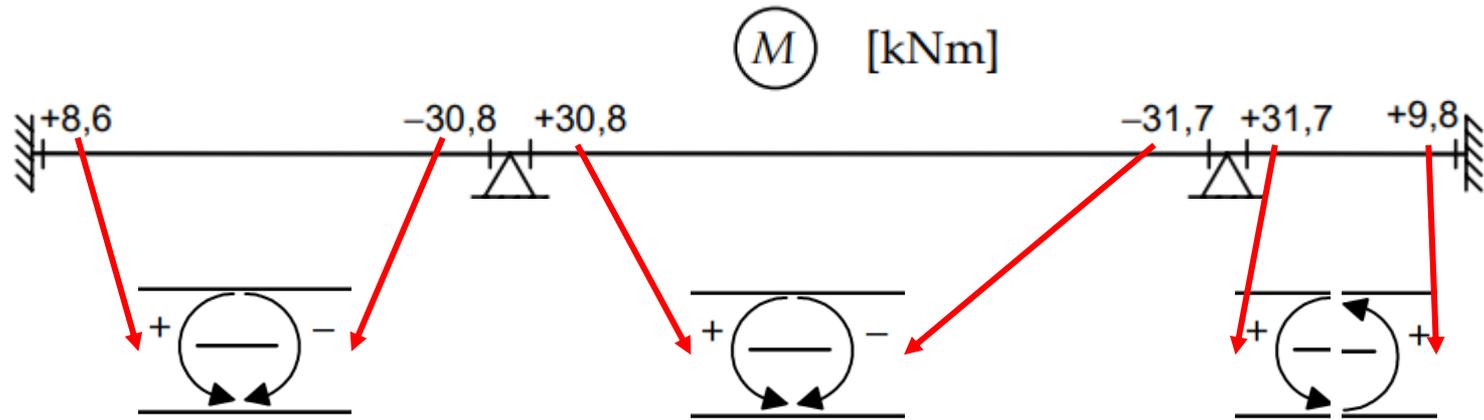
É preciso interpretar a convenção de sinais de momentos fletores, verificando o sentido dos momentos nas extremidades das barras.



<i>Momentos fletores em extremidades de barra:</i>		
--	--	---

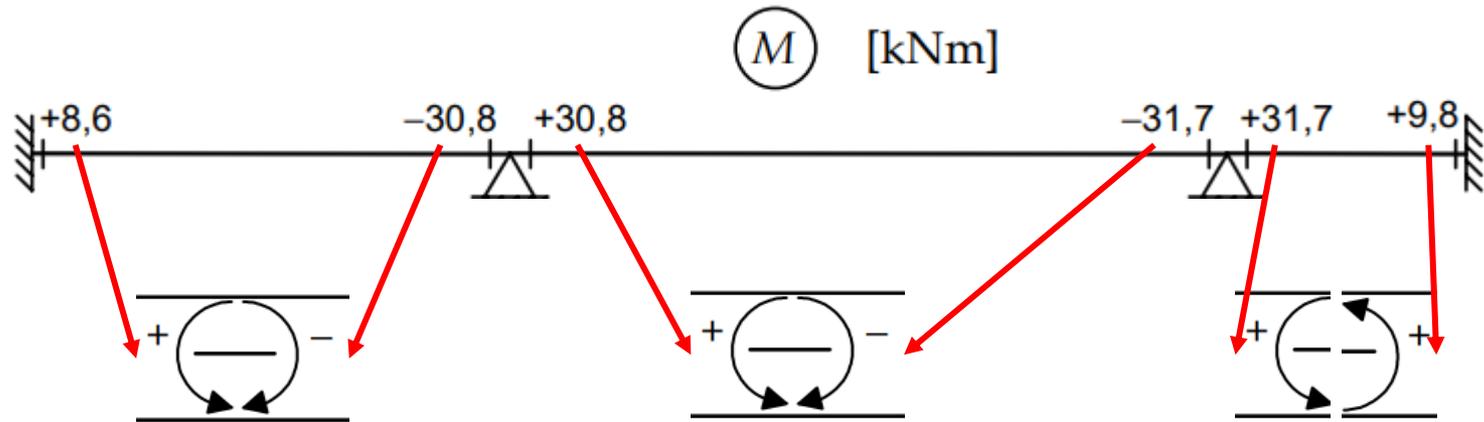
# EXEMPLO 1: Viga Contínua

## Passo 4: Determinação dos esforços internos



# EXEMPLO 1: Viga Contínua

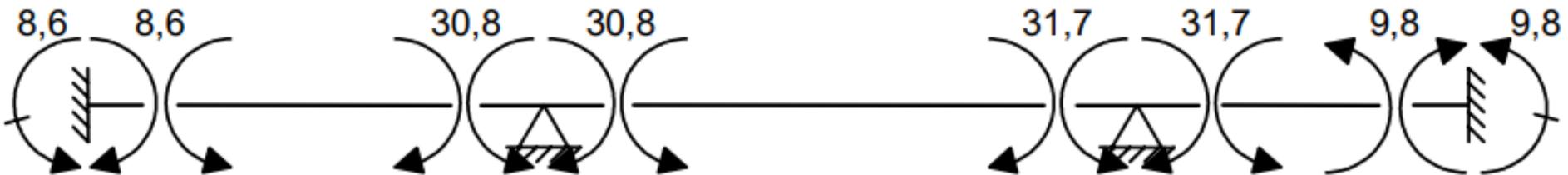
## Passo 4: Determinação dos esforços internos



*+ extremidade -*

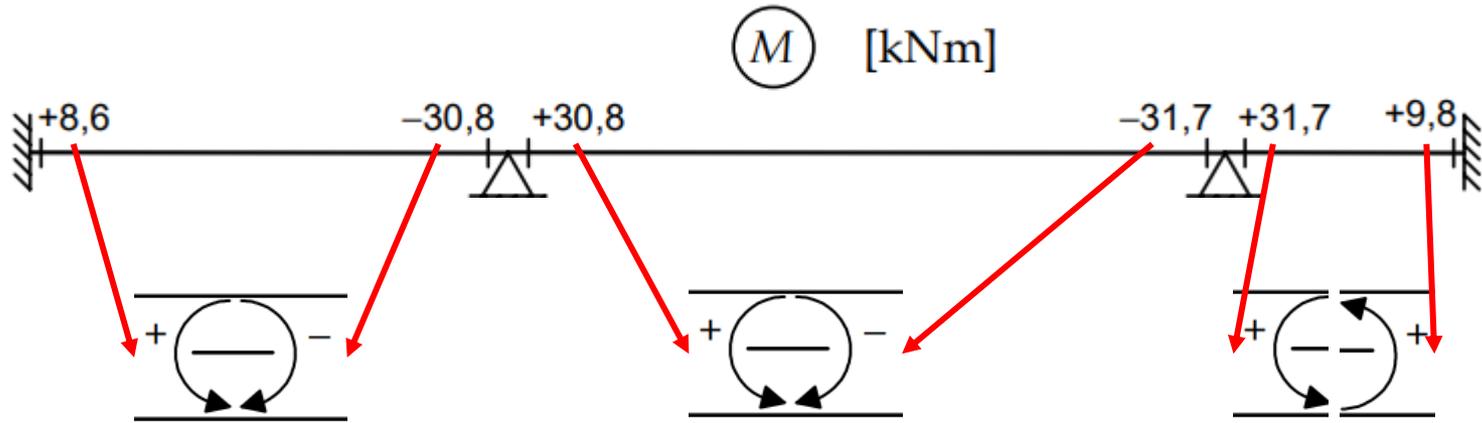
*+ extremidade -*

*+ extremidade +*



# EXEMPLO 1: Viga Contínua

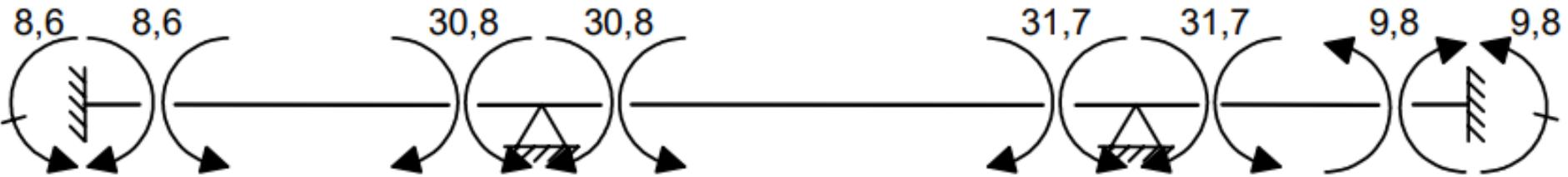
## Passo 4: Determinação dos esforços internos



*+ extremidade -*

*+ extremidade -*

*+ extremidade +*



*NÓ -*

*+ NÓ -*

*+ NÓ -*

*- NÓ*

# EXEMPLO 1: Viga Contínua

## Passo 4: Determinação dos esforços internos

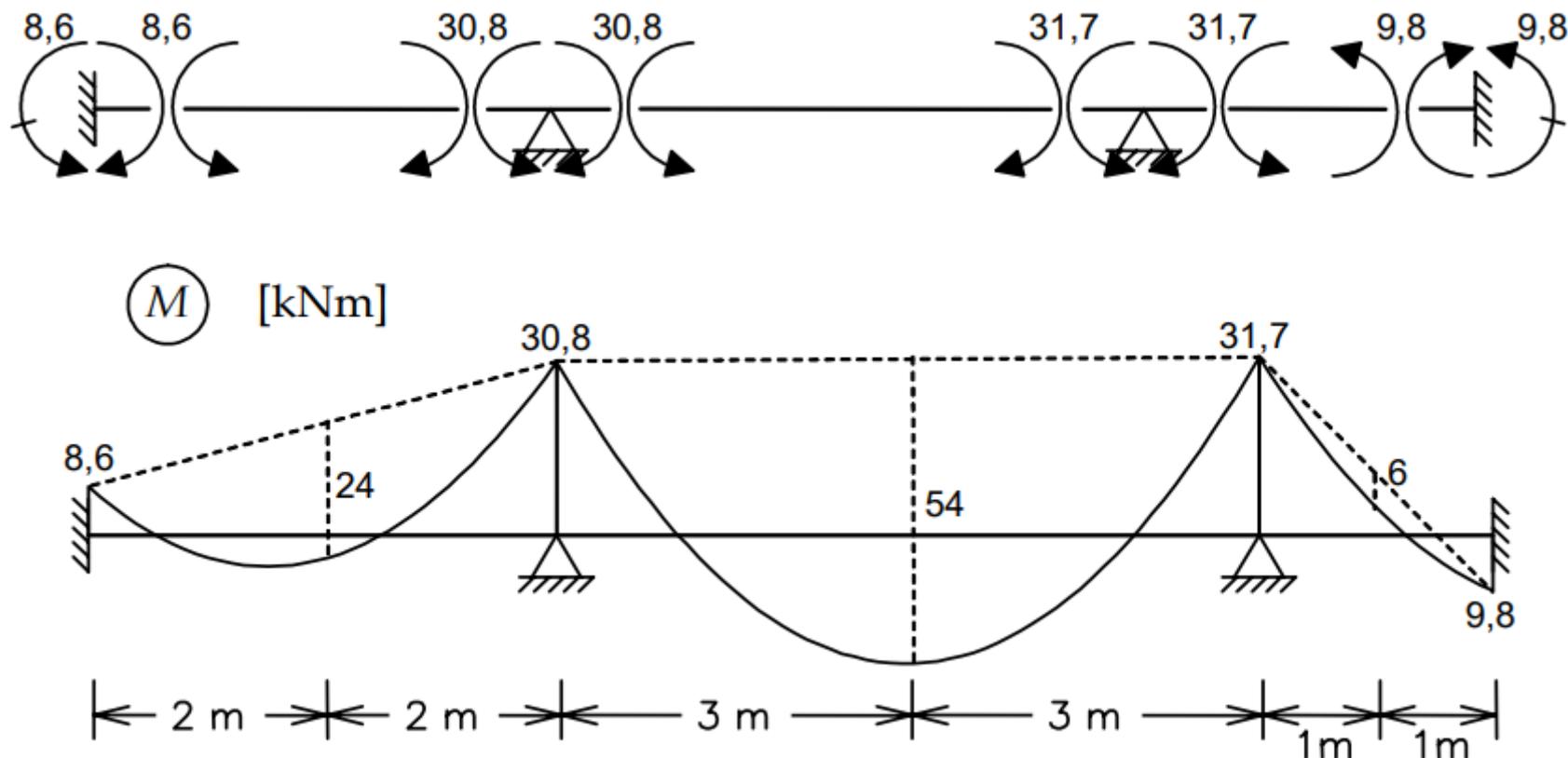


Figura 6.19 – Momentos fletores da estrutura da Figura 6.11 desenhados do lado da fibra das seções transversais.

# EXEMPLO 1: Viga Contínua

## Observações:

- 1) Os esforços nas barras e as reações de apoio são sempre determinados com base em configurações deformadas conhecidas;
- 2) Apesar dessa metodologia não ser intuitiva para quem começa a aprender o Método dos Deslocamentos, a solução de cada caso básico é bem simples;
- 3) As deformações impostas são sempre configurações muito simples: ou são a solução de engastamento perfeito do caso (0) ou é imposta apenas uma deslocabilidade isolada nos outros casos.
- 4) Os esforços e reações em cada caso básico são obtidos de soluções tabeladas. Esta metodologia simples também permite algoritmos de fácil implementação computacional

# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

As duas barras têm o mesmo material com módulo de elasticidade  $E$  e têm a mesma seção transversal, cuja relação entre área  $A$  e momento de inércia  $I$  é dada por  $A/I = 2 \text{ m}^{-2}$ . O objetivo do exemplo é a determinação do diagrama de momentos fletores.

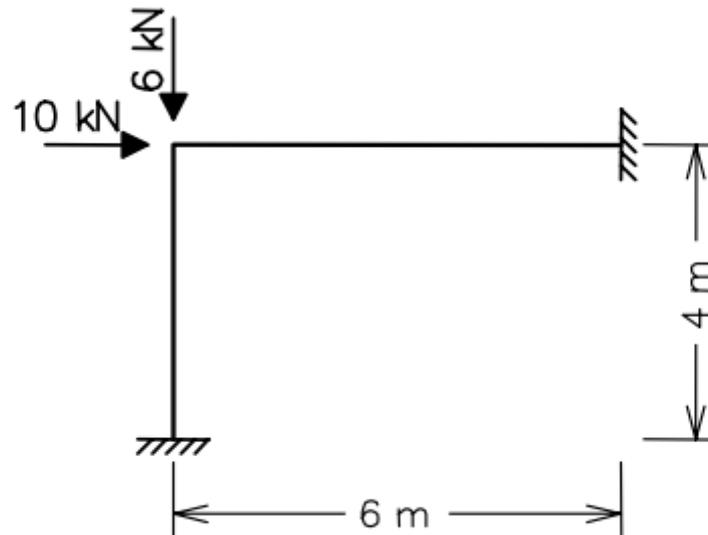


Figura 6.20 – Exemplo de solução de pórtico com três deslocabilidades.

# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

## Passo 1: Sistema Hipergeométrico (SH)

Deslocabilidades: No exemplo,  $d = 3$ .

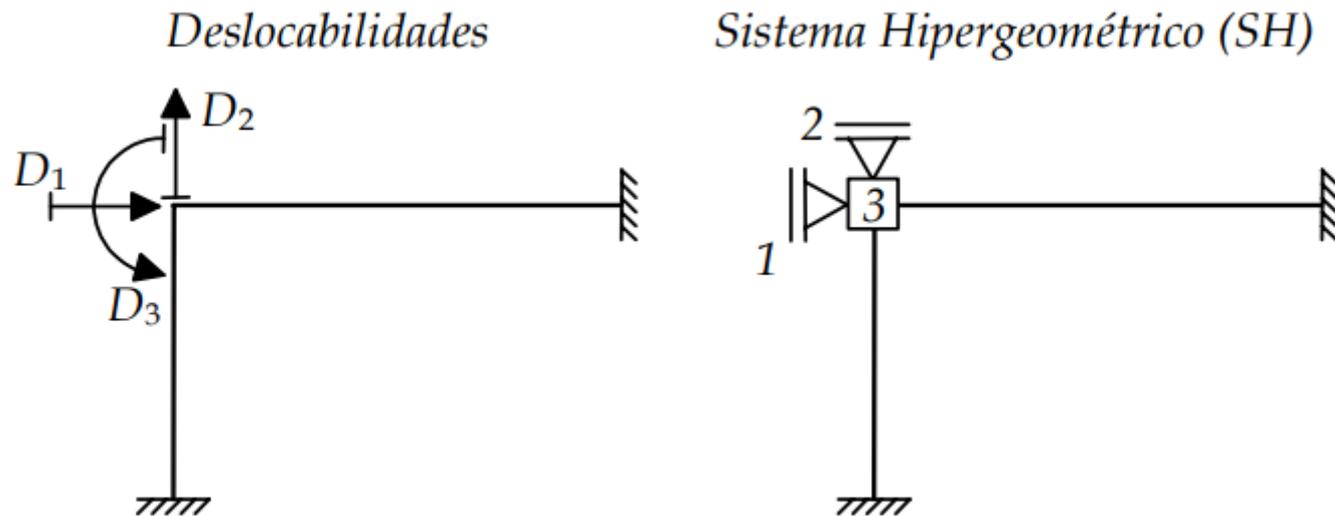


Figura 6.21 – Deslocabilidades e Sistema Hipergeométrico da estrutura da Figura 6.20.

# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

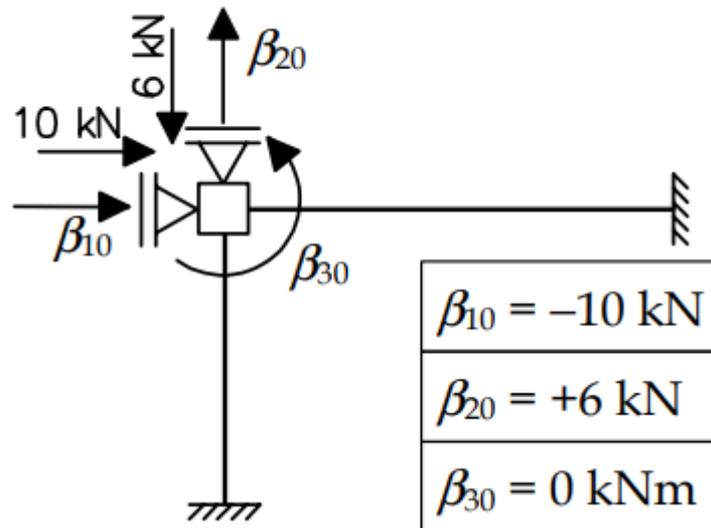
## Passo 2: Casos Básicos

O número de casos básicos é sempre igual a  $d + 1$ . No exemplo, isso resulta nos casos (0), (1), (2) e (3) que são mostrados a seguir.

# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH.



Os termos de carga  $\beta_{10}$ ,  $\beta_{20}$  e  $\beta_{30}$  do caso (0) são indicados com seus sentidos positivos. O sentido real vai ser dado pelo sinal do termo. Se for negativo, isso indica que o sentido é contrário ao desenhado. Nesse caso, como as cargas são aplicadas diretamente sobre o nó onde foram colocados os apoios fictícios do SH, os termos de carga são obtidos diretamente pelo equilíbrio do nó.

# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH (engastamento perfeito).

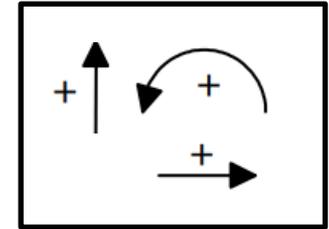
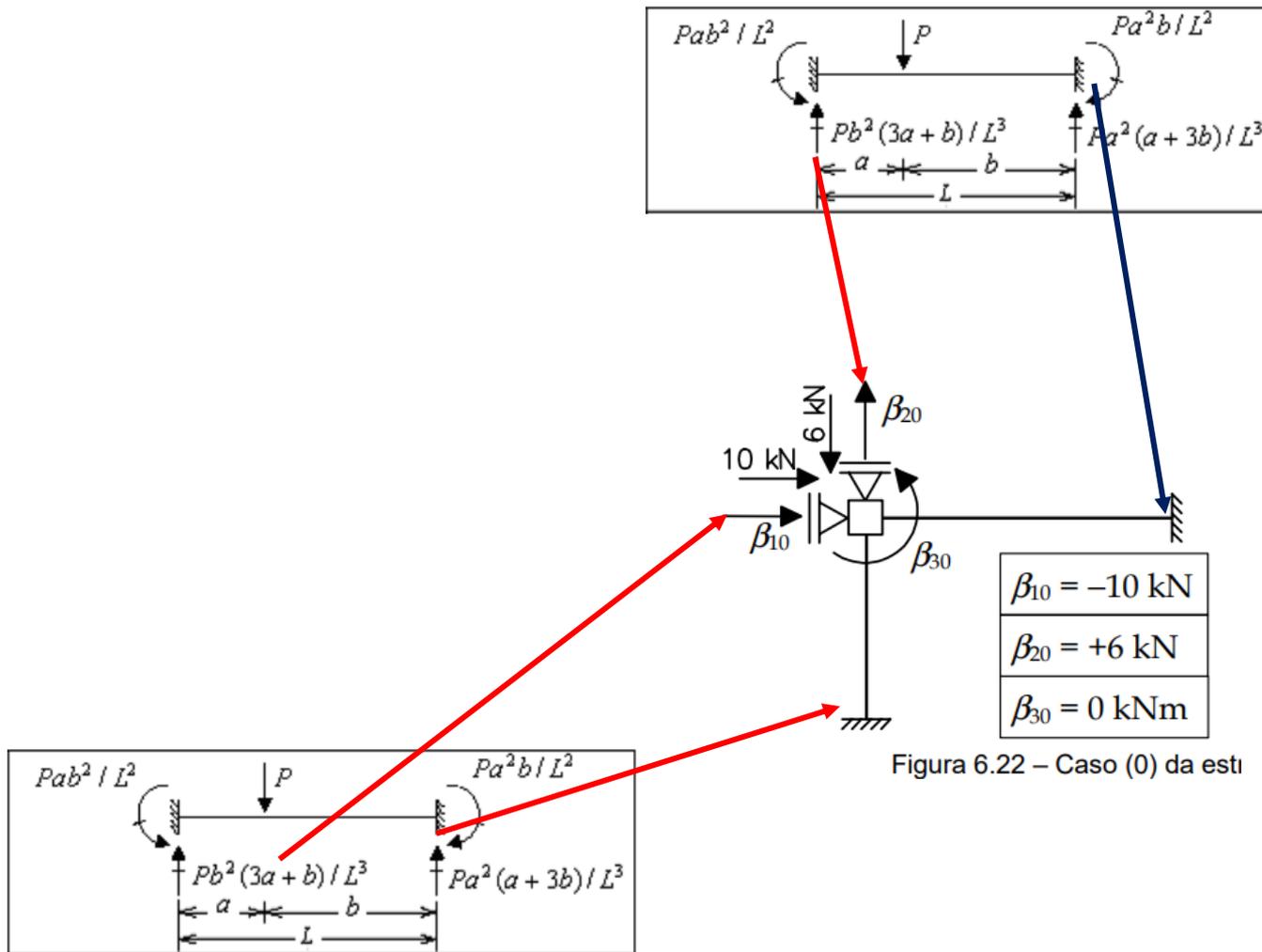


Figura 6.22 – Caso (0) da esti

# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH (engastamento perfeito).

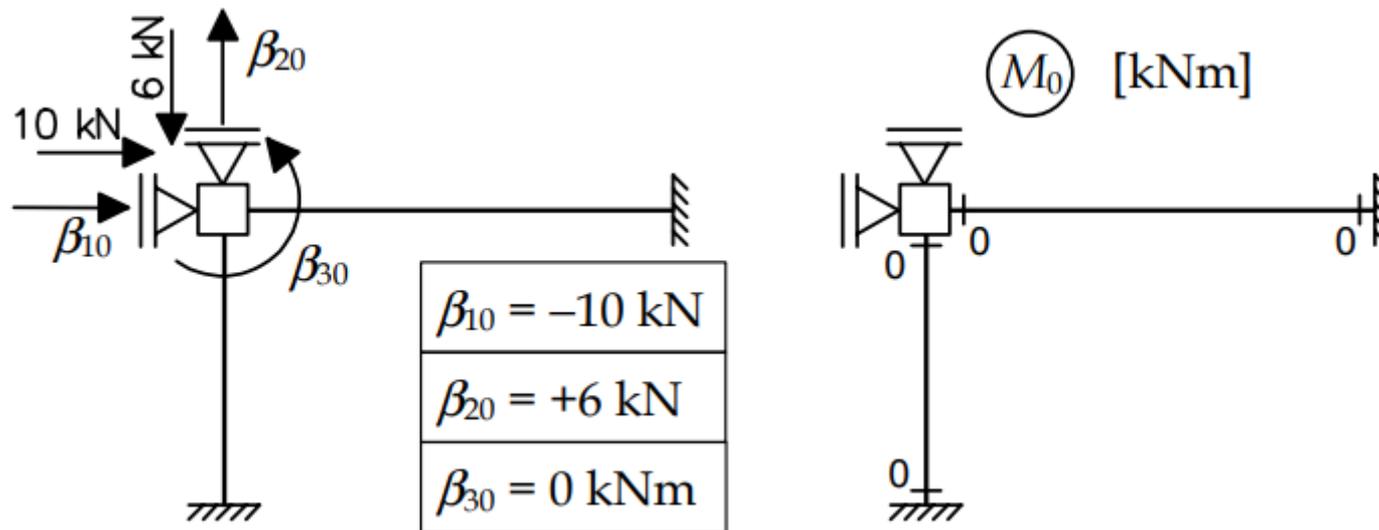
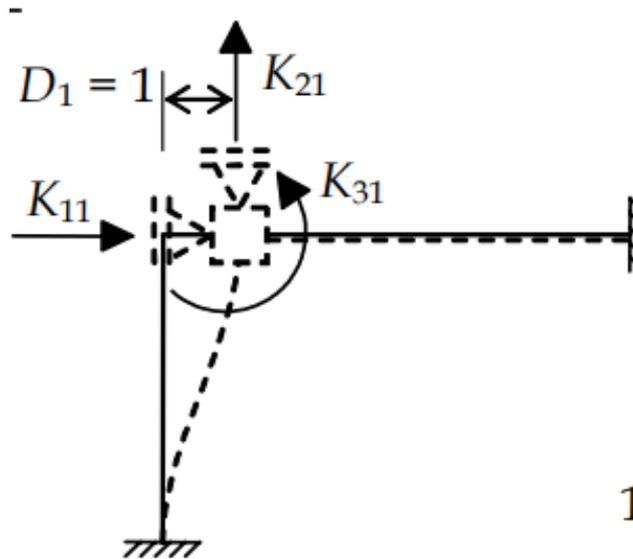


Figura 6.22 – Caso (0) da estrutura da Figura 6.20.

# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

## Passo 2: Casos Básicos

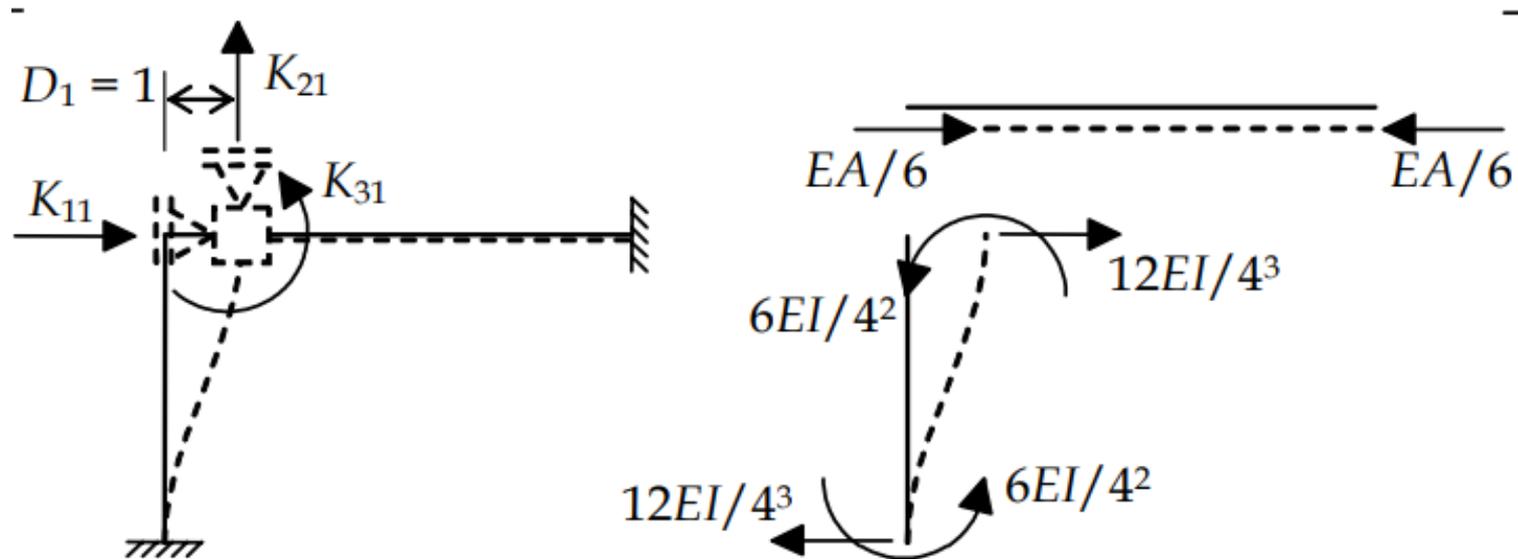
Caso (1) – Deslocabilidade  $D_1$  isolada no SH.



# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (1) – Deslocabilidade  $D_1$  isolada no SH.



# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (1) – Deslocabilidade  $D_1$  isolada no SH.

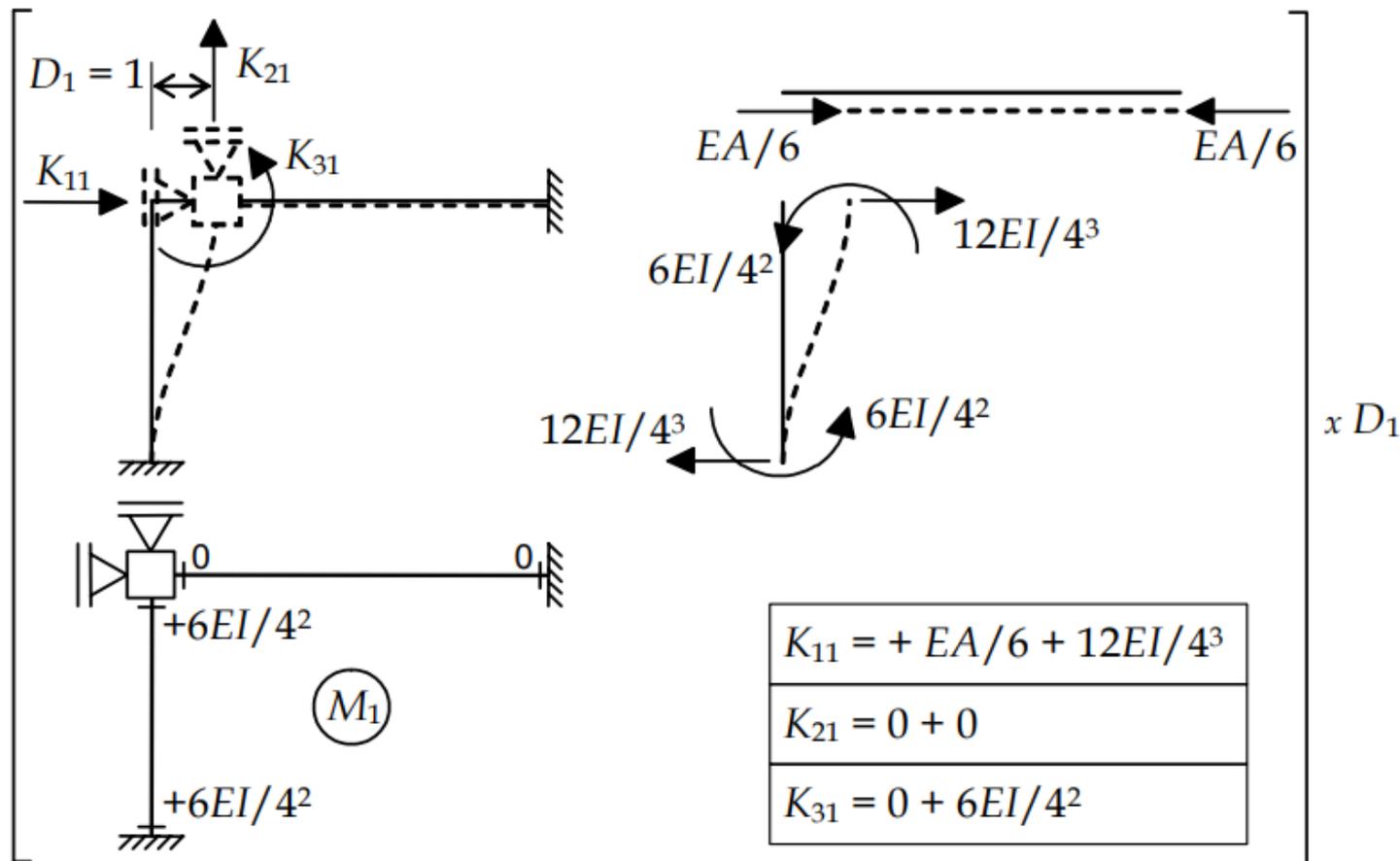
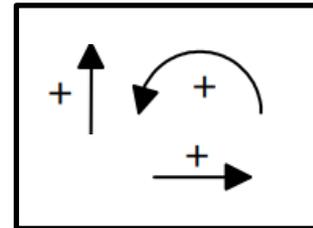


Figura 6.23 – Caso (1) da estrutura da Figura 6.20.

# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (2) – Deslocabilidade  $D_2$  isolada no SH.

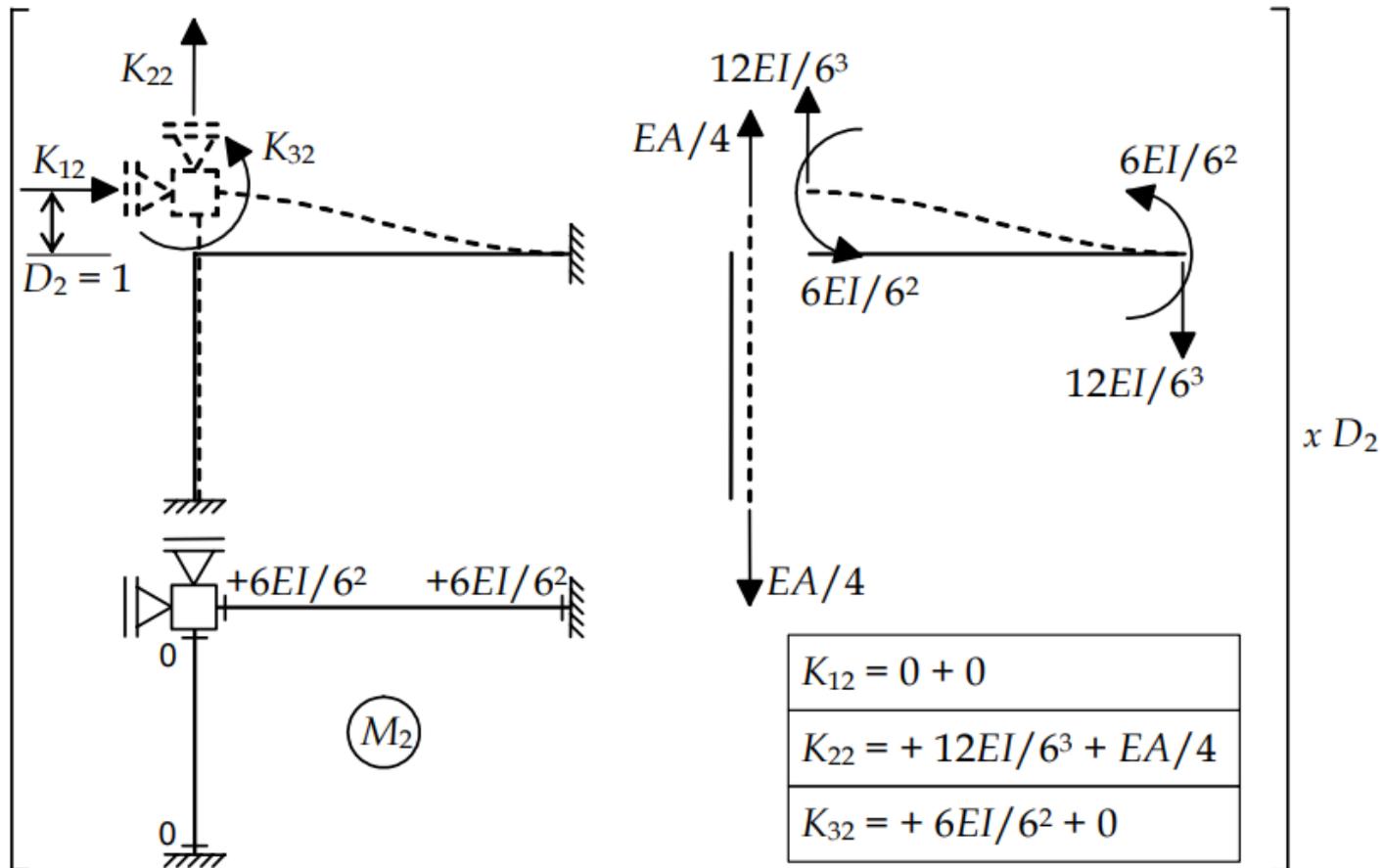
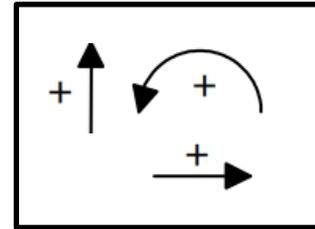


Figura 6.24 – Caso (2) da estrutura da Figura 6.20.

# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (3) – Deslocabilidade  $D_3$  isolada no SH.

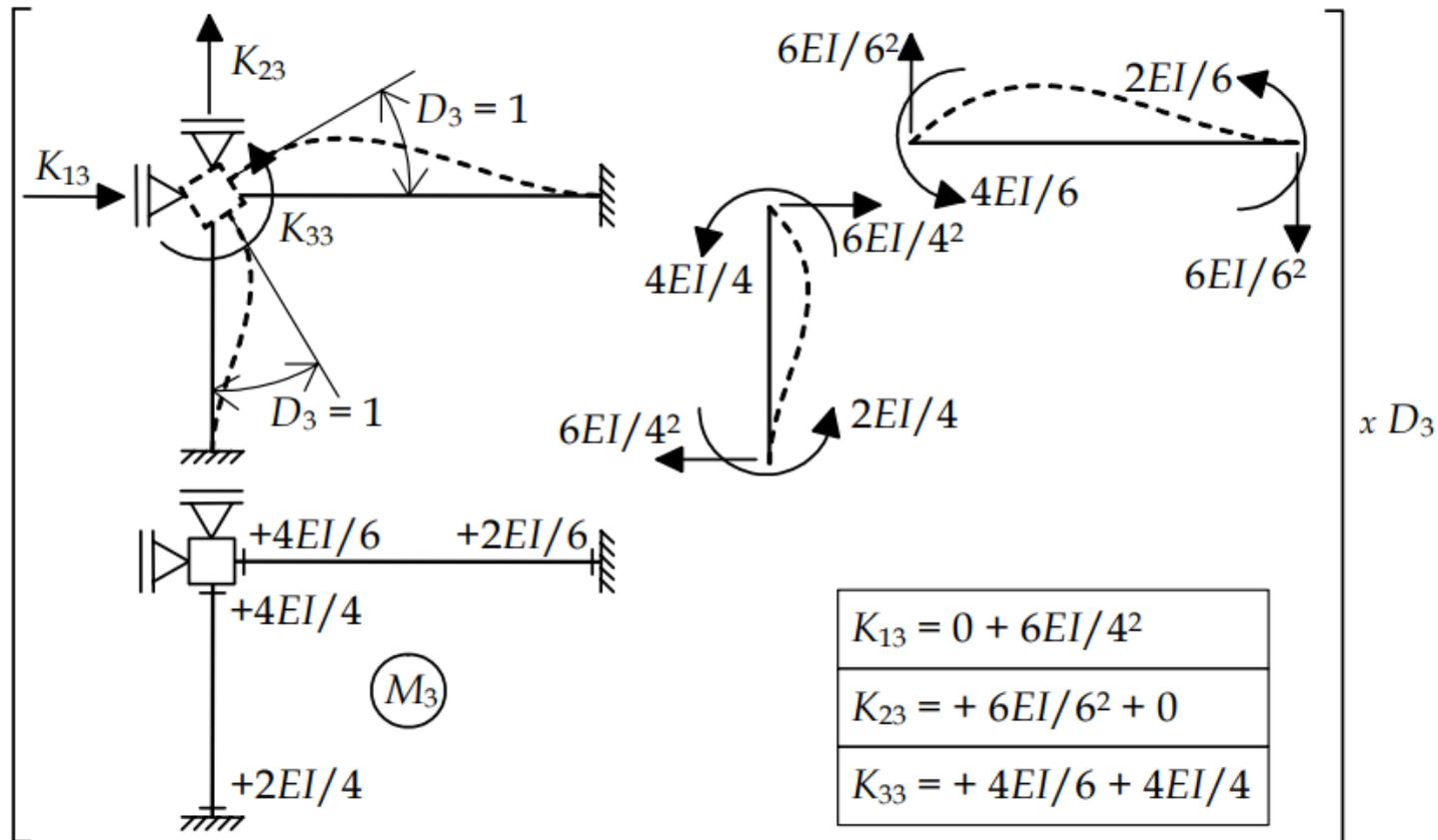
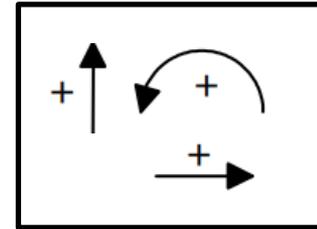


Figura 6.25 – Caso (3) da estrutura da Figura 6.20.

# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

## Passo 3: Superposição de Efeitos

$$\begin{cases} \beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + K_{13}D_3 = 0 \\ \beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + K_{23}D_3 = 0 \\ \beta_{30} + K_{31}D_1 + K_{32}D_2 + K_{33}D_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} -10 \\ 6 \\ 0 \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 25/48 & 0 & 3/8 \\ 0 & 5/9 & 1/6 \\ 3/8 & 1/6 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = +22,085/EI \\ D_2 = -9,595/EI \\ D_3 = -4,010/EI \end{cases}$$

# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

## Passo 4: Determinação dos esforços internos

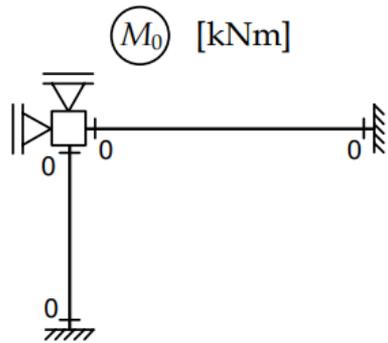
$$M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2 + M_3 D_3$$

Os diagramas finais de esforços da estrutura podem ser obtidos pela superposição dos diagramas de cada um dos casos básico.

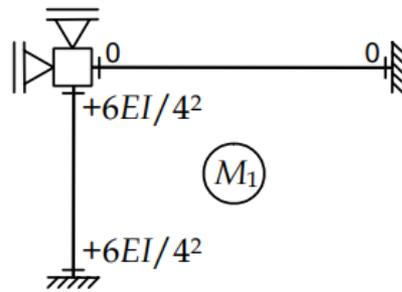
# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

## Passo 4: Determinação dos esforços internos

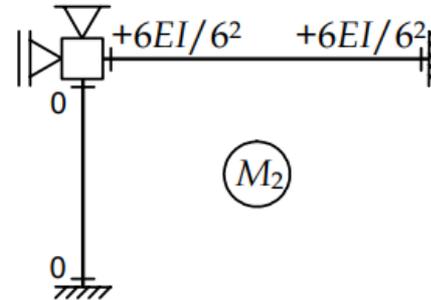
$M_0$



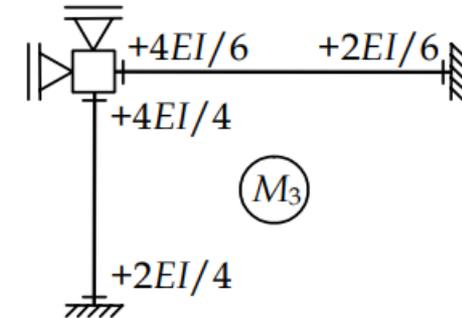
$M_1$



$M_2$



$M_3$

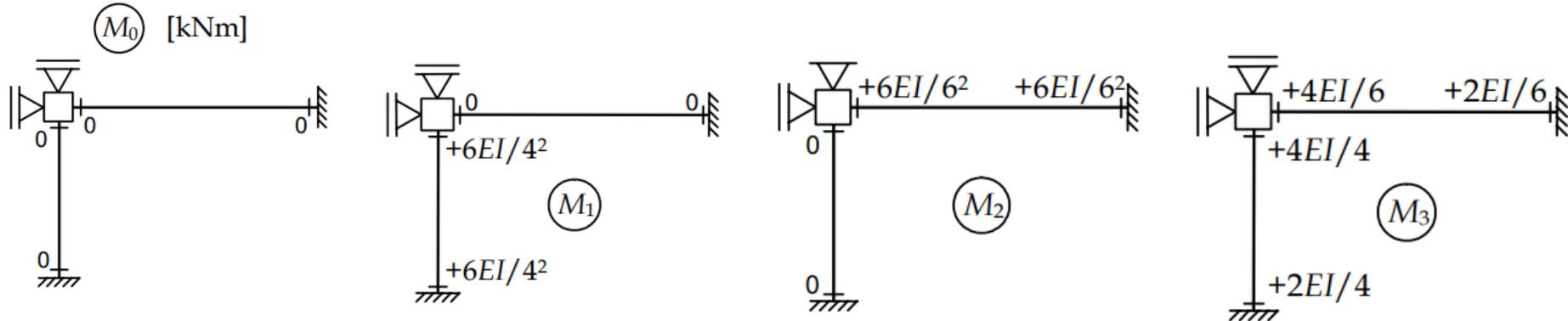


$$M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2 + M_3 D_3$$

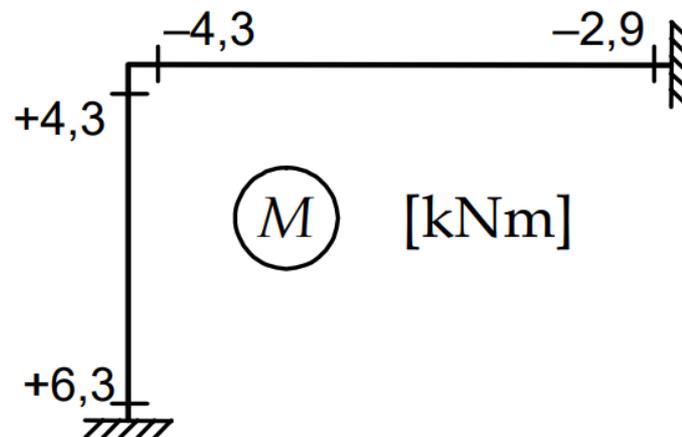


# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

## Passo 4: Determinação dos esforços internos

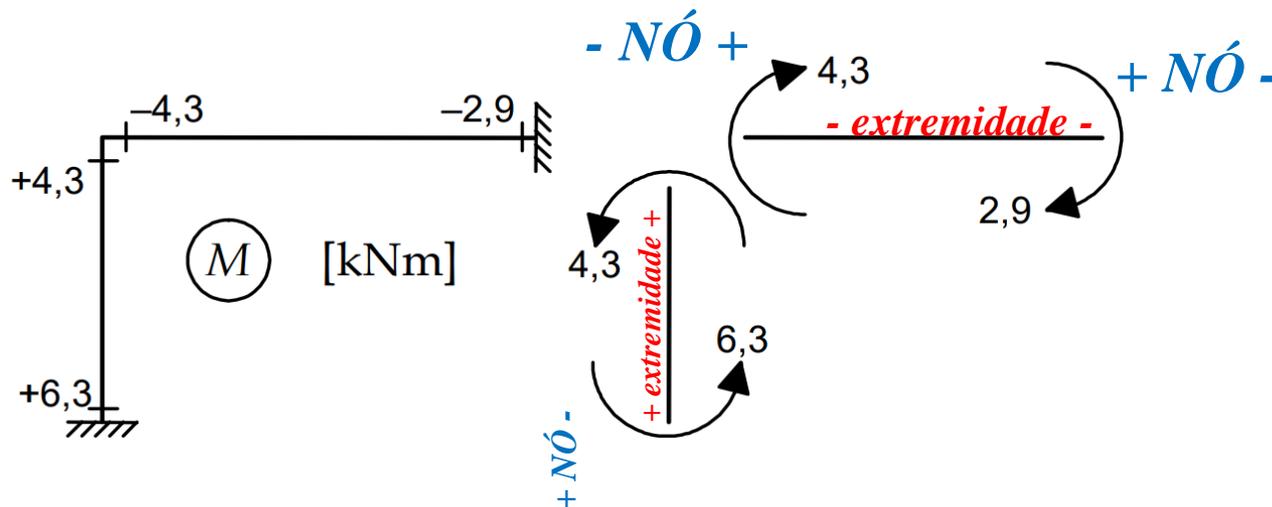
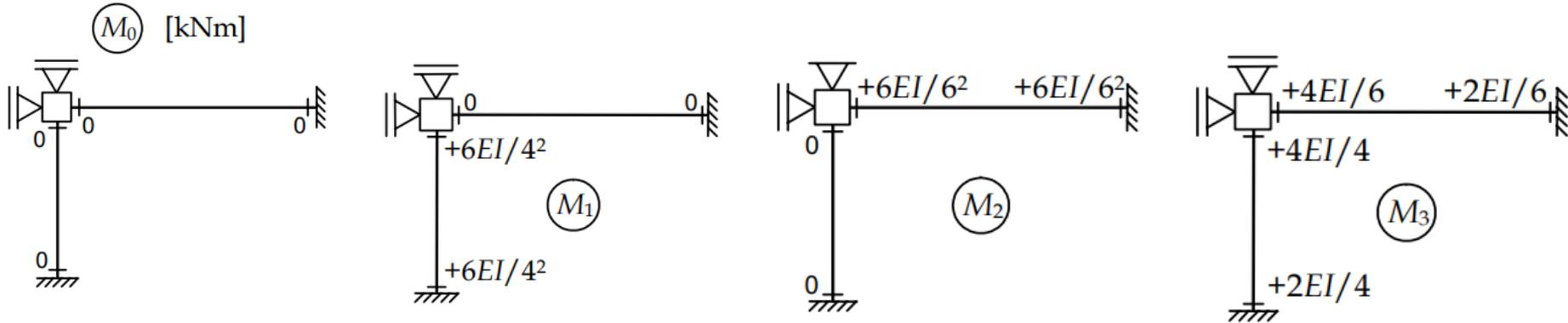


$$M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2 + M_3 D_3$$



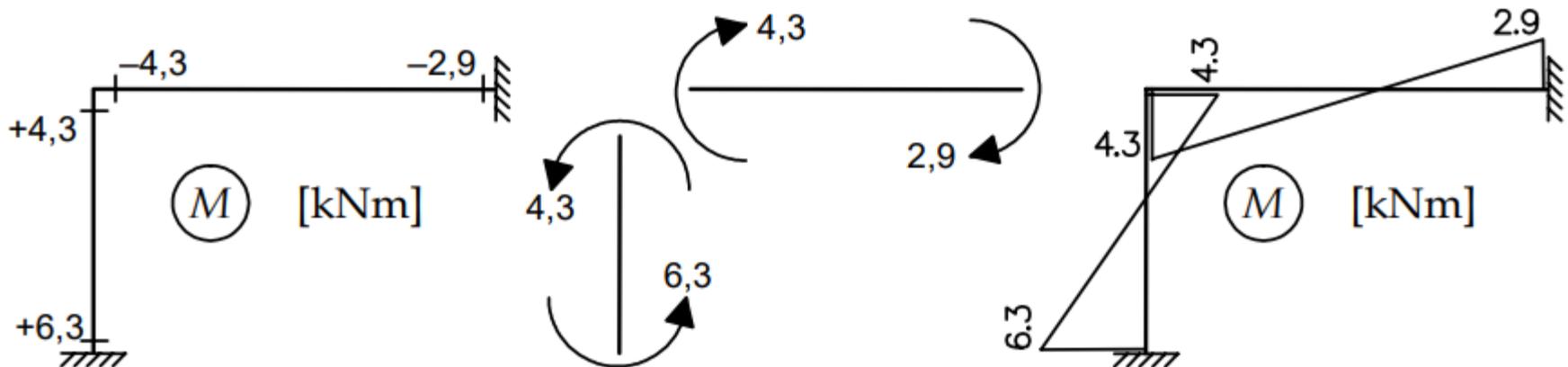
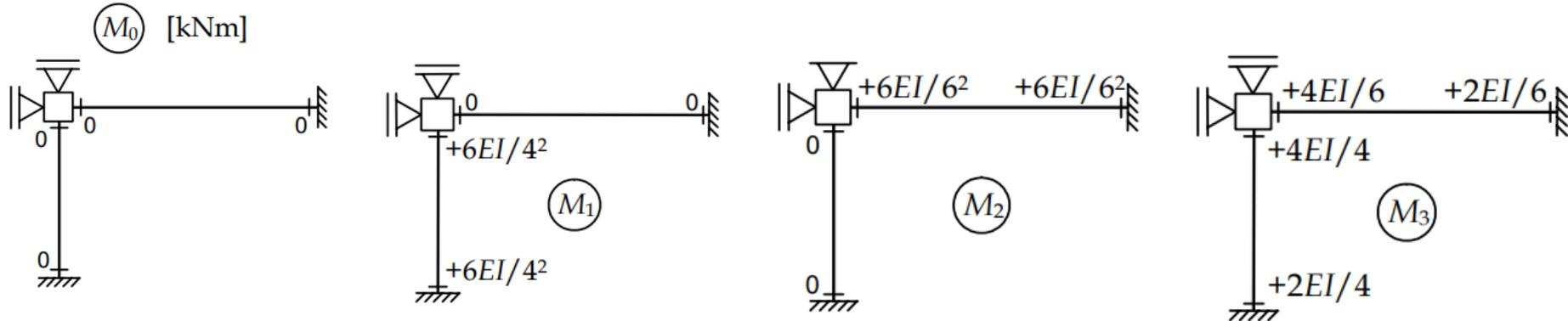
# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

## Passo 4: Determinação dos esforços internos



# EXEMPLO 2: Pórticos Simples

## Passo 4: Determinação dos esforços internos



**EXEMPLO 3: Pórtico com articulação  
interna (**Exercício quente**)**

# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

As três barras têm a mesma seção transversal, com área  $A$  e momento de inércia  $I$ , e material com módulo de elasticidade  $E$ . A relação entre  $A$  e  $I$  é dada por  $A/I = 2 \text{ m}^{-2}$ .

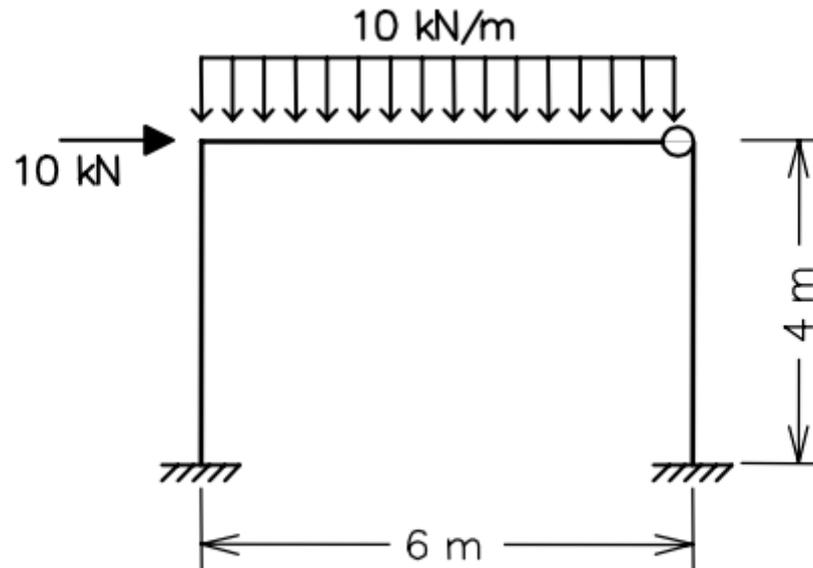


Figura 6.28 – Exemplo de solução de pórtico com articulação interna.

# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 1: Sistema Hipergeométrico (SH)

Deslocabilidades: No exemplo,  $d = 6$ .

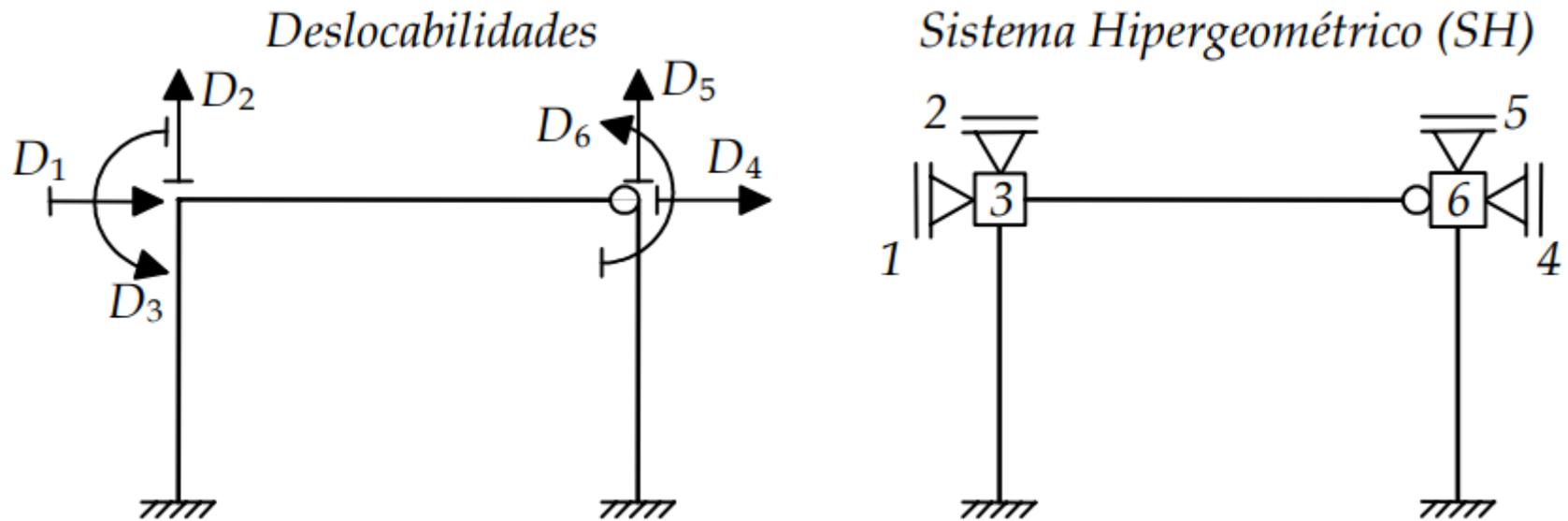


Figura 6.29 – Deslocabilidades e Sistema Hipergeométrico da estrutura da Figura 6.28.

# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

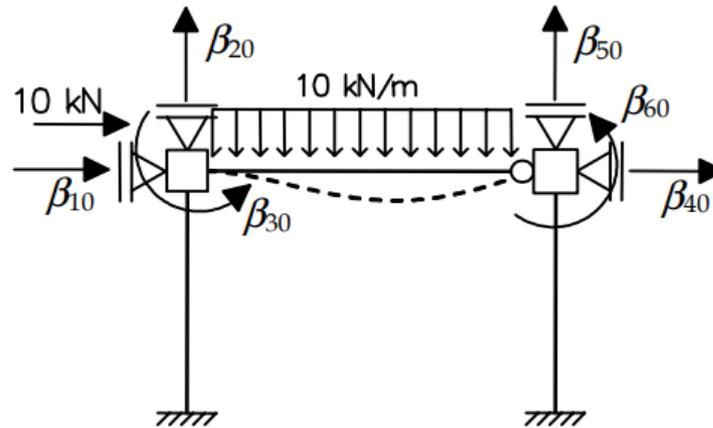
## Passo 2: Casos Básicos

O número de casos básicos é sempre igual a  $d + 1$ . No exemplo, isso resulta nos casos (0), (1), (2) ... (6) que são mostrados a seguir.

# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH.

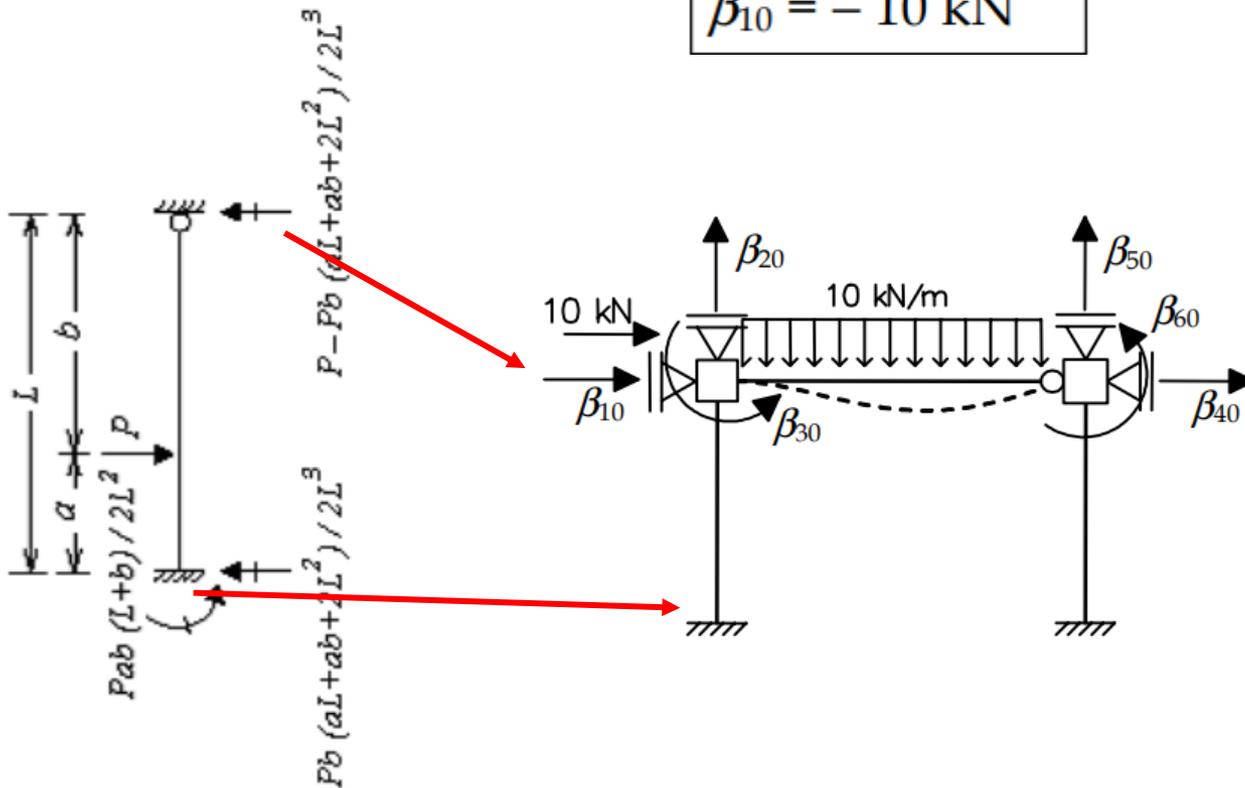


# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH.

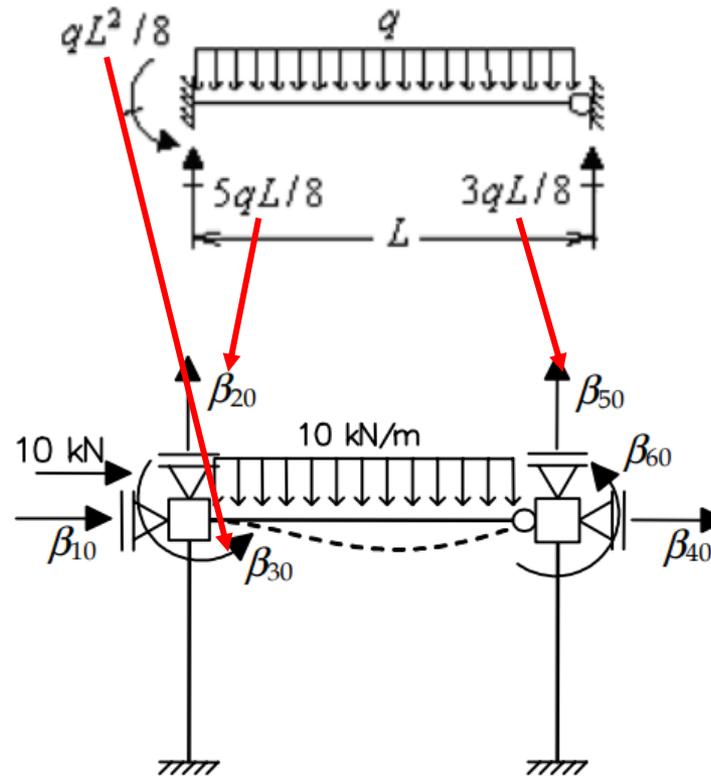
$$\beta_{10} = -10 \text{ kN}$$



# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH.



$$\beta_{20} = + 37,5 \text{ kN}$$

$$\beta_{30} = + 45 \text{ kNm}$$

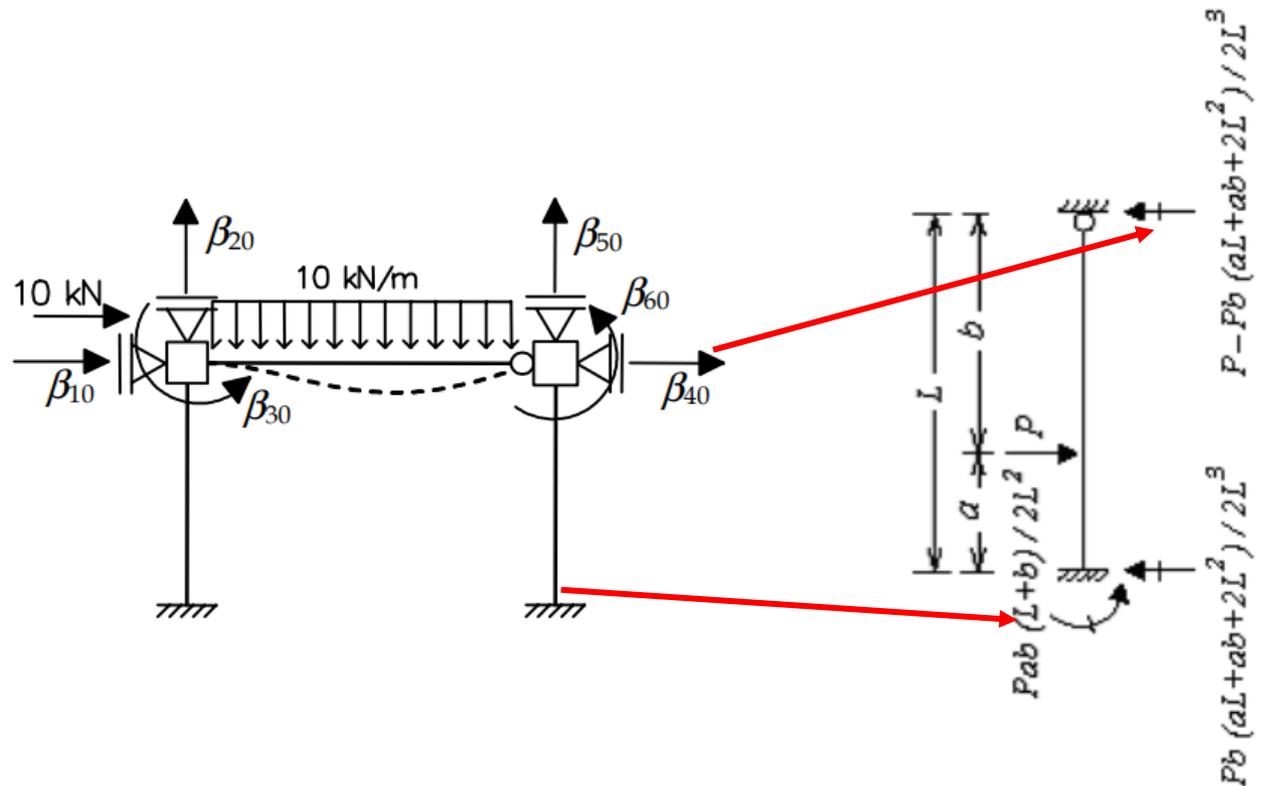
$$\beta_{50} = + 22,5 \text{ kN}$$

# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH.

$\beta_{40} = 0$
$\beta_{50} = + 22,5 \text{ kN}$
$\beta_{60} = 0$



# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH (engastamento perfeito).

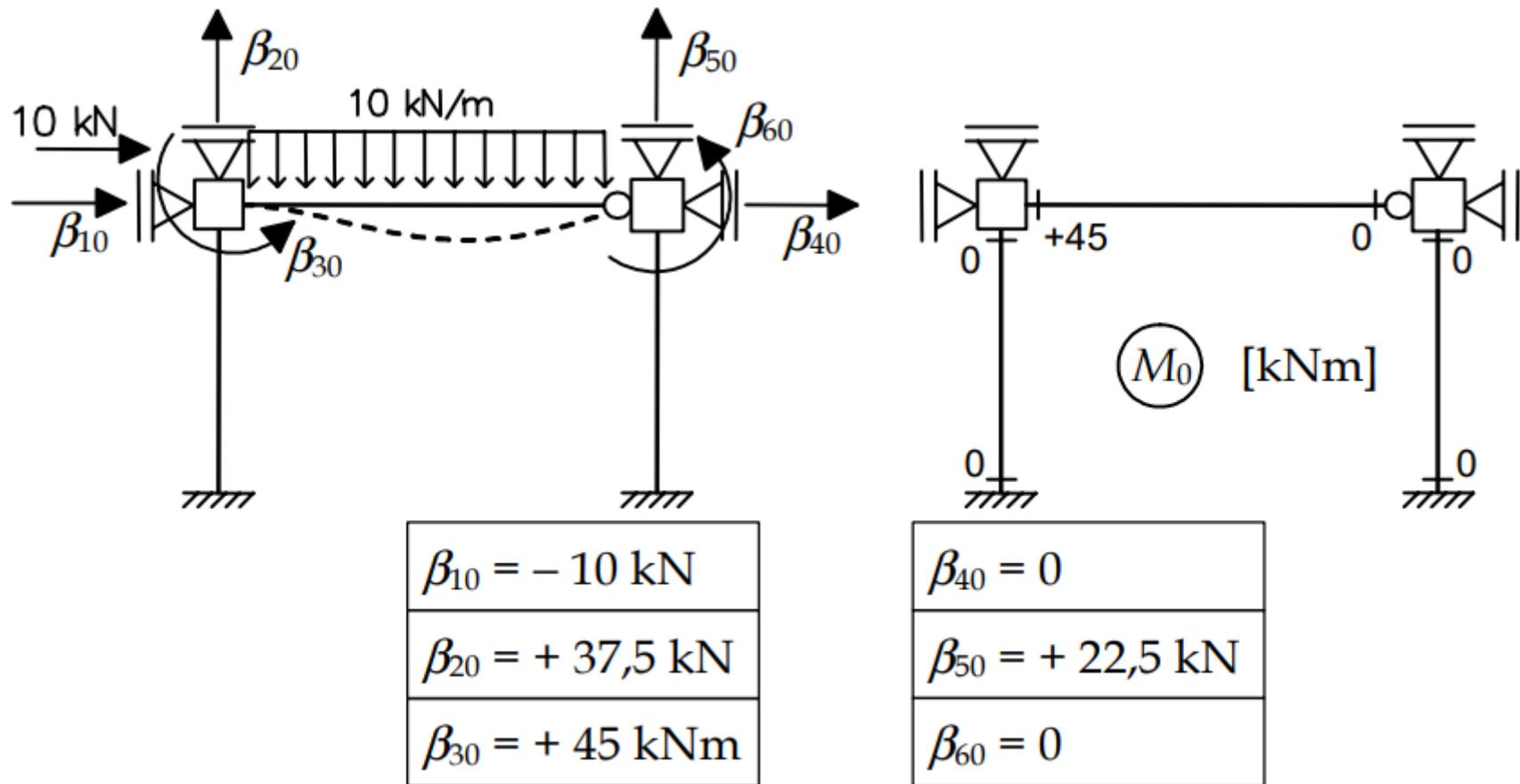
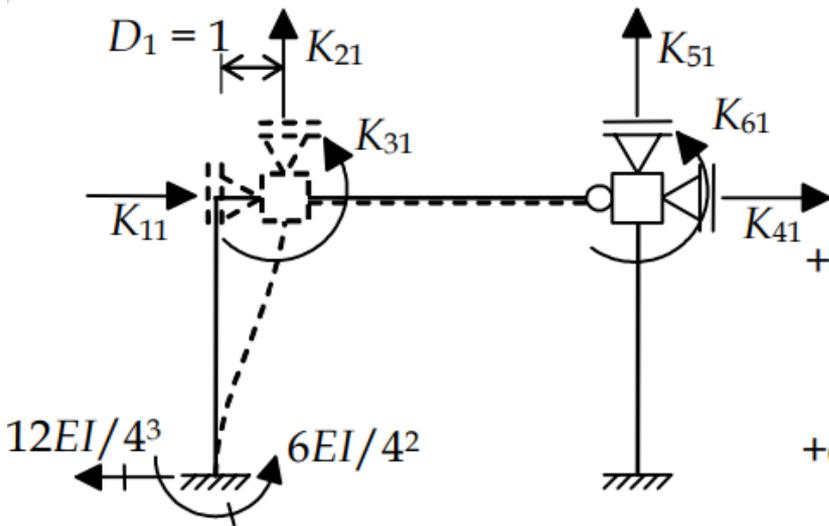
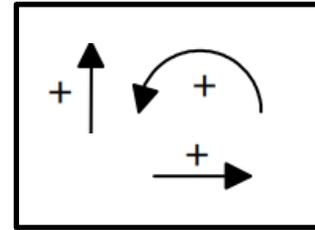


Figura 6.30 – Caso (0) da estrutura da Figura 6.28.

# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (1) – Deslocabilidade  $D_1$  isolada no SH.



$$K_{11} = + EA/6 + 12EI/4^3$$

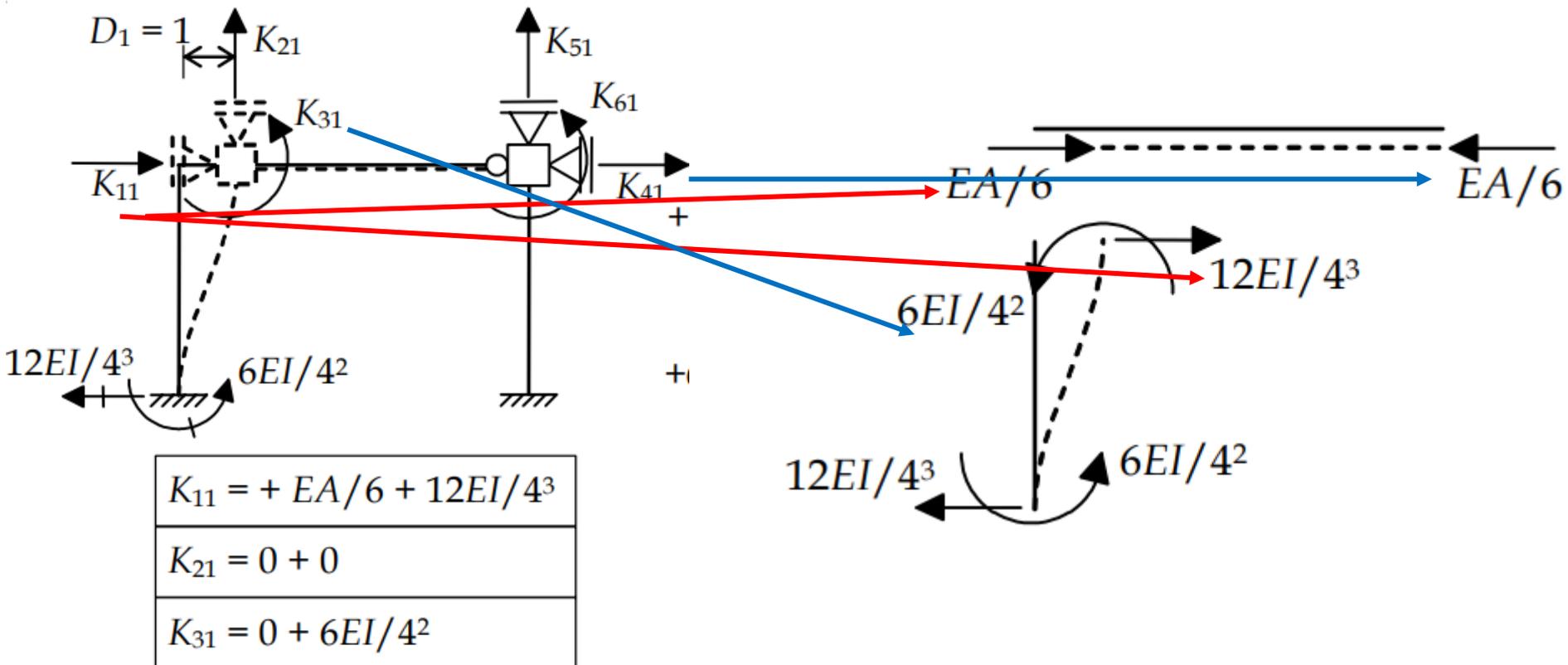
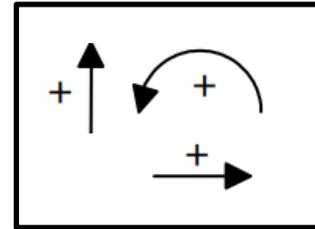
$$K_{21} = 0 + 0$$

$$K_{31} = 0 + 6EI/4^2$$

# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (1) – Deslocabilidade  $D_1$  isolada no SH.



# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (1) – Deslocabilidade  $D_1$  isolada no SH.

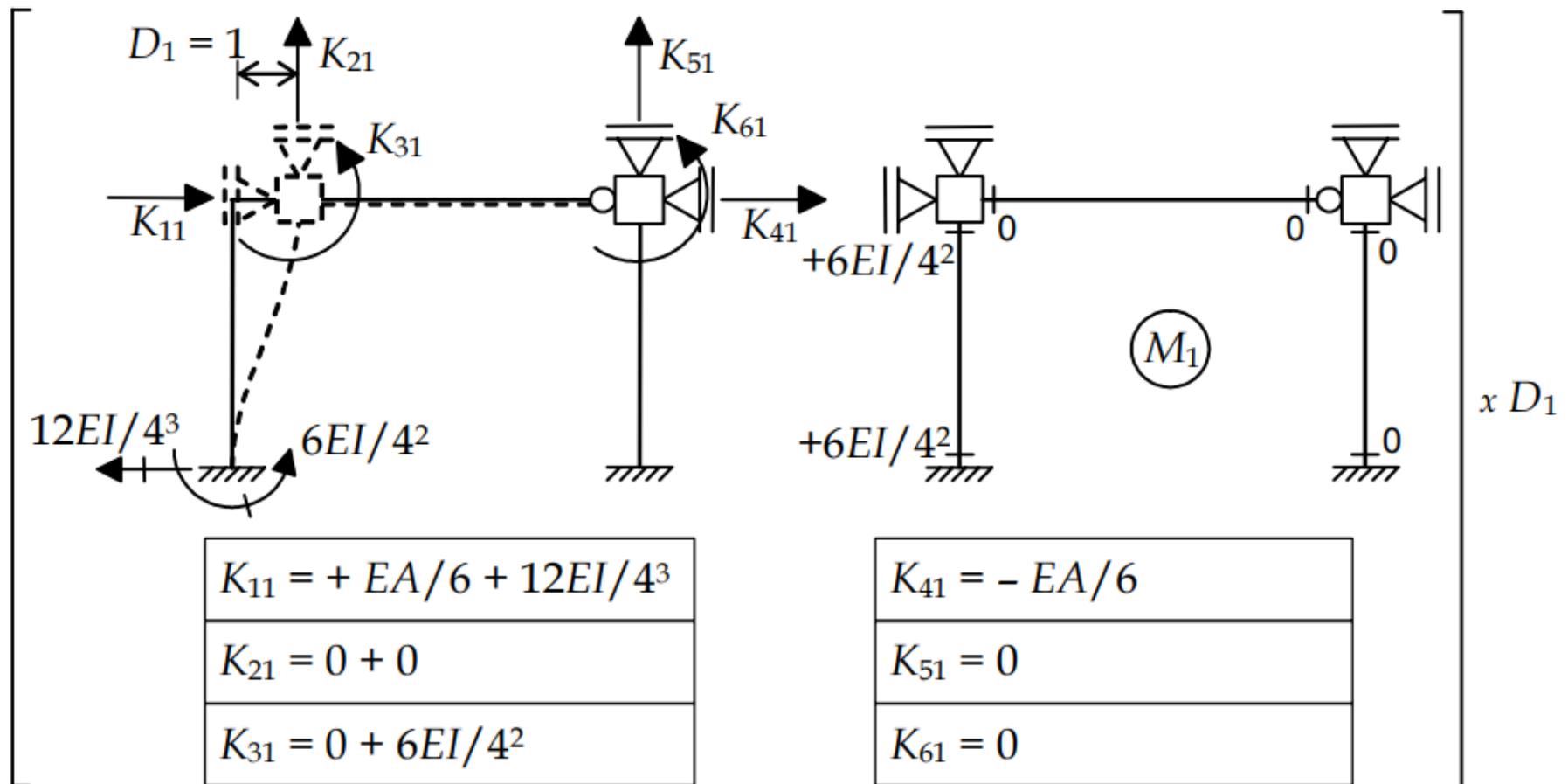
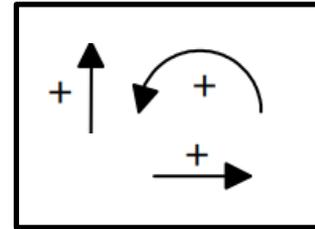


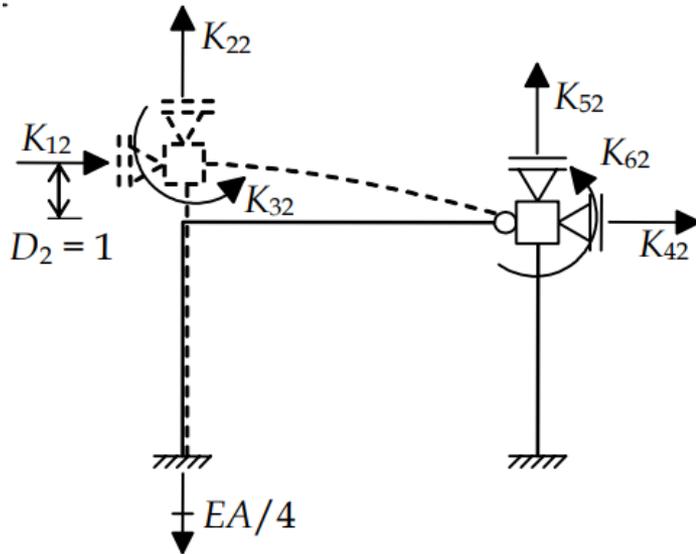
Figura 6.31 – Caso (1) da estrutura da Figura 6.28.

# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 2: Casos Básicos



Caso (2) – Deslocabilidade  $D_2$  isolada no SH.



$$K_{12} = 0 + 0$$

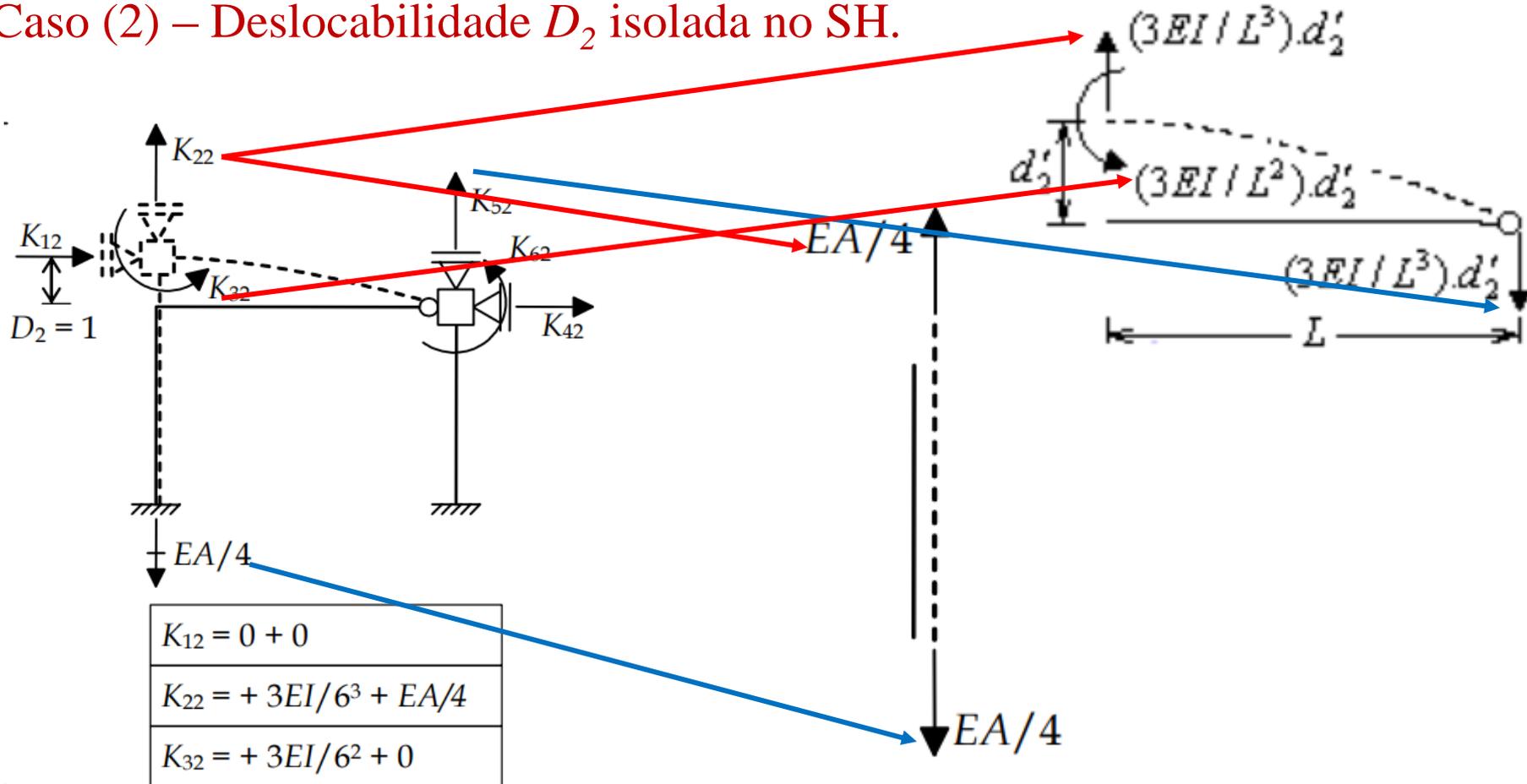
$$K_{22} = + 3EI/6^3 + EA/4$$

$$K_{32} = + 3EI/6^2 + 0$$

# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (2) – Deslocabilidade  $D_2$  isolada no SH.



# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (2) – Deslocabilidade  $D_2$  isolada no SH.

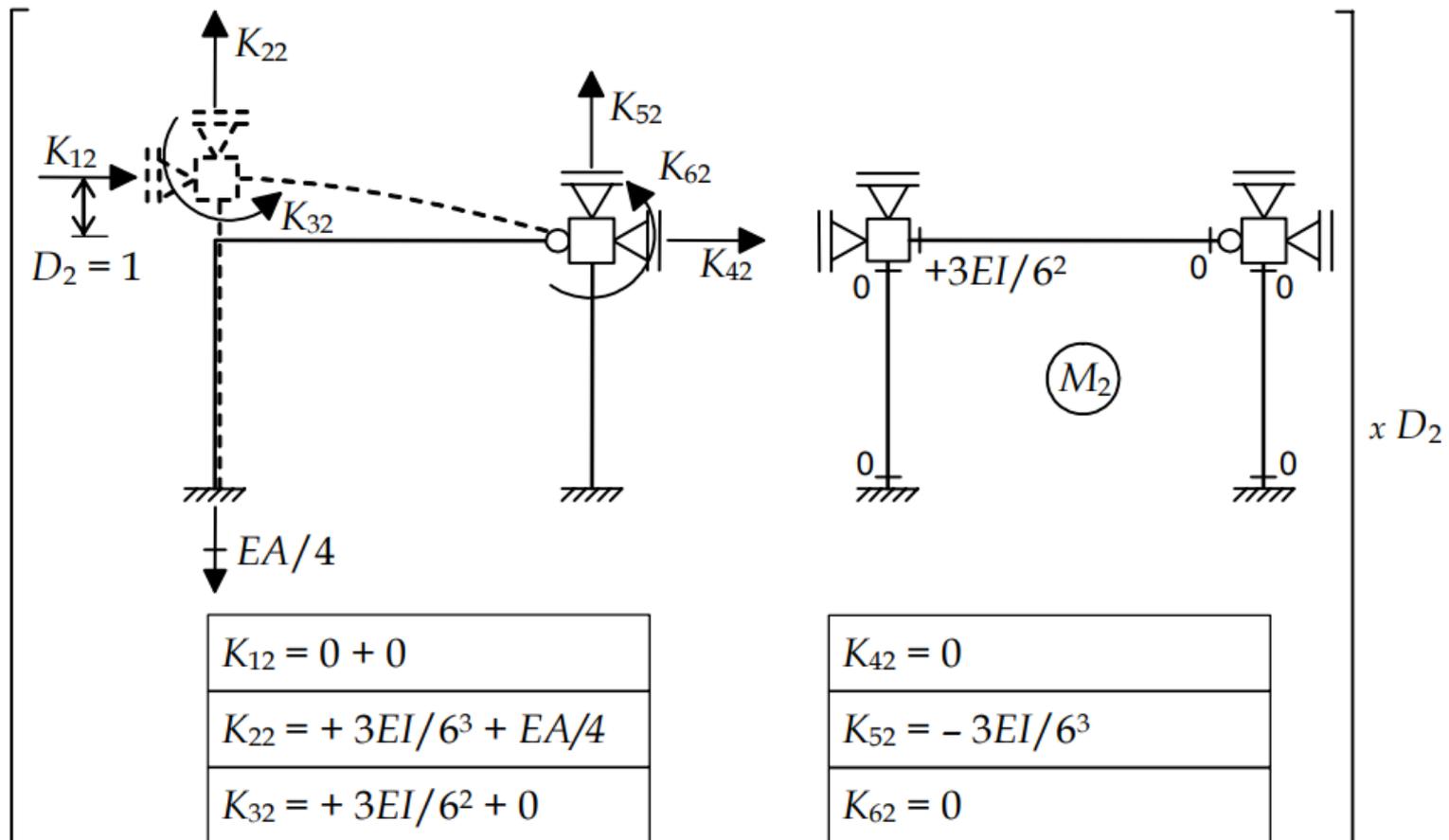
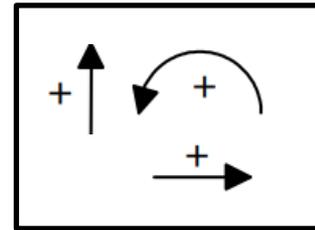
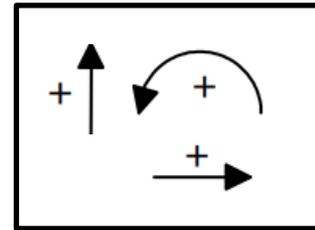


Figura 6.32 – Caso (2) da estrutura da Figura 6.28.

# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 2: Casos Básicos



Caso (3) – Deslocabilidade  $D_3$  isolada no SH.

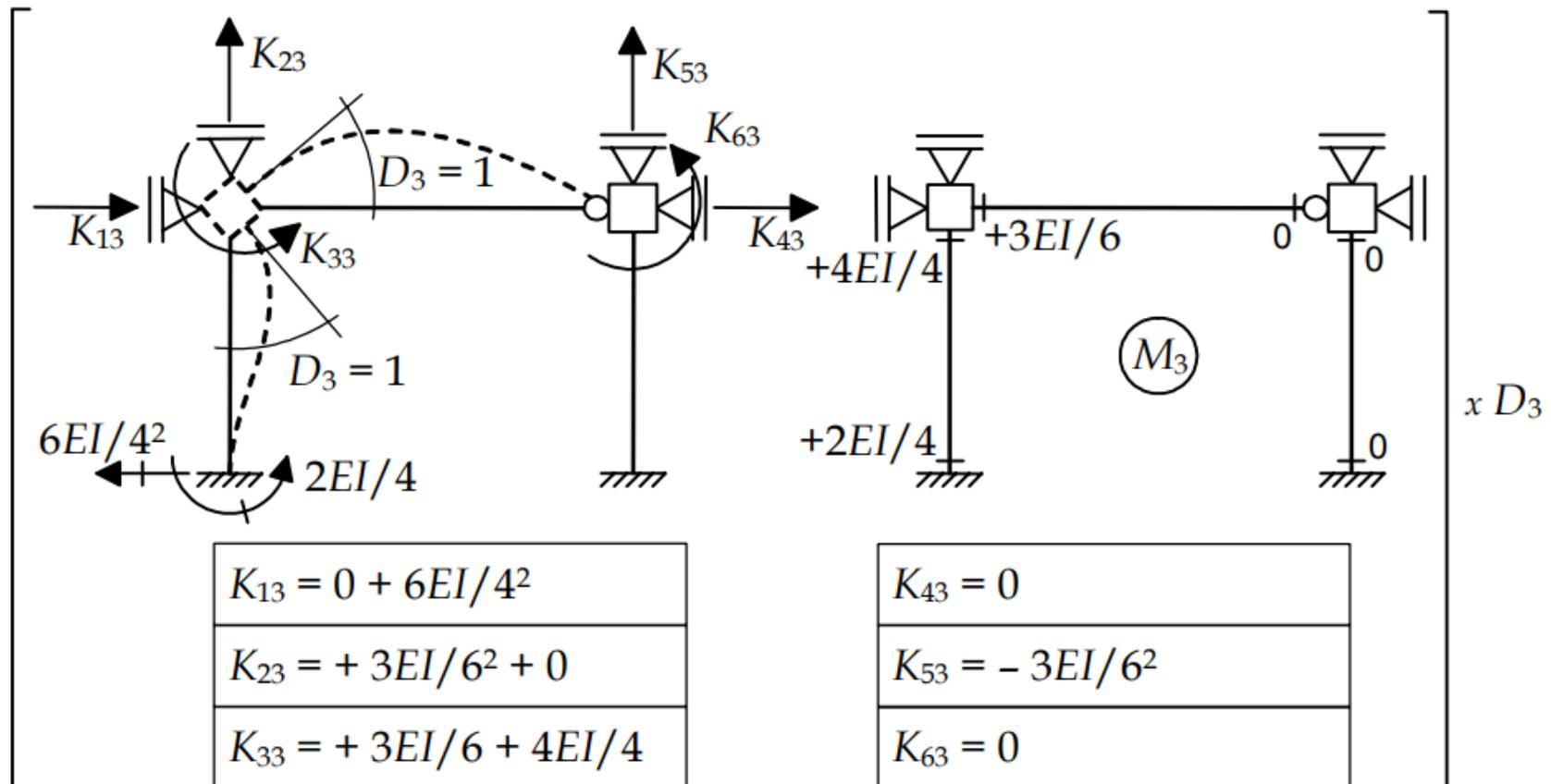


Figura 6.33 – Caso (3) da estrutura da Figura 6.28.

# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (4) – Deslocabilidade  $D_4$  isolada no SH.

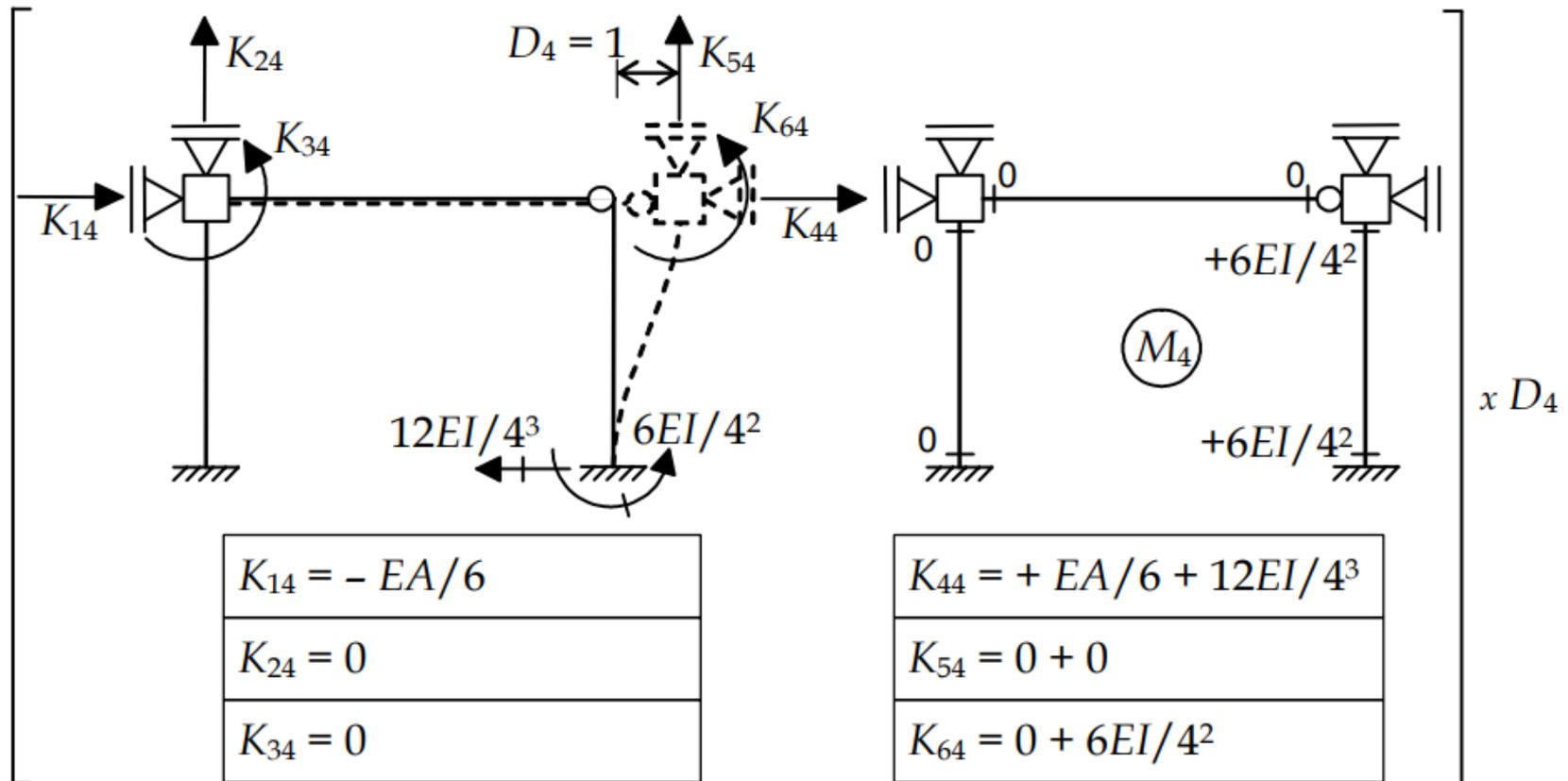
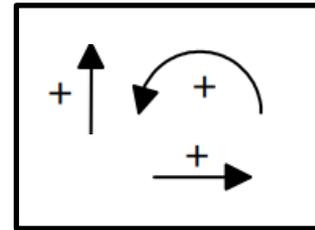


Figura 6.34 – Caso (4) da estrutura da Figura 6.28.

# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (5) – Deslocabilidade  $D_5$  isolada no SH.

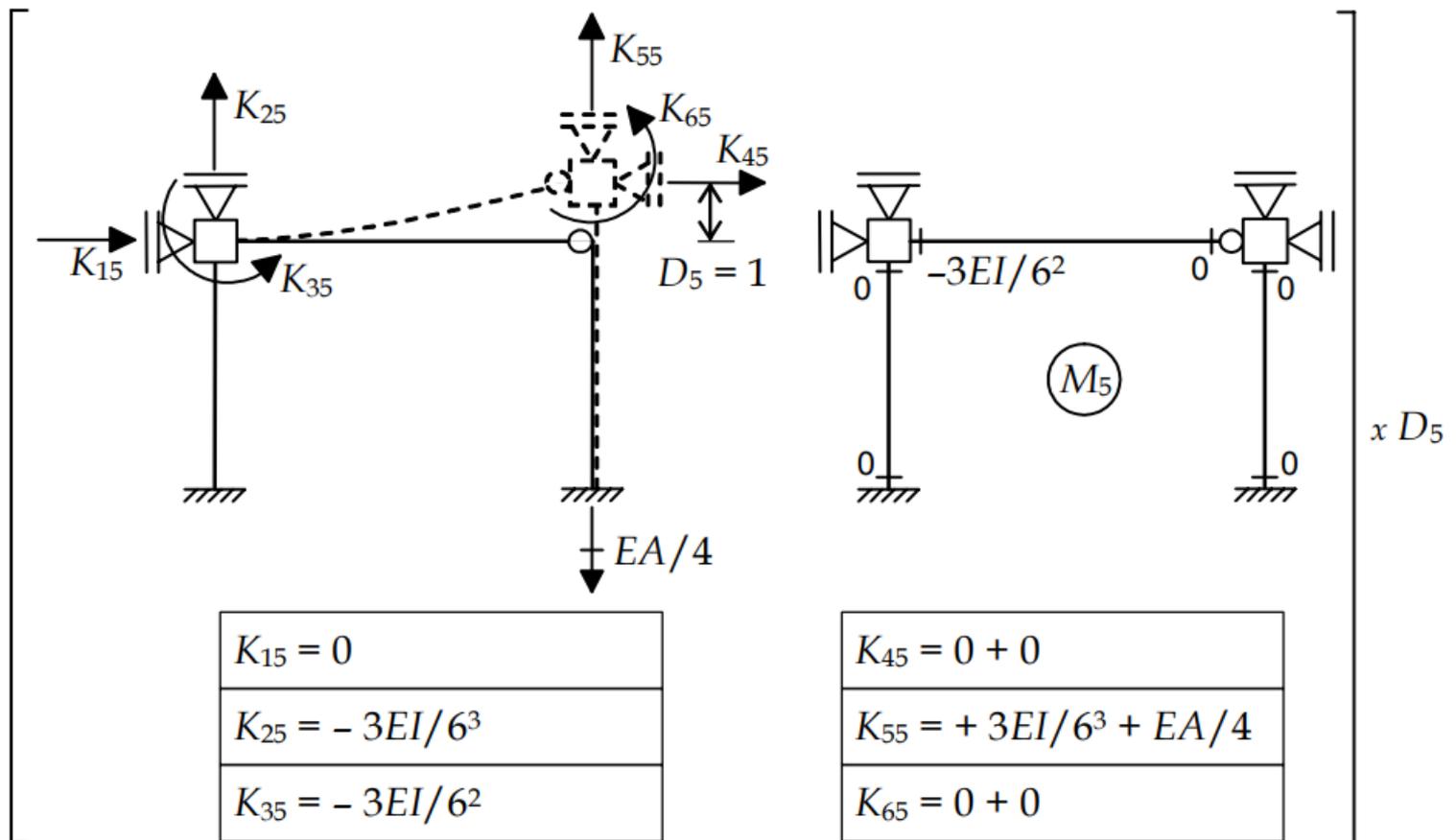
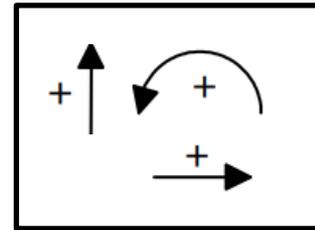


Figura 6.35 – Caso (5) da estrutura da Figura 6.28.

# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 2: Casos Básicos

Caso (6) – Deslocabilidade  $D_6$  isolada no SH.

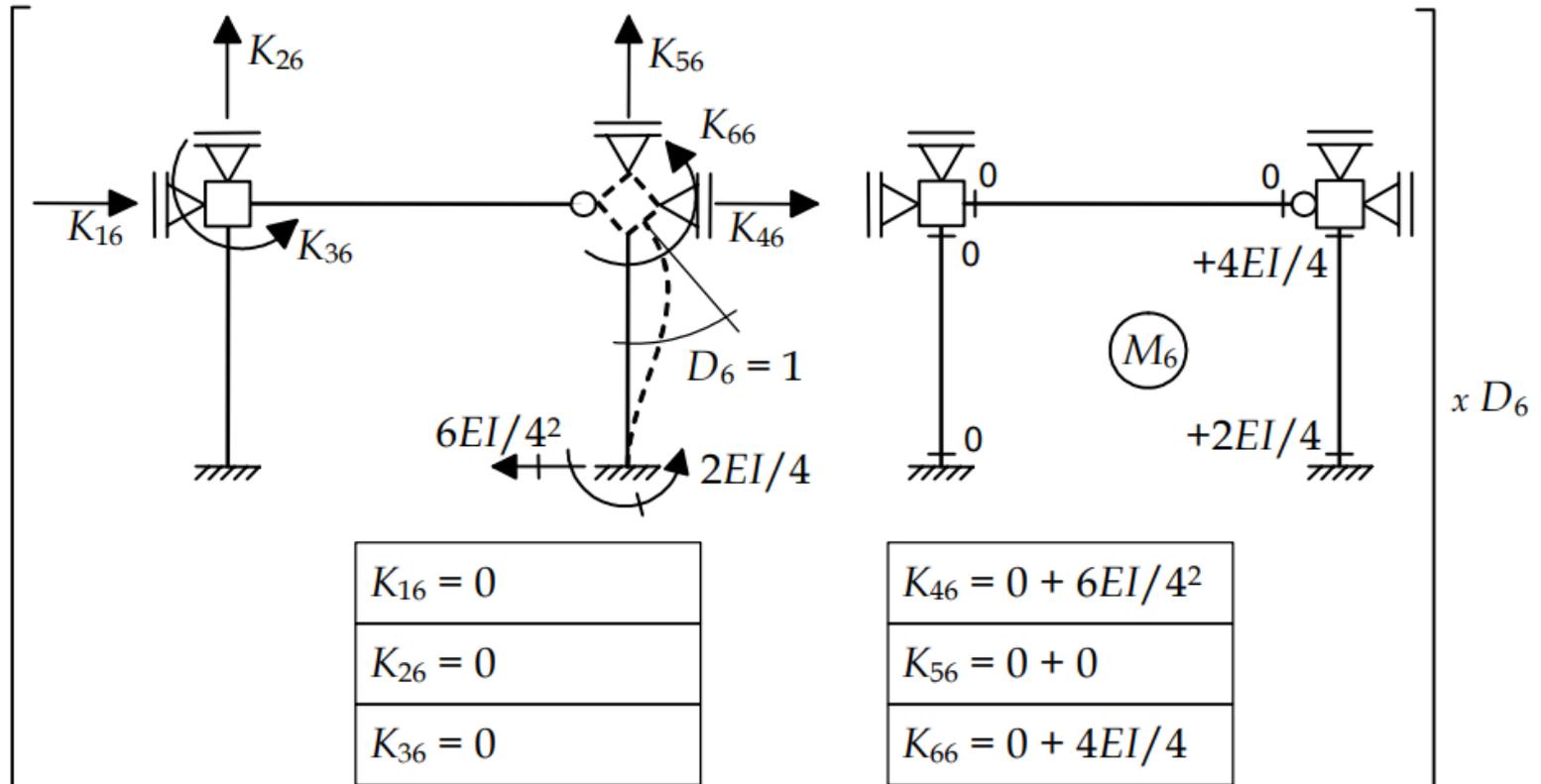
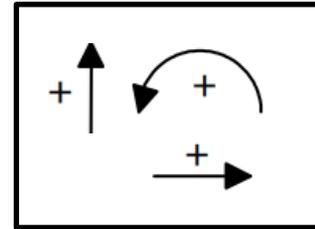


Figura 6.36 – Caso (6) da estrutura da Figura 6.28.

# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 3: Superposição de Efeitos

$$\begin{Bmatrix} -10,0 \\ +37,5 \\ +45,0 \\ 0 \\ +22,5 \\ 0 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} +25/48 & 0 & +3/8 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & +37/72 & +1/12 & 0 & -1/72 & 0 \\ +3/8 & +1/12 & +3/2 & 0 & -1/12 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & +25/48 & 0 & +3/8 \\ 0 & -1/72 & -1/12 & 0 & +37/72 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +3/8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_1 = +156,55/EI \\ D_2 = -63,35/EI \\ D_3 = -68,75/EI \\ D_4 = +137,25/EI \\ D_5 = -56,65/EI \\ D_6 = -51,45/EI \end{cases}$$

# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 4: Determinação dos esforços internos

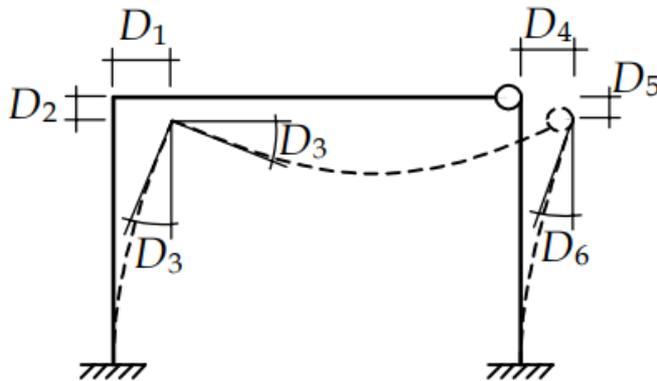
$$M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2 + M_3 D_3$$

Os diagramas finais de esforços da estrutura podem ser obtidos pela superposição dos diagramas de cada um dos casos básico.

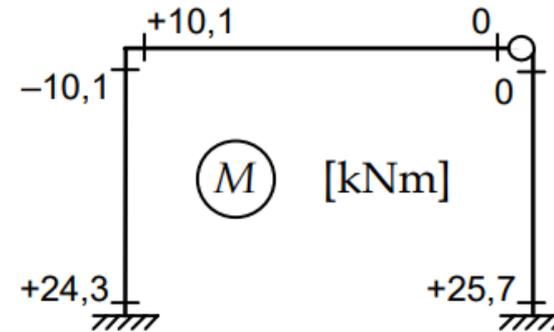
# EXEMPLO 3: Pórtico com articulação

## Passo 4: Determinação dos esforços internos

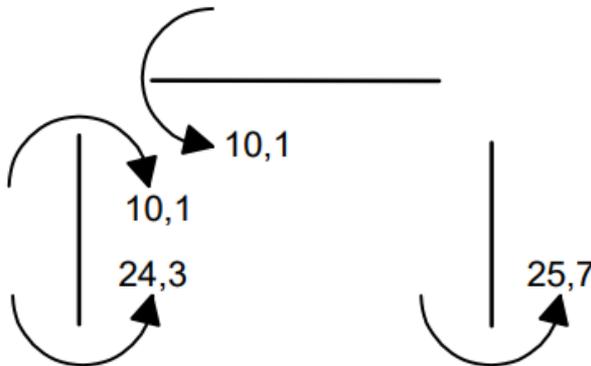
*Configuração deformada:  
(ampliada exageradamente)*



*Indicação dos momentos fletores  
usando a convenção de sinais:*



*Sentidos dos momentos fletores  
nas extremidades das barras:*



*Diagrama de momentos fletores:  
(traçado do lado das fibras tracionadas)*

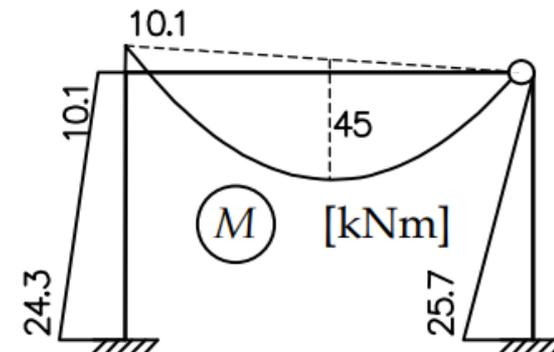


Figura 6.37 – Configuração deformada e diagrama de momentos fletores da estrutura da Figura 6.28.

# EXEMPLO 4: Pórtico com Barra Inclinada

# EXEMPLO 4: Pórtico com barra inclinada

Considere as duas estruturas mostradas abaixo. A da esquerda é um **quadro isostático** e a da direita é um **quadro hiperestático**. Os dois quadros sofrem a mesma solicitação: uma força horizontal de **50 kN** aplicada no apoio da direita e um **recalque** desse mesmo apoio de **6 mm** para baixo. Todas as barras têm um material com módulo de elasticidade  $E = 1,0 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$  e seções transversais com momento de inércia  $I = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ . Considere válida a hipótese de **pequenos deslocamentos**.

...

**CONTINUA na Próxima Parte**