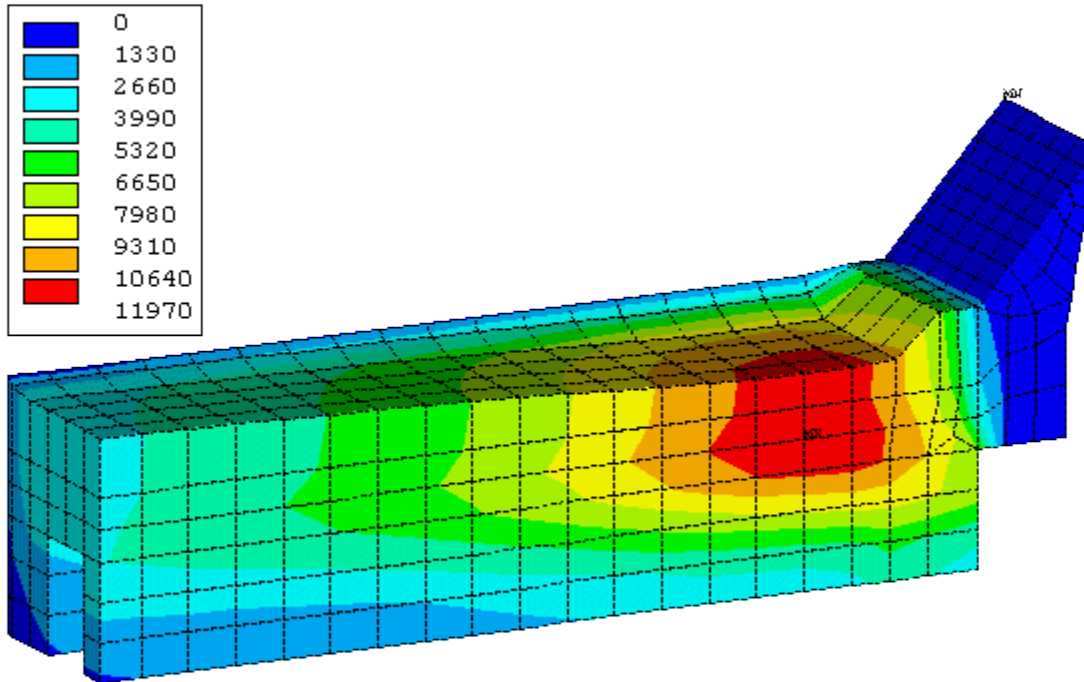




Mecânica dos Sólidos II

Prof. Dr. Alverlando Ricardo

Aula 8: PARTE II: **Tensão & Deformação**

TENSÕES PRINCIPAIS E TENSÃO DE CISALHAMENTO MÁXIMA

TENSÕES PRINCIPAIS

Tensões principais

- Trabalhando um pouco com uma das equações anteriormente obtidas:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \therefore \quad \sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$


Tensões principais

- Trabalhando um pouco com uma das equações anteriormente obtidas:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \therefore \quad \sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$


Elevando ao quadrado:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \right)^2$$
$$= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cos^2 2\theta + 2 \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta \cdot \tau_{xy} \sin 2\theta + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\theta$$

Tensões principais

- Trabalhando um pouco com uma das equações anteriormente obtidas:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \therefore \quad \sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$


Elevando ao quadrado:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \right)^2$$
$$= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cos^2 2\theta + 2 \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta \cdot \tau_{xy} \sin 2\theta + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\theta$$

- Trabalhando com a outra equação:

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Tensões principais

- Trabalhando um pouco com uma das equações anteriormente obtidas:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \therefore \quad \sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$


Elevando ao quadrado:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \right)^2$$
$$= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cos^2 2\theta + 2 \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta \cdot \tau_{xy} \sin 2\theta + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\theta$$

- Trabalhando com a outra equação:

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Elevando ao quadrado:

$$\tau_{x'y'}^2 = \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \right)^2$$
$$= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \sin^2 2\theta + 2 \cdot \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta \right) \cdot \tau_{xy} \cos 2\theta + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\theta$$

Tensões principais

- Trabalhando um pouco com uma das equações anteriormente obtidas:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \therefore \quad \sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

Elevando ao quadrado:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \right)^2$$
$$= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cos^2 2\theta + 2 \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta \cdot \tau_{xy} \sin 2\theta + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\theta$$

- Trabalhando com a outra equação:

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Elevando ao quadrado:

$$\tau_{x'y'}^2 = \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \right)^2$$
$$= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \sin^2 2\theta + 2 \cdot \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta \right) \cdot \tau_{xy} \cos 2\theta + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\theta$$

O que acontece se somarmos membro a membro as equações resultantes?

Tensões principais

- Obtemos:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

- Definindo:

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Podemos reescrever a equação na seguinte forma:

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{med})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$

Tensões principais

- Obtemos:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

- Definindo:

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

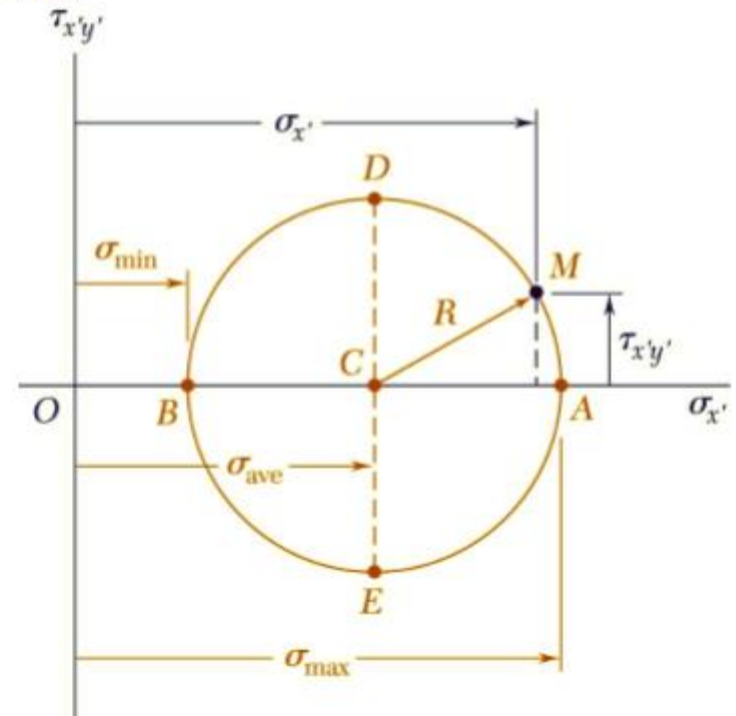
- Podemos reescrever a equação na seguinte forma:

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{med})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$



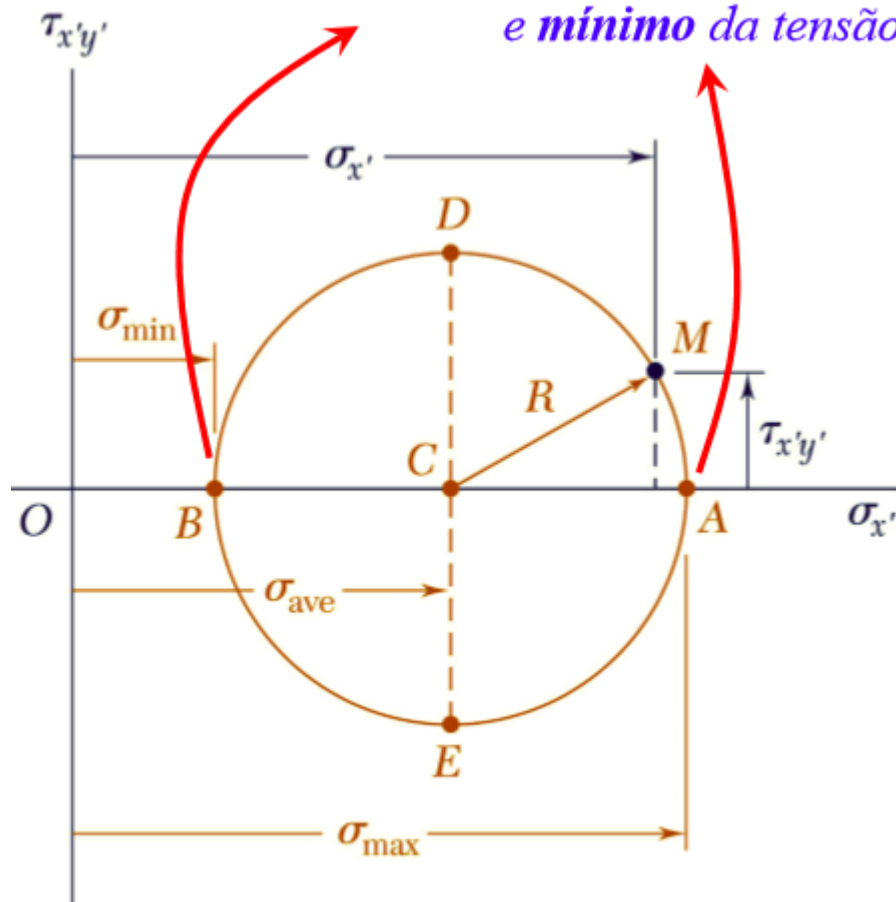
Comparando com a equação de uma circunferência:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



Tensões principais

*Pontos correspondentes aos valores **máximo** e **mínimo** da tensão normal $\sigma_{x'}$.*



Em ambos os casos, a tensão $\tau_{x'y'}$ relacionada é nula!



Podemos determinar o ângulo associado às tensões axiais máxima e mínima através dessa condição!

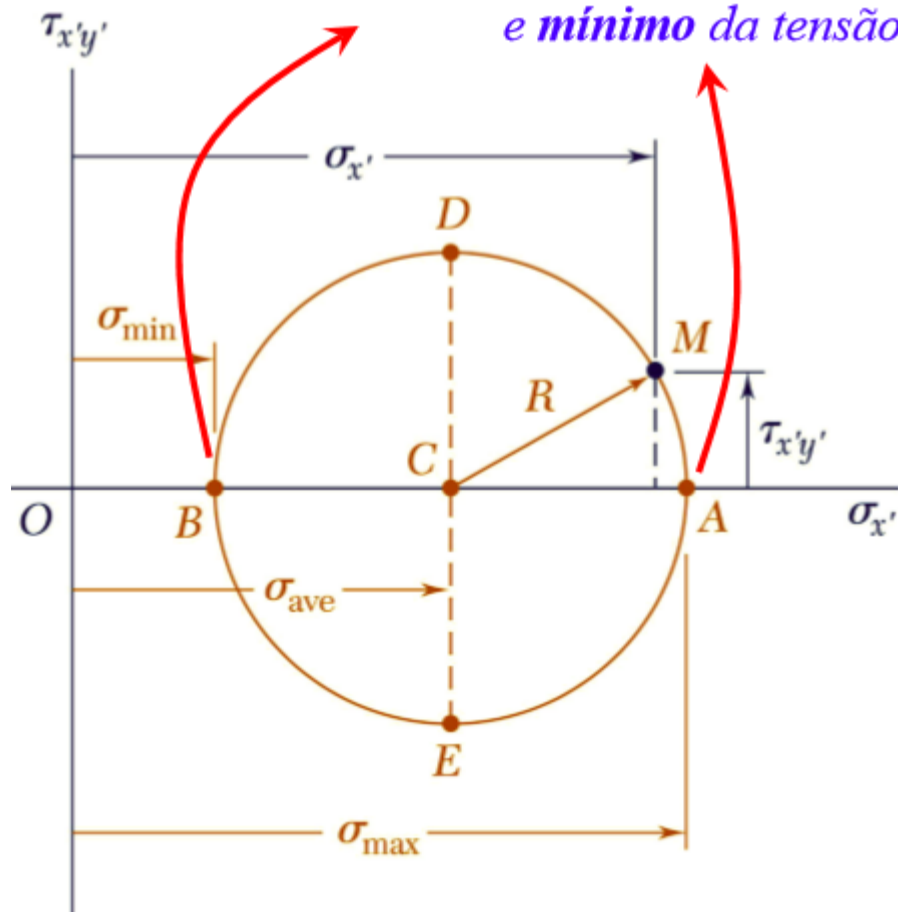
$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$



Tensões principais

*Pontos correspondentes aos valores **máximo** e **mínimo** da tensão normal $\sigma_{x'}$.*



Em ambos os casos, a tensão $\tau_{x'y'}$ relacionada é nula!



Podemos determinar o ângulo associado às tensões axiais máxima e mínima através dessa condição!

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$



$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Tensões principais

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

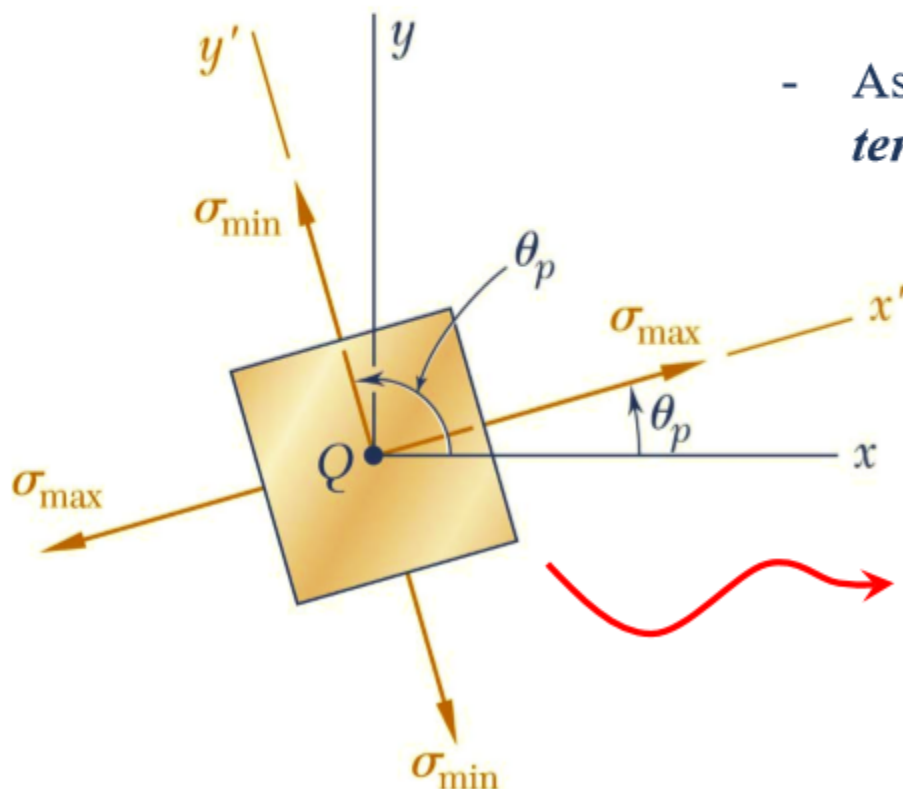
- Esta equação define dois valores de $2\theta_p$, que estão defasados em 180° e, portanto, dois valores de θ_p defasados em 90° ;

Tensões principais

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

- Esta equação define dois valores de $2\theta_p$, que estão defasados em 180° e, portanto, dois valores de θ_p defasados em 90° ;
- Os planos que contêm as faces do elemento orientado segundo um desses ângulos são os chamados *planos principais de tensão* no ponto Q .

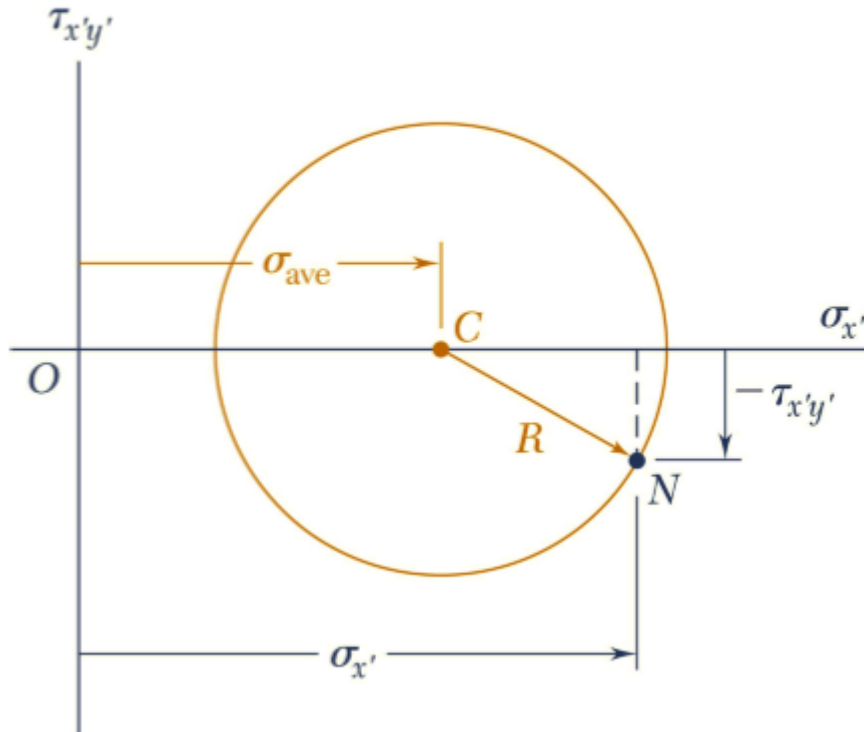
- As tensões $\sigma_{\min}$ e $\sigma_{\max}$ são denominadas *tensões principais*.



Nenhuma tensão de cisalhamento atua nos planos principais.

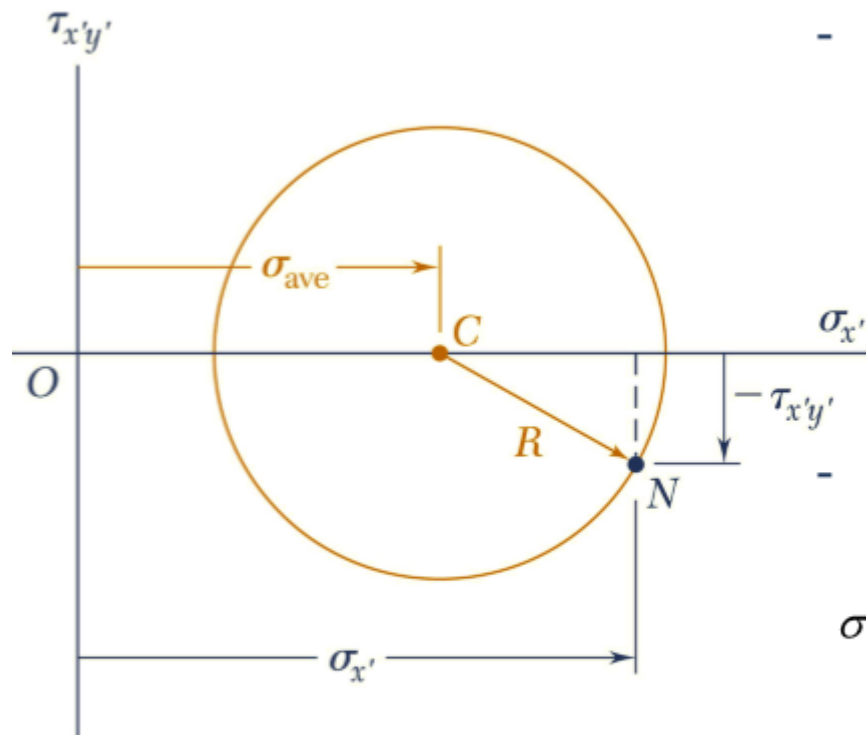
Tensões principais

- As tensões principais podem ser determinadas da seguinte maneira:



Tensões principais

- As tensões principais podem ser determinadas da seguinte maneira:



- Observando que:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{med} - R$$

- Tendo definido que:

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

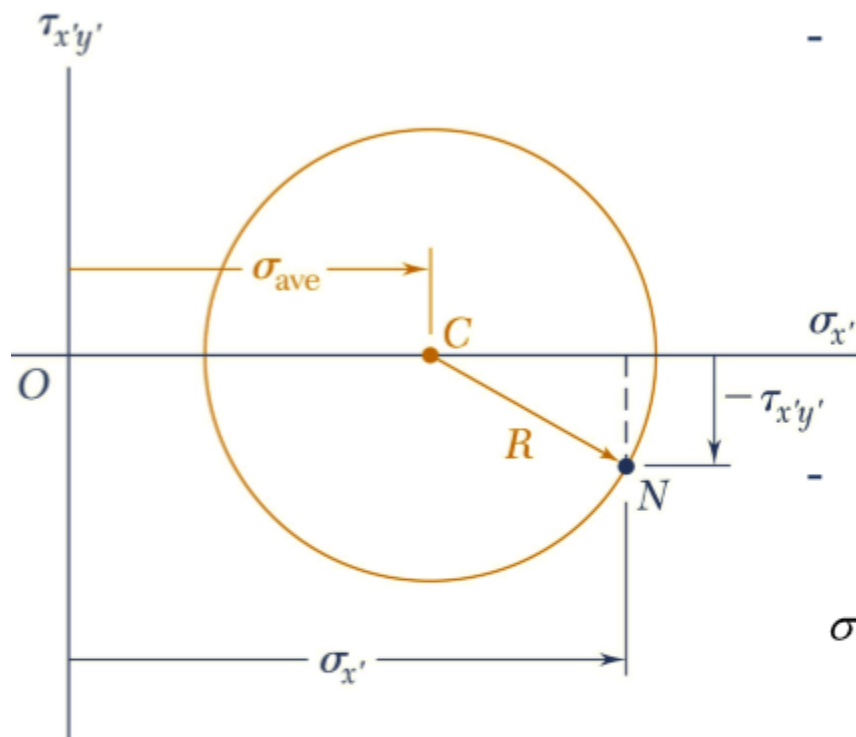
- Então:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Tensões principais

- As tensões principais podem ser determinadas da seguinte maneira:



- Observando que:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{med} + R$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{med} - R$$

- Tendo definido que:

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Então:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Outra maneira de determinar estas tensões seria derivando $\sigma_{x'}$ em relação a θ e igualando a zero.

Formulário:

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

➤ *Ângulos nos quais ocorrem as tensões principais*

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

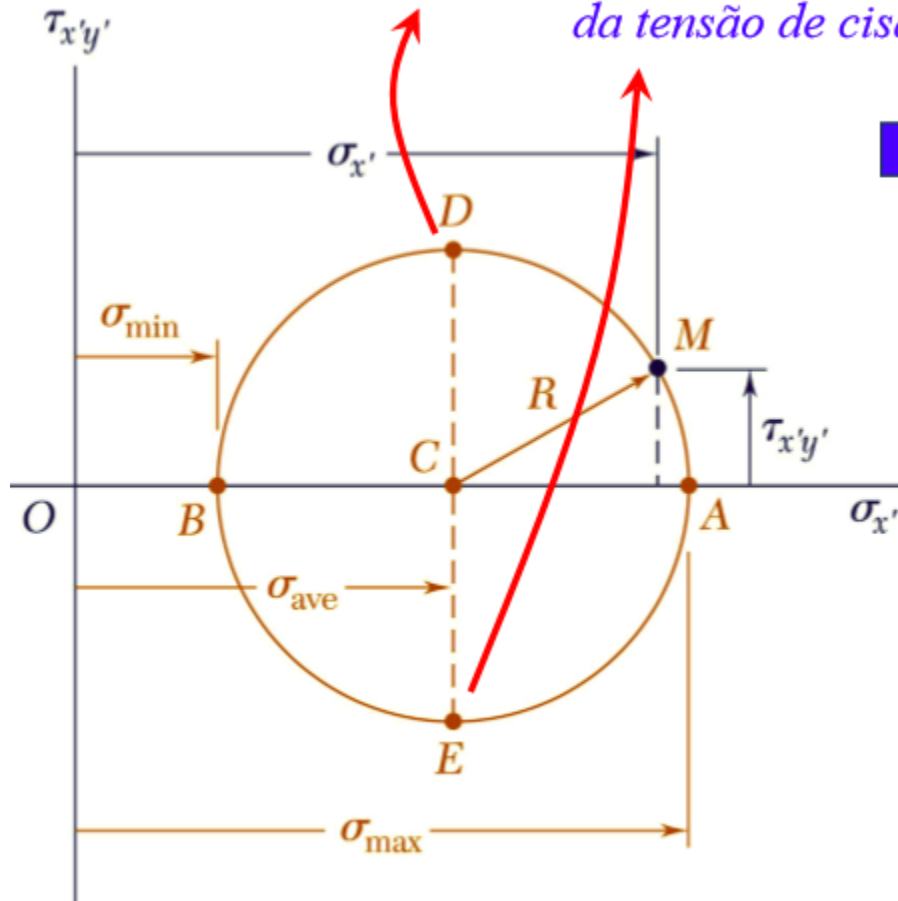


➤ *Tensões Principais*

Tensão de cisalhamento máxima

Tensão de cisalhamento máxima

Pontos correspondentes ao maior valor numérico da tensão de cisalhamento $\tau_{x'y'}$.

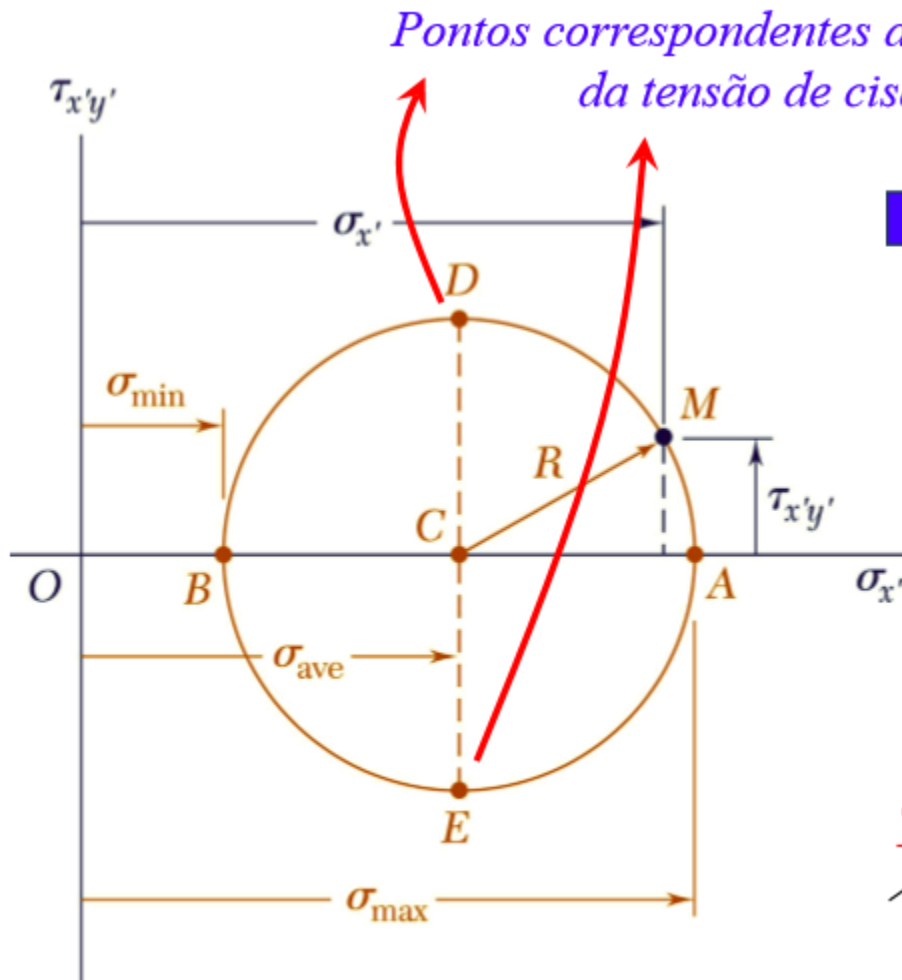


Em ambos os casos, a tensão normal associada é:

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Podemos determinar o ângulo associado ao máximo valor da tensão de cisalhamento através dessa condição!

Tensão de cisalhamento máxima



Em ambos os casos, a tensão normal associada é:

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

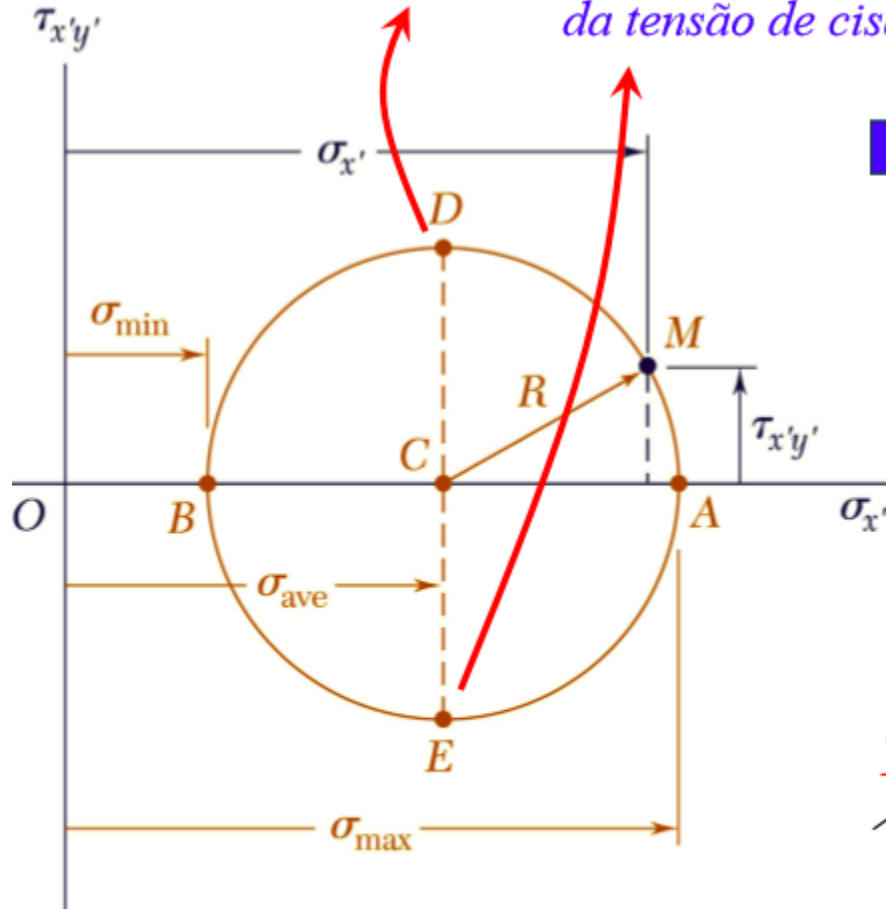
Podemos determinar o ângulo associado ao máximo valor da tensão de cisalhamento através dessa condição!

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\cancel{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta = \cancel{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}$$

Tensão de cisalhamento máxima

Pontos correspondentes ao maior valor numérico da tensão de cisalhamento $\tau_{x'y'}$.



Em ambos os casos, a tensão normal associada é:

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Podemos determinar o ângulo associado ao máximo valor da tensão de cisalhamento através dessa condição!

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\cancel{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta = \cancel{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}$$



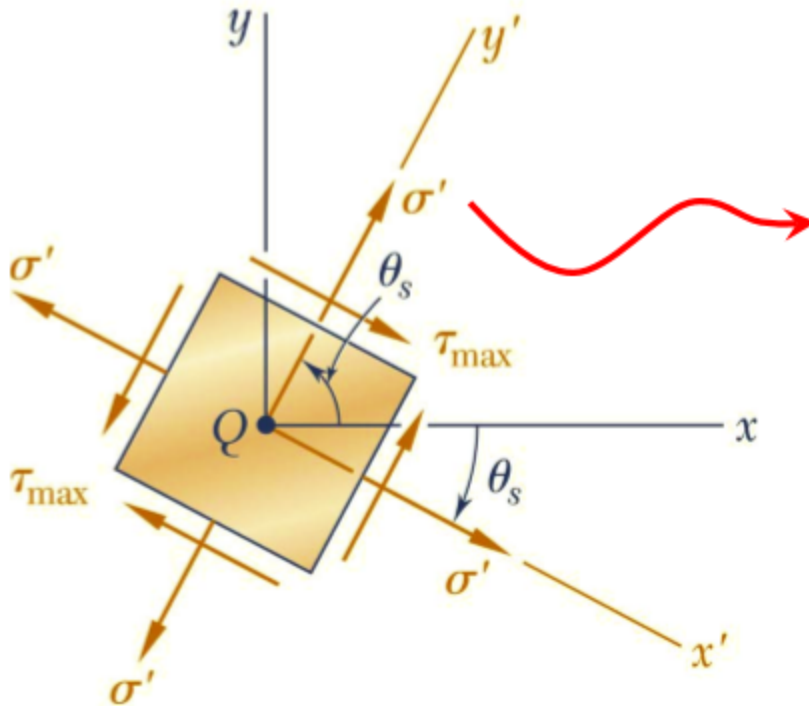
$$\text{tg}(2\theta_c) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$



Tensão de cisalhamento máxima

$$\operatorname{tg}(2\theta_c) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

- Esta equação define dois valores de $2\theta_c$, defasados em 180° e, portanto, dois valores de θ_c defasados em 90° ;

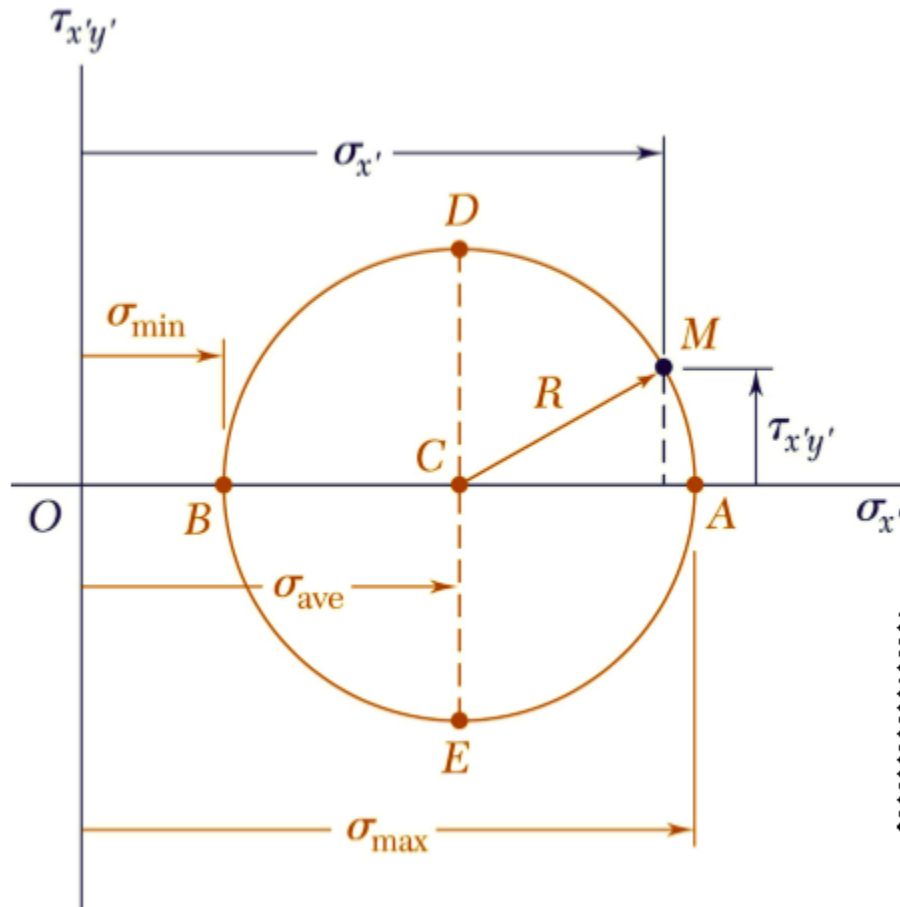


A tensão normal correspondente à condição de tensão de cisalhamento máxima é:

$$\sigma' = \sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Tensão de cisalhamento máxima

- O valor máximo da tensão de cisalhamento é igual ao raio R da circunferência:



$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Tensão de cisalhamento máxima

- Comparando:

$$\boxed{\operatorname{tg}(2\theta_c) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}} \quad \times \quad \boxed{\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}}$$

- $\operatorname{tg}2\theta_c$ é o inverso negativo de $\operatorname{tg}2\theta_p$;
- Portanto, os ângulos $2\theta_c$ e $2\theta_p$ estão defasados em 90° , e os ângulos θ_c e θ_p estão defasados em 45° ;
- Então:

Os planos de tensão de cisalhamento máxima estão defasados em 45° dos planos principais!

Tensão de cisalhamento máxima

- Comparando:

$$\boxed{\operatorname{tg}(2\theta_c) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}} \quad \times \quad \boxed{\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}}$$

- $\operatorname{tg}2\theta_c$ é o inverso negativo de $\operatorname{tg}2\theta_p$;
- Portanto, os ângulos $2\theta_c$ e $2\theta_p$ estão defasados em 90° , e os ângulos θ_c e θ_p estão defasados em 45° ;
- Então:

Os planos de tensão de cisalhamento máxima estão defasados em 45° dos planos principais!

Não podemos esquecer que nossa análise esteve limitada a rotações no plano da tensão!

Tensão de cisalhamento máxima

- Quando existe um EPT, **uma das tensões é nula**.
- Se os valores σ_{p1} e σ_{p2} tiverem o **mesmo sinal**, a σ_{p3} será a **máxima ou mínima** tensão normal.
- Então a tensão de cisalhamento máxima pode ser:
 $(\sigma_{p1} - \sigma_{p2})/2$ ou $(0 - \sigma_{p2})/2$ ou $(\sigma_{p1} - 0)/2$.
- Uma outra relação útil é:

$$\sigma_{p1} + \sigma_{p2} = \sigma_x + \sigma_y$$

Não podemos esquecer que nossa análise esteve limitada a rotações no plano da tensão!

Formulário:

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

➤ *Ângulos nos quais ocorrem as tensões principais*

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



➤ *Tensões Principais*

$$\operatorname{tg}(2\theta_c) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

➤ *Ângulos nos quais ocorrem as tensões cisalhantes mínima e máxima*

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



➤ *Tensões Cisalhante máxima em módulo*

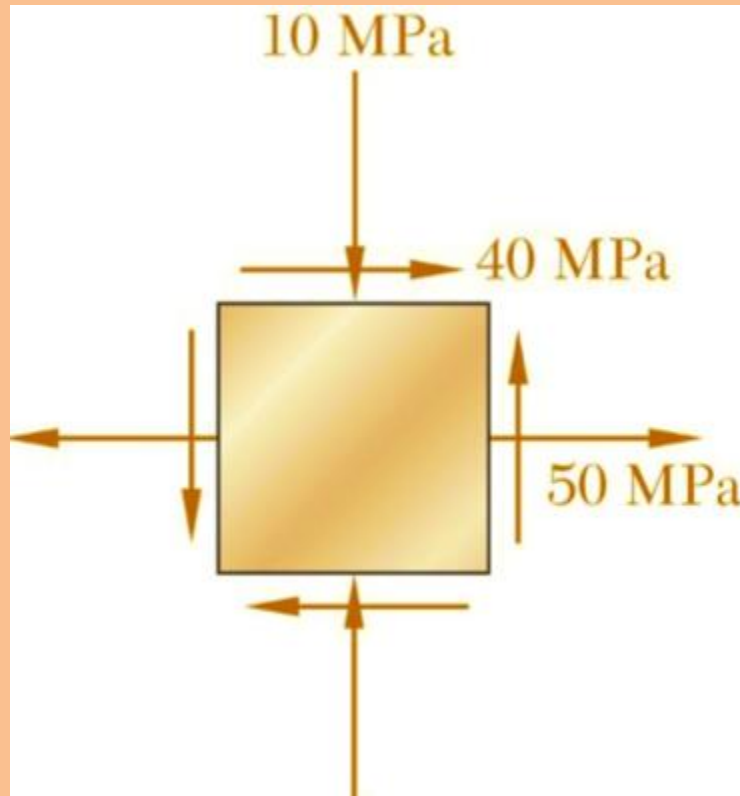
$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

➤ *Tensão normal correspondente a tensão cisalhante máxima:*

Exemplo 7.1 (Beer et al., 2008)

Para o estado plano de tensão mostrado, determine:

- a) Os planos principais;
- b) As tensões principais;
- c) A tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal correspondente.



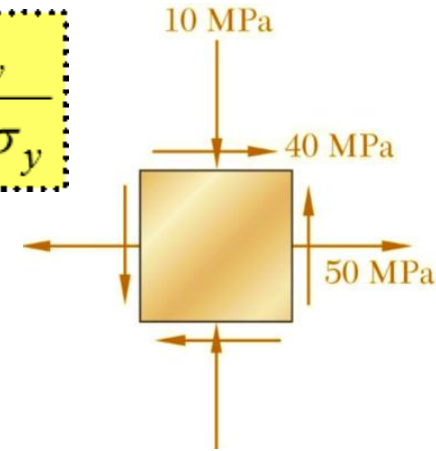
Exemplo 7.1 (Beer et al., 2008)

a) Planos principais:

Segundo a convenção de sinais:

$$\sigma_x = +50 \text{ MPa} \quad \sigma_y = -10 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$$

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Exemplo 7.1 (Beer et al., 2008)

a) Planos principais:

Segundo a convenção de sinais:

$$\sigma_x = +50 \text{ MPa} \quad \sigma_y = -10 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$$

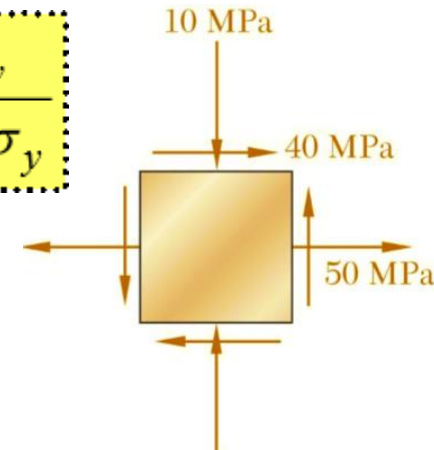
Então:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(+40)}{50 - (-10)} = 1,333$$

$$2\theta_p = 53,1^\circ \quad \text{e} \quad 180^\circ + 53,1^\circ = 233,1^\circ$$

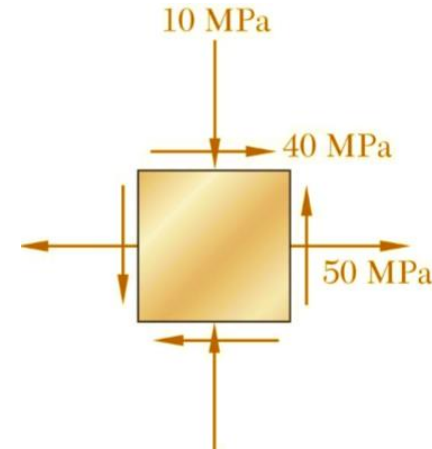
$$\theta_p = 26.6^\circ \quad \text{e} \quad \theta_p = 116.6^\circ$$

$$\text{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Exemplo 7.1 (Beer et al., 2008)

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



b) Tensões principais:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max, \min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= 20 \pm \sqrt{(30)^2 + (40)^2}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= 70 \text{ MPa} \\ \sigma_{\min} &= -30 \text{ MPa}\end{aligned}$$

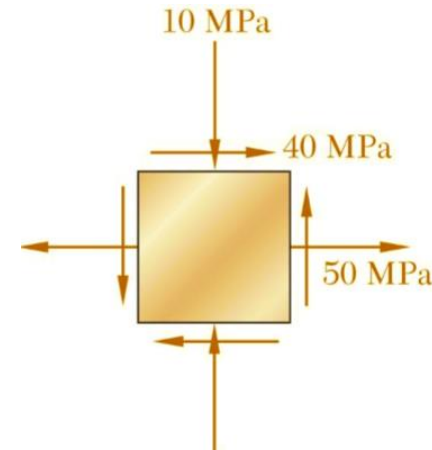
Exemplo 7.1 (Beer et al., 2008)

b) Tensões principais:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$= 20 \pm \sqrt{(30)^2 + (40)^2}$$



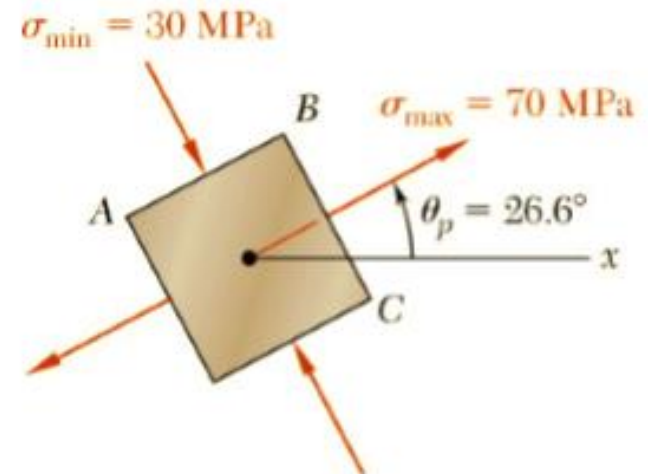
$$\sigma_{\max} = 70 \text{ MPa}$$
$$\sigma_{\min} = -30 \text{ MPa}$$



Para o ângulo $\theta = 26,6^\circ$ anteriormente encontrado, temos:

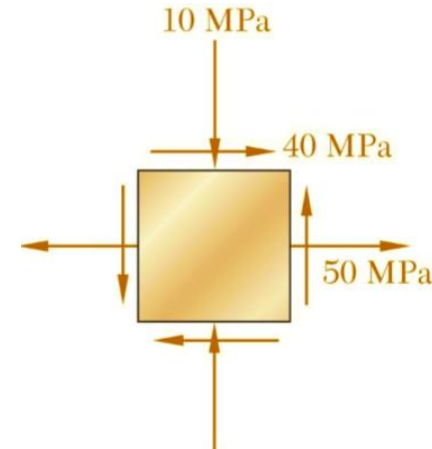
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$
$$\sigma_{x'} = \frac{50 - 10}{2} + \frac{50 + 10}{2} \cos 53,1^\circ + 40 \sin 53,1^\circ$$
$$= 20 + 30 \cos 53,1^\circ + 40 \sin 53,1^\circ$$
$$= 70 \text{ MPa} = \sigma_{\max}$$

Então:



Exemplo 7.1 (Beer et al., 2008)

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



c) Tensão de cisalhamento máxima:

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \sqrt{(30)^2 + (40)^2}\end{aligned}$$



$$\tau_{\max} = 50 \text{ MPa}$$

Ângulos relacionados à tensão de cisalhamento máxima:

$$\theta_s = \theta_p - 45$$



$$\theta_s = -18.4^\circ \quad \text{e} \quad \theta_s = 71.6^\circ$$

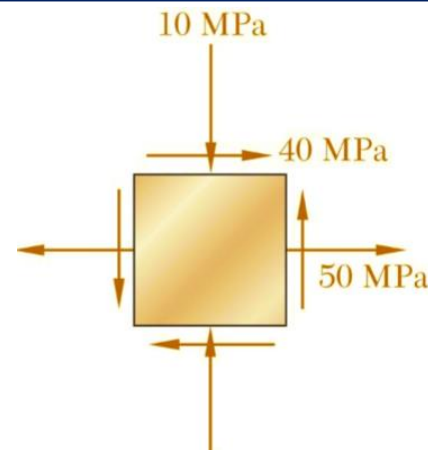
ou

$$\text{tg}(2\theta_c) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

Exemplo 7.1 (Beer et al., 2008)

c) Tensão de cisalhamento máxima:

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \sqrt{(30)^2 + (40)^2} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = 50 \text{ MPa}\end{aligned}$$



Ângulos relacionados à tensão de cisalhamento máxima:

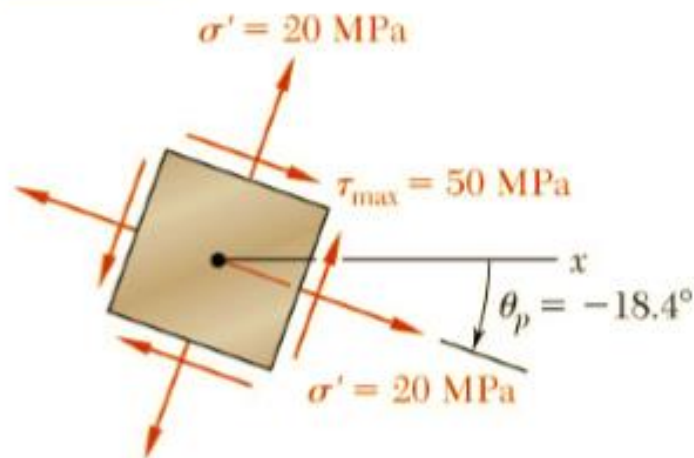
$$\theta_s = \theta_p - 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta_s = -18.4^\circ \quad \text{e} \quad \theta_s = 71.6^\circ$$

Tensão normal correspondente:

$$\sigma' = \sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 - 10}{2}$$

$$\sigma' = 20 \text{ MPa}$$

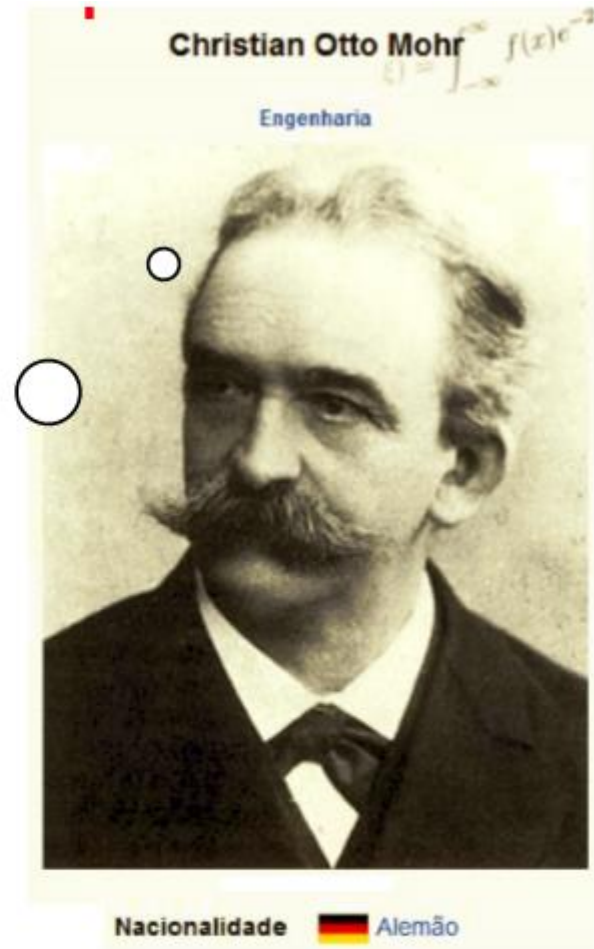
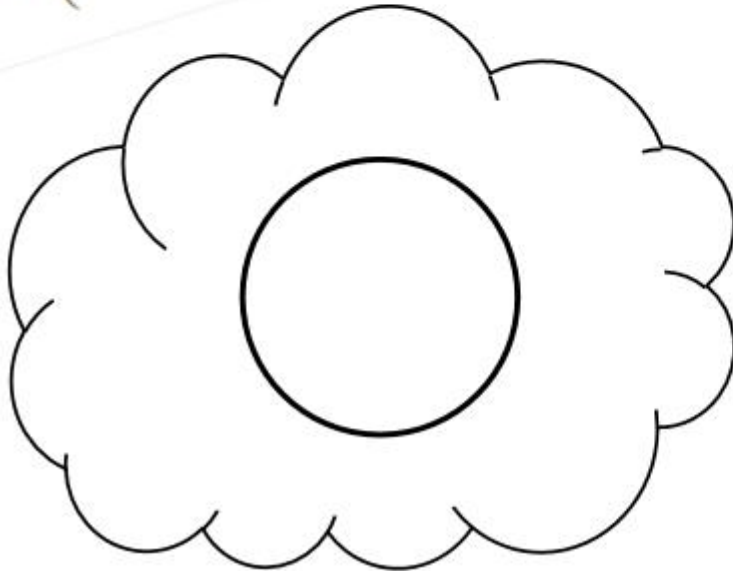
Portanto:



Círculo de Mohr para o estado plano de tensão

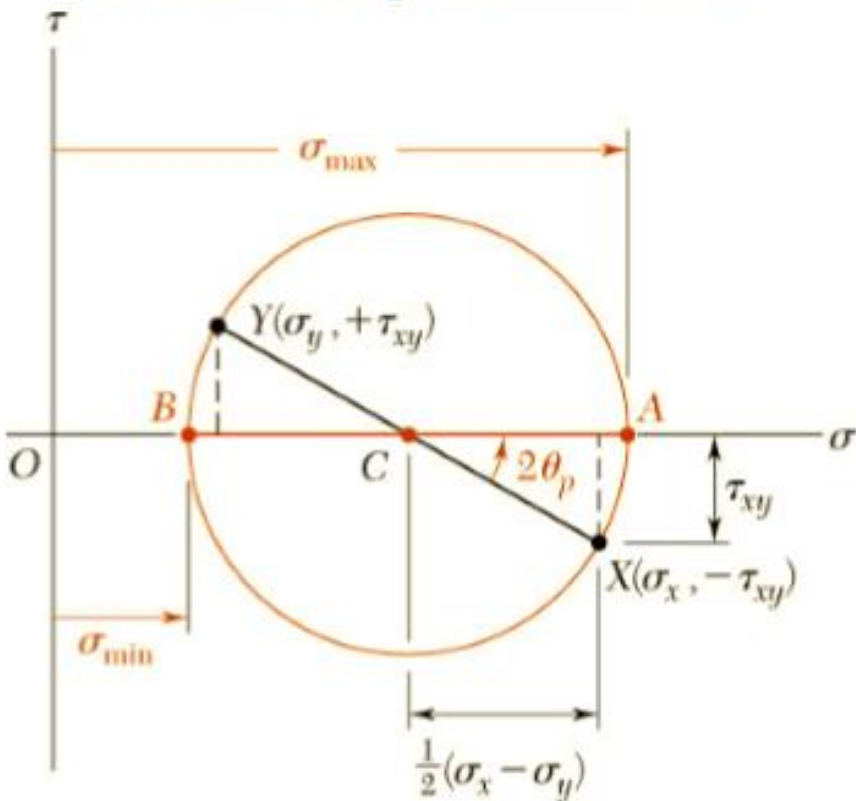
Tensão de cisalhamento máxima

$$\sigma_{\alpha} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$
$$\tau_{\alpha} = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$



Círculo de Mohr para o EPT

- O círculo de Mohr pode ser aplicado, por exemplo, para **determinar valores críticos e ângulos** associados;



PROCEDIMENTOS:

- 1) Para um estado plano de tensão conhecido, plotar os pontos X e Y ;

$$X = (\sigma_x, -\tau_{xy})$$

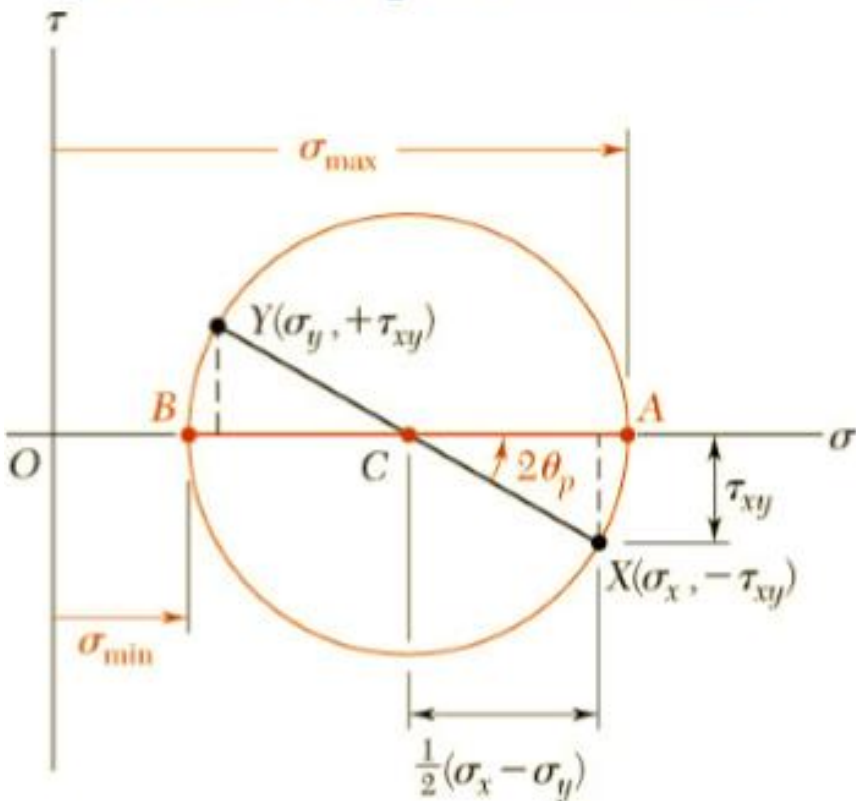
$$Y = (\sigma_y, +\tau_{xy})$$

- 2) Marca o centro do círculo no ponto $C = (\sigma_{med}; 0)$:

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Círculo de Mohr para o EPT

- O círculo de Mohr pode ser aplicado, por exemplo, para **determinar valores críticos e ângulos** associados;



PROCEDIMENTOS:

3) Unir o Centro aos pontos X e Y e determinar o Raio R:

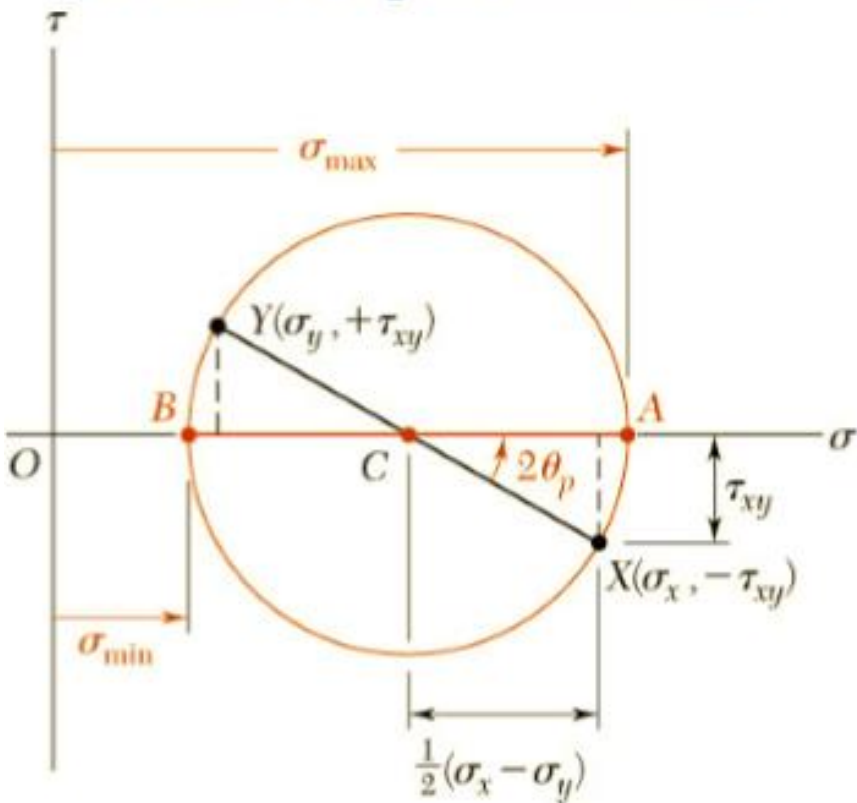
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

4) Determinar as tensões principais: e plotar os pontos $(\sigma_1; 0)$ e $(\sigma_2; 0)$;

$$\sigma_{\max, \min} = \sigma_{\text{méd}} \pm R$$

Círculo de Mohr para o EPT

- O círculo de Mohr pode ser aplicado, por exemplo, para **determinar valores críticos e ângulos** associados;



PROCEDIMENTOS:

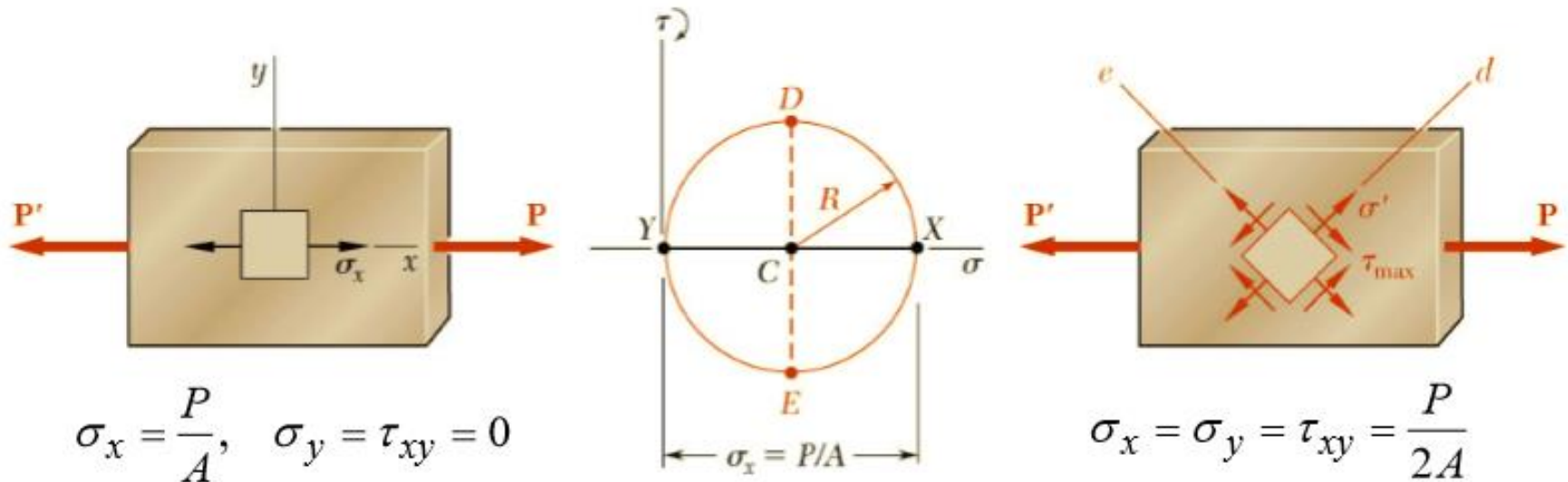
5) Calcular o ângulo entre o eixo original (x) e os eixos principais (x'): ($2\theta_1$ e $2\theta_2$): $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$:

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

6) Determinar as tensões cisalhantes máximas, pontos: $(\sigma_{med}; R)$ e $(\sigma_{med}; -R)$ e o ângulo correspondente para essas tensões: $(\theta_1 + 45^\circ)$;

Círculo de Mohr para o EPT

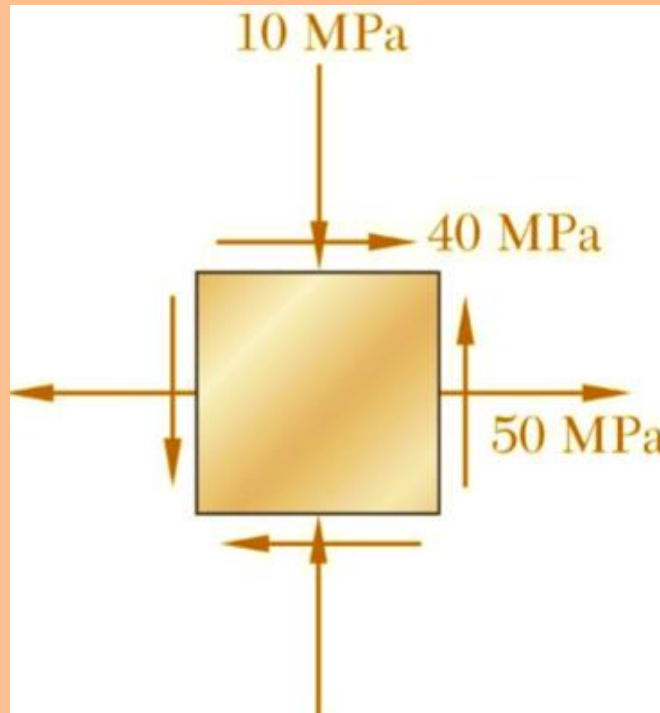
- No caso de carregamento axial:



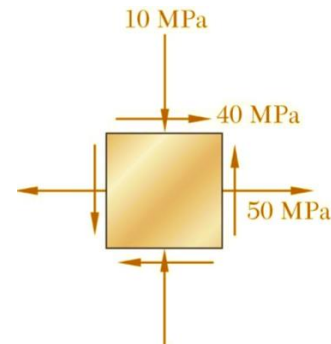
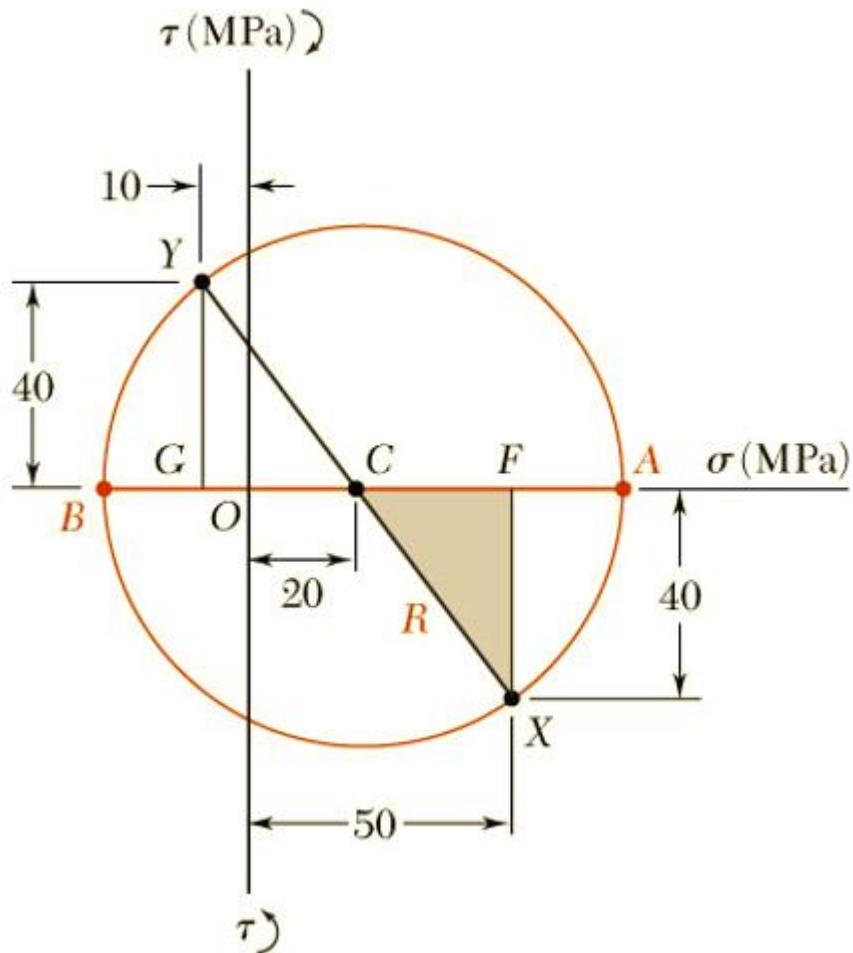
Exemplo 7.2 (Beer et al., 2008)

Para o estado plano de tensão mostrado:

- Construa o círculo de Mohr, apresentando as tensões principais e as tensões de cisalhamento máxima e a tensão normal correspondente a elas.
- Desenhe o diagrama das tensões principais no plano principal;



Círculo de Mohr para o EPT



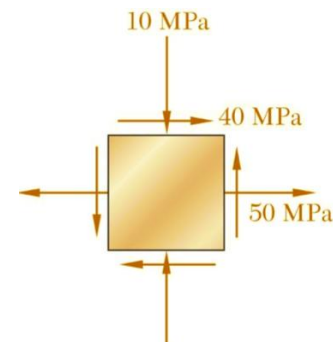
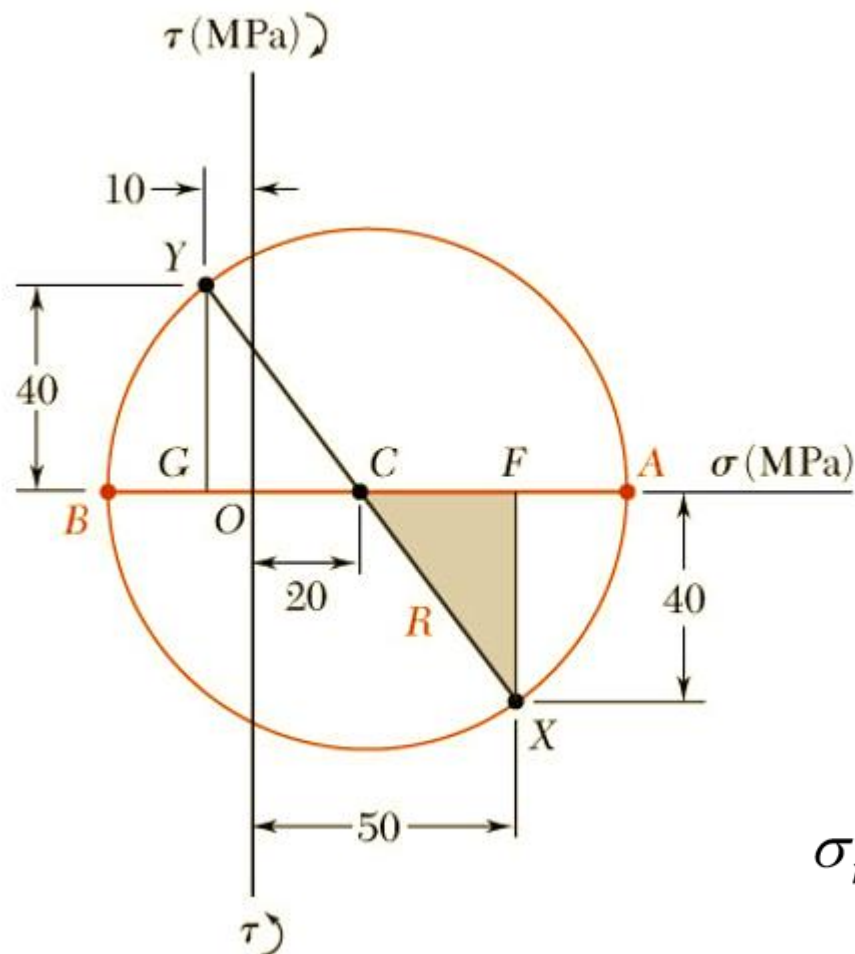
PROCEDIMIENTOS:

1) Para um estado plano de tensão conhecido, plotar os pontos X e Y ;

$$X = (\sigma_x, -\zeta_{xy}) = (50; -40)$$

$$Y = (\sigma_{y,} + \zeta_{xy}) = (-10; 40)$$

Círculo de Mohr para o EPT

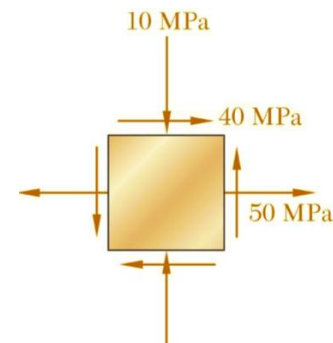
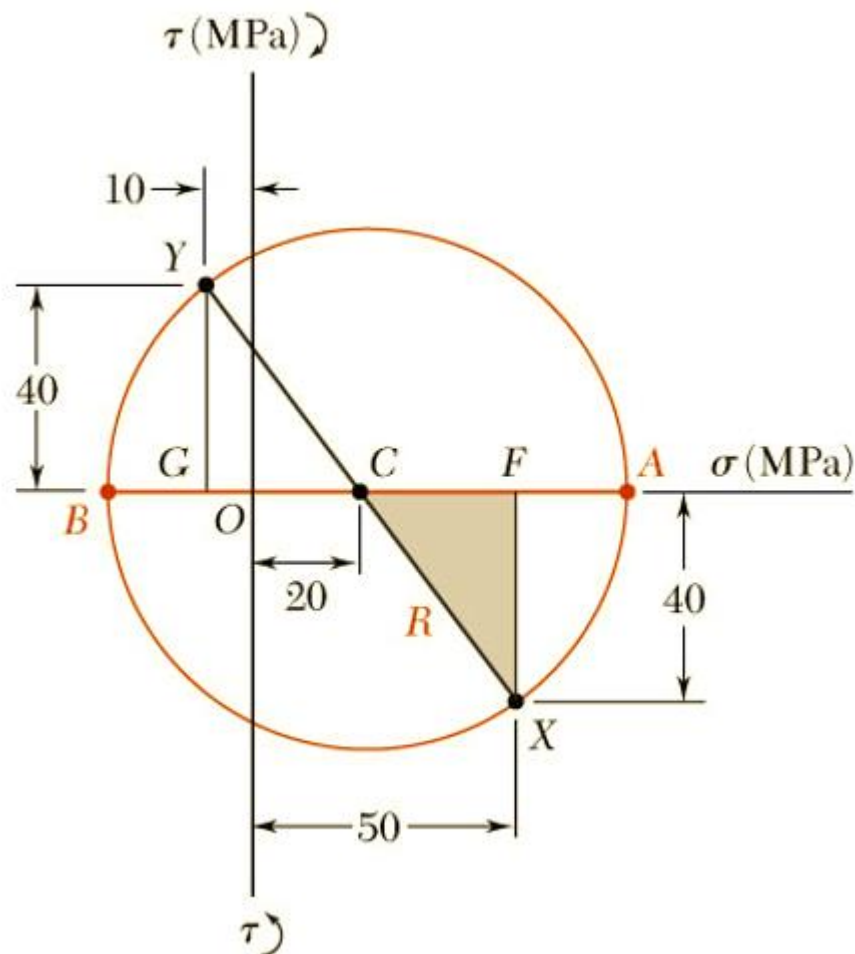


PROCEDIMENTOS:

2) Marca o centro do círculo no ponto $C = (\sigma_{med}; 0)$;

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{(50) + (-10)}{2} = 20 \text{ MPa}$$

Círculo de Mohr para o EPT



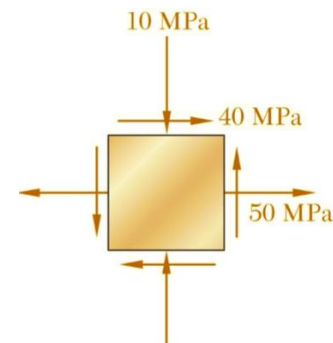
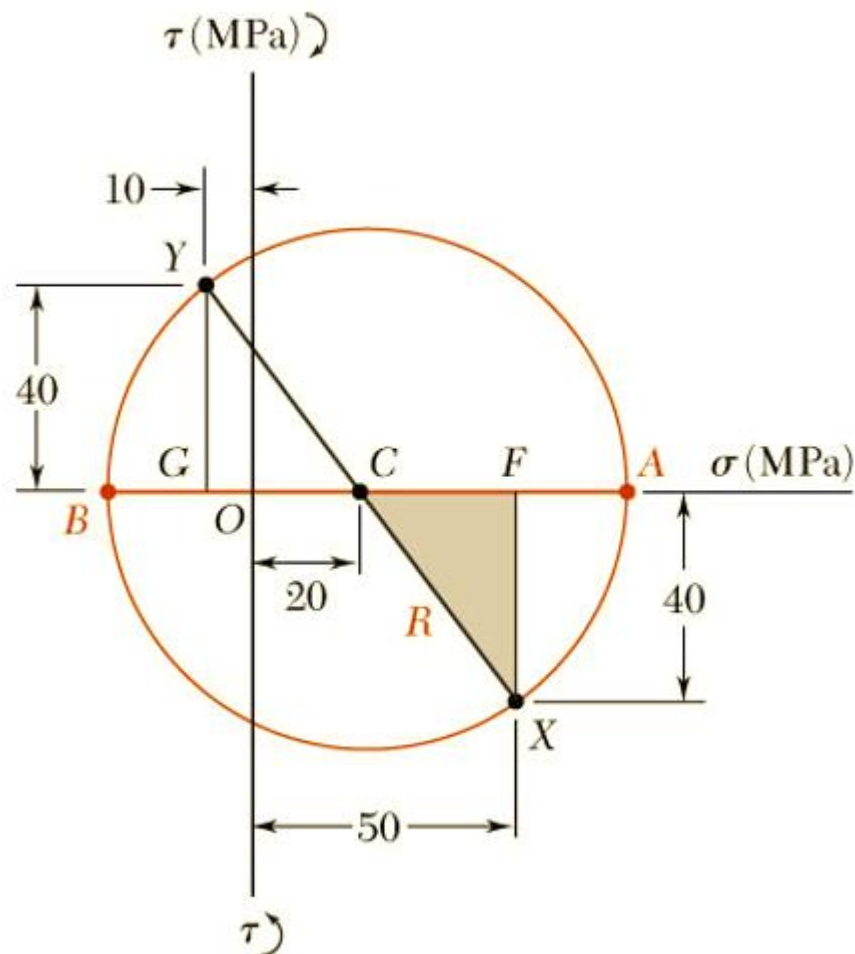
PROCEDIMENTOS:

3) Unir o Centro aos pontos X e Y e determinar o Raio R:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{50 - (-10)}{2}\right)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

Círculo de Mohr para o EPT



PROCEDIMENTOS:

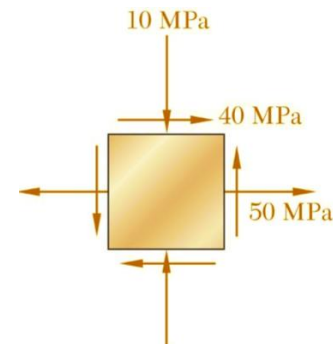
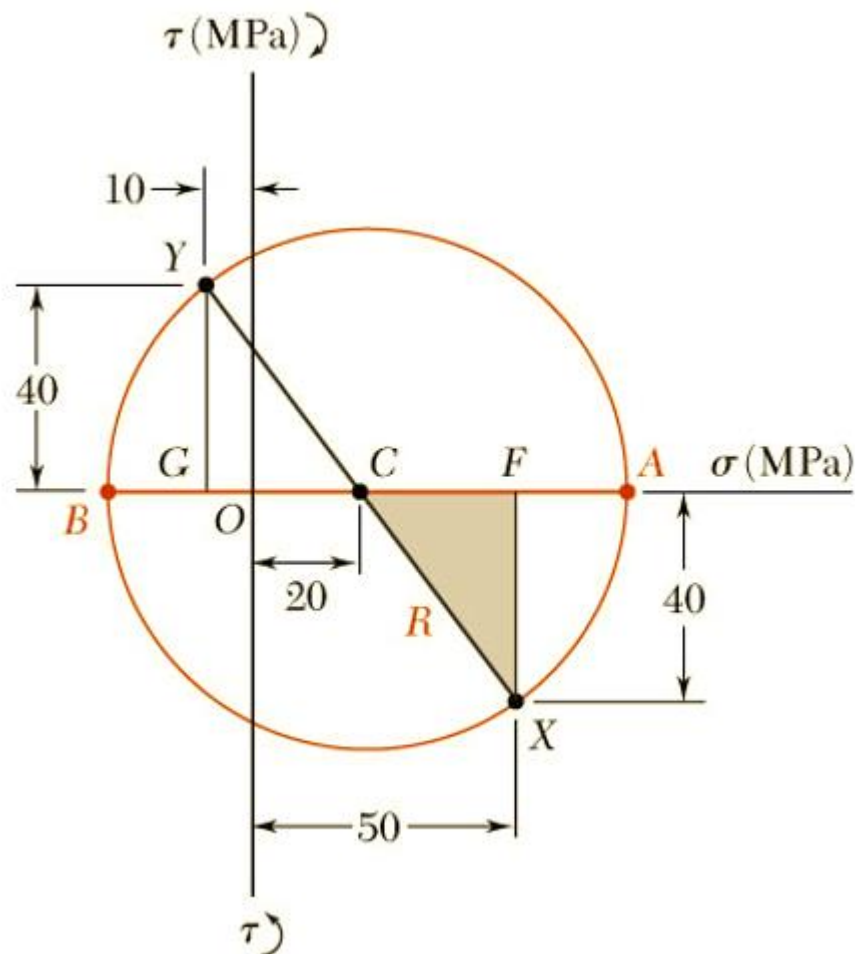
4) Determinar as tensões principais: e plotar os pontos $(\sigma_{1A}; 0)$ e $(\sigma_{2B}; 0)$;

$$\sigma_{\max, \min} = \sigma_{\text{méd}} \pm R$$

$$\sigma_{1A} = \sigma_{\text{méd}} + R = 20 + 50 = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{2B} = \sigma_{\text{méd}} - R = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

Círculo de Mohr para o EPT



PROCEDIMENTOS:

5) Calcular o ângulo entre o eixo original (x) e os eixos principais (x'): ($2\theta_1$ e $2\theta_2$): $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$:

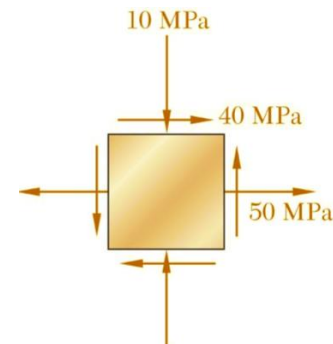
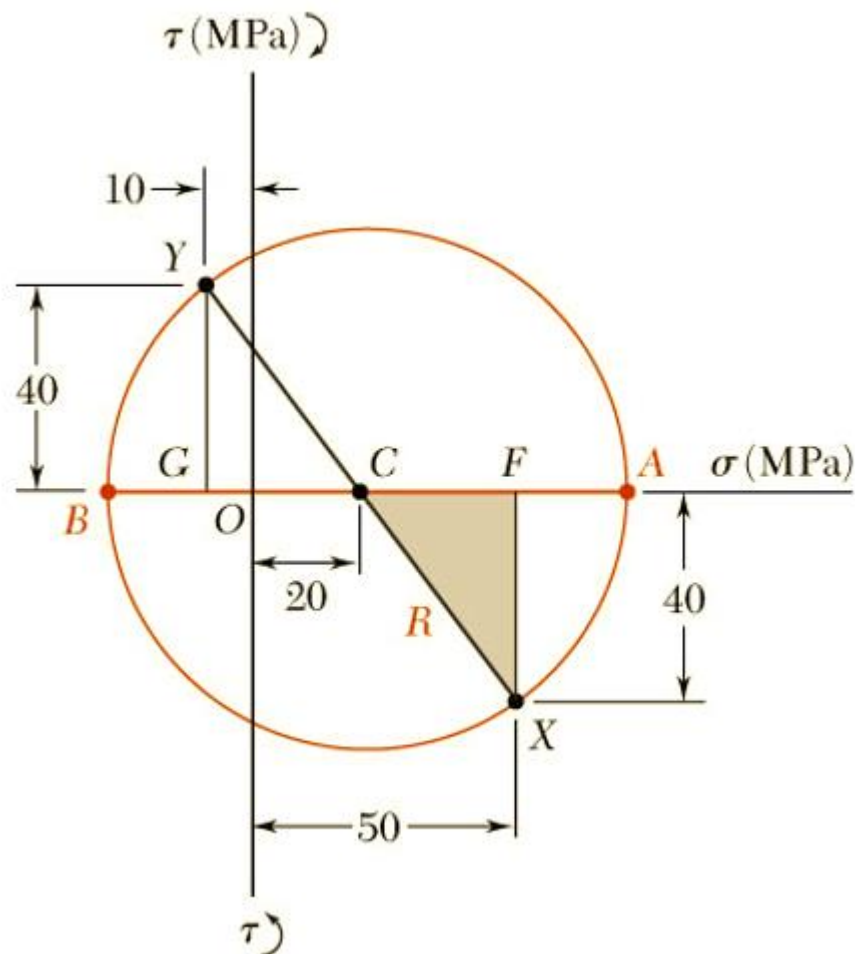
$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$2\theta_1 = \arctan \left(\frac{2 \times 40}{50 - (-10)} \right) / 2 = 53,1^\circ$$

$$\theta_1 = 53,1^\circ / 2 = 26,6^\circ$$

$$\theta_2 = 26,6^\circ + 90^\circ = 116,6^\circ$$

Círculo de Mohr para o EPT



PROCEDIMENTOS:

6) Determinar as tensões cisalhantes máximas, pontos: $(\sigma_{med}; R)$ e $(\sigma_{med}; -R)$ e o ângulo correspondente para essas tensões: $(\theta_1 + 45^\circ)$;

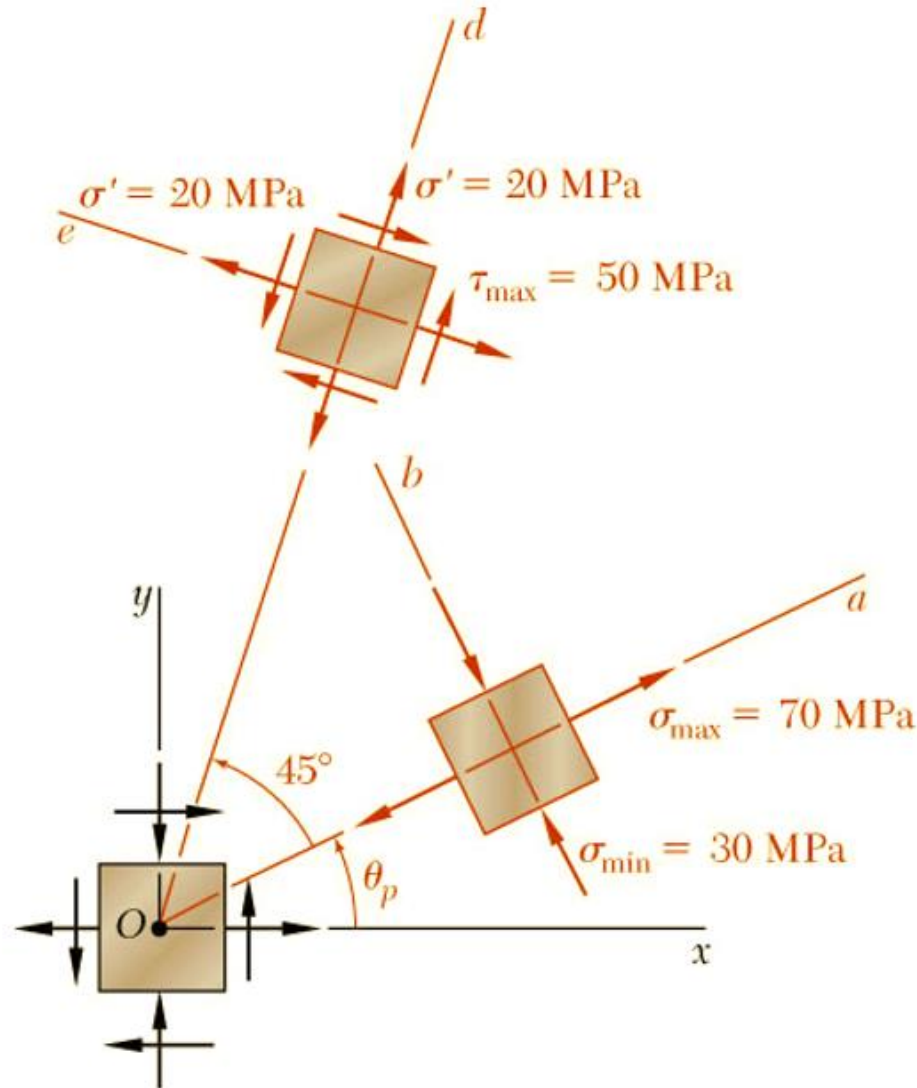
$$(\sigma_{med}; R) = (20; 50)$$

$$(\sigma_{med}; -R) = (20; -50)$$

$$\theta_{cis} = 26,6^\circ + 45^\circ = 71,6^\circ$$

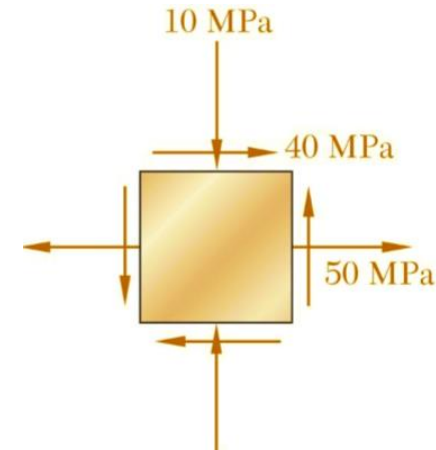
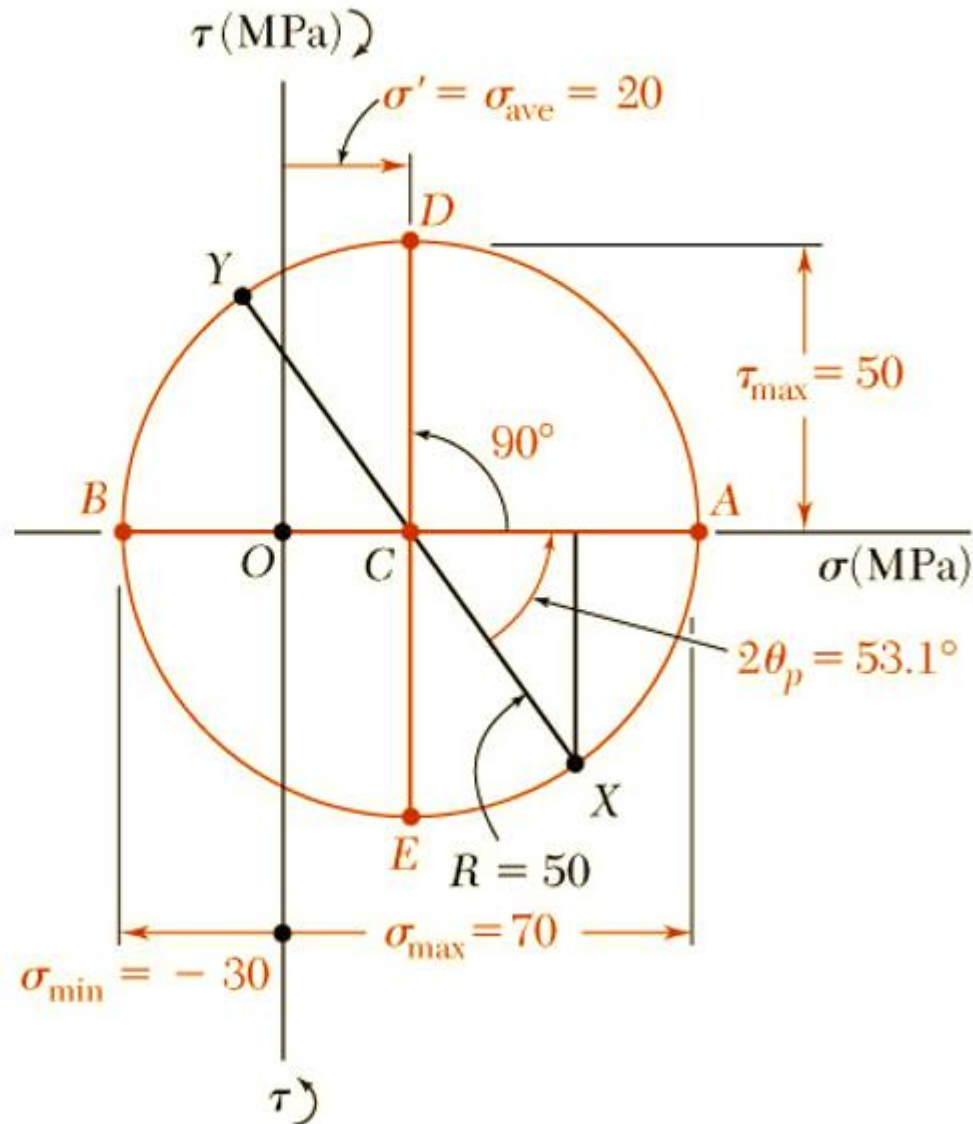
Círculo de Mohr para o EPT

b) Desenhe o diagrama das tensões principais no plano principal:



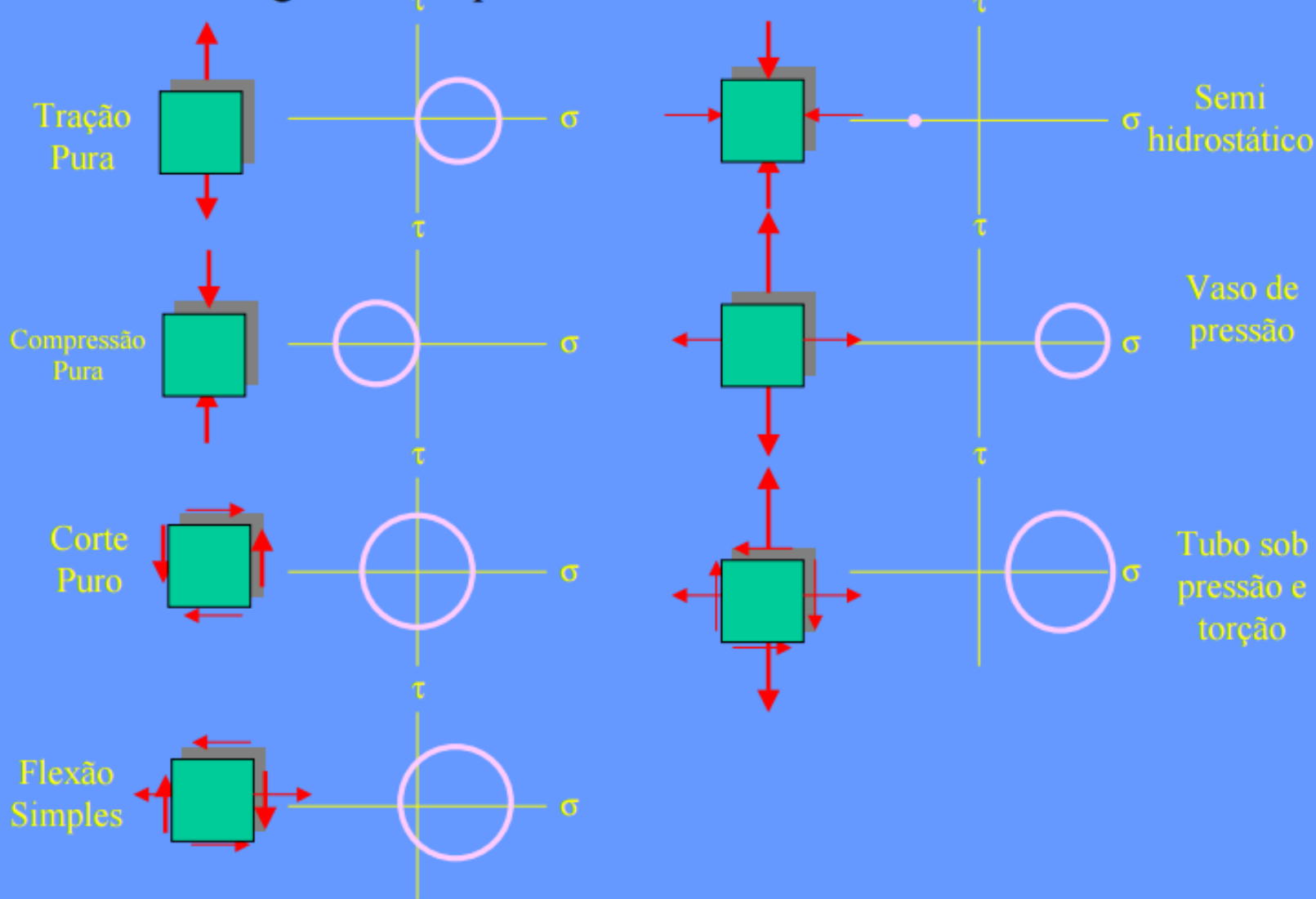
Círculo de Mohr para o EPT

Sumário dos resultados:



Círculo de Mohr para o EPT

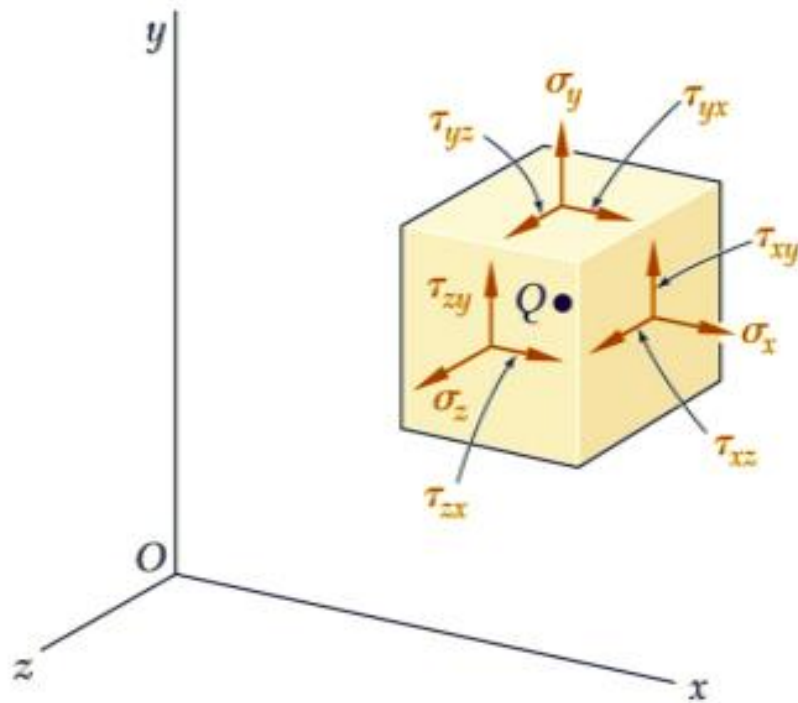
Alguns exemplos de estados de tensão comuns



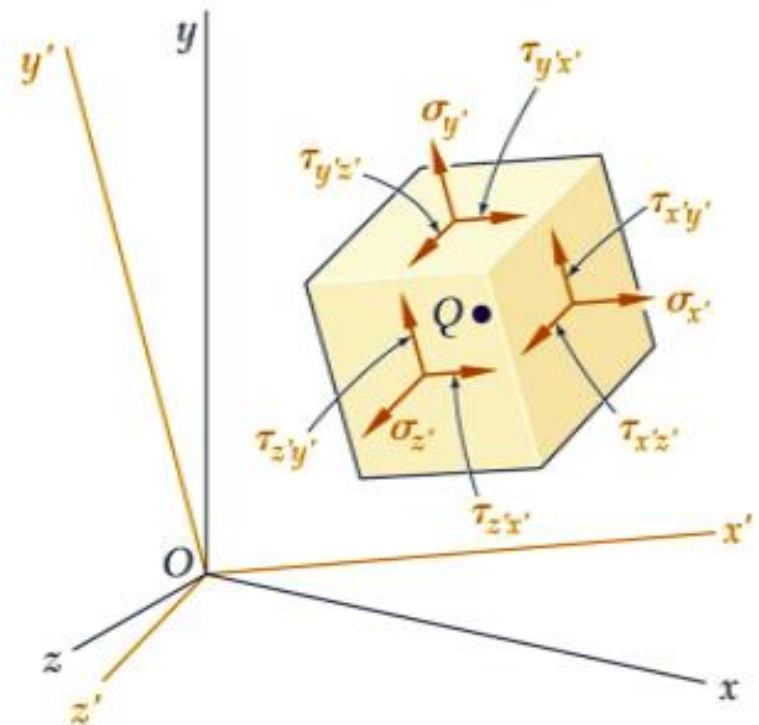
Estado geral de tensão

Estado geral de tensão

- Consideremos o estado geral de tensões e a transformação de tensão associada à rotação dos eixos ilustrada:



(a)

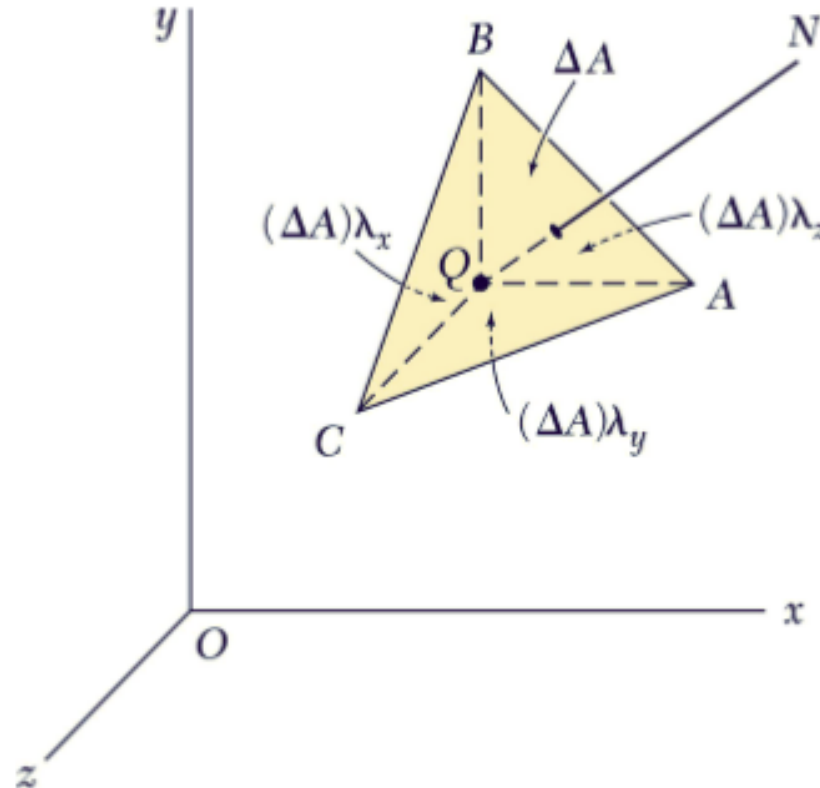


(b)

- Vamos nos limitar à **determinação da tensão normal σ_n** em um plano de orientação arbitrária.

Estado geral de tensão

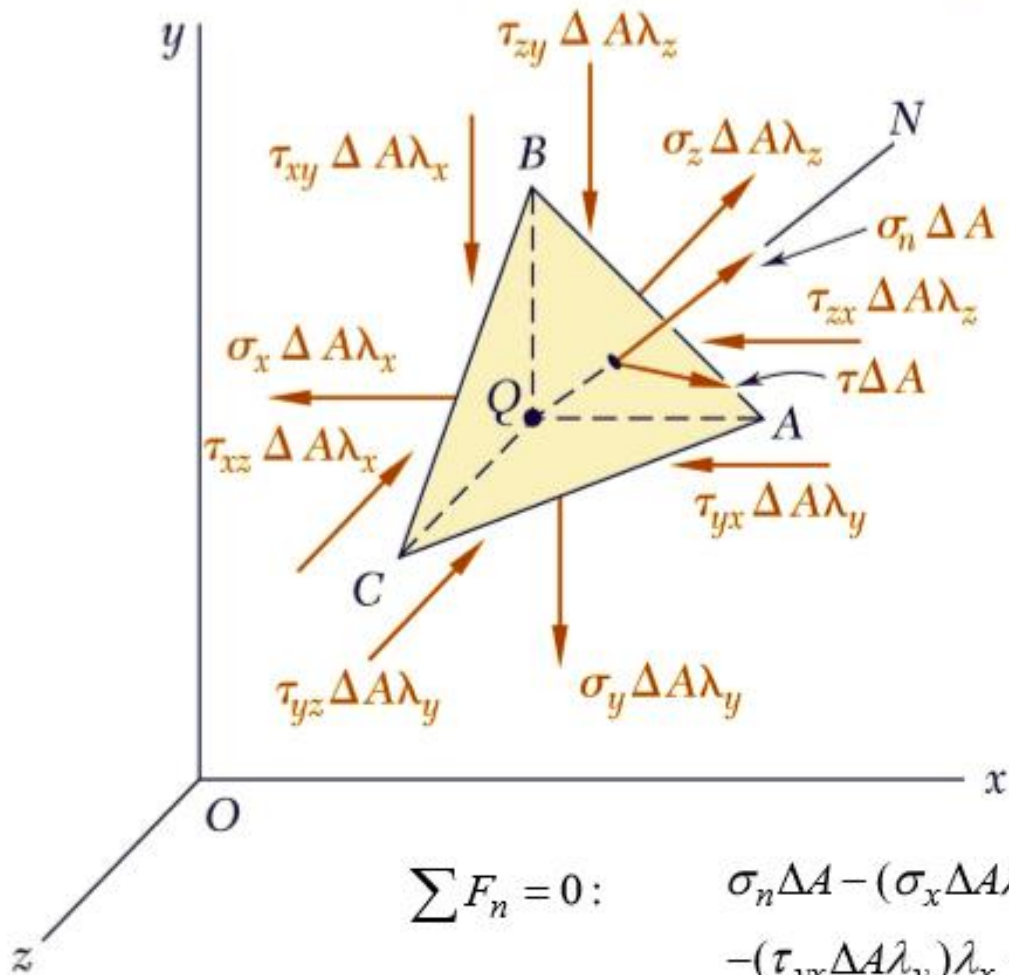
- Consideremos um tetraedro com face perpendicular à linha QN . A direção desta linha é definida pelos **cossenos diretores** $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$;



- Chamando de ΔA a área da face ABC e levando em conta os valores dos cossenos diretores, podemos determinar os valores das áreas das faces perpendiculares aos eixos x, y e z .

Estado geral de tensão

- Verificando a condição de equilíbrio do corpo ao longo de QN :



$$\sum F_n = 0:$$

$$\begin{aligned} & \sigma_n \Delta A - (\sigma_x \Delta A \lambda_x) \lambda_x - (\tau_{xy} \Delta A \lambda_x) \lambda_y - (\tau_{xz} \Delta A \lambda_x) \lambda_z \\ & - (\tau_{yx} \Delta A \lambda_y) \lambda_x - (\sigma_y \Delta A \lambda_y) \lambda_y - (\tau_{yz} \Delta A \lambda_y) \lambda_z \\ & - (\tau_{zx} \Delta A \lambda_z) \lambda_x - (\tau_{zy} \Delta A \lambda_z) \lambda_y - (\sigma_z \Delta A \lambda_z) \lambda_z = 0 \end{aligned}$$

Estado geral de tensão

- Temos:

$$\sigma_n = \sigma_x \lambda_x^2 + \sigma_y \lambda_y^2 + \sigma_z \lambda_z^2 + 2\tau_{xy} \lambda_x \lambda_y + 2\tau_{yz} \lambda_y \lambda_z + 2\tau_{zx} \lambda_z \lambda_x$$

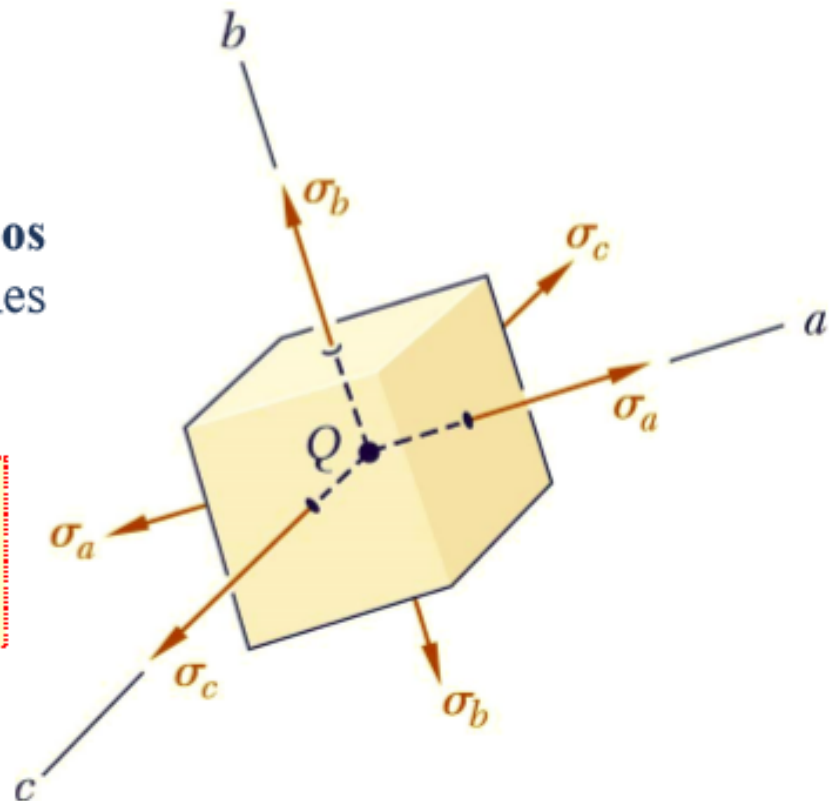
(Forma quadrática em λ_x , λ_y e λ_z .)

- Podemos seleccionar os eixos coordenados de tal maneira que esta equação se reduza a:

$$\sigma_n = \sigma_a \lambda_a^2 + \sigma_b \lambda_b^2 + \sigma_c \lambda_c^2$$

- Estes são os **eixos principais** e **planos principais** e as tensões normais a eles associadas são as **tensões principais**.

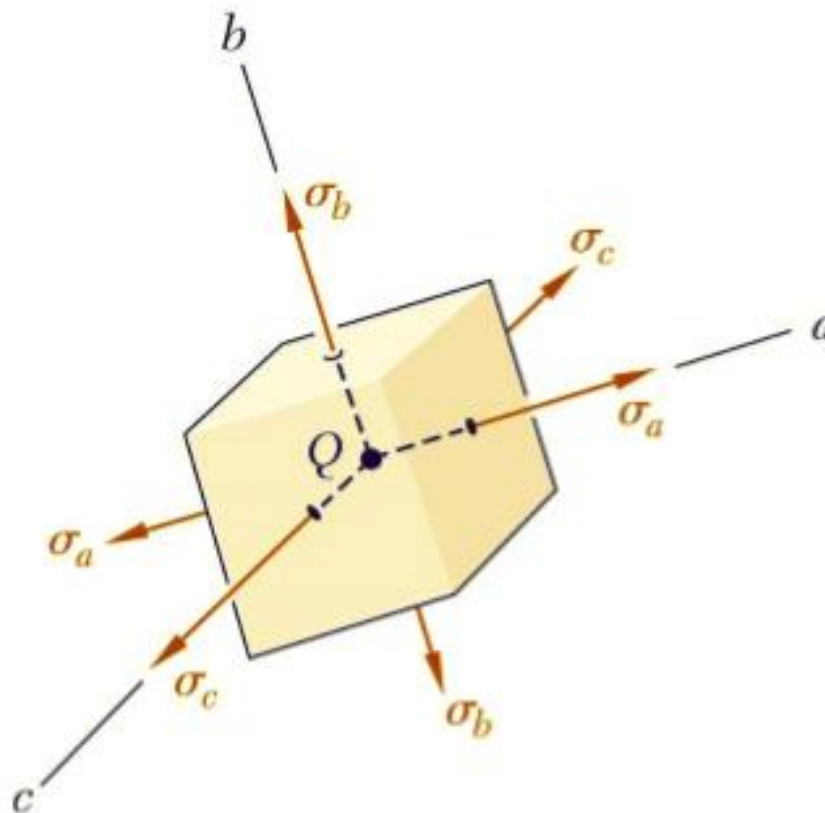
Podemos utilizar um procedimento análogo para obter uma expressão para cálculo da tensão cisalhante máxima.



Aplicação do círculo de Mohr na análise tridimensional da tensão

Círculo de Mohr no caso 3D

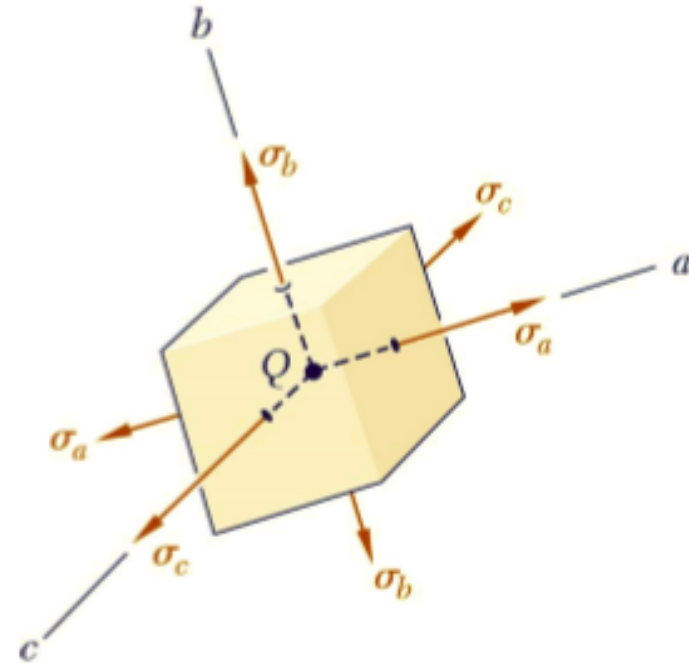
- Considerando o elemento orientado segundo os eixos principais em Q :



O que acontece se este elemento for rotacionado em torno de um dos eixos principais?

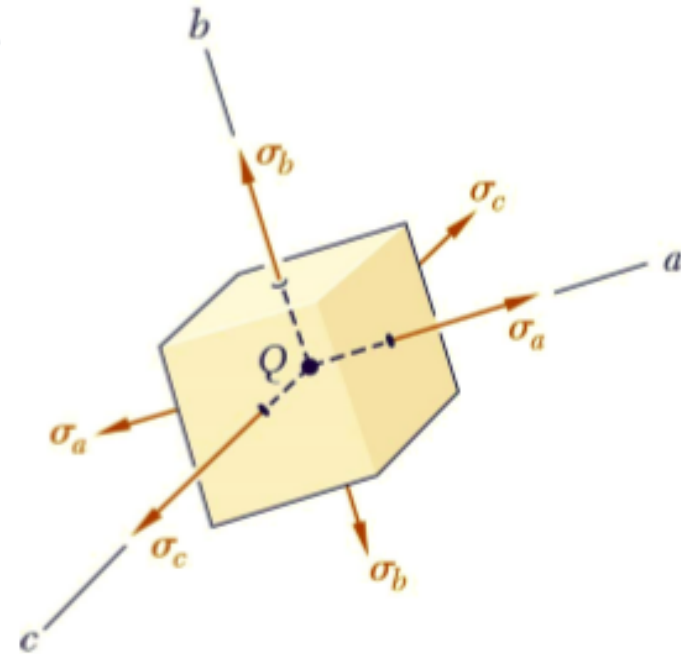
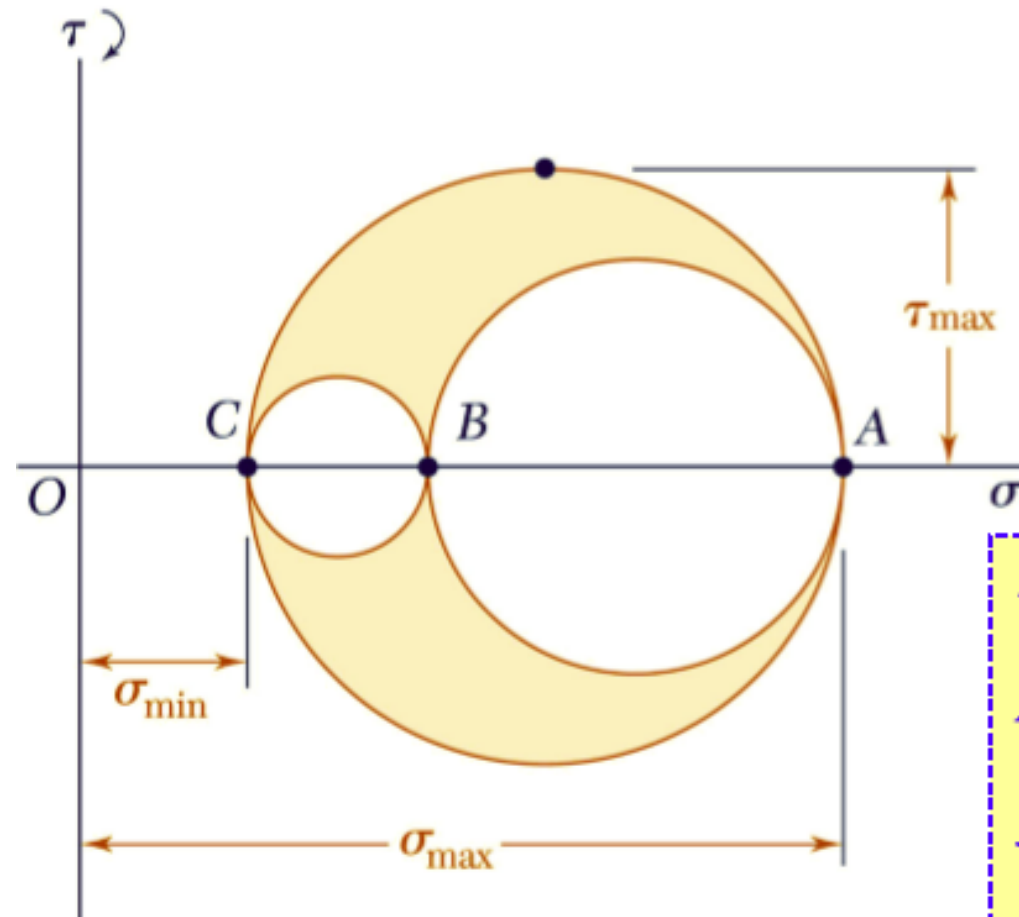
Círculo de Mohr no caso 3D

- Cada rotação em torno de um eixo principal leva a um círculo de Mohr, como se cada caso fosse uma transformação de estado plano de tensão;



Círculo de Mohr no caso 3D

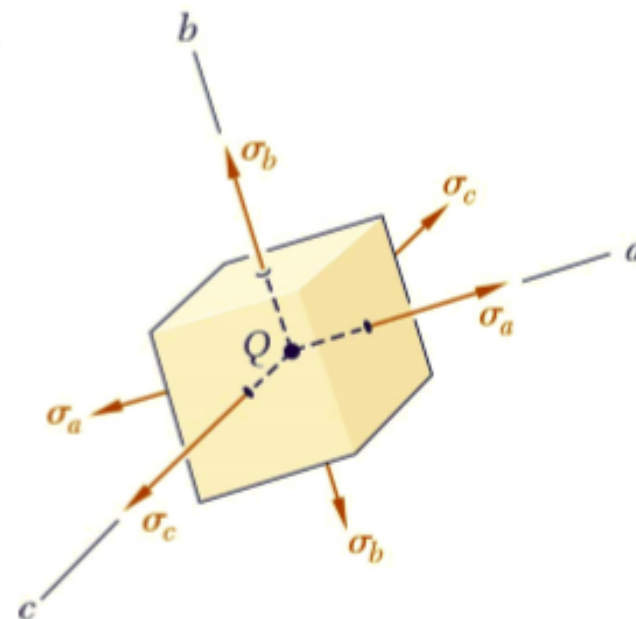
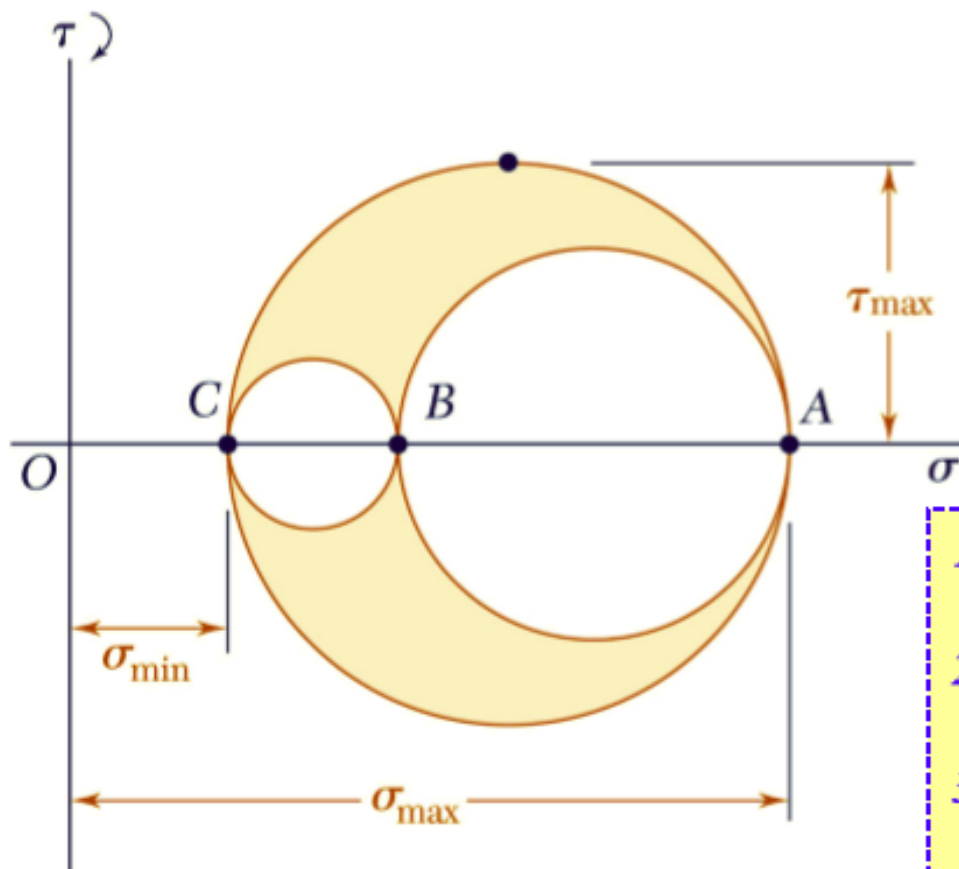
- Cada rotação em torno de um eixo principal leva a um círculo de Mohr, como se cada caso fosse uma transformação de estado plano de tensão;



1. Rotação em torno de c gera o círculo de diâmetro AB ;
2. Rotação em torno de a gera o círculo de diâmetro BC ;
3. Rotação em torno de b gera o círculo de diâmetro CA .

Círculo de Mohr no caso 3D

- Cada rotação em torno de um eixo principal leva a um círculo de Mohr, como se cada caso fosse uma transformação de estado plano de tensão;

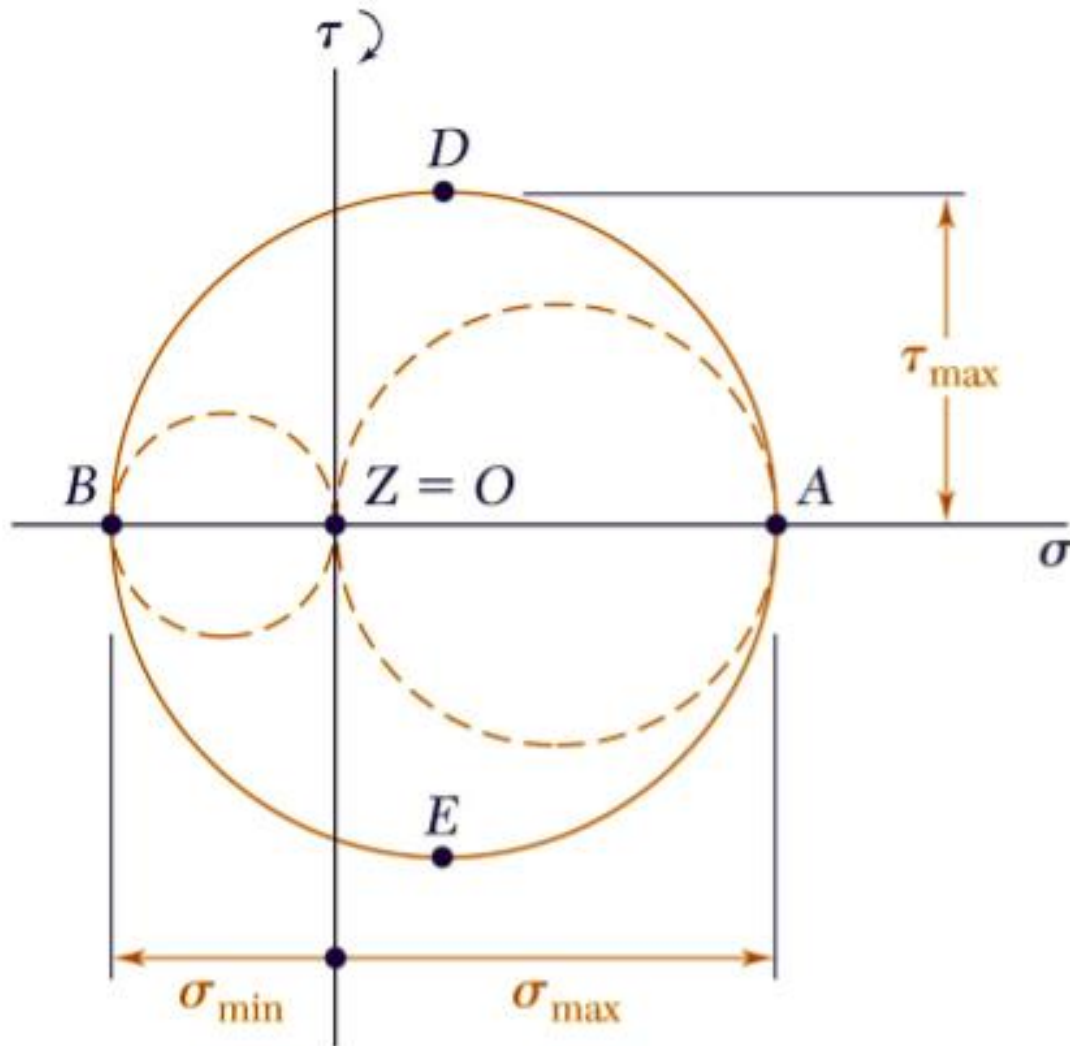


1. Rotação em torno de c gera o círculo de diâmetro AB ;
2. Rotação em torno de a gera o círculo de diâmetro BC ;
3. Rotação em torno de b gera o círculo de diâmetro CA .

Rotações em relação a outros eixos levam a pontos na região sombreada.

Círculo de Mohr no caso 3D

- A partir do círculo de Mohr para o caso tridimensional, temos:

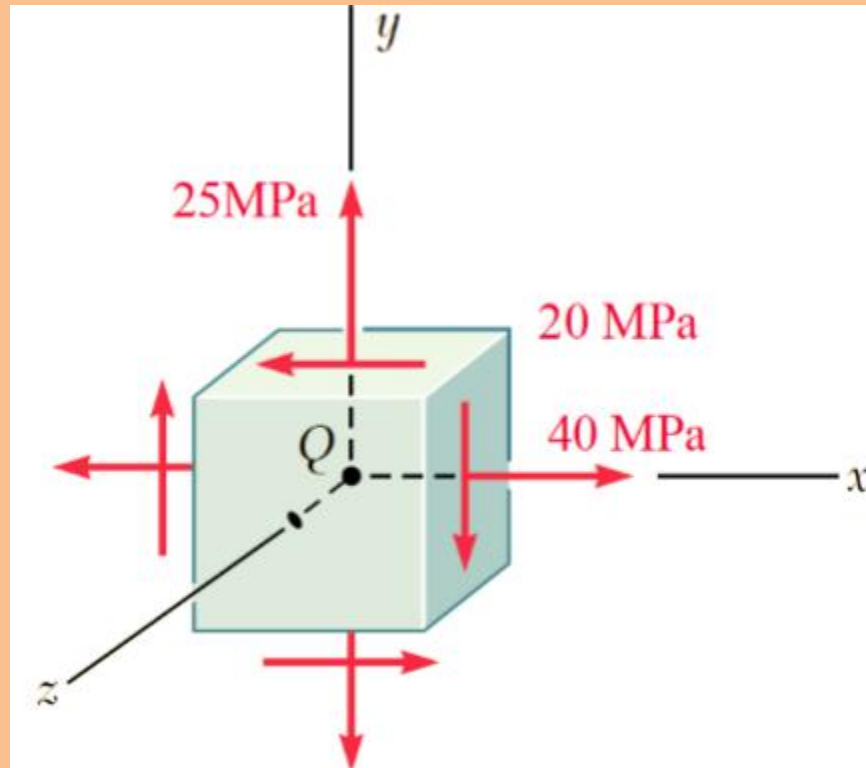


$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_{\max} - \sigma_{\min}|$$

Exemplo 7.3 (Beer et al., 2008)

Para o estado plano de tensão mostrado, determine:

- a) Os três planos principais e as tensões principais;
- b) A tensão de cisalhamento máxima.



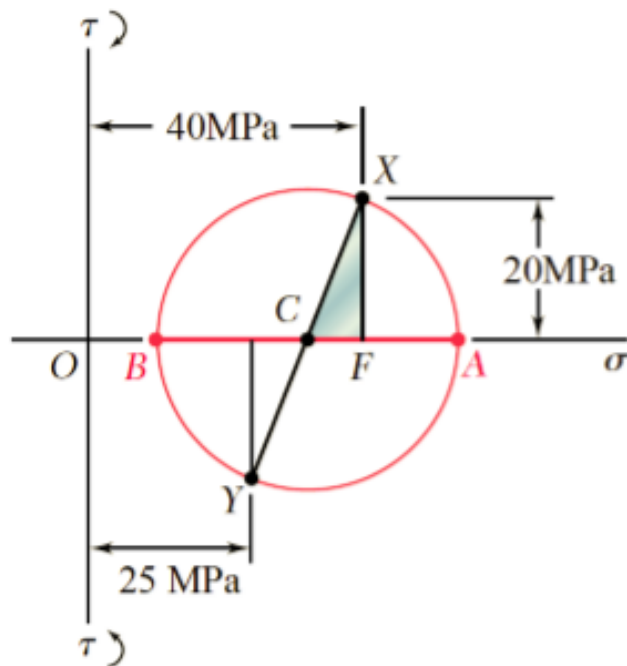
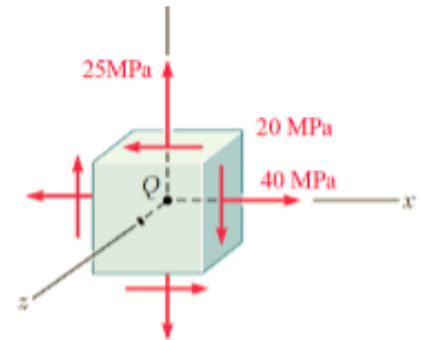
Exemplo 7.3 (Beer et al., 2008)

Utilizando os 6 passos apresentados anteriormente chegaremos as seguintes tensões principais:

Exemplo 7.3 (Beer et al., 2008)

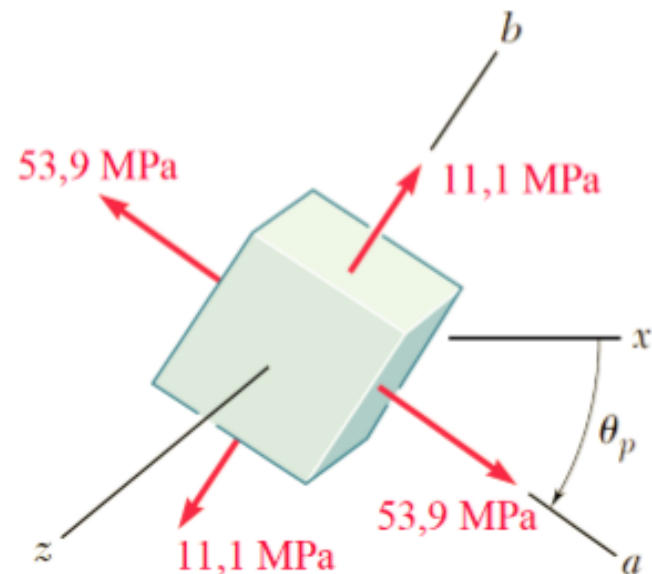
a) Planos principais e tensões principais:

- Como as faces do elemento que são perpendiculares ao eixo z estão livres de tensão, elas definem um dos planos principais;
- Os outros planos são definidos pelos pontos A e B no círculo de Mohr:



$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{20}{7,5}$$

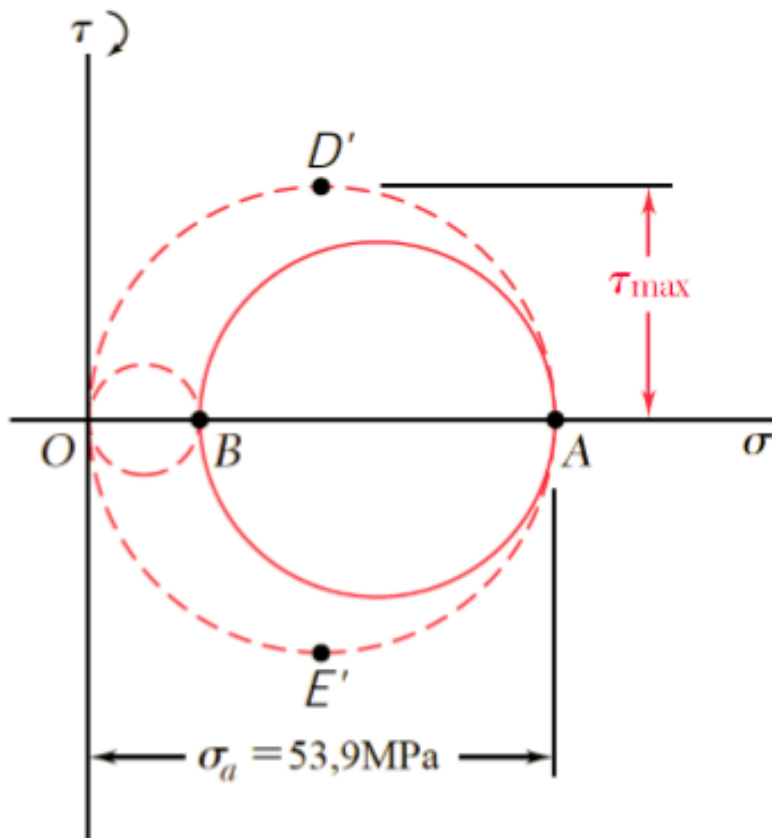
$$2\theta_p = 69,4^\circ \quad \theta_p = 34,7^\circ$$



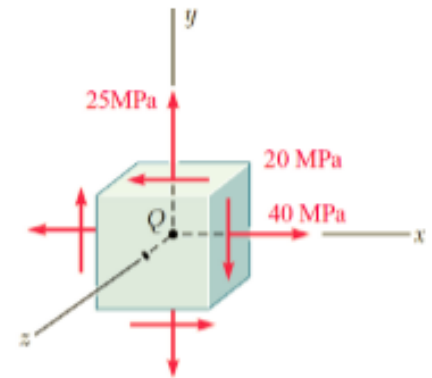
Círculo de Mohr no caso 3D

b) Tensão de cisalhamento máxima:

- Traçando os outros círculos (de diâmetros OB e OA), notamos que a tensão de cisalhamento máxima é igual ao raio do círculo de diâmetro OA :



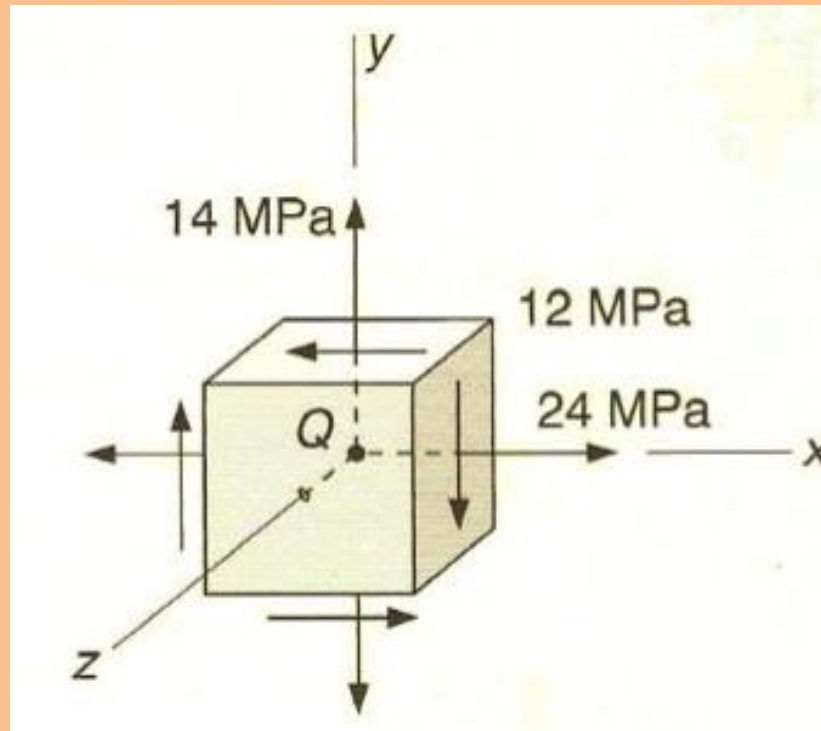
$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{1}{2} \sigma_a = \frac{1}{2} (53,9 \text{ MPa}) \\ &= 26,95 \text{ MPa}\end{aligned}$$



Exemplo 6.3 - Beer e Johnston Jr., 1982

Determinar, para o estado de tensões indicado na figura a seguir:

- a) Os três planos principais e as tensões principais;
- b) A tensão de cisalhamento máxima.

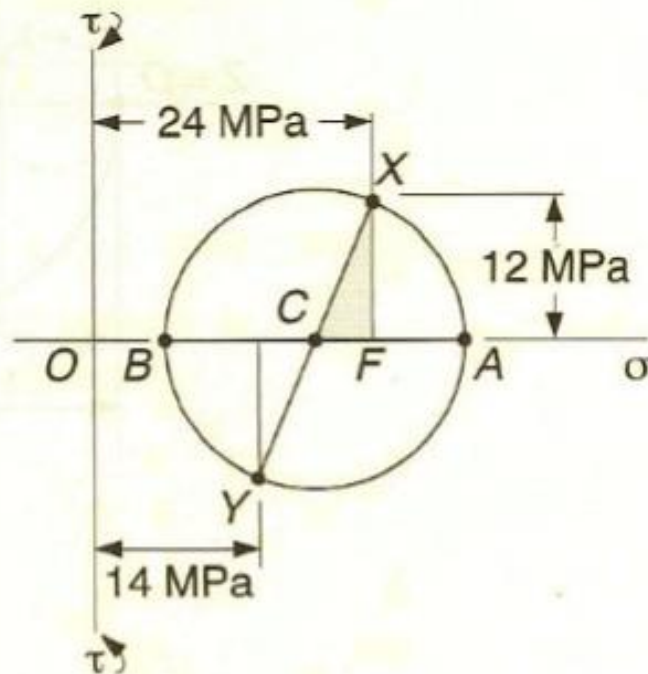


Círculo de Mohr no caso 3D

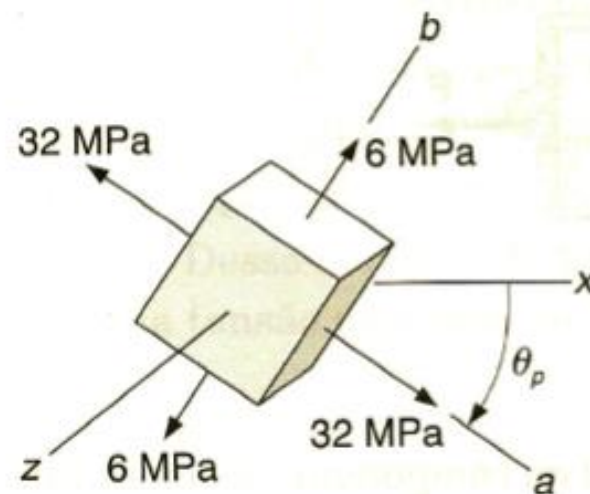
Utilizando os 6 passos apresentados anteriormente chegaremos as seguintes tensões principais:

a) Planos principais e as tensões principais:

Construímos o círculo de Mohr para a transformação de tensão no plano xy .



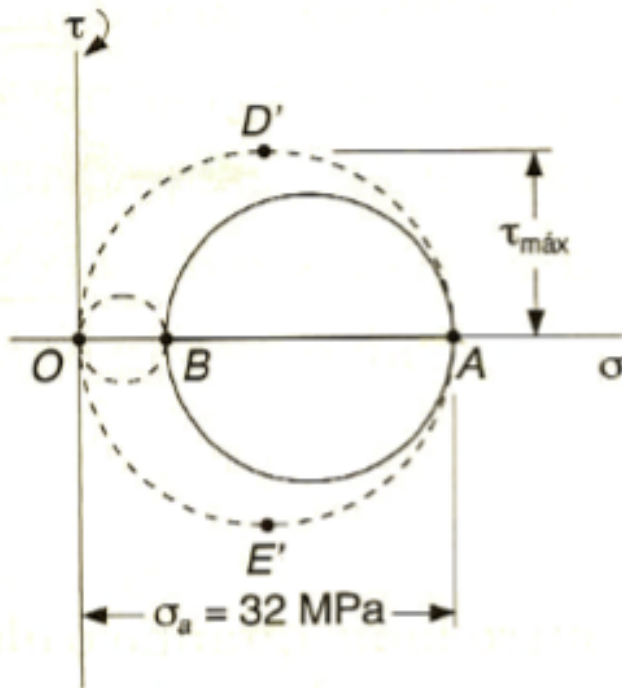
$$\tan 2\theta_p = \frac{XF}{CF} = \frac{12}{5}$$
$$2\theta_p = 67,38^\circ \rightarrow \theta_p = 33,69^\circ$$



Círculo de Mohr no caso 3D

b) Tensão máxima de cisalhamento

A figura a seguir indica os círculos de diâmetro OB e AO , que correspondem a rotações do elemento em torno dos eixos a e b , respectivamente.



A tensão de cisalhamento máxima é o raio do círculo de diâmetro OA :

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \sigma_a = \frac{1}{2} (32 \text{ MPa}) = 16 \text{ MPa}$$

Os pontos D' e E' que definem os planos de máxima tensão de cisalhamento são localizados nas extremidades do diâmetro vertical que corresponde a rotações em torno do eixo b .

...

CONTINUA