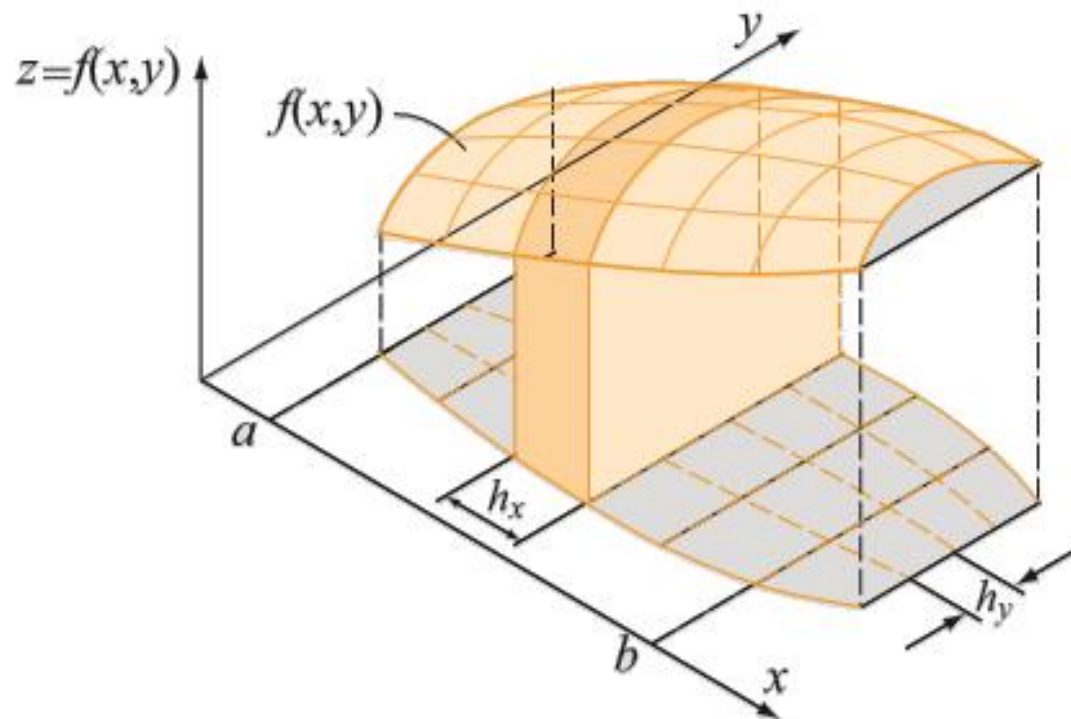




Cálculo Numérico

Prof. Dr. Alverlando Ricardo

Aula 10: Parte III: **INTEGRAÇÃO NUMÉRICA**

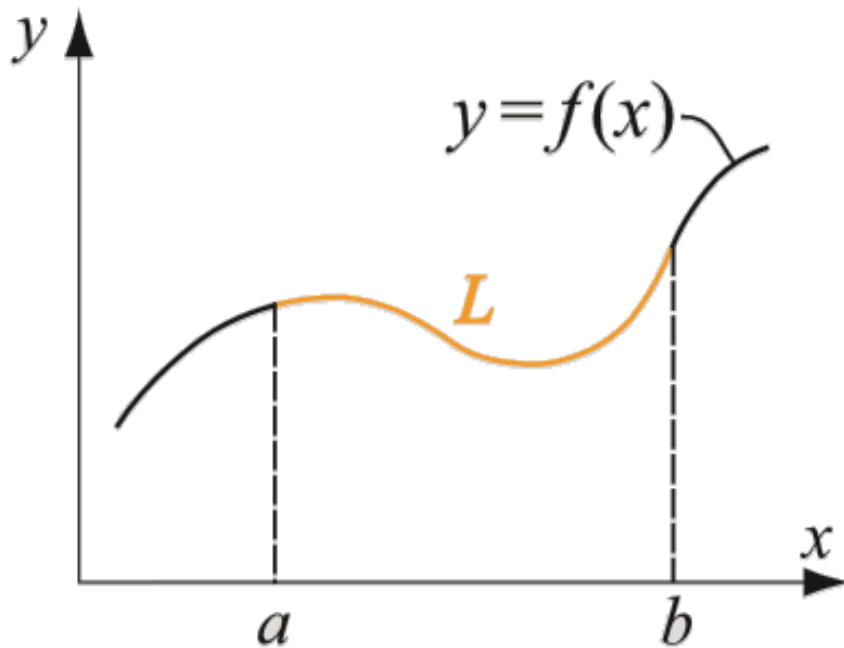
INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

- *A integração aparece com frequência na solução de problemas e no cálculo de grandezas na **engenharia e na ciência**, por exemplo:*

INTRODUÇÃO

- Um dos exemplos mais simples da aplicação da integração é o *cálculo do comprimento de uma curva*:



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

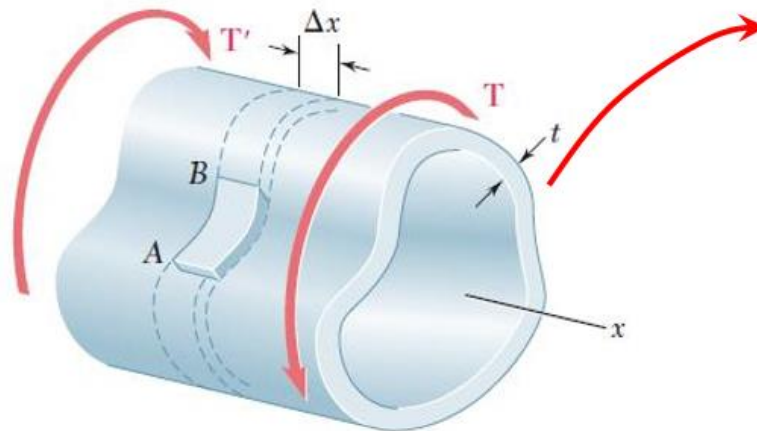
Eixos vazados de paredes finas: MEC2

- O ângulo de torção de um eixo de paredes finas pode ser determinado por (equação obtida pela aplicação de **métodos de energia**):

$$\phi = \frac{TL}{4\alpha^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

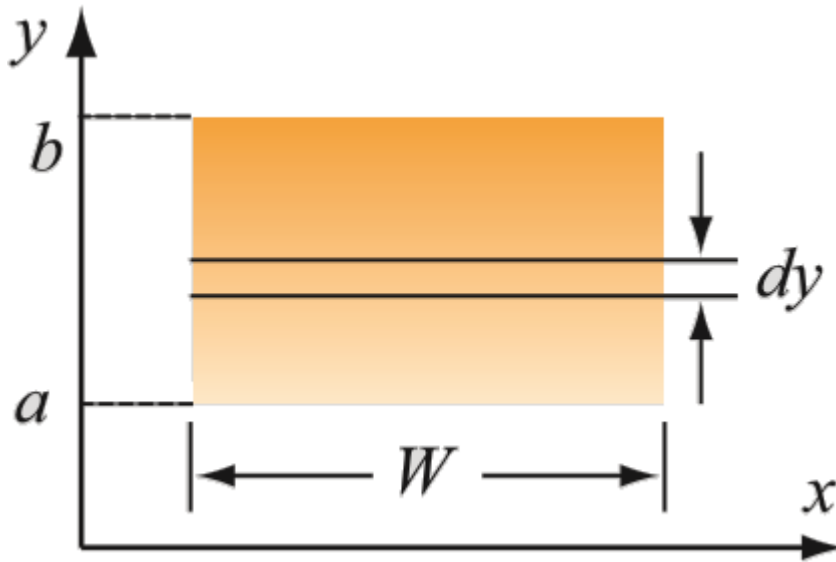


A integral é calculada ao longo da linha central da seção transversal da parede.



INTRODUÇÃO

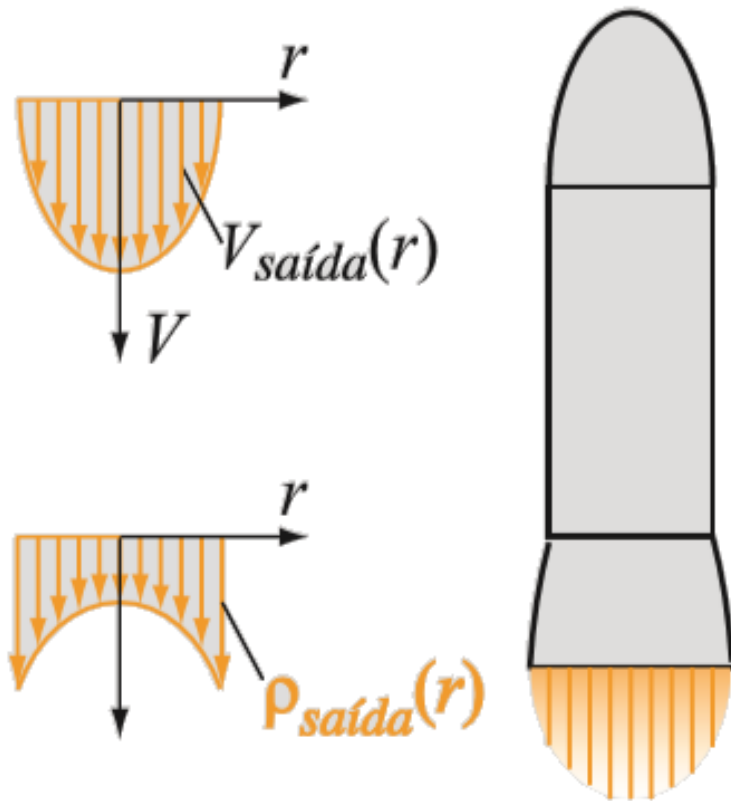
- A *taxa de fluxo total* atravessando uma seção reta de largura W e altura $(b - a)$ se relaciona ao fluxo de calor local por meio de uma integral:



$$\dot{Q} = \int_{y=a}^{y=b} \dot{q}'' W dy$$

INTRODUÇÃO

- Sistema de impulsão (T) de um foguete: a velocidade e a densidade de fluxo saindo do motor não são uniformes ao longo da área do exaustor.

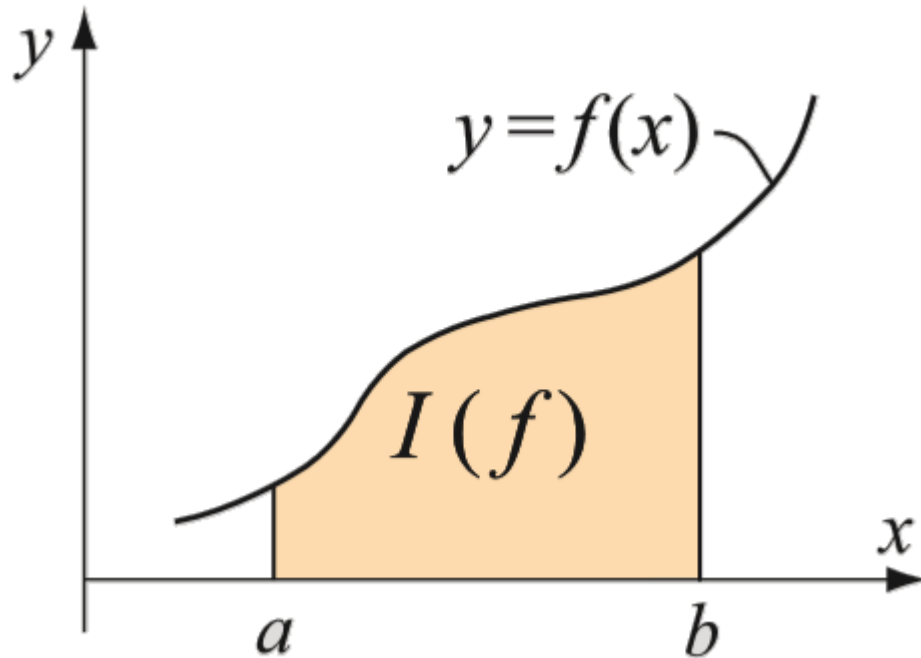


$$T = \int_0^R 2\pi \rho(r) V_{saída}^2(r) r dr$$

- *T é o impulso;*
- *$\rho(r)$ é a densidade de massa do fluido;*
- *$V_{saída}(r)$ é o perfil da velocidade na saída do motor;*
- *r é a coordenada radial e*
- *R é o raio do exaustor.*

INTRODUÇÃO

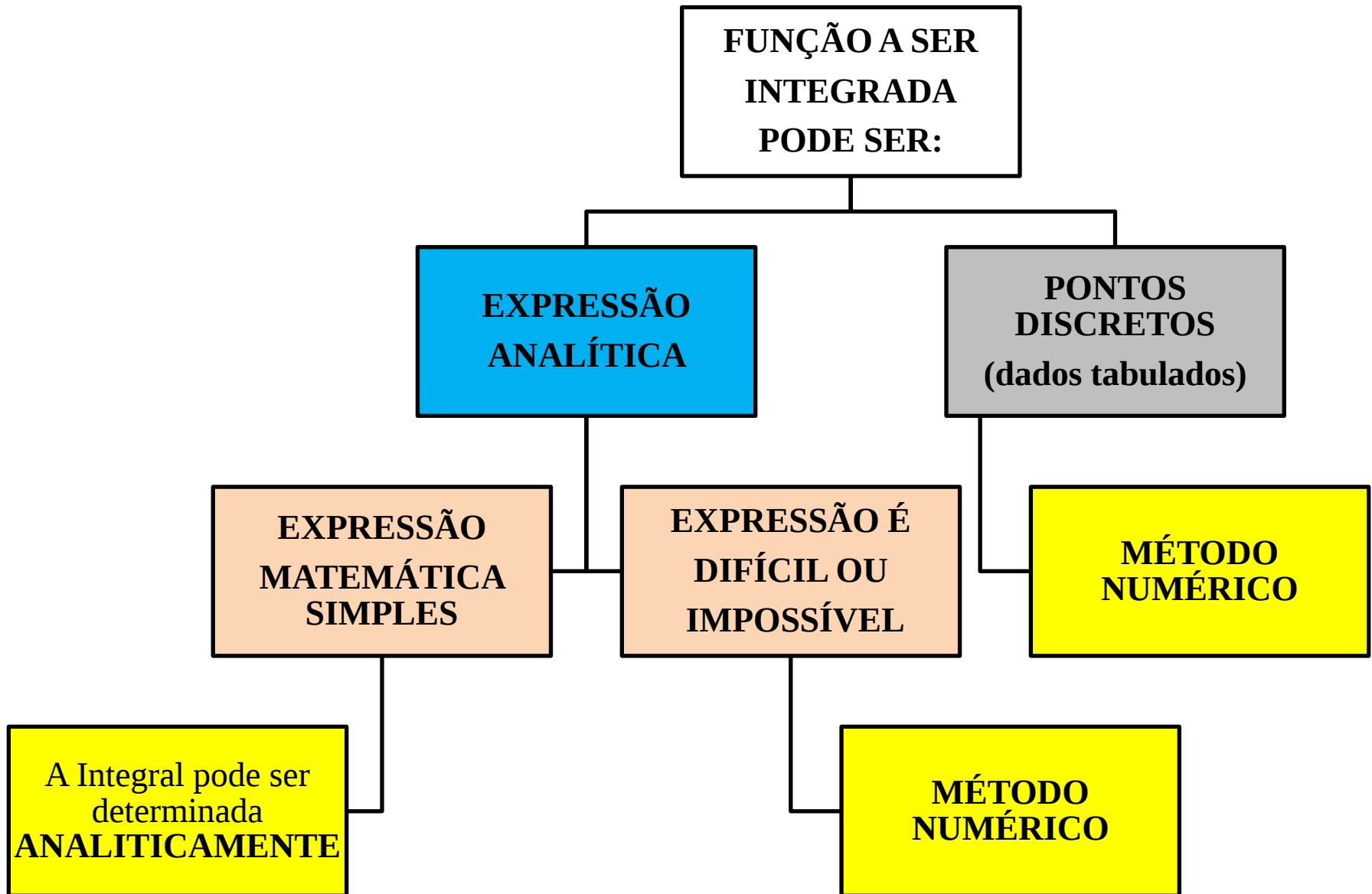
- Cálculo do valor da integral corresponde à **área sombreada sob a curva** de $f(x)$ entre a e b :



$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

**A necessidade de se calcular uma integral
numericamente**

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA



INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

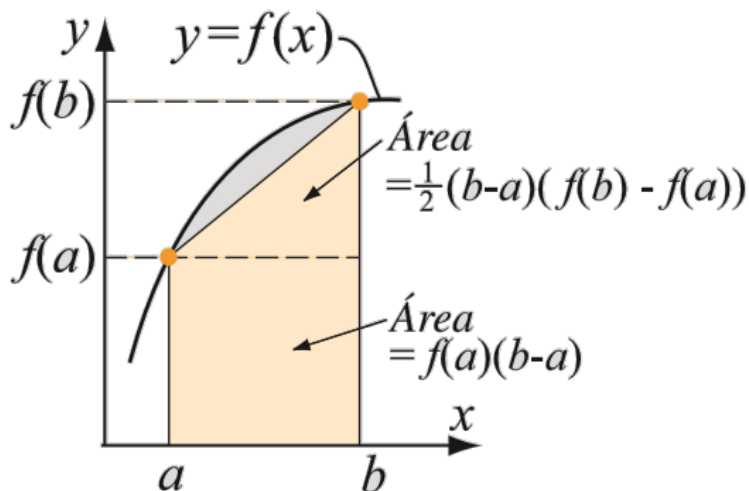
- Para um determinado **conjunto de dados**, 2 abordagens SE DESTACAM no cálculo da aproximação numérica da INTEGRAL em um intervalo de pontos.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

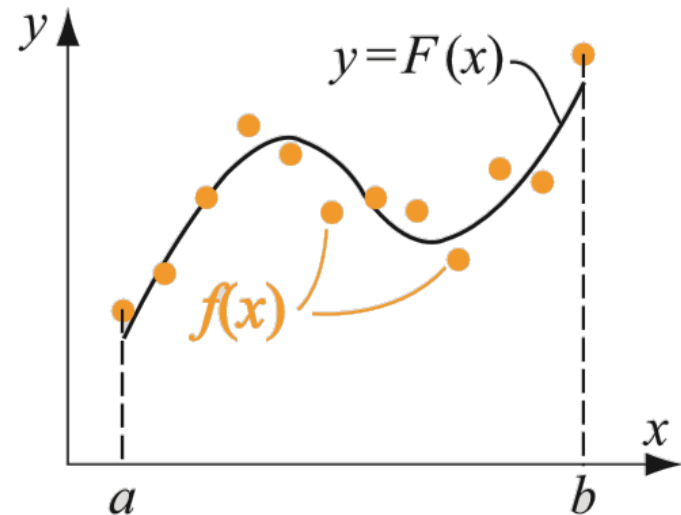
- Para um determinado **conjunto de dados**, 2 abordagens SE DESTACAM no cálculo da aproximação numérica da INTEGRAL em um intervalo de pontos.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

FÓRMULAS DE NEWTON-COTES



Aproximação Utilizando Expressão Analítica



Fórmulas de integração de Newton-Cotes

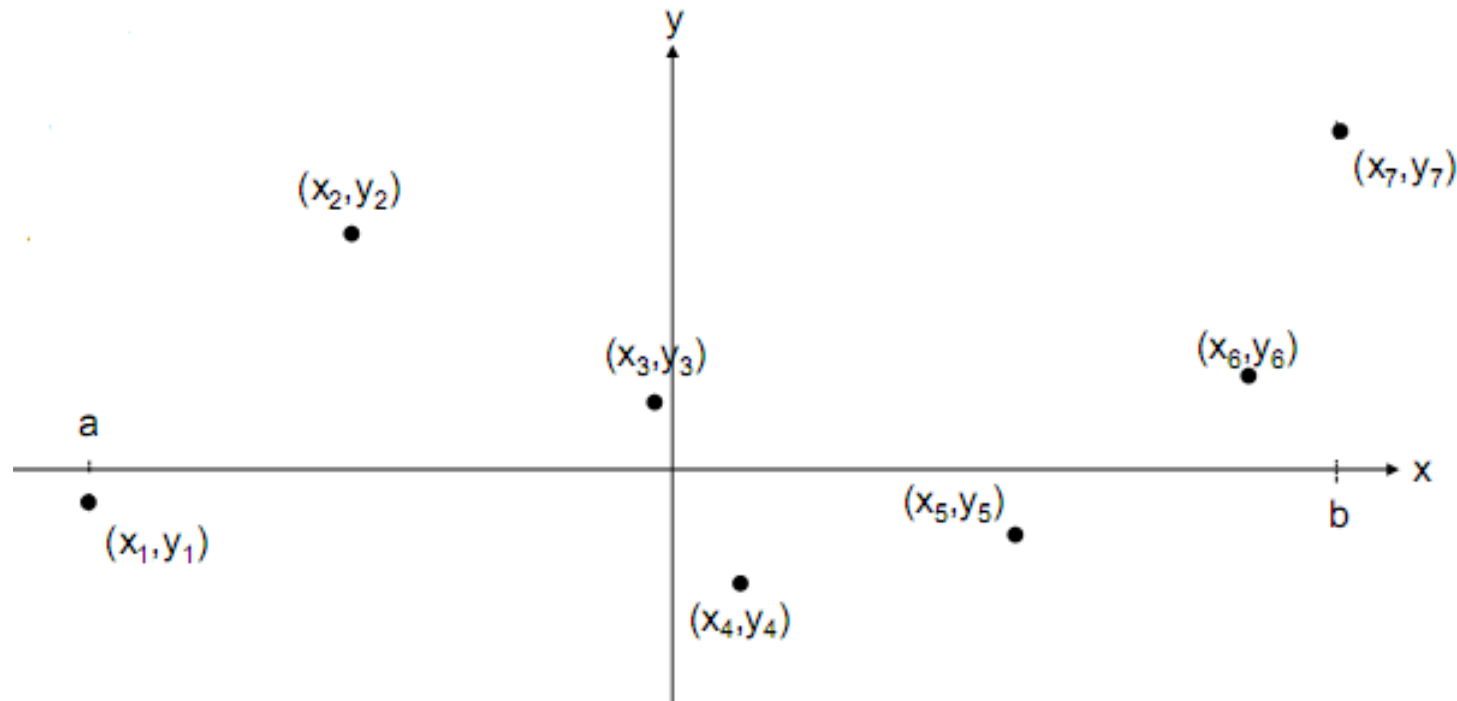
FÓRMULAS DE NEWTON-COTES

- *Quando o integrando original é uma função analítica, a fórmula de Newton-Cotes a substitui por uma função mais simples;*
- *Quando o integrando original é dado na forma de pontos discretos, a fórmula de Newton-Cotes realiza a interpolação do integrando.*

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b F(x)dx$$

FÓRMULAS DE NEWTON-COTES

- Considere o caso em que $f(x)$ é conhecida apenas em alguns pontos no intervalo $[a,b]$.



$$f(x) = ? \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx = ?$$

FÓRMULAS DE NEWTON-COTES

- A integração pode ser realizada a partir de fórmulas do tipo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n w_i \cdot f(x_i)$$

$f(x_i) \Rightarrow$ valor da função em alguns pontos

$a = x_0 < \dots < x_n = b \Rightarrow$ pontos de integração

$w_i \Rightarrow$ pesos associados aos pontos de integração

Como determinar os w_i 's?

FÓRMULAS DE NEWTON-COTES

- Essas fórmulas requerem a utilização de pontos de integração igualmente espaçados no intervalo $[a,b]$.

FÓRMULAS DE NEWTON-COTES

- Essas fórmulas requerem a utilização de pontos de integração igualmente espaçados no intervalo $[a,b]$.
- Subdividindo $[a,b]$ em n intervalos, cada um desses intervalos terá comprimento **$h=(b-a)/n$** ;
- Os pontos de integração de Newton-Cotes são:

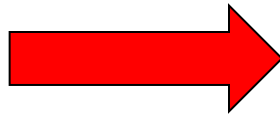
$$x_0 = a$$

$$x_1 = a + h$$

$$x_2 = a + 2h$$

$$\vdots$$

$$x_n = a + nh$$



$$x_i = a + i \cdot h, \quad \text{com } i = 0, 1, \dots, n$$

FÓRMULAS DE NEWTON-COTES

- Usando o *polinômio interpolador de Lagrange* de grau n para aproximar a integral, obtém-se a fórmula geral de Newton-Cotes:

FÓRMULAS DE NEWTON-COTES

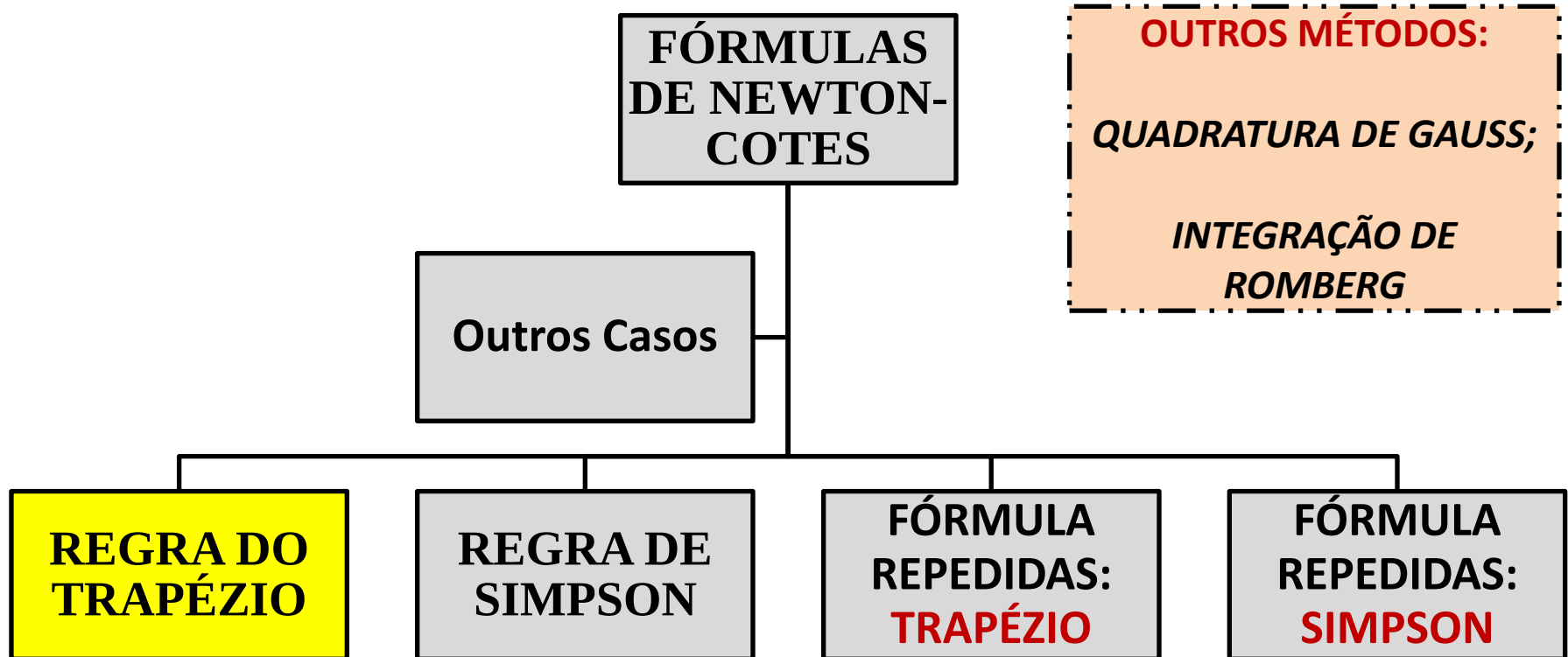
- Usando o ***polinômio interpolador de Lagrange*** de grau n para aproximar a integral, obtém-se a fórmula geral de Newton-Cotes:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \int_a^b \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} dx$$

$$w_i = \int_a^b \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} dx$$

A partir desta equação, é possível descrever as diversas regras de integração usando apropriadamente o ***grau do polinômio*** e o ***número de pontos de integração***.

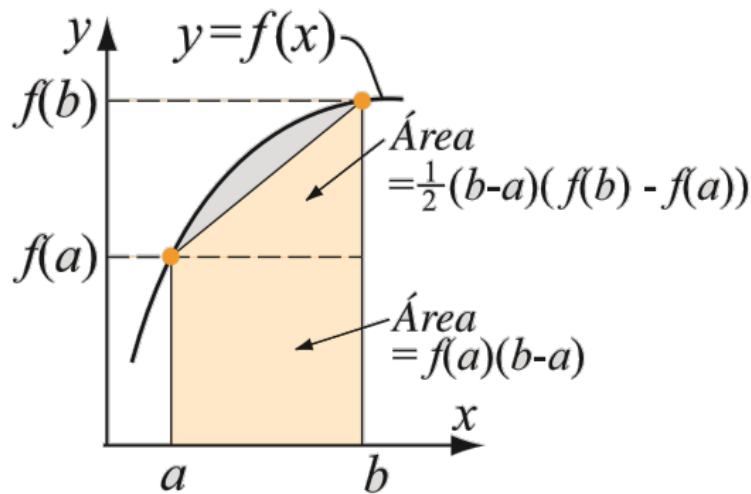
FÓRMULAS DE NEWTON-COTES



NEWTON-COTES: REGRA DO TRAPÉZIO

■ Regra do Trapézio:

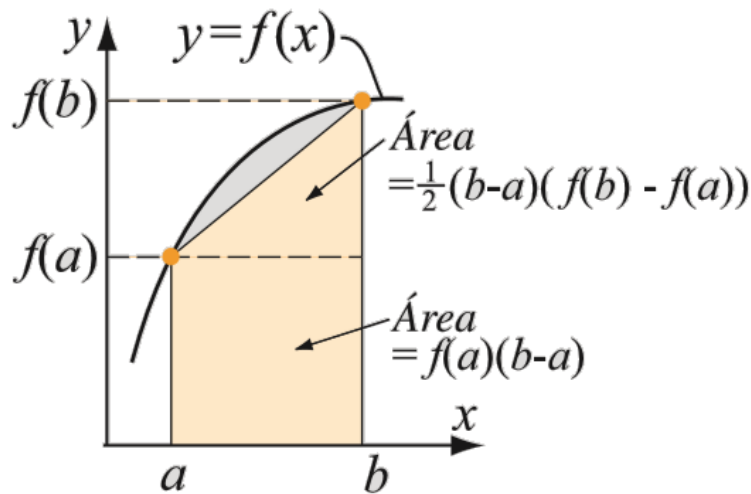
- Corresponde à interpolação da função a ser integrada por um polinômio de grau $n = 1$.



NEWTON-COTES: REGRA DO TRAPÉZIO

■ Regra do Trapézio:

- Corresponde à interpolação da função a ser integrada por um polinômio de grau $n = 1$.



$$x_0 = a \quad e \quad x_1 = b$$

- Como a interpolação linear requer 2 pontos, usam-se os extremos do intervalo como pontos de integração.

NEWTON-COTES: REGRA DO TRAPÉZIO

■ Regra do Trapézio

- A partir da fórmula de Newton-Cotes, podem-se encontrar os pesos usados no polinômio.

$$w_i = \int_a^b \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} dx \quad \Rightarrow \quad w_0 = \int_{x_0}^{x_1} \prod_{k=0, k \neq i}^{n=1} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} dx$$

$$w_0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} dx = \frac{1}{x_0 - x_1} \left. \frac{(x - x_1)^2}{2} \right|_{x_0}^{x_1}$$

NEWTON-COTES: REGRA DO TRAPÉZIO

■ Regra do Trapézio

$$w_0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} dx = \frac{1}{x_0 - x_1} \frac{(x - x_1)^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_1}$$

$$h = \frac{b - a}{n} = x_1 - x_0$$

$$w_0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} dx = \frac{1}{-h} \frac{(x - x_1)^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_1} = \frac{h}{2}$$

NEWTON-COTES: REGRA DO TRAPÉZIO

■ Regra do Trapézio

$$w_1 = \int_{x_0}^{x_1} \prod_{k=0, k \neq i}^{n=1} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} dx = \frac{1}{x_1 - x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_1}$$

$$w_1 = \frac{1}{h} \frac{(x - x_0)^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_1} = \frac{h}{2}$$

Logo, $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$

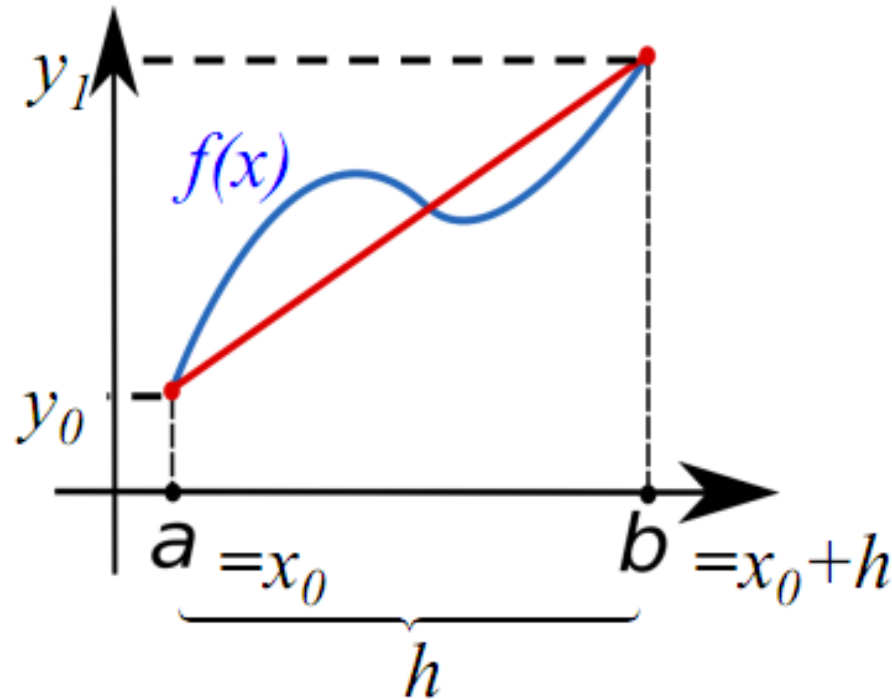


Área do Trapézio!

NEWTON-COTES: REGRA DO TRAPÉZIO

■ Regra do Trapézio

■ Graficamente



- Observação: A regra do trapézio integra exatamente funções polinomiais com grau igual ou menor que 1.

NEWTON-COTES: REGRA DO TRAPÉZIO

■ Regra do Trapézio

- Aplicação: calcular a integral aproximada da função abaixo no intervalo $[0,1]$.

$$f(x) = 1 + e^{-x}$$

Solução analítica:

$$I = \int_0^1 (1 + e^{-x}) dx = x - e^{-x} \Big|_0^1 = (1 - e^{-1}) - (0 - e^0) = \underline{1,6321}$$

NEWTON-COTES: REGRA DO TRAPÉZIO

■ Regra do Trapézio

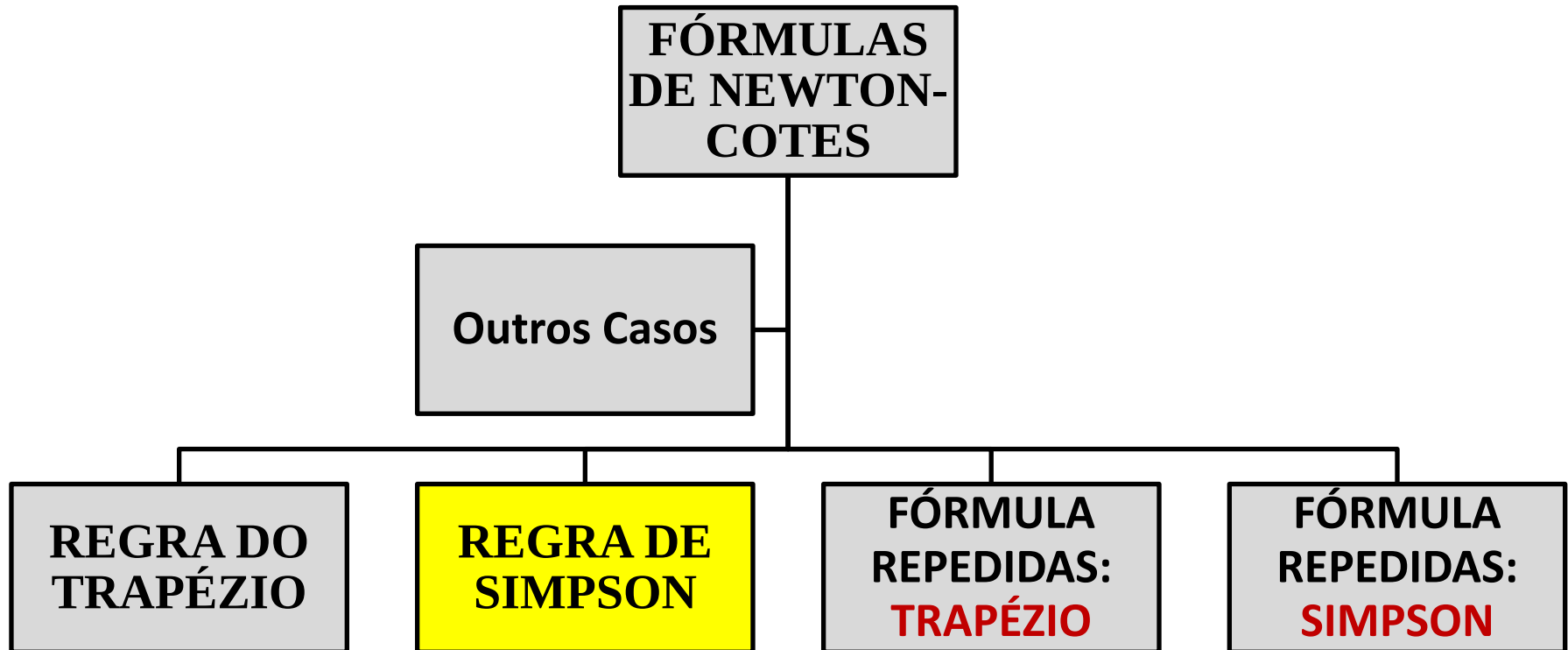
Solução numérica:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$



$$I \approx \frac{1-0}{2} [f(0) + f(1)] \approx \frac{1}{2} (2 + 1,3679) = 1,684$$

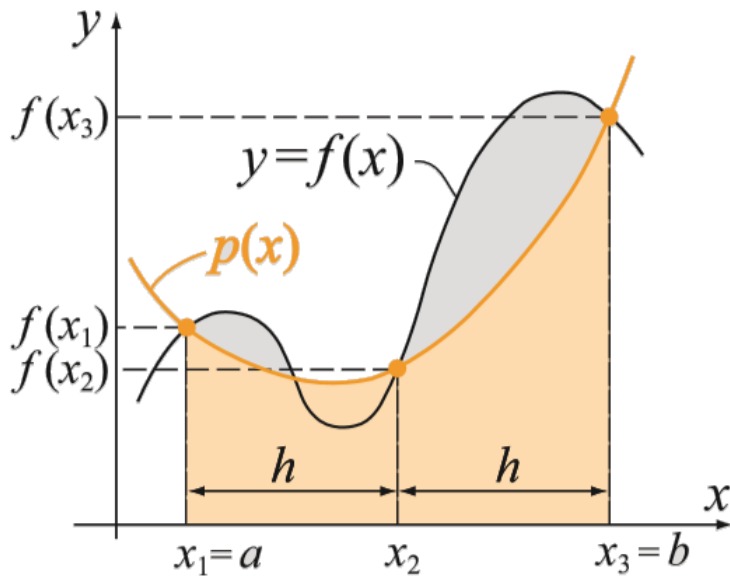
FÓRMULAS DE NEWTON-COTES



NEWTON-COTES: REGRA DE SIMPSON

■ Regra de Simpson

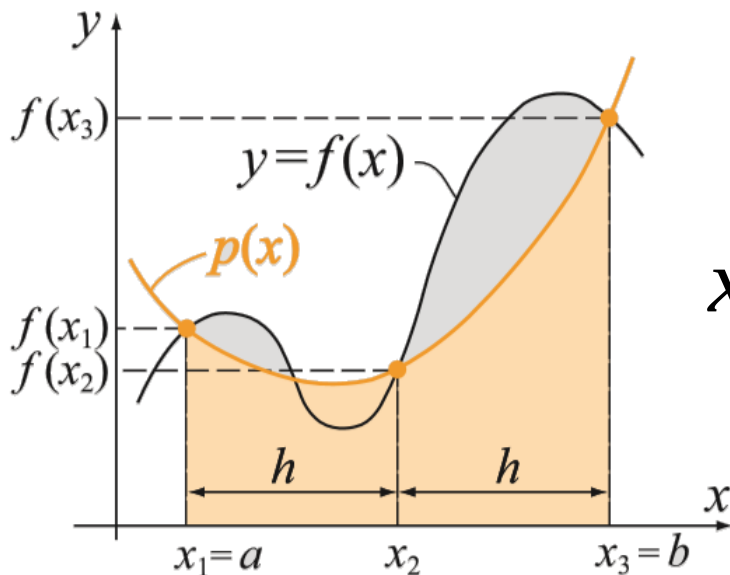
- Corresponde a interpolação da função a ser integrada por um polinômio de grau $n = 2$.



NEWTON-COTES: REGRA DE SIMPSON

■ Regra de Simpson

- Corresponde a interpolação da função a ser integrada por um polinômio de grau $n = 2$.



$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = b$$

- Esse tipo de interpolação requer 3 pontos para definição do polinômio (parábola). Usam-se os **extremos do intervalo** e o **ponto central como pontos de integração**.

NEWTON-COTES: REGRA DE SIMPSON

■ Regra de Simpson

- A partir da fórmula de Newton-Cotes, podem-se encontrar os pesos usados no polinômio.

$$w_i = \int_a^b \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} dx \quad \Rightarrow \quad w_0 = \int_{x_0}^{x_2} \prod_{k=0, k \neq i}^{n=2} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} dx$$

$$w_0 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} dx = \frac{h}{3}$$

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{x_2 - x_0}{2}$$

NEWTON-COTES: REGRA DE SIMPSON

■ Regra de Simpson

$$w_1 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} dx = \frac{4h}{3}$$

$$w_2 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} dx = \frac{h}{3}$$

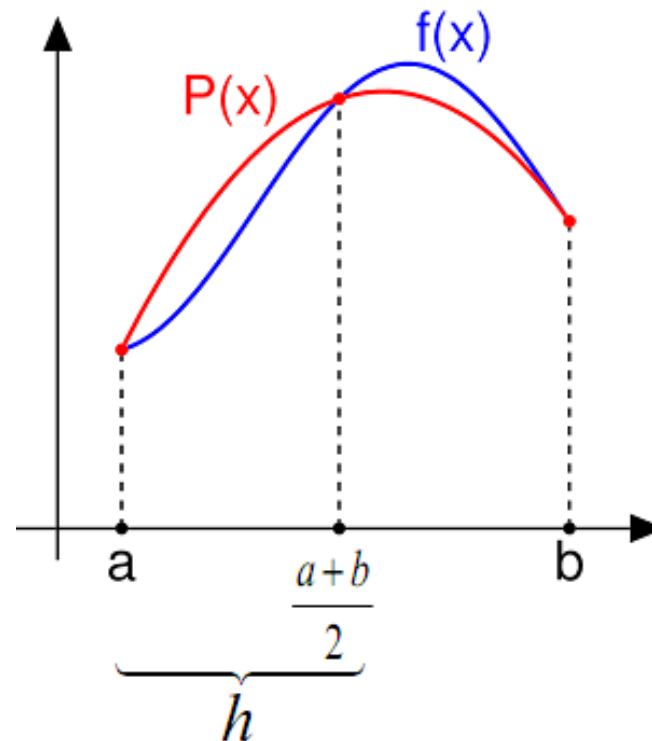
Logo, $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$ 

Área sob a Parábola!

NEWTON-COTES: REGRA DE SIMPSON

■ Regra de Simpson

■ Graficamente



- Observação: A regra de Simpson integra exatamente funções polinomiais com grau igual ou menor que 2.

NEWTON-COTES: REGRA DE SIMPSON

■ Regra de Simpson

- Aplicação: calcular a integral aproximada da função abaixo no intervalo $[0,1]$.

$$f(x) = 1 + e^{-x}$$

Solução numérica:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$



NEWTON-COTES: REGRA DE SIMPSON

■ Regra de Simpson

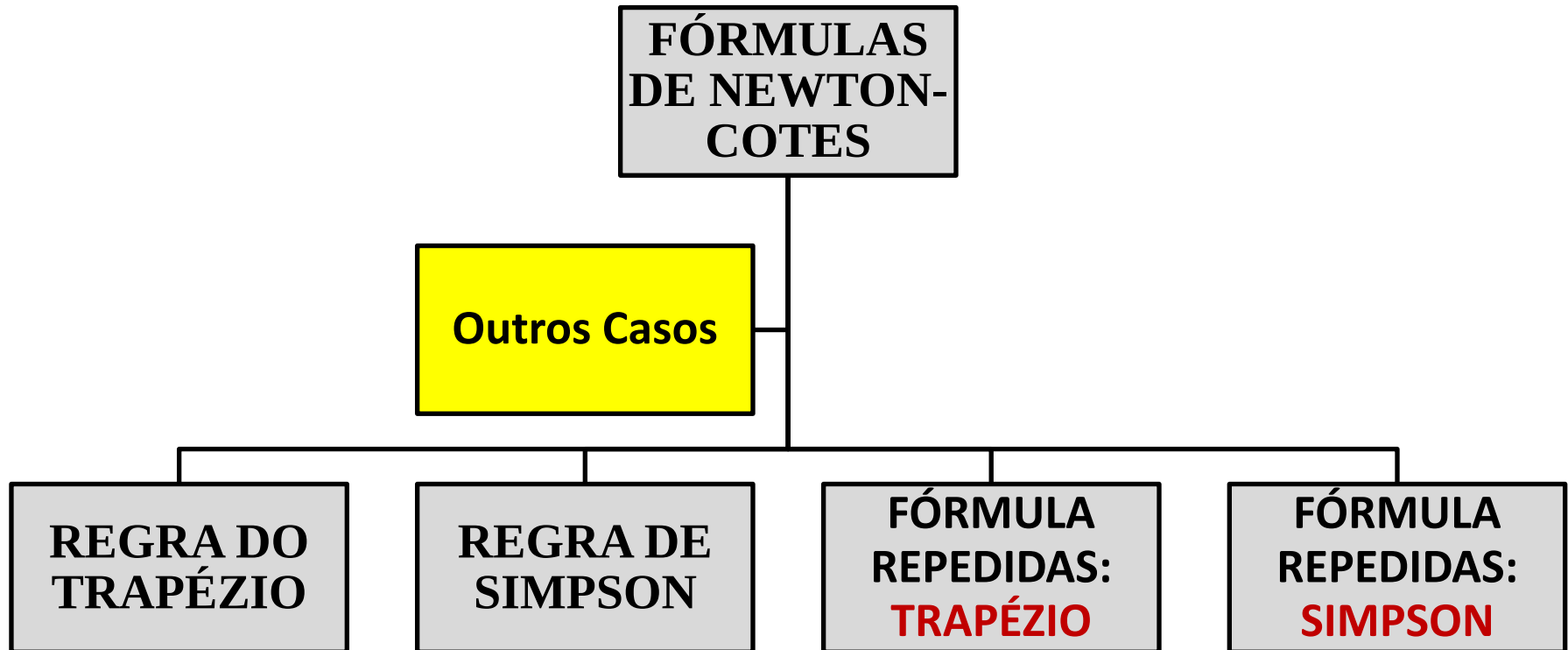
$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2} \quad x_1 = a + h = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \approx \frac{1}{6} (f(0) + 4 \cdot f(0,5) + f(1))$$

$$I \approx \frac{1}{6} (2 + 4 \cdot 1,6065 + 1,3679) \approx 1,6323$$

$$\text{sol_analítica} = 1,6321$$

FÓRMULAS DE NEWTON-COTES



NEWTON-COTES: OUTROS CASOS

■ Outros Casos

- Podem-se descrever regras de integração, a partir da fórmula de Newton-Cotes, utilizando polinômios com grau $n = 3, 4, 5$, etc.

Técnica	Grau do polinômio
Regra do trapézio	1
Regra de Simpson	2
Regra 3/8 de Simpson	3
Regra de Boole	4

NEWTON-COTES: FÓRMULAS REPETIDAS

■ Fórmulas Repetidas

- Quando o intervalo de integração é grande, não é muito prático aumentar o grau do polinômio interpolador para estabelecer as fórmulas de integração;

NEWTON-COTES: FÓRMULAS REPETIDAS

■ Fórmulas Repetidas

- Quando o intervalo de integração é grande, não é muito prático aumentar o grau do polinômio interpolador para estabelecer as fórmulas de integração;
- A alternativa mais utilizada é subdividir o intervalo de integração e aplicar as regras mais simples repetidas vezes.

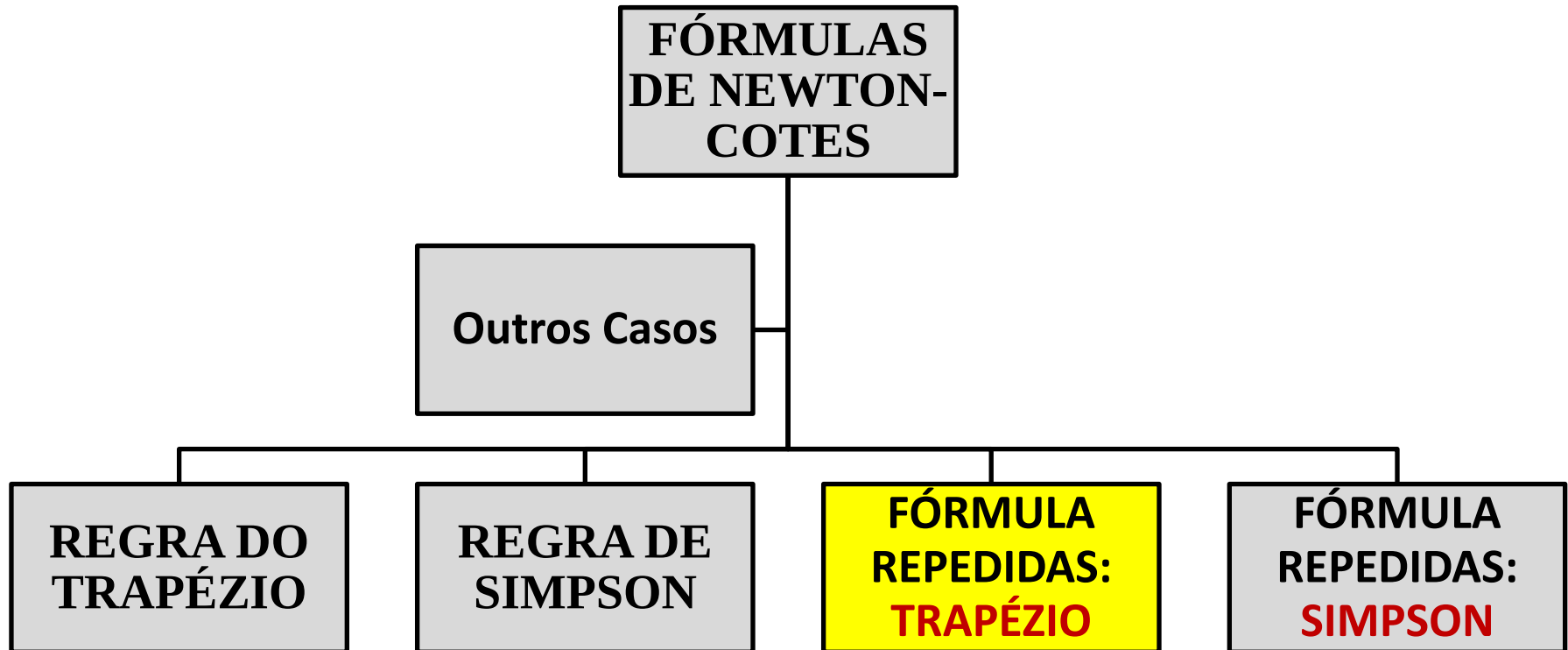
NEWTON-COTES: FÓRMULAS REPETIDAS

■ Fórmulas Repetidas

- Quando o intervalo de integração é grande, não é muito prático aumentar o grau do polinômio interpolador para estabelecer as fórmulas de integração;
- A alternativa mais utilizada é subdividir o intervalo de integração e aplicar as regras mais simples repetidas vezes.
- Dividindo o intervalo de integração $[a,b]$ em n subintervalos de igual comprimento $h = (b-a)/n$, tem-se:

$$x_0 = a, \quad x_i = x_{i-1} + h \Rightarrow h = x_i - x_{i-1} \quad \text{e} \quad x_n = b$$

FÓRMULAS DE NEWTON-COTES



FÓRMULAS REPETIDAS: TRAPÉZIO

■ Fórmulas Repetidas: Regra do Trapézio

- Utilizando a Regra do Trapézio em cada subintervalo:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$$

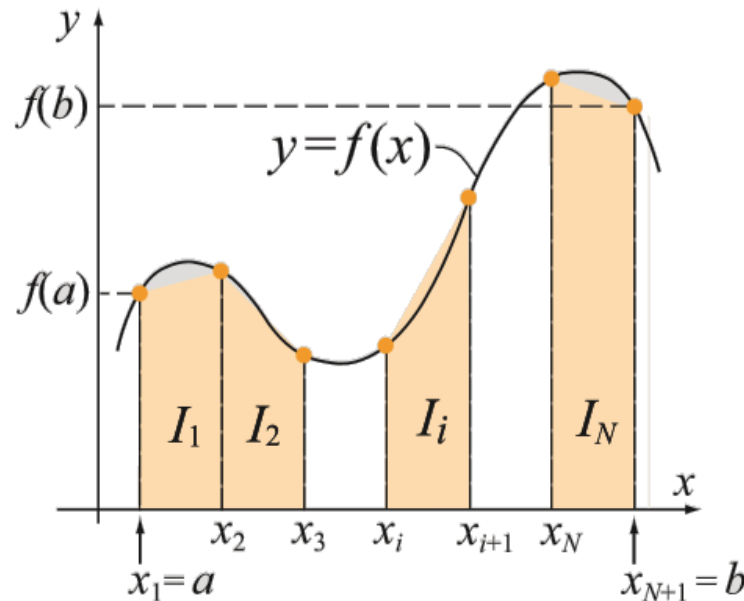
$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$



FÓRMULAS REPETIDAS: TRAPÉZIO

■ Fórmulas Repetidas: Regra do Trapézio

■ Graficamente



- Na fórmula repetida usando a regra do trapézio, ocorre o erro numérico:

$$|E_{TR}| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \cdot M_2$$

$$M_2 = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(2)}(x)|$$

FÓRMULAS REPETIDAS: TRAPÉZIO

■ Fórmulas Repetidas: Regra do Trapézio

- Aplicação: calcular a integral aproximada da função abaixo no intervalo $[0,1]$, usando $n = 4$ (quatro subintervalos).

$$f(x) = 1 + e^{-x}$$

Solução:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$



FÓRMULAS REPETIDAS: TRAPÉZIO

■ Fórmulas Repetidas: Regra do Trapézio

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$



$$I \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^3 f(x_i) + f(x_4) \right]$$

$$I \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) + f(x_4)]$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0,25$$

FÓRMULAS REPETIDAS: TRAPÉZIO

$$I \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) + f(x_4)]$$

$$I \approx \frac{0,25}{2} [f(0) + 2(f(0,25) + f(0,5) + f(0,75)) + f(1)]$$

$$I \approx \frac{0,25}{2} [2 + 2(1,7788 + 1,6065 + 1,4724) + 1,3679]$$

$$\underline{I \approx 1,6354}$$

FÓRMULAS REPETIDAS: TRAPÉZIO

```
% FUNÇÃO QUE CALCULA A INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO COMPLEXA COM O MESMO USANDO  
% A REGRA DO TRAPÉZIO REPETIDO
```

```
clear  
clc
```

```
integrando = '1+exp(-x)';           % função a ser integrada
```

```
a = 0;           % Limite inferior de integração.  
b = 1;           % Limite superior de integração.  
N = 4;           % Número de subintervalos.
```

```
h = (b-a)/N;  
func = inline(integrando);  
disp('i      xi      f(ci)');  
x = a:h:b;
```

```
for i =1:N+1  
    F(i) = func(x(i));  
  
    fprintf('%3i      %11.6f %11.6f\n',i-1,x(i),F(i))
```

```
end  
I = h*(F(1)+F(N+1))/2 + h*sum(F(2:N));  
disp(' A Integral usando o Método Trapezoidal Repetido Vale:')  
disp(I)
```

FÓRMULAS REPETIDAS: TRAPÉZIO

```
clear
clc

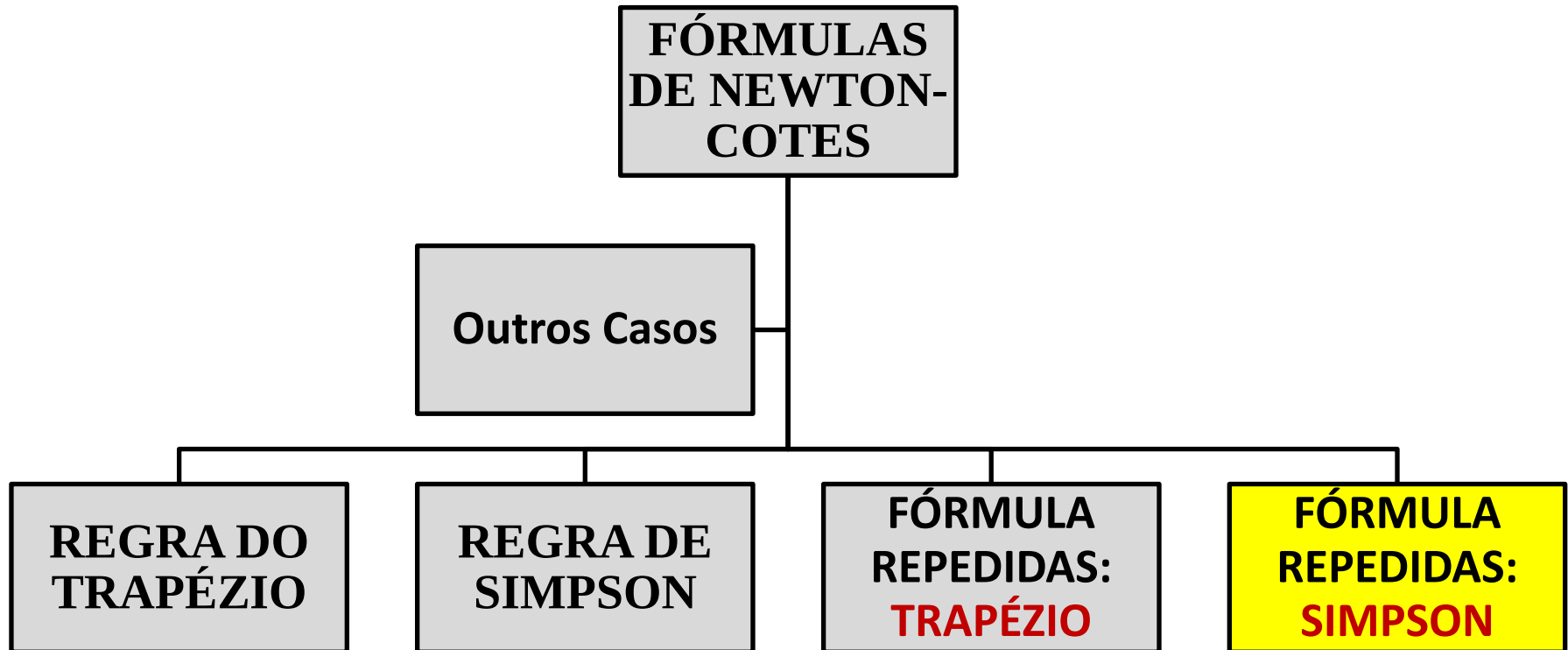
% FUNÇÃO QUE CALCULA A INTEGRAL DE PONTOS DISCRETOS COM O MESMO
% SUBINTERVALOS
% *****
% ***** DADOS DE ENTRADA: *****
% *****

x = [0 1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0 12.0]; % VALORES DE X
F = [0 1.3 1.6 2.4 2.8 3.0 3.1 3.0 2.8 2.4 1.7 1.3 0];      % VALORES DE F(X)

% *****
% *****
% *****

N = length(x);      % Número de subintervalos.
a = x(1);           % Limite inferior de integração.
b = x(N);           % Limite superior de integração.
h = (b-a)/(N-1);
disp('i      xi      F(xi) ');
x = a:h:b;
for i =1:N
    fprintf('%3i      %11.6f %11.6f\n',i-1,x(i),F(i))
end
I = h*(F(1)+F(N))/2 + h*sum(F(2:N-1));
disp(' A Integral usando o Método Trapezoidal Repetido Vale:')
disp(I)
```

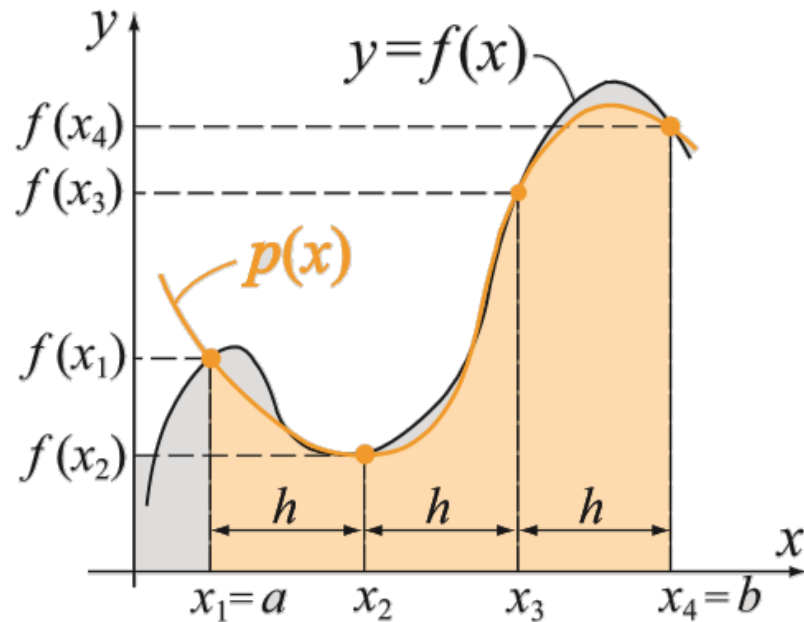
FÓRMULAS DE NEWTON-COTES



FÓRMULAS REPETIDAS: SIMPSON

■ Fórmulas Repetidas: Regra de Simpson

- Utilizando a Regra de Simpson em cada subintervalo:



- Importante: Aqui, o número de subdivisões deve ser par, pois cada parábola requer 3 pontos de interpolação.

FÓRMULAS REPETIDAS: SIMPSON

■ Fórmulas Repetidas: Regra de Simpson

- Utilizando a Regra de Simpson em cada subintervalo:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + f(x_n)]$$



- Importante: Aqui, o número de subdivisões deve ser par, pois cada parábola requer 3 pontos de interpolação.

FÓRMULAS REPETIDAS: SIMPSON

■ Fórmulas Repetidas: Regra de Simpson

- Na fórmula repetida usando a regra de simpson, ocorre o erro numérico:

$$|E_{SR}| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} \cdot M_4$$

$$M_4 = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(4)}(x)|$$

FÓRMULAS REPETIDAS: SIMPSON

■ Fórmulas Repetidas: Regra de Simpson

- Aplicação: calcular a integral aproximada da função abaixo no intervalo $[0,1]$, usando $n = 4$ (quatro subintervalos).

$$f(x) = 1 + e^{-x}$$

Solução:

$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + f(x_n)]$$



FÓRMULAS REPETIDAS: SIMPSON

■ Fórmulas Repetidas: Regra de Simpson

$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + f(x_n)]$$



$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

FÓRMULAS REPETIDAS: SIMPSON

■ Fórmulas Repetidas: Regra de Simpson

$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + f(x_n)]$$



$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0,25$$

FÓRMULAS REPETIDAS: SIMPSON

■ Fórmulas Repetidas: Regra de Simpson

$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + f(x_n)]$$



$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0,25$$

$$I \approx \frac{0,25}{3} [f(0) + 4f(0,25) + 2f(0,5) + 4f(0,75) + f(1)]$$

$$I \approx \frac{0,25}{3} [2 + 4 \cdot 1,7788 + 2 \cdot 1,6065 + 4 \cdot 1,4724 + 1,3679] = \underline{\underline{1,6321}}$$

FÓRMULAS REPETIDAS: SIMPSON

```
clear
clc
% FUNÇÃO QUE CALCULA A INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO COMPLEXA COM O MESMO TAMANHO
% NOS SUBINTERVALOS USANDO A REGRA DE SIMPSON REPETIDO

% *****
% ***** DADOS DE ENTRADA: *****
% *****

integrando = '1+exp(-x)'; % função a ser integrada

a = 0; % Limite inferior de integração.
b = 1; % Limite superior de integração.
N = 4; % Número de subintervalos.

% *****
% *****

h = (b-a)/N;
func = inline(integrando);
disp('i      xi      f(ci)');
x = a:h:b;
for i = 1:N+1
    F(i) = func(x(i));
    fprintf('%3i      %11.6f %11.6f\n', i-1, x(i), F(i))
end
sum = 0;
for i = 2:N
    if mod(i,2)==0
        sum = sum+4*F(i);
    else
        sum = sum+2*F(i);
    end
end
I = h*(F(1)+F(N+1) + sum)/3;
disp(' A Integral usando o Método de Simpson Repetido Vale:')
disp(I)
```

FÓRMULAS REPETIDAS: SIMPSON

```
clear
clc
% FUNÇÃO QUE CALCULA A INTEGRAL DE PONTOS DISCRETOS COM O MESMO TAMANHO NOS
% SUBINTERVALOS USANDO METODO DE SIMPSON REPETIDO
% *****
% ***** DADOS DE ENTRADA: *****
% *****

x = [0 1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0 12.0]; % VALORES DE X
F = [0 1.3 1.6 2.4 2.8 3.0 3.1 3.0 2.8 2.4 1.7 1.3 0]; % VALORES DE F(X)

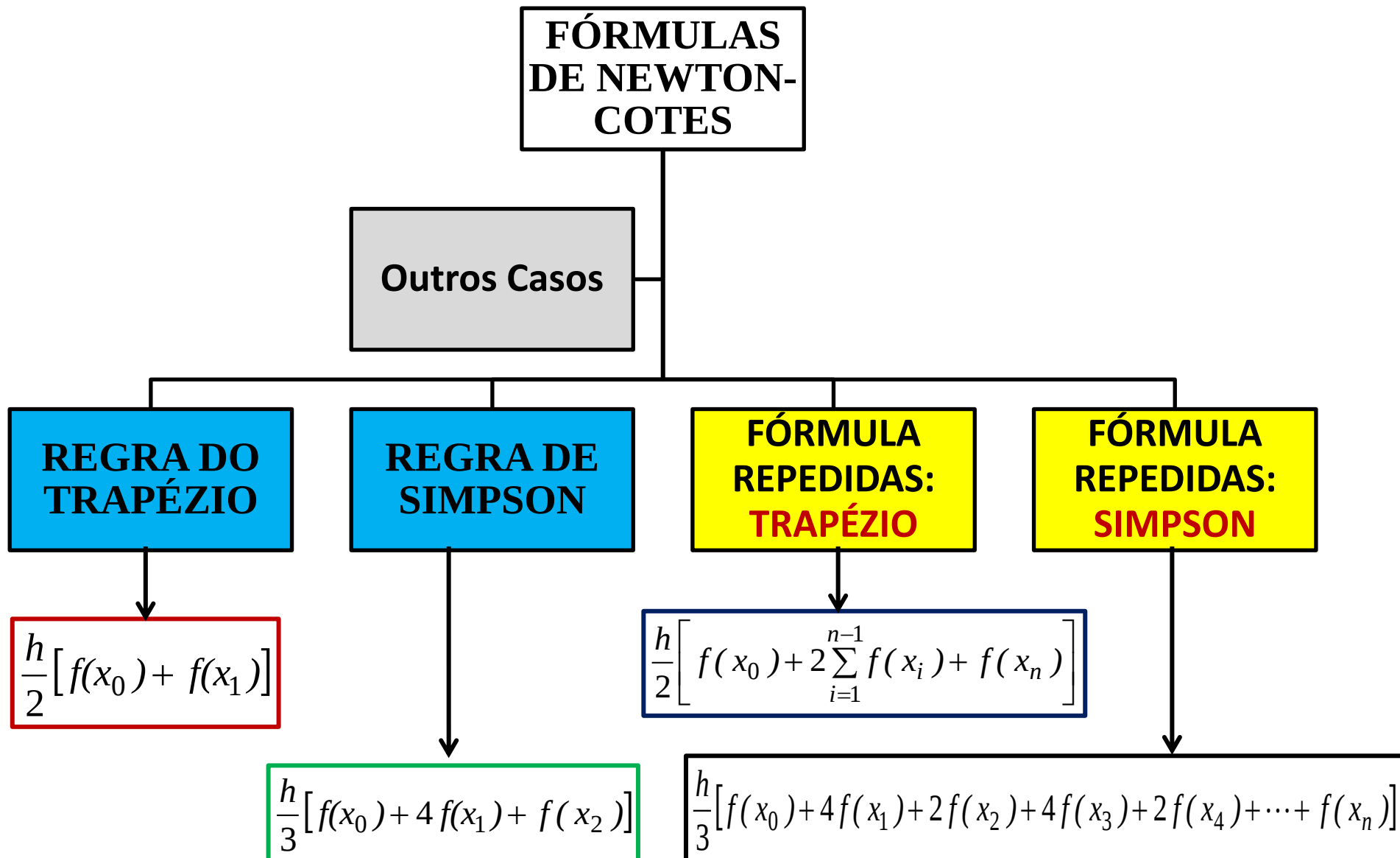
% *****
% *****
% *****

n = length(x); % tamanho do vetor dos dados.
a = x(1); % Limite inferior de integração.
b = x(n); % Limite superior de integração.
h = (b-a)/(n-1);
disp('i xi F(xi)');
x = a:h:b;
for i =1:n
    fprintf('%3i %11.6f %11.6f\n',i-1,x(i),F(i))
end
sum = 0;
for i =2:n-1
    if mod(i,2)==0
        sum = sum+4*F(i);
    else
        sum = sum+2*F(i);
    end
end
end

I = h*(F(1) + F(n) + sum)/3;
disp(' A Integral usando o Método de Simpson Repetido Vale:')
disp(I)
```

RESUMO: FÓRMULAS DE NEWTON-COTES

FÓRMULAS DE NEWTON-COTES



EXERCÍCIOS:

- **Exercício 1:** A integral elíptica completa do primeiro tipo é expresso por:

$$K(\theta) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \phi}}$$

Calcule $K(30^\circ)$, o resultado exato para quatro casas decimais é 1,6858.

Considere o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, usando $n = 4$ (quatro subintervalos).

EXERCÍCIOS:

- **Exercício 2:** Dados os seguintes valores numéricos, onde y deve ser alguma função (desconhecida) de x , encontre a área sob a curva representada aproximadamente por y :

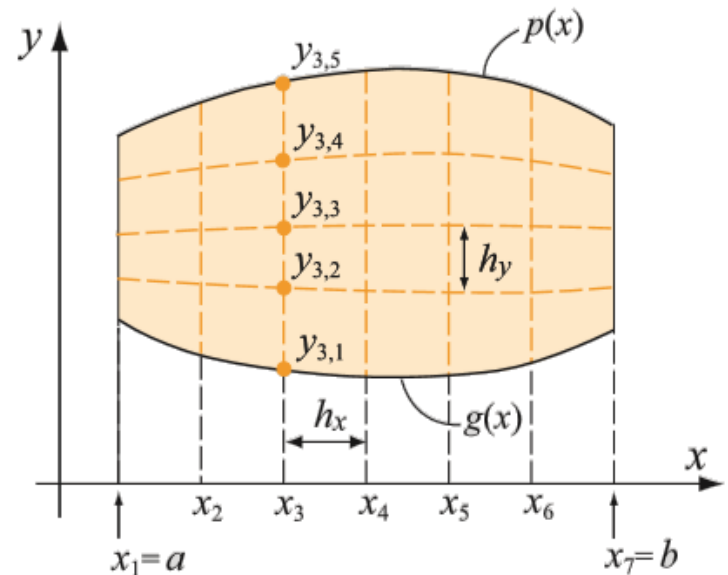
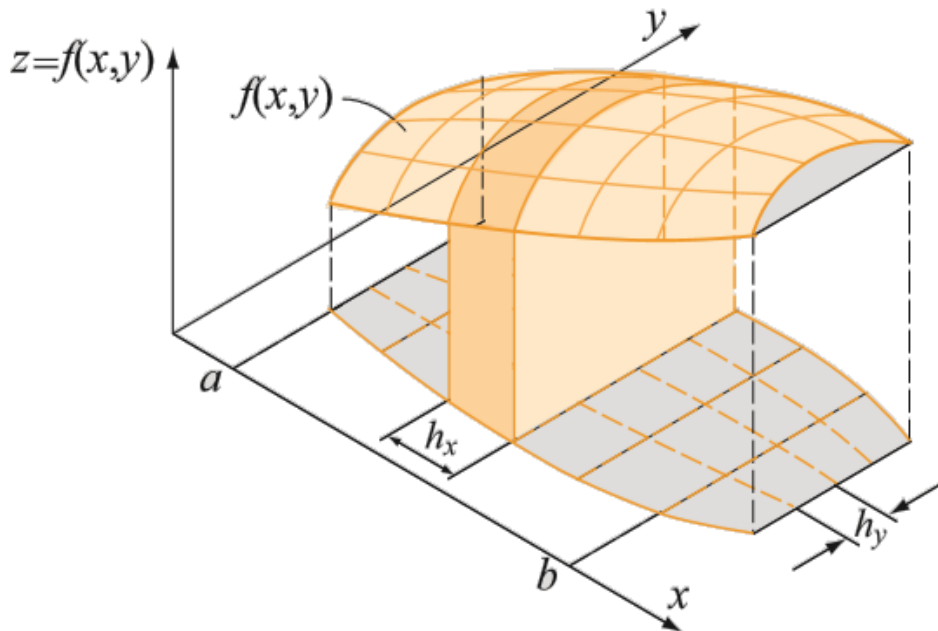
x	1,0	1,2	1,4	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
y	1,00	1,82	2,08	3,52	4,70	5,12	6,38	6,98	8,22	9,00

AVALIAÇÃO DE INTEGRAIS MÚLTIPLAS

AVALIAÇÃO DE INTEGRAIS MÚLTIPLAS

- *Integrais duplas e triplas aparecem frequentemente em problemas **bidimensionais e tridimensionais**.*

$$I = \int_A f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_{y=g(x)}^{y=p(x)} f(x, y) dy \right] dx$$



AVALIAÇÃO DE INTEGRAIS MÚLTIPLAS

- *A integral dupla na equação pode ser dividida em duas partes.*

$$I = \int_A f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_{y=g(x)}^{y=p(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

$$G(x) = \int_{y=g(x)}^{y=p(x)} f(x, y) dy$$

$$I = \int_a^b G(x) dx$$

Avalia-se as integrais usando algum dos métodos numéricos descritos anteriores.

...CONTINUA