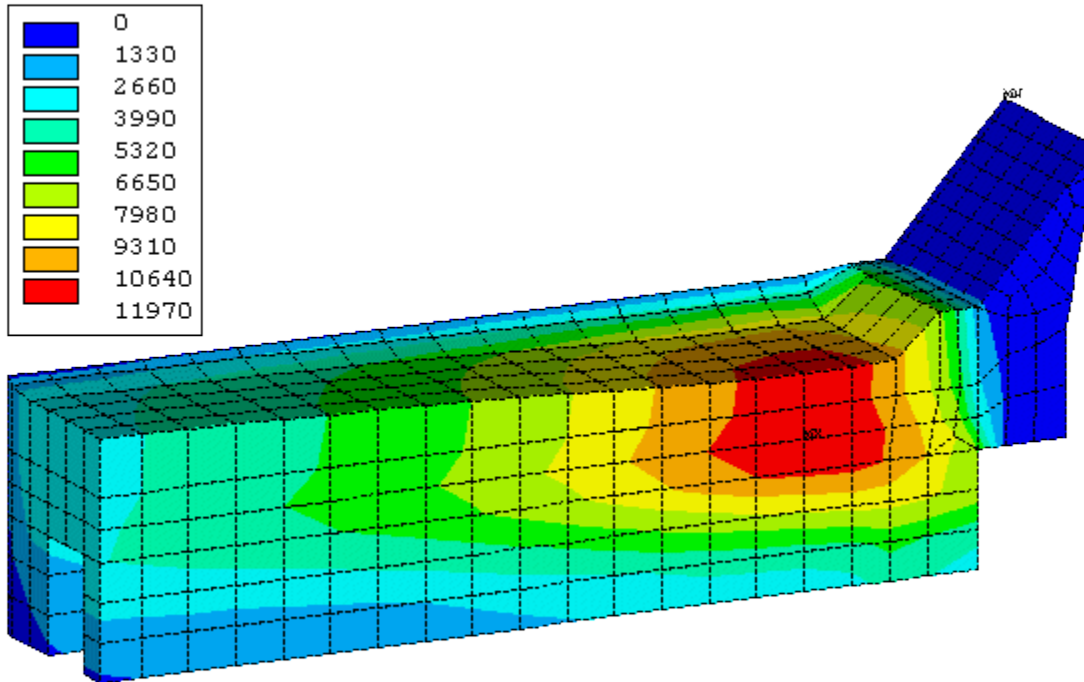




Mecânica dos Sólidos II

Prof. Dr. Alverlando Ricardo

Aula 9: PARTE II: **Tensão & Deformação**

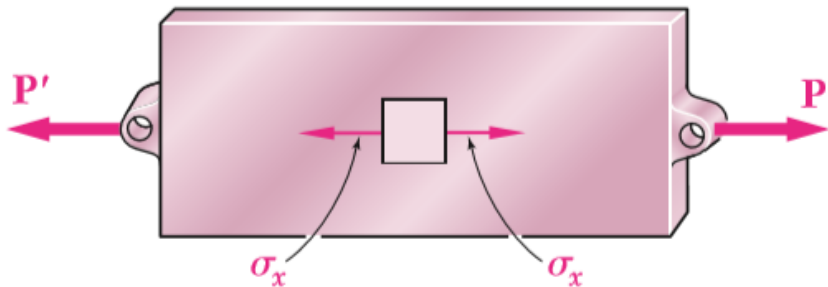
***Critérios de escoamento para materiais dúcteis em estado plano de tensão**

Critérios de escoamento materiais dúcteis

- Boa parte dos **aços estruturais** utilizados na estruturas civis e de maquinários são feitos com material **DÚCTIL**.
- Onde são projetados de modo que o material **não escoe** sob as condições esperadas de carregamento;

Critérios de escoamento materiais dúcteis

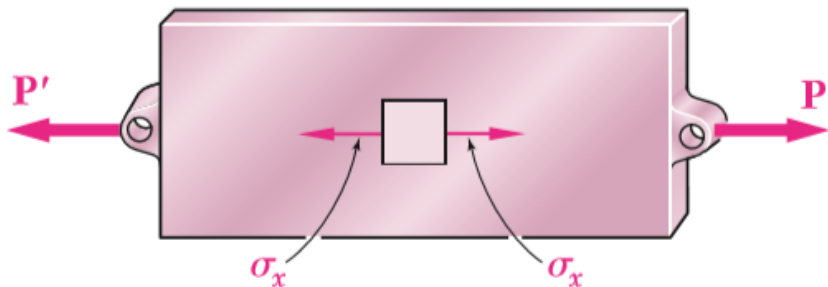
- Quando o elemento está sob um estado de tensão uniaxial, o valor da tensão normal que fará o material escoar pode ser obtido facilmente por um ensaio de tração:



(a) Aço com baixo teor de carbono

Critérios de escoamento materiais dúcteis

- Quando o elemento está sob um estado de tensão uniaxial, o valor da tensão normal que fará o material escoar pode ser obtido facilmente por um ensaio de tração:



Segurança: $\sigma_x < \sigma_E$,

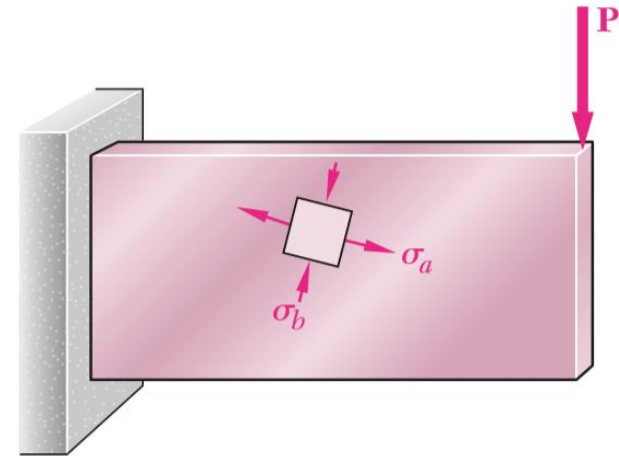
σ_E é a tensão de escoamento do material do corpo de prova.



(a) Aço com baixo teor de carbono

Critérios de escoamento materiais dúcteis

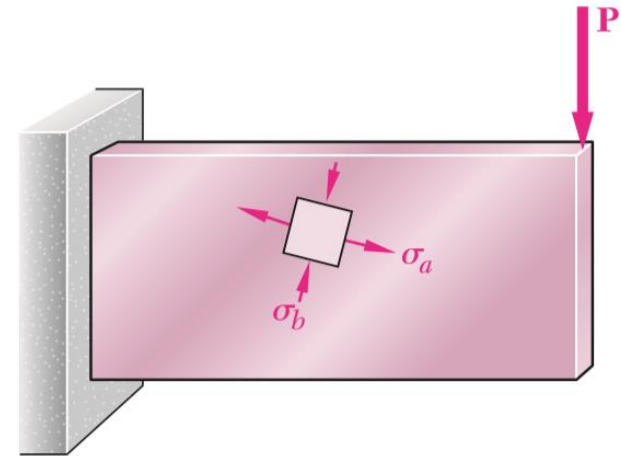
- *Mas e quando um elemento estrutural ou componente de máquina está em um estado plano de tensão ?*



Critérios de escoamento materiais dúcteis

- *Mas e quando um elemento estrutural ou componente de máquina está em um estado plano de tensão ?*

- **É conveniente considerar as tensões principais σ_1 e σ_2 em um dado ponto;**



***Critério de
Tresca***



***Critério de
von Mises***

Critério da tensão de cisalhamento
máxima (*Critério de Tresca*)

Critério de Tresca

- o escoamento em materiais dúcteis é provocado pelo deslizamento do material ao longo de superfícies oblíquas:



Tensões cisalhantes é a principal responsável pela falha

Critério de Tresca

- o escoamento em materiais dúcteis é provocado pelo deslizamento do material ao longo de superfícies oblíquas:

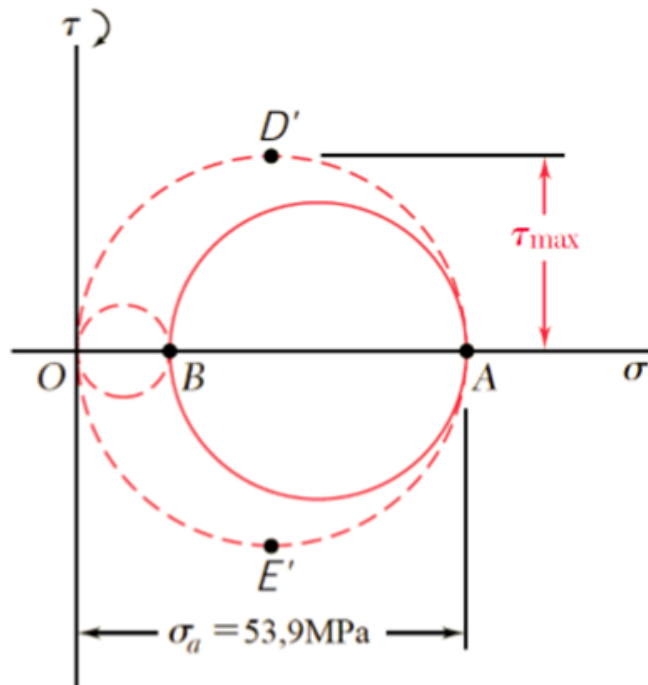
➤ **Segurança:** $\zeta_{\text{máx}} < \zeta_{\text{ensaio}}$,
quando o corpo de prova
começa a escoar.



Tensões cisalhantes é a principal responsável pela falha

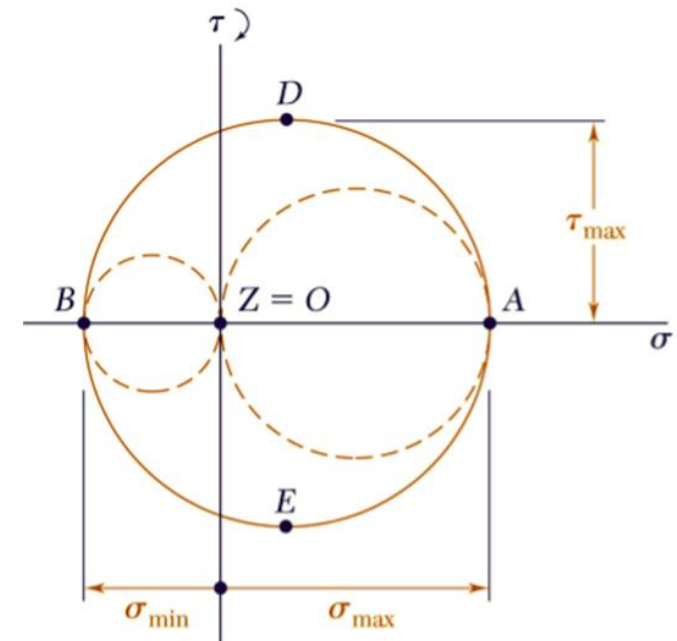
Critério de Tresca

- Para o estado plano de tensão, o valor máximo da tensão de cisalhamento $\tau_{\max}$ é igual:



$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_a = \frac{1}{2} (53,9 \text{ MPa})$$

σ_a mesmo sinal que σ_b

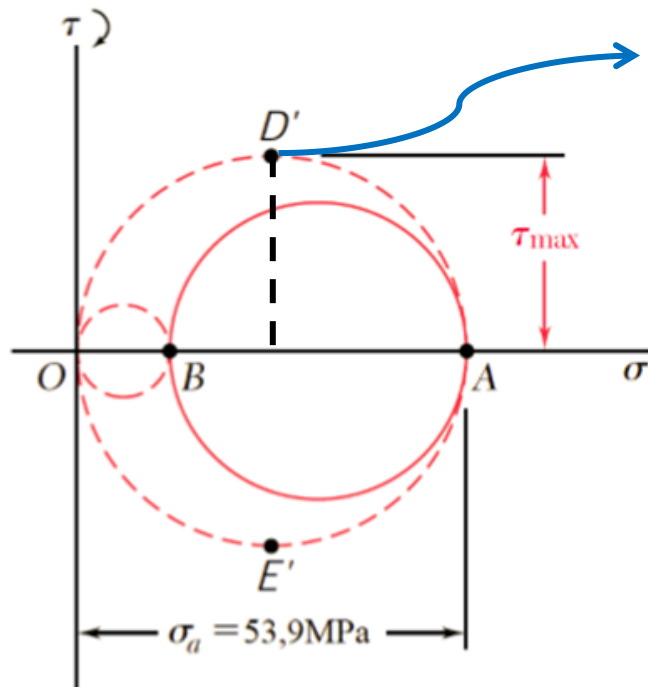


$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_{\max} - \sigma_{\min}|$$

σ_a sinais diferentes que σ_b

Critério de Tresca

- Se as tensões principais σ_a e σ_b tiverem o mesmo sinal, o critério da tensão de cisalhamento máxima resultará :



$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_a = \frac{1}{2}(53,9 \text{ MPa})$$

$$\zeta_{\max} = \sigma_a/2$$

$$\zeta_{\text{ensaio}} = \sigma_E/2 \text{ (45 graus)}$$

$$\zeta_{\max} < \zeta_{\text{ensaio}}$$

$$|\sigma_a| < \sigma_E$$

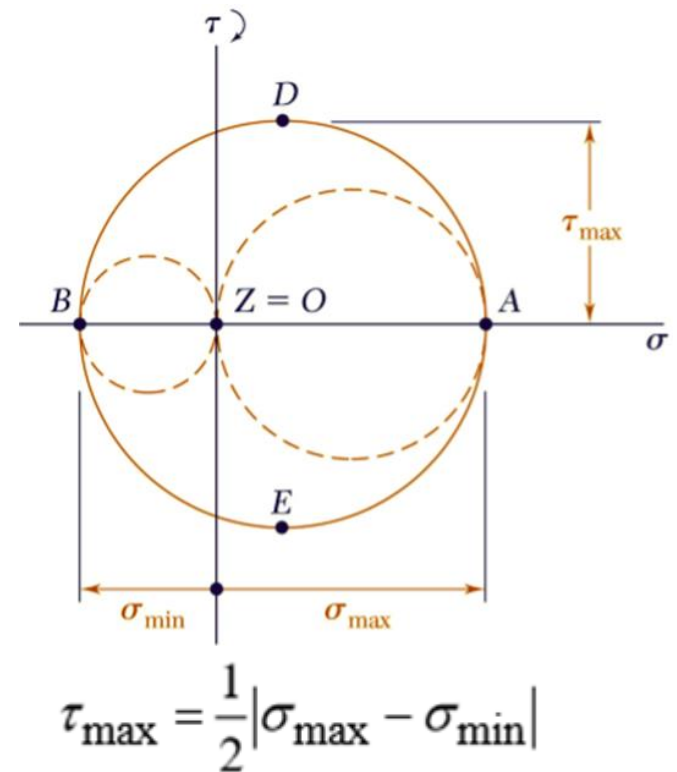
$$|\sigma_b| < \sigma_E$$

σ_a mesmo sinal que σ_b

Critério de Tresca

- Se as tensões principais σ_a e σ_b tiverem sinais opostos, o critério da tensão de cisalhamento máxima resultará em:

$$|\sigma_a - \sigma_b| < \sigma_E$$



σ_a sinais diferentes que σ_b

Critério de Tresca

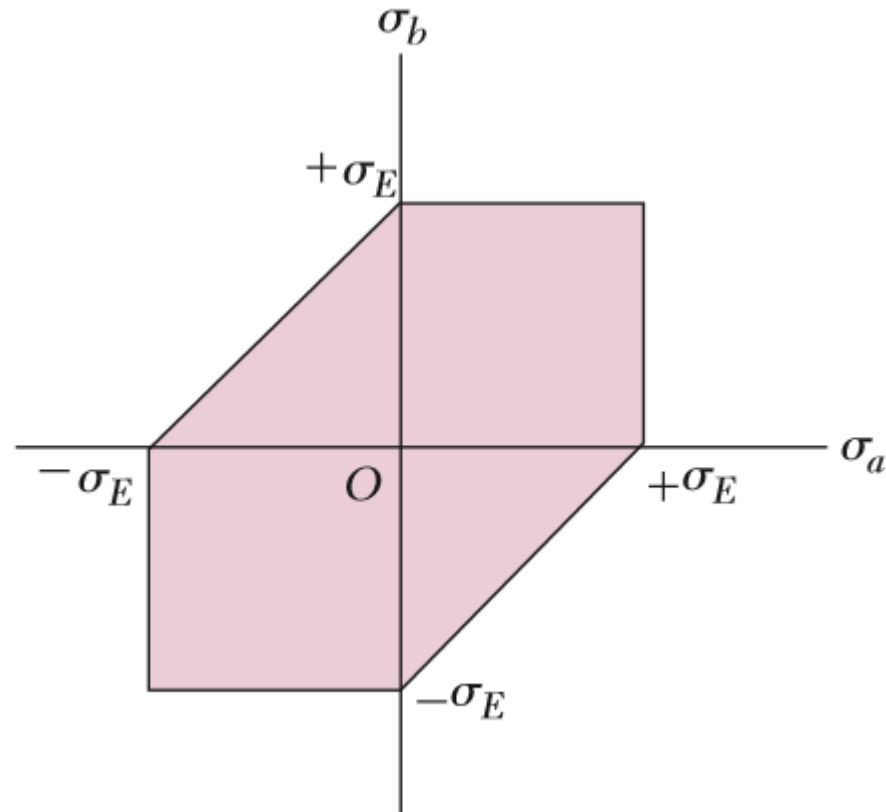
- As relações obtidas foram representadas graficamente na Figura:

$$|\sigma_a| < \sigma_E \quad |\sigma_b| < \sigma_E$$

σ_a mesmo sinal que σ_b

$$|\sigma_a - \sigma_b| < \sigma_E$$

σ_a sinais diferentes que σ_b



Critério da energia de distorção máxima
(*Critério de von Mises*)

Critério de Tresca

- *Este critério baseia-se na determinação da energia de distorção, isto é, da energia associada a variações na forma do material :*

➤ **Segurança:**

$$u_d < (u_d)_E$$

$$\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_E^2$$

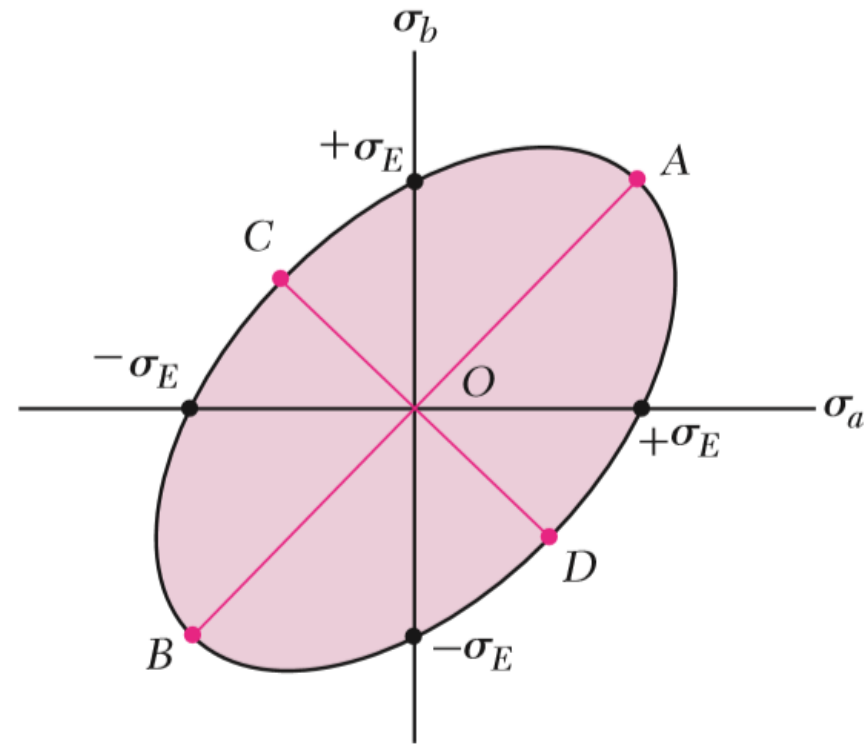
Critério de Tresca

- Este critério baseia-se na determinação da energia de distorção, isto é, da energia associada a variações na forma do material :

➤ **Segurança:**

$$u_d < (u_d)_E$$

$$\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_E^2$$



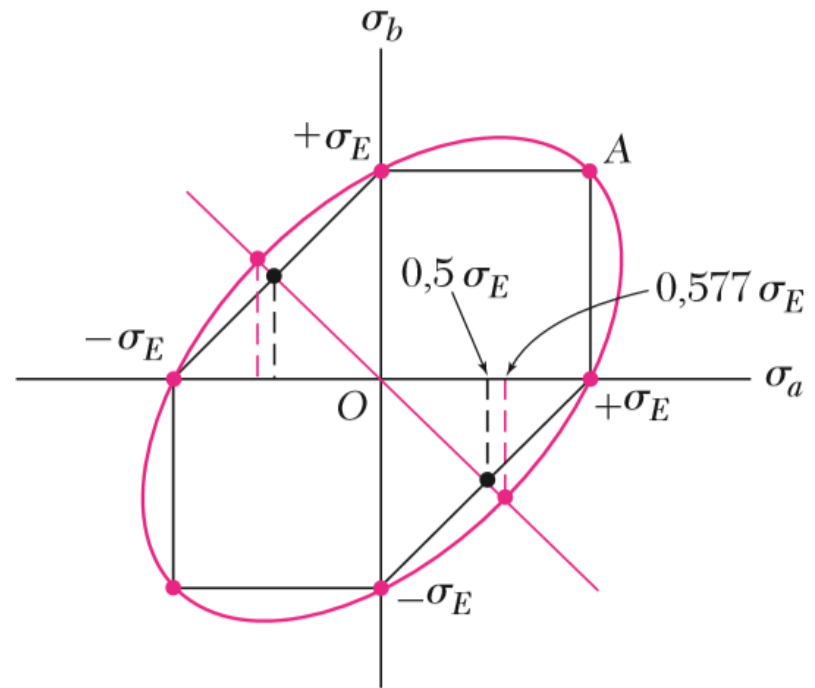
Critério de Tresca

- Este critério baseia-se na determinação da energia de distorção, isto é, da energia associada a variações na forma do material :

➤ **Segurança:**

$$u_d < (u_d)_E$$

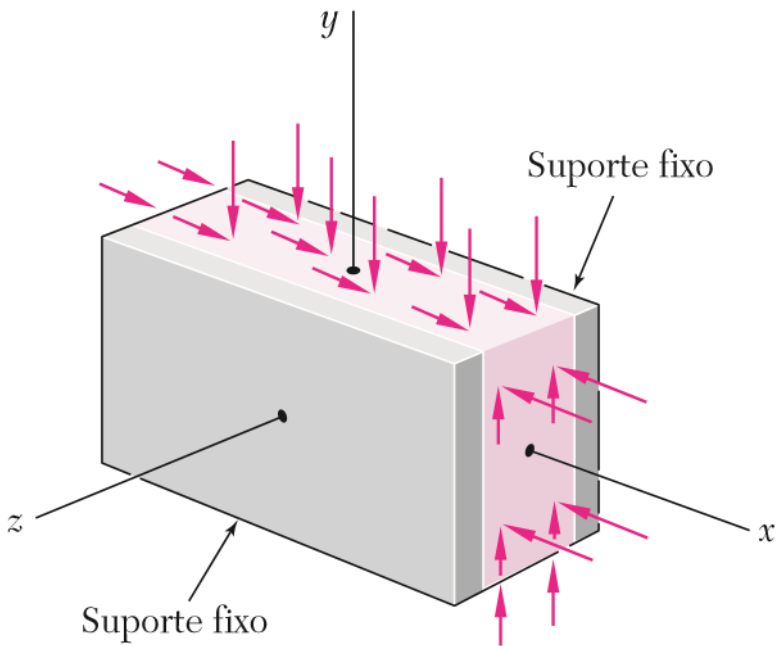
$$\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_E^2$$



***7.10. Transformação do estado plano de deformação**

Transformação do EPD

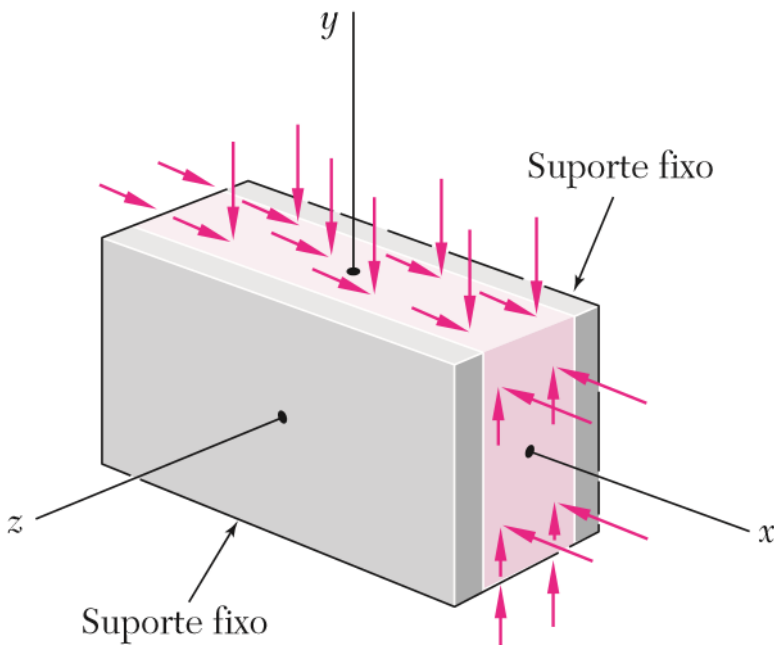
➤ **Exemplo de EPD:** placa submetida a forças uniformemente distribuídas, ao longo de suas bordas, e impedida de se expandir/contrair lateralmente por meio de suportes fixos, rígidos e planos.



$$\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$$

Transformação do EPD

- **Exemplo de EPD:** placa submetida a forças uniformemente distribuídas, ao longo de suas bordas, e impedida de se expandir/contrair lateralmente por meio de suportes fixos, rígidos e planos.



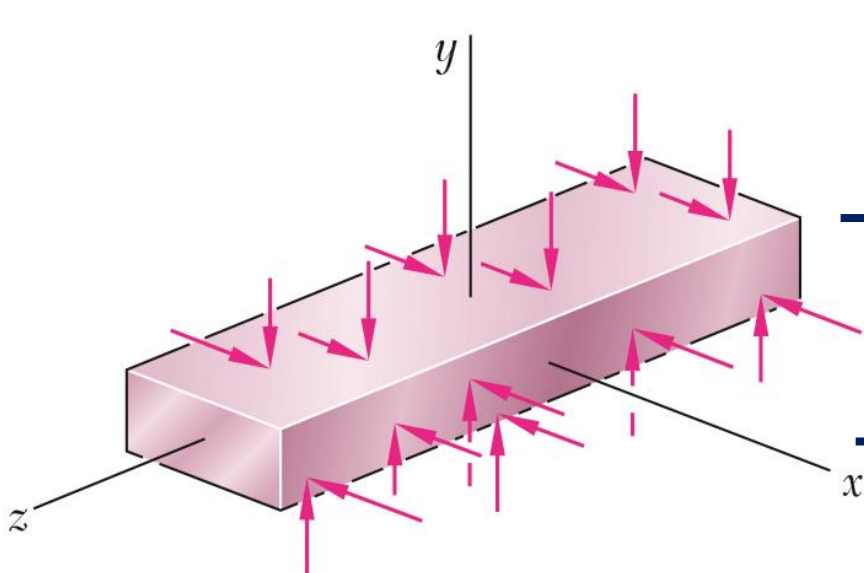
$$\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$$

**Componentes de
deformação que
restam**

$$\epsilon_x, \epsilon_y \text{ e } \gamma_{xy}$$

Transformação do EPD

➤ **Exemplo de EPD:** barra de comprimento infinito com seus lados submetidos a forças uniformemente distribuídas.



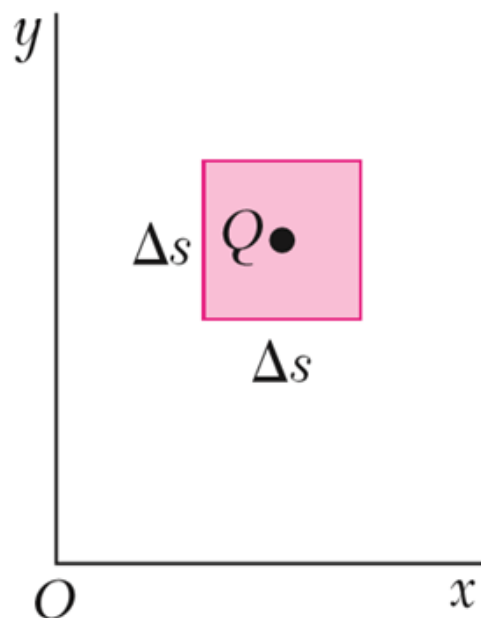
$$\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$$

**Componentes de
deformação que
restam**

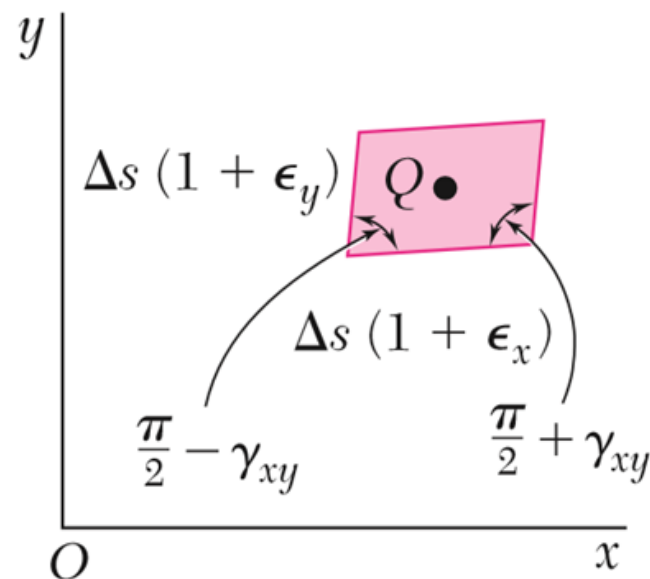
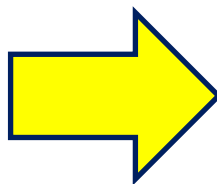
$$\epsilon_x, \epsilon_y \text{ e } \gamma_{xy}$$

Transformação do EPD

➤ **Objetivo:** Determinar em termos de ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} e θ as componentes de tensão ϵ'_x , ϵ'_y , γ'_{xy} ,

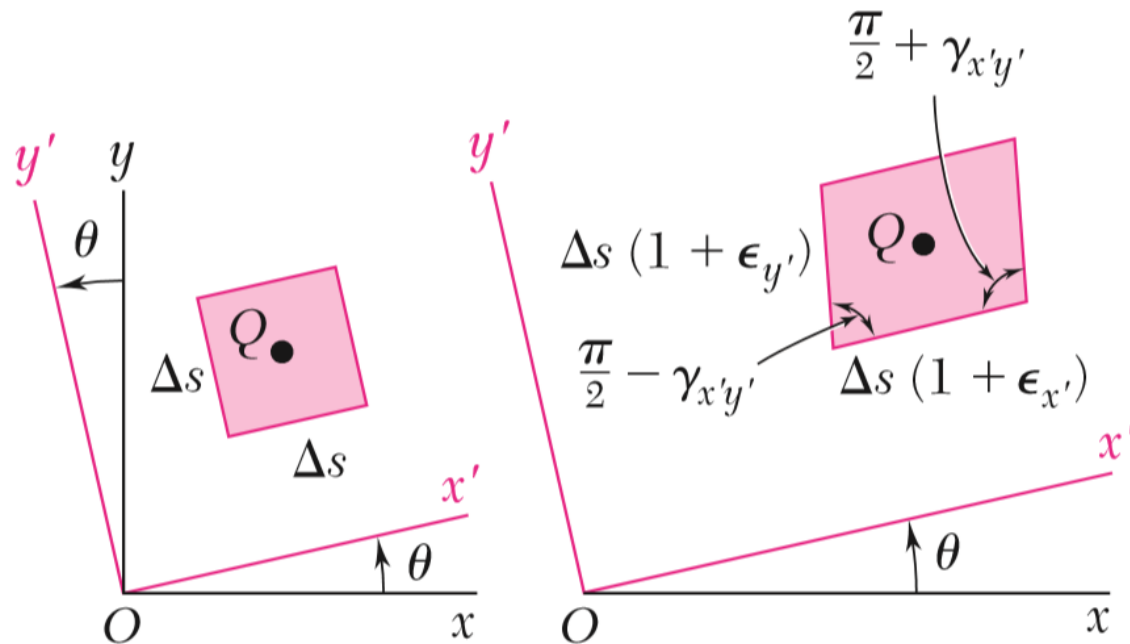


Aplicação das
cargas



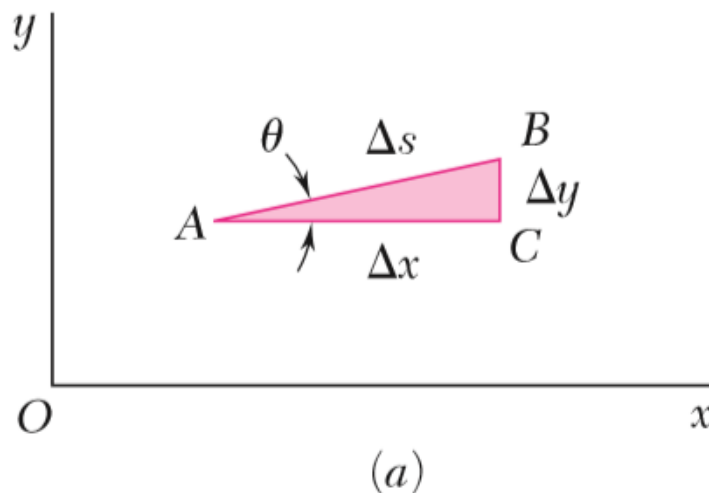
Transformação do EPD

- **Objetivo:** Determinar em termos de ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} e θ as componentes de tensão $\epsilon'_{x'}$, $\epsilon'_{y'}$, $\gamma'_{x'y'}$ associadas com o sistema de referência $x'y'$ obtido pela rotação dos eixos x e y de um ângulo θ .



Transformação do EPD

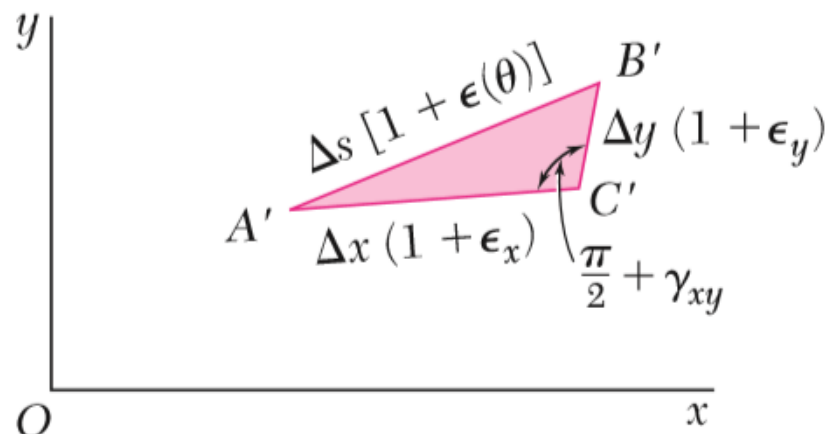
➤ **Dedução:** Determinar a deformação para uma linha AB qualquer, após aplicação do carregamento



Transformação do EPD

➤ *Dedução:*

Aplicando a lei dos Cossenos para $A'B'C'$:



$$(A'B')^2 = (A'C')^2 + (C'B')^2 - 2(A'C')(C'B') \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right)$$

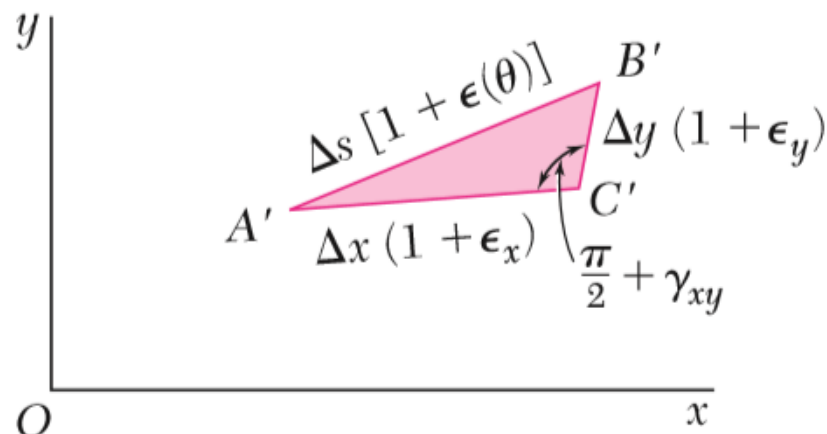
$$(\Delta s)^2 [1 + \epsilon(\theta)]^2 = (\Delta x)^2 (1 + \epsilon_x)^2 + (\Delta y)^2 (1 + \epsilon_y)^2$$

$$- 2(\Delta x)(1 + \epsilon_x)(\Delta y)(1 + \epsilon_y) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right)$$

Transformação do EPD

➤ *Dedução:*

Aplicando a lei dos Cossenos para $A'B'C'$:



$$(A'B')^2 = (A'C')^2 + (C'B')^2 - 2(A'C')(C'B') \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right)$$

$$(\Delta s)^2 [1 + \epsilon(\theta)]^2 = (\Delta x)^2 (1 + \epsilon_x)^2 + (\Delta y)^2 (1 + \epsilon_y)^2 - 2(\Delta x)(1 + \epsilon_x)(\Delta y)(1 + \epsilon_y) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right)$$

$$\Delta x = (\Delta s) \cos \theta \quad \Delta y = (\Delta s) \sin \theta$$

e observamos que, como γ_{xy} é muito pequeno,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) = -\sin \gamma_{xy} \approx -\gamma_{xy}$$

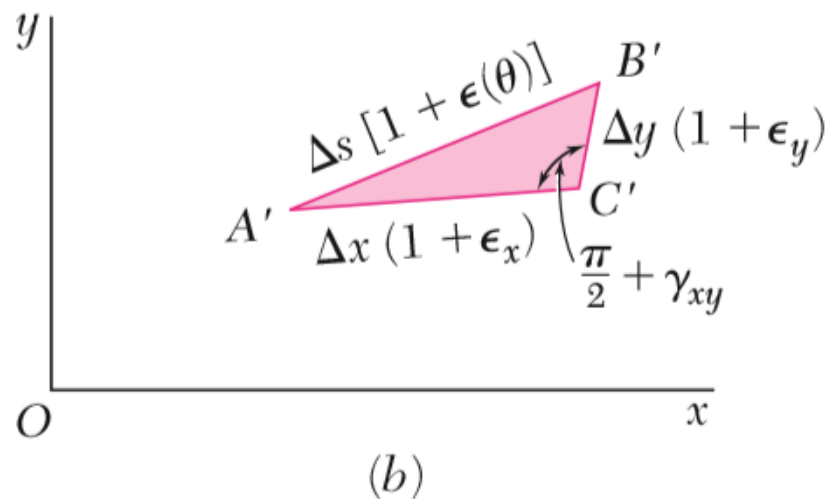
Transformação do EPD

➤ *Dedução:*

Aplicando a lei dos Cossenos para $A'B'C'$:

Finalmente, chega-se:

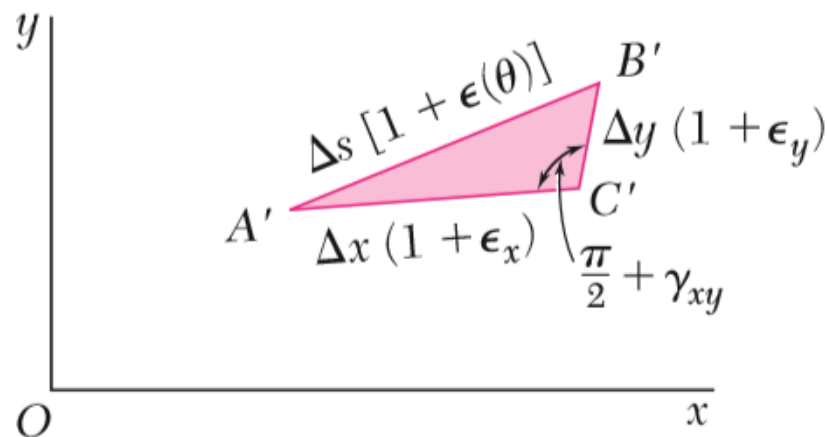
$$\epsilon(\theta) = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$



Transformação do EPD

➤ *Dedução:*

Aplicando a lei dos Cossenos para $A'B'C'$:



(b)

Finalmente, chega-se:

$$\epsilon(\theta) = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$



➤ *Alternativamente, usando as relações trigonométricas:*

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$



Transformação do EPD

➤ *Substituindo θ por $\theta + 90^\circ$, obtemos $\epsilon'_{y'}$:*

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$



Transformação do EPD

➤ *Substituindo θ por $\theta + 90^\circ$, obtemos $\epsilon'_{y'}$:*

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$


➤ *Somando membro a membro, as duas últimas equações:*

$$\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'} = \epsilon_x + \epsilon_y$$


Transformação do EPD

➤ *A partir de:*

$$\epsilon(\theta) = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

➤ *E da equação:*

$$\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'} = \epsilon_x + \epsilon_y$$

➤ *Chega-se:*

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta$$



$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$



Formulário: EPD

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$



$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$



$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$



$$\epsilon_{x_1} + \epsilon_{y_1} = \epsilon_x + \epsilon_y$$



Comparando com o Formulário: EPT

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$



$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$



$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$



Comparando com o Formulário: EPT

- *As Equações para a Transformação do Estado Plano de Deformação (EPD) são muito semelhantes às equações deduzidas para a Transformação do Estado Plano de Tensão (EPT);*
- *Deve-se notar, que as tensões de cisalhamento ζ_{xy} e $\zeta_{x'y'}$ deverão ser substituídas por metade das deformações de cisalhamento correspondentes, isto é, por $\frac{1}{2} \gamma_{xy}$ e $\frac{1}{2} \gamma_{x'y'}$, respectivamente.*
- *Dessa forma, todas as considerações feitas para o EPT são válidas para o EPD. (Por exemplo: Círculo de Mohr)*

Formulário: Deformações Principais

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

➤ *Ângulos nos quais ocorrem as deformações principais*

$$\varepsilon_{p1,p2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

➤ *Deformações Principais*

$$\operatorname{tg}(2\theta_\gamma) = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}}$$

➤ *Ângulos nos quais ocorrem a mínima e máxima deformações por cisalhamento*

$$\gamma_{max} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

➤ *Deformações por Cisalhamento máxima em módulo*

$$\varepsilon_{med} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}$$

➤ *Deformação normal correspondente a deformação cisalhante máxima:*

Formulário: Deformações Principais

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

➤ *Ângulos nos quais ocorrem as tensões principais*

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



➤ *Tensões Principais*

$$\operatorname{tg}(2\theta_c) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

➤ *Ângulos nos quais ocorrem as tensões cisalhantes mínima e máxima*

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



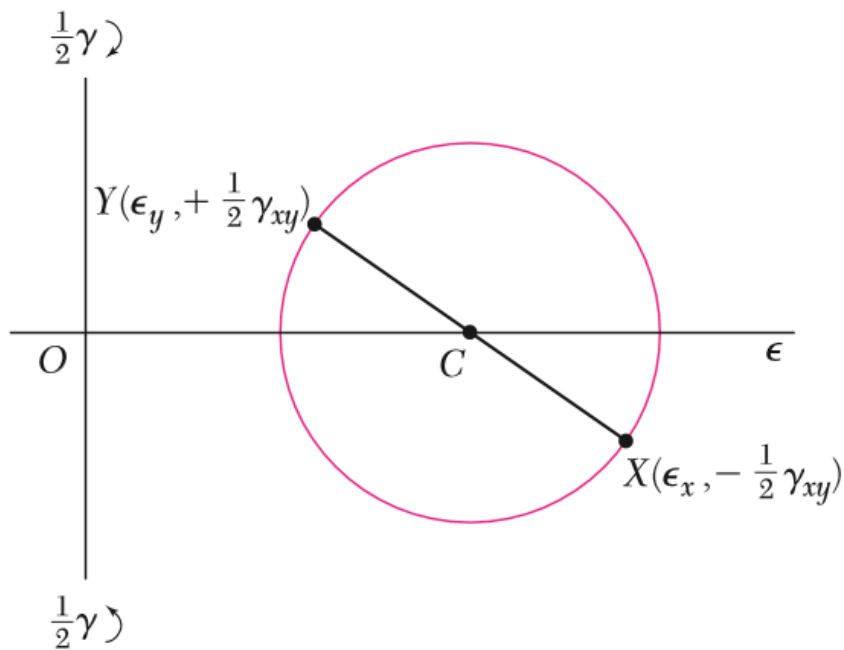
➤ *Tensões Cisalhante máxima em módulo*

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

➤ *Tensão normal correspondente a tensão cisalhante máxima:*

Círculo de Mohr para o estado plano de deformação

Círculo de Mohr para o EPD



PROCEDIMENTOS:

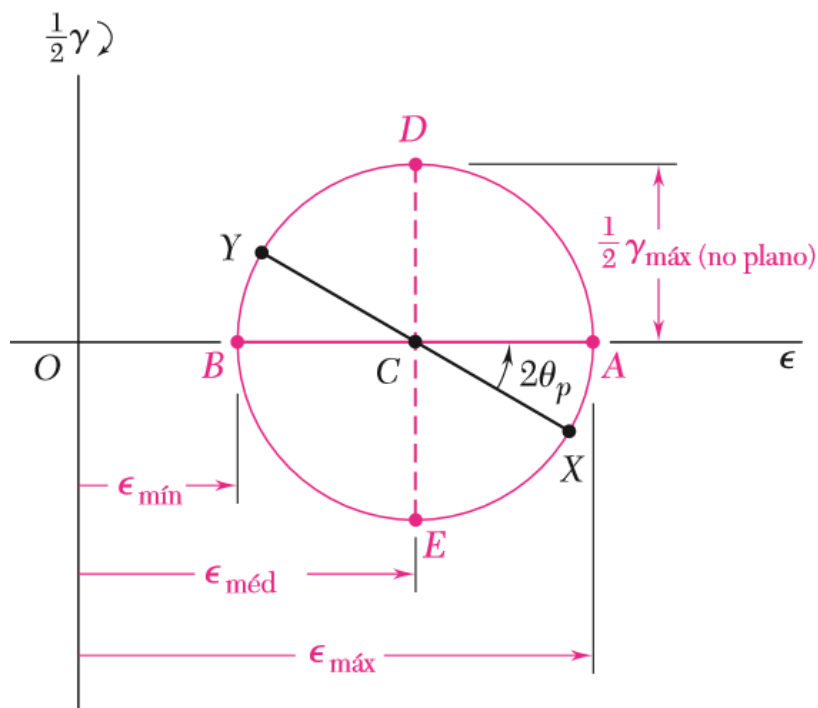
1) Para um estado plano de deformação conhecido, plotar os pontos X e Y;

$$X = (\epsilon_x, -\gamma_{xy}/2) \quad Y = (\epsilon_y, +\gamma_{xy}/2)$$

2) Marca o centro do círculo no ponto $C = (\epsilon_{med}; 0)$:

$$\epsilon_{med} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

Círculo de Mohr para o EPT



PROCEDIMENTOS:

3) Unir o Centro aos pontos X e Y e determinar o Raio R:

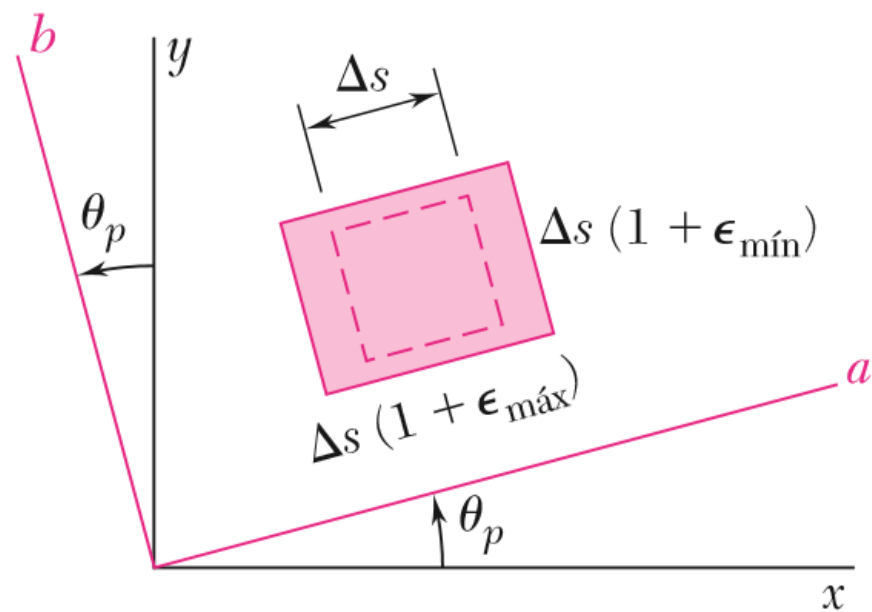
$$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

4) Determinar as tensões principais: e plotar os pontos $(\epsilon_{máx}; 0)$ e $(\epsilon_{mín}; 0)$;

$$\epsilon_{máx} = \epsilon_{méd} + R$$

$$\epsilon_{mín} = \epsilon_{méd} - R$$

Círculo de Mohr para o EPT



PROCEDIMENTOS:

5) Calcular o ângulo entre o eixo original (x) e os eixos principais (x'): ($2\theta_1$ e $2\theta_2$): $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$:

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

6) Determinar as deformações de cisalhamento máximas, pontos: $(\epsilon_{\text{med}}; R)$ e $(\epsilon_{\text{med}}; -R)$ e o ângulo correspondente para essas deformações: $(\theta_1 + 45^\circ)$;

Exemplo 7.4 (Beer et al., 2008)

De um material em estado plano de deformação, sabe-se que o lado horizontal de um quadrado de 10 mm se alonga em $4 \mu\text{m}$, enquanto o seu lado vertical permanece inalterado, e que o ângulo do canto inferior esquerdo aumenta de $0,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$. Determine

- (a) Os eixos principais e as deformações específicas principais e;
- (b) A deformação de cisalhamento máxima e a deformação específica normal correspondente.

Exemplo 7.4 (Beer et al., 2008)

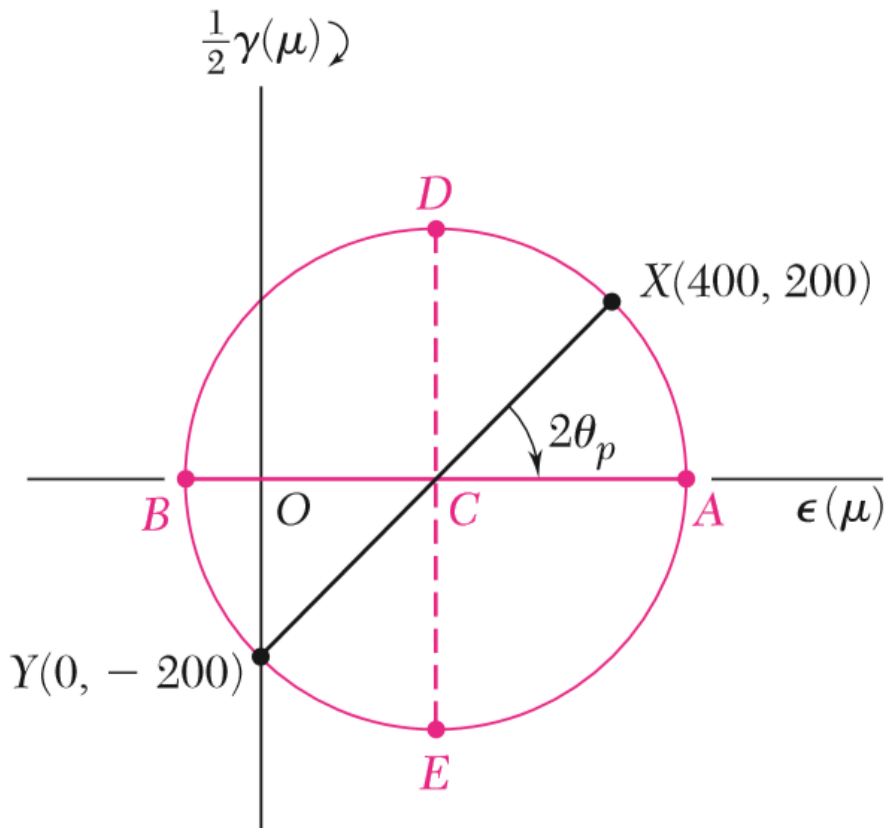
(a) Primeiro determinamos as coordenadas dos pontos X e Y no círculo de Mohr para deformação específica:

$$\epsilon_x = \frac{+4 \times 10^{-6} \text{ m}}{10 \times 10^3 \text{ m}} = +400 \mu \quad \epsilon_y = 0 \quad \left| \frac{\gamma_{xy}}{2} \right| = 200 \mu$$

Círculo de Mohr para o EPD

$$\epsilon_x = \frac{+4 \times 10^{-6} \text{ m}}{10 \times 10^3 \text{ m}} = +400 \mu \quad \epsilon_y = 0 \quad \left| \frac{\gamma_{xy}}{2} \right| = 200 \mu$$

Aumento do
ângulo (-)



PROCEDIMENTOS:

1) Para um estado plano de deformação conhecido, plotar os pontos X e Y ;

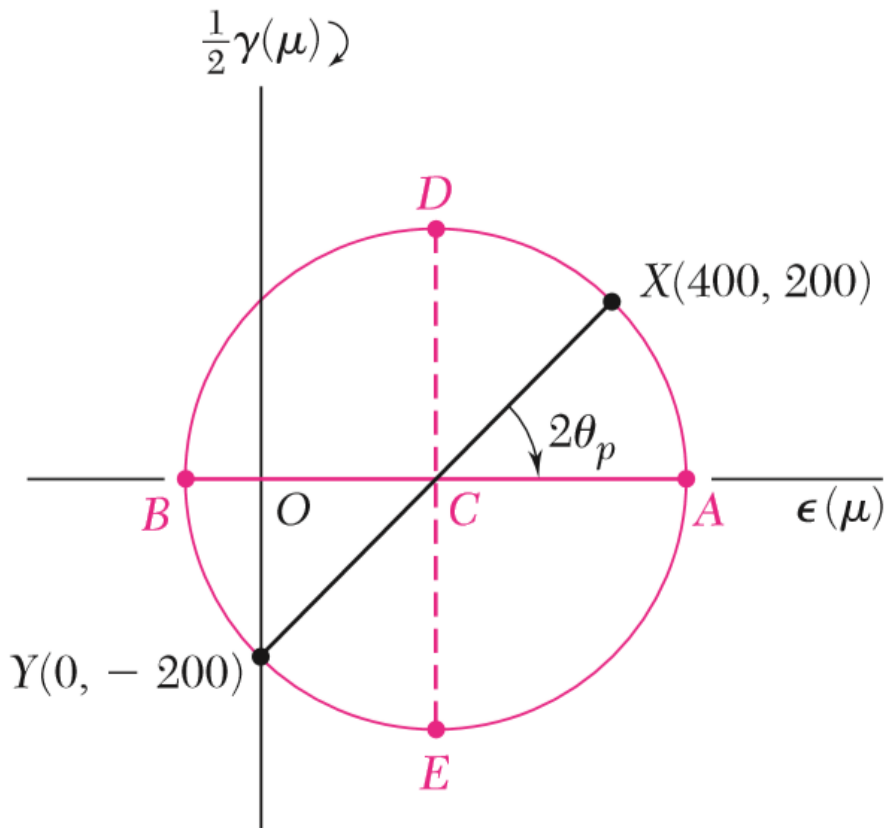
$$X = (\epsilon_x, -\gamma_{xy}/2) = (400; -(-200))$$

$$Y = (\epsilon_y, +\gamma_{xy}/2) = (0; -200)$$

Círculo de Mohr para o EPD

$$\epsilon_x = \frac{+4 \times 10^{-6} \text{ m}}{10 \times 10^3 \text{ m}} = +400 \mu \quad \epsilon_y = 0 \quad \left| \frac{\gamma_{xy}}{2} \right| = 200 \mu$$

Aumento do
ângulo (-)



PROCEDIMENTOS:

2) Marca o centro do círculo no ponto $C = (\epsilon_{med}; 0)$:

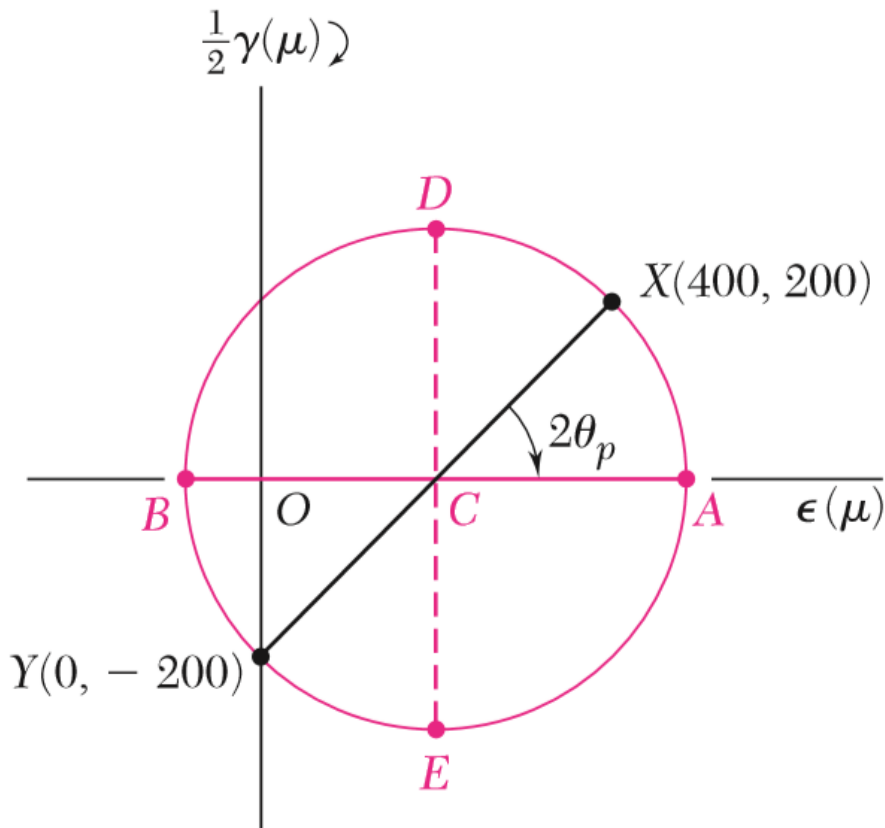
$$\epsilon_{med} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

$$\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = 200 \mu$$

Círculo de Mohr para o EPT

$$\epsilon_x = \frac{+4 \times 10^{-6} \text{ m}}{10 \times 10^3 \text{ m}} = +400 \mu \quad \epsilon_y = 0 \quad \left| \frac{\gamma_{xy}}{2} \right| = 200 \mu$$

Aumento do
ângulo (-)



PROCEDIMENTOS:

3) Unir o Centro aos pontos X e Y e determinar o Raio R:

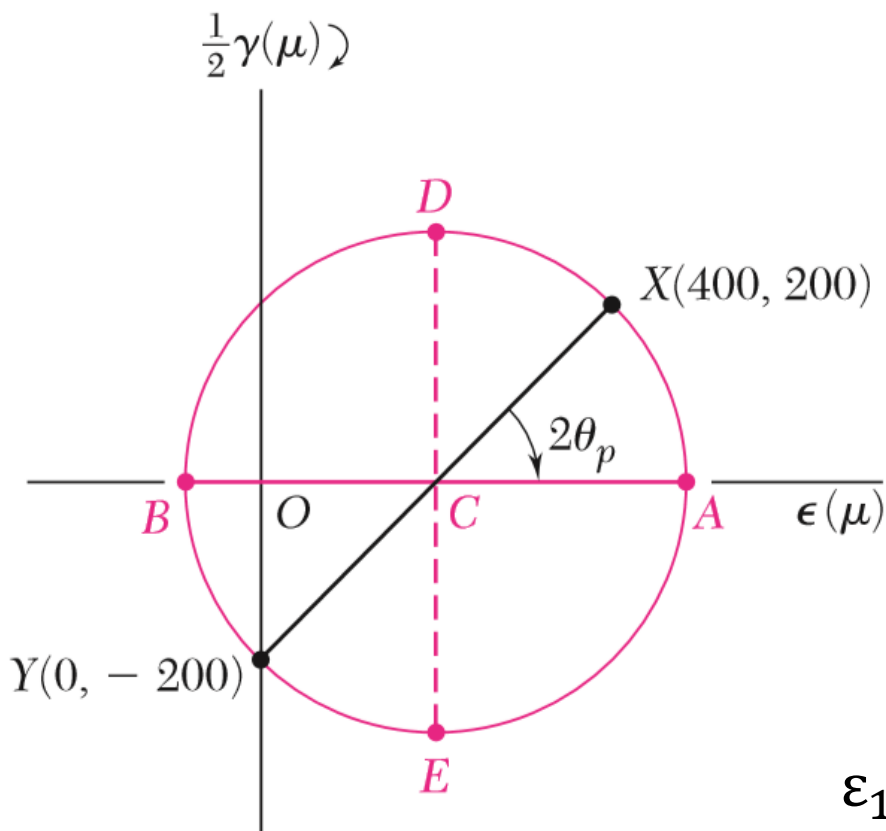
$$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{400 - 0}{2}\right)^2 + (-200)^2} = 283$$

Círculo de Mohr para o EPT

$$\epsilon_x = \frac{+4 \times 10^{-6} \text{m}}{10 \times 10^3 \text{m}} = +400 \mu \quad \epsilon_y = 0 \quad \left| \frac{\gamma_{xy}}{2} \right| = 200 \mu$$

Aumento do
ângulo (-)



PROCEDIMENTOS:

4) *Determinar as tensões principais: e plotar os pontos $(\epsilon_{máx}; 0)$ e $(\epsilon_{mín}; 0)$;*

$$\epsilon_{máx} = \epsilon_{méd} + R$$

$$\epsilon_{mín} = \epsilon_{méd} - R$$

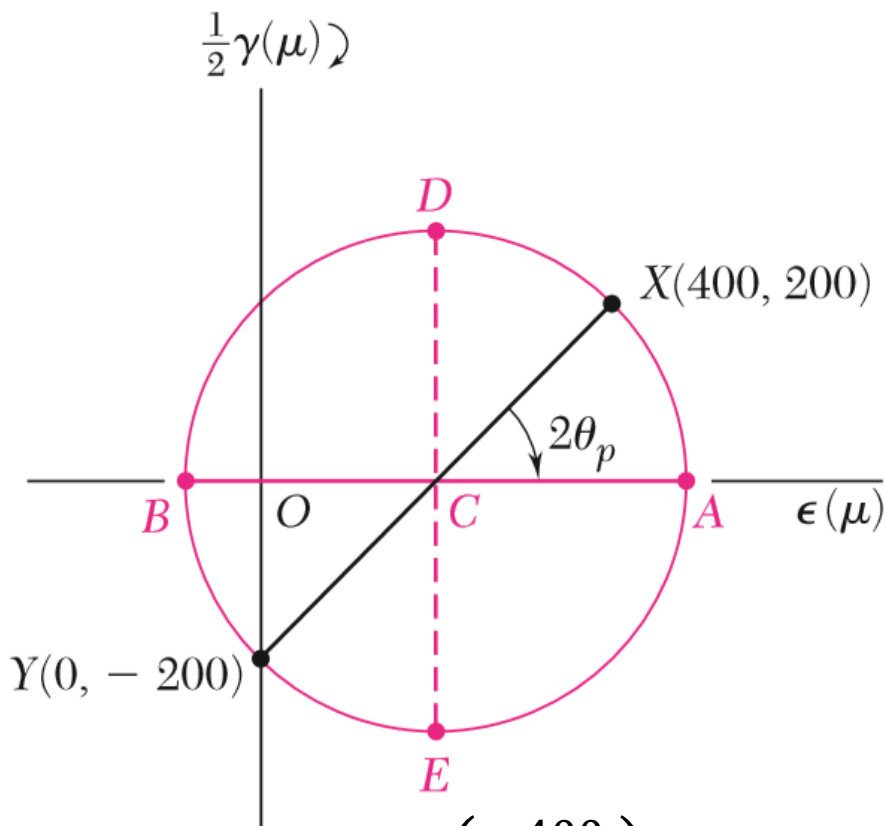
$$\epsilon_{1A} = \epsilon_{méd} + R = 200 + 283 = 483$$

$$\epsilon_{2B} = \epsilon_{méd} - R = 200 - 283 = -83$$

Círculo de Mohr para o EPT

$$\epsilon_x = \frac{+4 \times 10^{-6} \text{ m}}{10 \times 10^3 \text{ m}} = +400 \mu \quad \epsilon_y = 0 \quad \left| \frac{\gamma_{xy}}{2} \right| = 200 \mu$$

Aumento do
ângulo (-)



PROCEDIMENTOS:

5) Calcular o ângulo entre o eixo original (x) e os eixos principais (x'): ($2\theta_1$ e $2\theta_2$): $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$:

$$\text{tg}(2\theta_p) = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

$$2\theta_1 = \arctan \left(\frac{-400}{400-0} \right) = -45^\circ$$

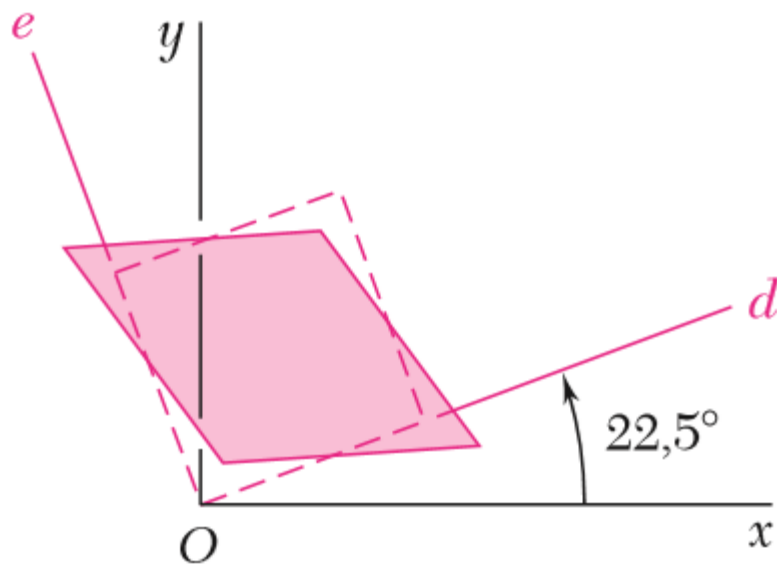
$$\theta_1 = -45^\circ / 2 = -22,5^\circ$$

$$\theta_2 = -22,5^\circ + 90^\circ = 67,5^\circ$$

Círculo de Mohr para o EPT

$$\epsilon_x = \frac{+4 \times 10^{-6} \text{ m}}{10 \times 10^3 \text{ m}} = +400 \mu \quad \epsilon_y = 0 \quad \left| \frac{\gamma_{xy}}{2} \right| = 200 \mu$$

Aumento do
ângulo (-)



PROCEDIMENTOS:

6) Determinar as deformações de cisalhamento máximas, pontos: $(\epsilon_{med}; R)$ e $(\epsilon_{med}; -R)$ e o ângulo correspondente para essas deformações: $(\theta_1 + 45^\circ)$;

$$(\epsilon_{méd}; R) = (200; 283)$$

$$(\epsilon_{méd}; -R) = (200; -283)$$

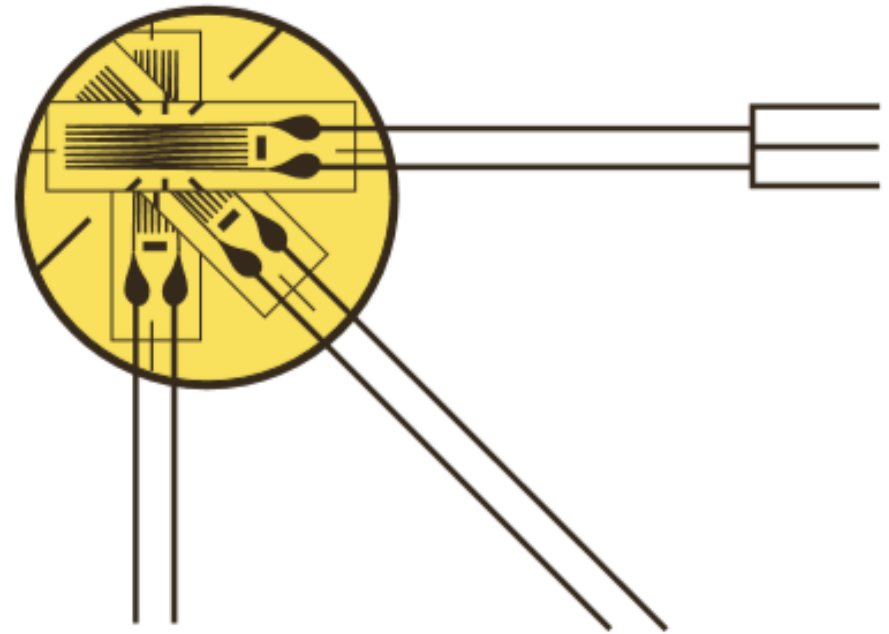
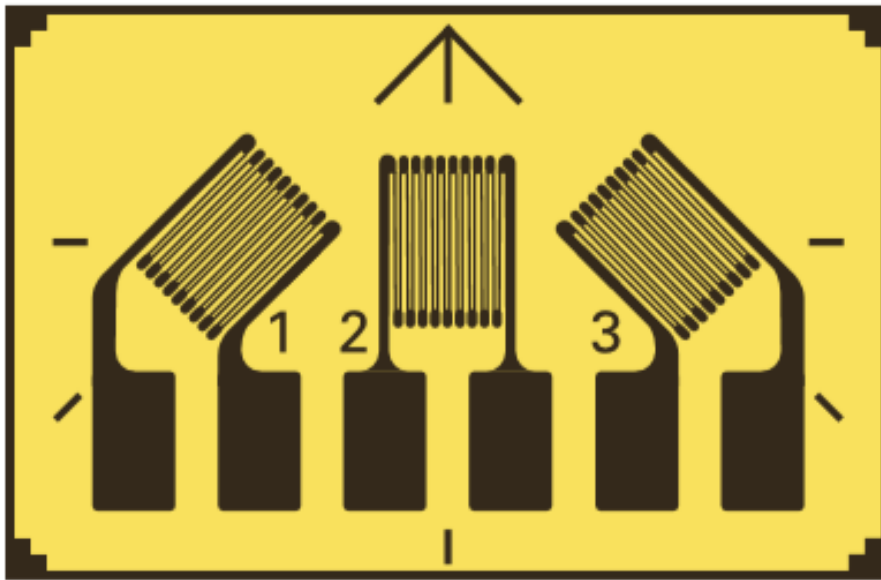
$$\theta_{cis} = -22,5^\circ + 45^\circ = 22,5^\circ$$

Estado geral de deformação:
Semelhante ao de Tensão

Medidas de deformação e rosetas de deformação

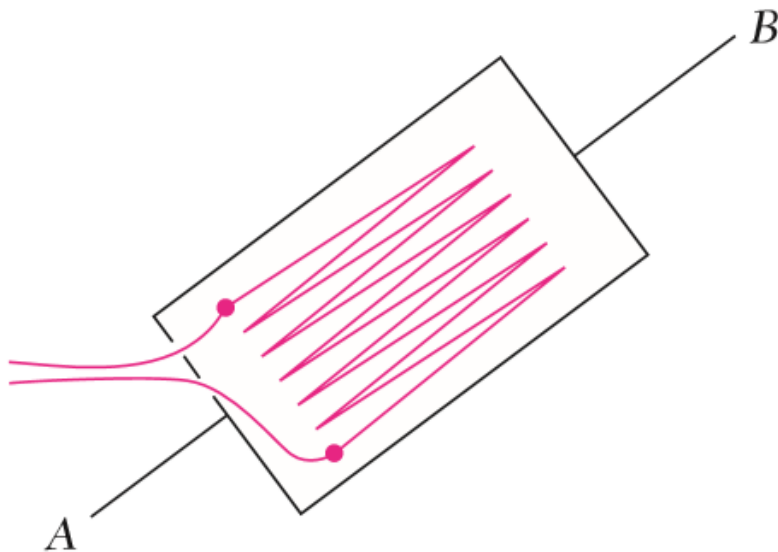
Medidas de deformação

- **Medidas de deformação:** Em boa parte dos trabalhos experimentais se utiliza extensômetros (strain gages) para fornecer medições precisas da deformação normal



Medidas de deformação

- **Medidas de deformação:** Em boa parte dos trabalhos experimentais se utiliza extensômetros (strain gages) para fornecer medições precisas da deformação normal



PROCEDIMENTOS:

O extensômetro é colado na superfície do material, com as dobras do fio em direção paralela a AB.

Medidas de deformação

➤ *Medidas de deformação:*

- *As deformações causadas por cisalhamento são mais difíceis de se medir diretamente do que as deformações normais;*

Medidas de deformação

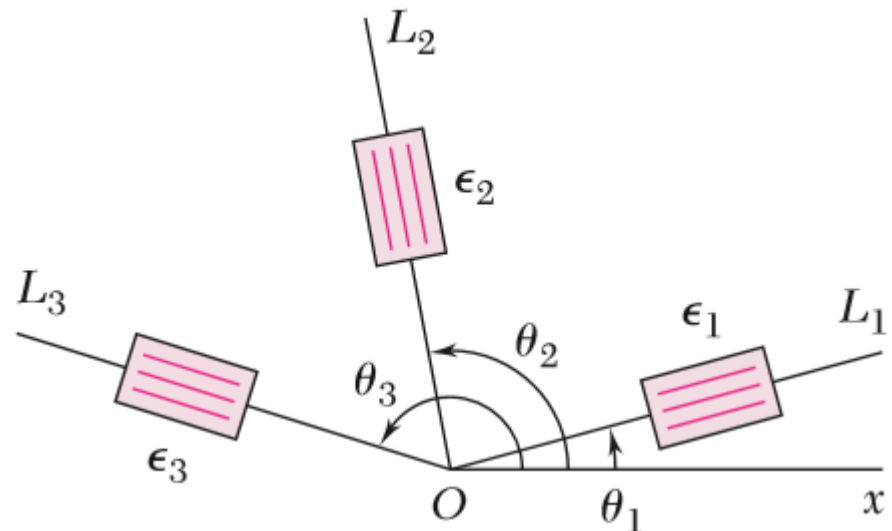
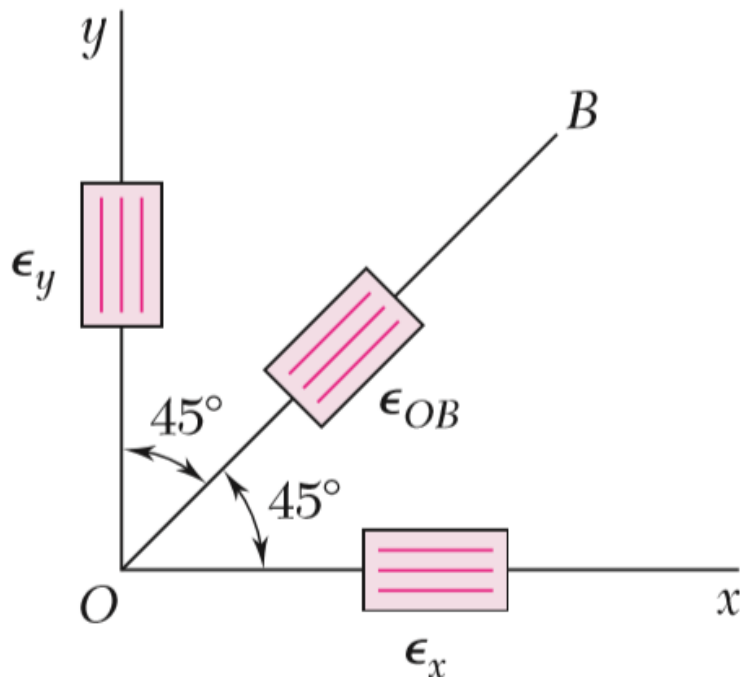
➤ *Medidas de deformação:*

- *As deformações causadas por cisalhamento são mais difíceis de se medir diretamente do que as deformações normais;*
- *Mas podem ser obtidas através da medição de deformações normais em duas ou 3 direções diferentes, utilizando uma roseta de deformações*

Medidas de deformação

➤ *Medidas de deformação:*

- Mas podem ser obtidas através da medição de deformações normais em duas ou 3 direções diferentes, utilizando uma roseta de deformações (Mais utilizadas roseta de 45 ou 60°)



Medidas de deformação

➤ *Medidas de deformação:*

- Assim, para determinar o ESTADO DE DEFORMAÇÃO em determinado ponto, basta aplicar a fórmula vista anteriormente e resolver o sistema de equações para 3 incógnitas:

$$\epsilon_1 = \epsilon_x \cos^2 \theta_1 + \epsilon_y \sin^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \sin \theta_1 \cos \theta_1$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_x \cos^2 \theta_2 + \epsilon_y \sin^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \sin \theta_2 \cos \theta_2$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_x \cos^2 \theta_3 + \epsilon_y \sin^2 \theta_3 + \gamma_{xy} \sin \theta_3 \cos \theta_3$$



Relação com o Estado de Tensões

Para determinar os valores das tensões com base nos valores de deformações basta aplicar a Generalização da Lei de Hooke:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[(1 - \nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[(1 - \nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_z + \epsilon_x) \right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left[(1 - \nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y) \right]$$

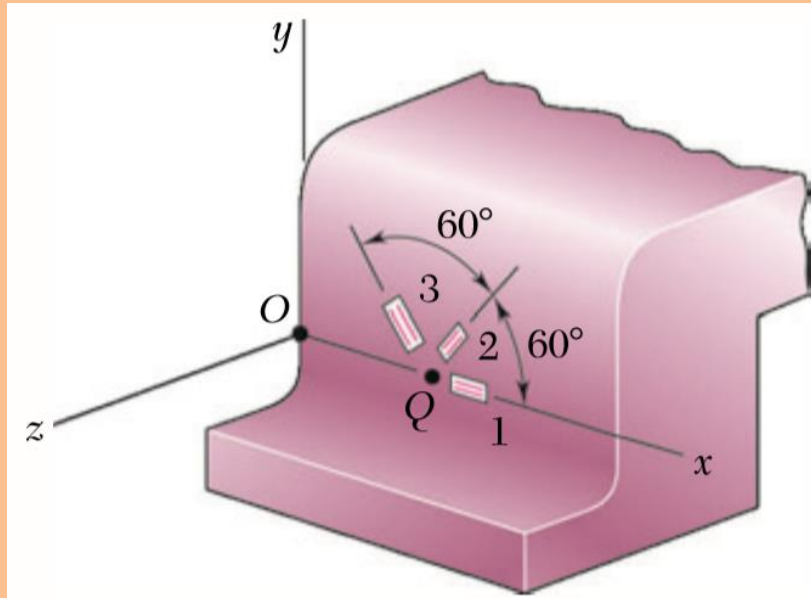
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$



Exemplo 7.7 (Beer et al., 2008)

Usando uma roseta de 60° , foram determinadas as seguintes deformações específicas no ponto Q na superfície de uma base de máquina de aço. Determine no ponto Q as componentes de deformações ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} ,

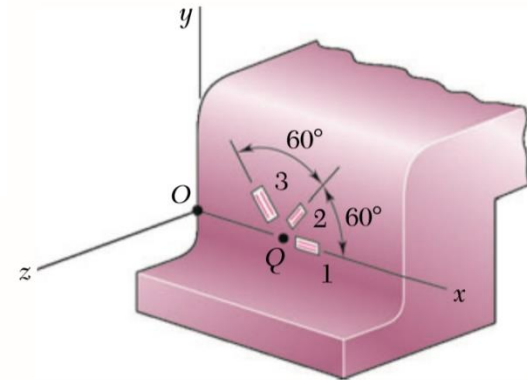
$$\epsilon_1 = 40 \mu \quad \epsilon_2 = 980 \mu \quad \epsilon_3 = 330 \mu$$



Exemplo 7.7 (Beer et al., 2008)

Para os eixos de coordenadas mostrados?:

$$\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = 60^\circ \quad \theta_3 = 120^\circ$$



Substituindo esses valores nas Equações

$$\epsilon_1 = 40 \mu \quad \epsilon_2 = 980 \mu \quad \epsilon_3 = 330 \mu$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_x \cos^2 \theta_1 + \epsilon_y \sin^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \sin \theta_1 \cos \theta_1$$

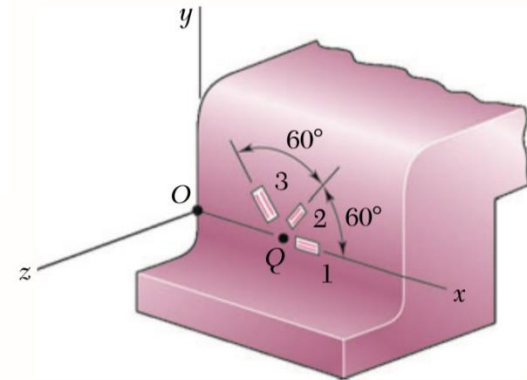
$$\epsilon_2 = \epsilon_x \cos^2 \theta_2 + \epsilon_y \sin^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \sin \theta_2 \cos \theta_2$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_x \cos^2 \theta_3 + \epsilon_y \sin^2 \theta_3 + \gamma_{xy} \sin \theta_3 \cos \theta_3$$

Exemplo 7.7 (Beer et al., 2008)

Para os eixos de coordenadas mostrados:

$$\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = 60^\circ \quad \theta_3 = 120^\circ$$



Substituindo esses valores nas Equações

$$\epsilon_1 = \epsilon_x(1) + \epsilon_y(0) + \gamma_{xy}(0)(1)$$

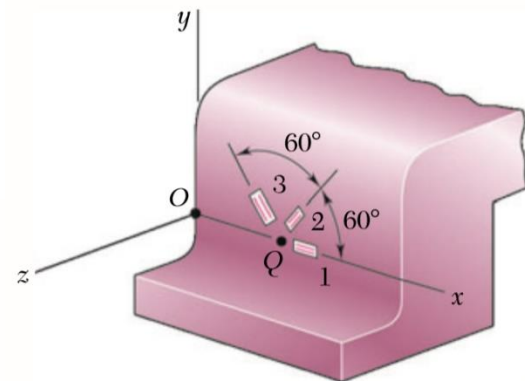
$$\epsilon_2 = \epsilon_x(0,500)^2 + \epsilon_y(0,866)^2 + \gamma_{xy}(0,866)(0,500)$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_x(-0,500)^2 + \epsilon_y(0,866)^2 + \gamma_{xy}(0,866)(-0,500)$$

Exemplo 7.7 (Beer et al., 2008)

Para os eixos de coordenadas mostrados:

$$\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = 60^\circ \quad \theta_3 = 120^\circ$$



Substituindo esses valores nas Equações

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \epsilon_x(1) + \epsilon_y(0) + \gamma_{xy}(0)(1) \\ \epsilon_2 &= \epsilon_x(0,500)^2 + \epsilon_y(0,866)^2 + \gamma_{xy}(0,866)(0,500) \\ \epsilon_3 &= \epsilon_x(-0,500)^2 + \epsilon_y(0,866)^2 + \gamma_{xy}(0,866)(-0,500)\end{aligned}$$

Resolvendo essas equações para ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} , obtemos

$$\epsilon_x = \epsilon_1 \quad \epsilon_y = \frac{1}{3}(2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 - \epsilon_1) \quad \gamma_{xy} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{0,866}$$

Substituindo os valores dados para ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 , temos

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= 40 \mu & \epsilon_y &= \frac{1}{3}[2(980) + 2(330) - 40] & \epsilon_y &= +860 \mu \\ \gamma_{xy} &= (980 - 330)/0,866 & \gamma_{xy} &= 750 \mu\end{aligned}$$

...

CONTINUA